МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп’ютерних наук, фізики і математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

Компакти звичайного та особливого типу

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття вищої освіти «бакалавр»

Виконав: студентка 421 групи
Спеціальності 014.04 середня освіта(математика)
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математика)» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Медведська В.О.

Керівник Савченко О.Г., доктор фізико-математичних наук, професор
Рецензент Литвиненко О.І., кандидатка технічних наук, доцентка

Херсон 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

В сучасному світі відбувається стрімка зміна концепції шкільної освіти, зокрема математичної, а тому постає питання покращення і поглиблення якості математичних знань у здобувачів освіти. Задля вирішення цього питання, необхідно включити у шкільний курс математики теоретичні відомості з топології та практичну частину у вигляді факультативних курсів. Це дасть можливість краще розкрити здібності школярів, активізувати пізнавальну діяльність найбільш талановитих учнів та сприяти розвитку нестандартного мислення.

Поява топологічних ідей виникла при спостереженні за навколишнім світом. На основі спостережень Ейлера, Гауса та Рімана були знайдені важливі топологічні співвідношення. Проте саме як наука топологія була заснована А.Пуанкаре наприкінці XIX століття. Незважаючи на те, що топологія відносно молода наука, вона є одним із основних розділів математики.

Проблема поведінки функції, що визначає розмірність просторів виду X^n стала джерелом розвитку багатьох галузей алгебраїчної топології.

Значний внесок у розвиток вклали такі вчені, як Дж. Александер, П.С. Александров, П.С.Урисон, А.Н.Тихонов, М.Ф.Бокштейн, В.Г.Болтянський, Л.С.Понтрягін, В.І. Кузьмінов та багато інших.

Більшість авторів (В.Г.Болтянський, Л.С.Понтрягін, В.В.Прасолов) розглядають вивчення топології на гуртках, факультативних заняттях або лише у закладах освіти із поглибленим вивченням математики. Такий підхід має недоліки, а саме слабкий зв'язок з матеріалом, який викладається на уроках. Виходячи з цього, учні розуміють топологію як дещо зовсім інакше, відмінне від геометрії, а топологічні властивості об’єктів розглядаються окремо від інших їхніх властивостей.

Все, що зазначено вище породжує *актуальність проблеми* знаходження методів і засобів впровадження елементів топології в курс математики основної школи.

Метою дослідження є розробка методичного забезпечення реалізації навчання елементам топології у курсі математики для загальноосвітніх закладів.

Завдання дослідження:

1. Аналіз наукової літератури з проблеми дослідження;
2. Дослідити поведінку функції, що визначає розмірність просторів виду X^n;
3. Розробка методичної системи, що дозволяє ознайомити учнів з поняттям топологічного добутку просторів під час вивчення елективного курсу «Елементи наочної топології».

Об’єкт дослідження: компактні топологічні простори.

Предмет дослідження: поведінка функції, що визначає розмірність просторів виду X^n.

РОЗДІЛ 1

Теоретичні відомості з курсу топології

1.1Визначення топологічного простору

Нехай X – множина довільної природи і $\tau = \{U\}$ – сукупність її підмножин, яка володіє наступними властивостями:

1) $\emptyset, X \in \tau$;
2) Об'єднання будь-якої сукупності множин із τ належить τ;
3) Перетин будь-якого скінченого числа множин із τ належить τ;

Така сукупність підмножин τ називається топологією на X. Множина X із заданою на неї топологією τ називається топологічним простором і позначається (X, τ), підмножини із сукупності τ називаються відкритими (в просторі (X, τ)).

Там, де це не викличе непорозумінь, ми часто замість (X, τ) будемо писати просто X. (Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко) [6]

1.2 Поняття компактного простору

Відомо, що багато фактів математичного аналізу засновані на одній властивості відрізка числової прямої, яка називається лемою Гейне-Бореля-Лебега і заключається в тому, що із будь-якого покриття відрізка відкритими інтервалами можна виділити скінченне покриття. Узагальнення цього факту призвело вітчизняних математиків П.С. Александрова і П.С. Урисона до виділення класу топологічних просторів – компактним топологічним просторам. (Худенко В.Н., Махоркин В.В.) [24]

Визначення. Система множин $M = \{M_\alpha, \alpha \in I\}, M_\alpha \subset X$ називається покриттям простору X, якщо $\bigvee_\alpha M_\alpha = X$. Покриття називається відкритим (замкненим), якщо всі множини M_α відкриті (замкнені). (Худенко В.Н., Махоркин В.В.) [24]

Підсистема системи множин M, яка є покриттям простору X, називається підпокриттям покриття M.

Визначення. Топологічний простір X називається ***компактним***, якщо він задовольняє умові Бореля-Лебега: із будь-якого відкритого покриття простору X можна виділити кінцеве підпокриття. (Худенко В.Н., Махоркин В.В.) [24]

Теорема. Для компактності топологічного простору X необхідно і достатньо, щоб будь-яка його родина замкнених підмножин з порожнім перетином містила кінцеву підродину з порожнім перетином.

Необхідність. Нехай X – компактний і $\{F_\alpha\}$ – довільна сукупність замкнених множин, при чому перетин $I\ F_\alpha = \emptyset$.

Розглянемо родину множин $G = \{G_\alpha\}$, яка складається із доповнень замкнених множин $G_\alpha = X \setminus F_\alpha$. Скористаємось формулами де Моргана:

$Y_\alpha G_\alpha = Y_\alpha (X \setminus F_\alpha) = X \setminus I_\alpha F_\alpha = X,$

Тобто система множин G утворює відкрите покриття X. В силу компактності X із покриття G можна виділити скінчену систему множин $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$, також є покриттям. Тоді $I_{k=\overline{1,n}} F_k = I_{k=\overline{1,n}} (X \setminus G_k) = X \setminus Y_{k=\overline{1,n}} G_k = X \setminus X = \emptyset$. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = \{G_\alpha\}$ – довільне відкрите покриття простору X. Тоді система множин $\{F_\alpha = X \setminus G_\alpha\}$ являє собою родину замкнених множин з порожнім перетином, яке, за умовою теореми, містить скінчену підродину також з порожнім перетином. З точністю до позначень будемо вважати, що це множини $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ і $I_{i=\overline{1,n}} F_i = \emptyset$. Звідси за аналогією з першою частиною теореми, слідує, що множини $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ утворюють скінченне підпокриття. (Худенко В.Н., Махоркин В.В.) [24]

1.3 Топологічні добутки

Операція прямого добутку топологічних просторів дозволяє конструювати нові топологічні простори. (Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко) [6]

Прямим добутком $X \times Y$ множин X, Y називається сукупність впорядкованих пар (x, y), де $x \in X, y \in Y$. Можна розглядати прямі добутку будь-якого числа співмножників. Елементом такого добутку $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ є множина $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}, x_\alpha \in X_\alpha$, або іншими словами, елементи $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ – це такі функції $x: A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, що $x(\alpha) \in X_\alpha$. Якщо $A = \{1,2, \dots, n\}$ – скінченна множина, то добуток $X_1, X_2, \dots, X_n$ часто позначають $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, а його елементи впорядковані набори $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $x_i \in X_i, i = 1,2, \dots, n$.

Нехай X, Y – топологічні простори. Введемо топологію на прямому добутку $X \times Y$. Задамо базу топології системою $\{U_\alpha \times V_\beta\}$, де $\{U_\alpha\}$ і $\{V_\beta\}$ – бази топологій відповідно на X і на Y.

Топологія на $X \times Y$, що визначається базою $\{U_\alpha \times V_\beta\}$, називається топологією добутку. (Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко) [6]

Добуток $X_1 \times X_2$ двох множин X_1, X_2 було визначено ще Г. Кантором як множина усіх впорядкованих пар (x_1, x_2), де $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Це визначення дозволило розглядати в аналітичній геометрії площину як добуток двох прямих, а тор як добуток двох окружностей. Топологія в добуток $W = X_1 \times X_2$ двох топологічних просторів X_1, X_2 вводиться за допомогою так званих прямокутних околів, тобто бази, елементами якої є добутки $U \times V$, де U і V пробігають відповідно сукупність відкритих множин X_1, X_2. Множина $X_1 \times X_2$ з цієї топології називається топологічним добутком просторів X_1, X_2. Очевидно, отримаємо ту ж топологію в $X_1 \times X_2$, якщо змусимо U та V пробігати елементи будь-якої бази $\mathfrak{B}_1$, відповідно $\mathfrak{B}_2$, просторів X_1, X_2 (якщо мова йде про добуток $X_1 \times X_2$ двох прямих X_1 та X_2, в яких взяті бази $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, що складаються із інтервалів, то на площині $X_1 \times X_2$ отримаємо базу, елементами якої є відкриті прямокутники). (Александров П.С., Пасынков Б.А.) [1]

Якщо $w = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, то x_1 і x_2 називають (відповідно першою і другою) координатами точки $w = (x_1, x_2)$. Ставлячи у відповідність кожній точці $w = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ її $i-$ту координату, $i = 1,2$, отримаємо відображення $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i, i = 1,2$, що називається проектуванням або проекцією добутку на його співмножник X_i. Якщо X_1, X_2 – топологічні простори і $X_1 \times X_2$ – їх топологічний добуток, то відображення проектування, очевидно, неперервні (і відкриті). (Александров П.С., Пасынков Б.А.) [1]

А.Н. Тихонову належить велика заслуга розповсюдження поняття топологічного добутку на будь-яке (нескінченне) число співмножників.

Нехай дана множина $\mathfrak{A}$ будь-якої потужності τ, елементи якої будемо називати «індексами» і позначати грецькими літерами $\alpha, \alpha', \ldots$ Нехай кожному індексу α віднесено деяка визначена множина X_α. Добуток $X = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ отриманої системи множин*), за визначенням, є множина X, елементами $x = \{x_\alpha\}$ якої є набори точок x_α, що отримуються, якщо кожному індексу $\alpha \in \mathfrak{A}$ віднести по одному елементу $x_\alpha \in X_\alpha$. (Александров П.С., Пасынков Б.А.) [1]

Якщо дано $x = \{x_\alpha\} \in X$, то $x_\alpha \in x$ називається α-ю координатою точки $x \in X$ або проекцією цією точки в множину X_α. Відображення, що ставить у відповідність довільній точці $x \in X$ її α-ту координату x_α, назвемо проектуванням добутку X на співмножник X_α і будемо позначати, зазвичай, через π_α. (Александров П.С., Пасынков Б.А.) [1]

Слідуючи А.Н. Тихонову, введемо в добуток $X = \prod_\alpha X_\alpha$ топологію наступним чином. Візьмемо довільне скінченне число індексів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ і в кожному $X_\alpha, \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ візьмемо відкриту множину U_α; позначимо через $O(U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_s})$ циліндр над множинами $U_{\alpha_1} \subseteq X_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_s} \subseteq X_{\alpha_s}$, тобто $O\left(U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_s}\right) = \bigcap_{i=1}^{s} \pi_{\alpha_i}^{-1} U_{\alpha_1}$. Ці множини $O(U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_s})$ назвемо елементарними відкритими множинами простору $X = \prod_\alpha X_\alpha$ (з його тихоновською топологією); відкриті множини в цьому просторі визначаються як всі можливі суми елементарних відкритих множин. (Александров П.С., Пасынков Б.А.) [1]

Якщо в кожному просторі X_α обрати по множині P_α, то добуток $P = \prod_\alpha P_\alpha$ множин P_α звичайним образом лежить в топологічному добутку $X = \prod_\alpha X_\alpha$ простору X_α. Так як система всіх елементарних відкритих множин добутку X висікає на множині P в точності систему всіх елементарних відкритих множин топологічного добутку просторів P_α, то індукована на P простором X топологія співпадає з топологією добутку просторів P_α. Таким чином, добуток підпросторів є підпростором добутку. (Александров П.С., Пасынков Б.А.) [1]

1.4 Розмірність $\dim X$

1. Визначення розмірності $\mathbf{dim}\,\boldsymbol{X}$**.** У всьому цьому пункті під покриттям розуміється завжди скінченне покриття.

Згідно з Урисоном ми визначимо розмірність $\dim X$ спочатку для компактів X.

Ми говоримо, що компакт X має розмірність $\dim X \leq n$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує замкнене ε- покриття кратності $\leq n + 1$.

Якщо при цьому для деякого $\varepsilon > 0$ компакт X не має замкненого ε- покриття крастності $\leq n$, то ми говоримо, що $\dim X = n$.

Із цього визначення одразу слідує, що $\dim \Lambda = -1$ (так як кратність покриття, що складається із однієї порожньої множини, дорівнює нулю), а також для будь-якого компакта X, що складається із скінченого числа точок, $\dim X = 0$.

Пропозиція 1. Якщо в цьому визначенні $\dim X$ для компактів замінимо замкнені покриття відкритими, то отримаємо визначення, еквівалентне початковому. (Александров П.С., Пасынков Б.А.) [1]

Справді, нехай компакт X при будь-якому $\varepsilon > 0$ має замкнене ε-покриття α кратності $\leq n + 1$: $\alpha = \{A_1, \dots, A_s\}$, максимум діаметрів всіх $A_i \in \alpha$ менше ε і, відповідно, менше деякого $\varepsilon' < \varepsilon$. Щоб отримати відкрите покриття ω кратності $n + 1$, достатньо замінити кожне A_i, $i = 1,2, \dots, s$ настільки тісним околом OA_i, щоб діаметри всіх OA_i були як і раніше менше ε і щоб кратність покриття $\omega = \{OA_1, \dots, OA_s\}$, дорівнювала кратності α (це можливо за теоремою про роздуття покриттів). (Александров П.С., Пасынков Б.А.) [1]

Обернено, нехай при будь-якому $\varepsilon > 0$ існує відкрите ε – покриття $\omega = \{O_1, \dots, O_s\}$ кратності $\leq n + 1$. Тоді за теоремою про стиснення покриттів існує таке замкнене покриття $\alpha = \{A_1, \dots, A_s\}$ (що є навіть розбиттям), що $A_i \subseteq O_i$, отже, кратність $\alpha \leq$ кратність $\omega \leq n + 1$.

Тепер переходимо до визначення основного об’єкта, що вивчається в цьому пункті. (Александров П.С., Пасынков Б.А.) [1]

Основне визначення. Для будь-якого топологічного простору X вважаємо $\dim X \leq n$, якщо в будь-яке відкрите скінченне покриття Ω простору X можна вписати скінченне відкрите покриття ω кратності $\leq n + 1$. (Александров П.С., Пасынков Б.А.) [1]

Зауваження 1. (а) В цьому визначенні вимога скінченності покриття ω несуттєва.

Насправді, якщо відкрите покриття ω має кратність $\leq n + 1$ і вписане в покриття Ω, то укрупнення покриття ω відносно Ω буде скінчено відкритим покриттям кратності $\leq n + 1$ і вписаним в покриття Ω. (Александров П.С., Пасынков Б.А.) [1]

(б) В основному визначенні завжди можна вимагати, щоб покриття ω було комбінаторно вписано в покриття Ω і тому скінченне: якщо ω

вписано в Ω і має кратність $\leq n + 1$, то укрупнення покриття ω відносно Ω також має кратність $\leq n + 1$ і комбінторно вписане в Ω. (Александров П.С., Пасынков Б.А.) [1]

1.5 Компакти звичайного та особливого типу

Після того, як основи загальної теорії розмірності були закладені у працях П.С. Урисона і К. Менгера, подальший її розвиток пов'язаний з В. Гуревичем і Л.А. Тумаркіним в 1925-1926рр. теорії розмірності компактів на довільних метричних просторах зі зліченими базами, а також з теоремами Гуревича про розмірність відображень. (Александров П.С., Федорчук В.В., Зайцев В.И.) [2]

Нагадаємо, що розмірністю $\dim f$ відображення $f: X \to Y$ називається точна верхня границя розмірностей $\dim f^{-1}y$ прообразів точок $y \in Y$. Гуревич довів, що для замкненого відображення $f: X \to Y$ метричних просторів зі зліченою базою має місце формула

$$\dim X \leq \dim Y + \dim f \tag{1}$$

Якщо ж відображення f має кратність $\leq k + 1$, тобто кожна із множин $f^{-1}y$ містить не більш ніж $k + 1$ точку, то має місце формула

$$\dim Y \leq \dim X + k. \tag{2}$$

Ці формули називається формулами Гуревича для відображень, що знижують і підвищують розмірність.

Із формули (1) випливає, зокрема, що для довільних компактів X та Y вірна нерівність,

$$\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y, \tag{3}$$

що легко узагальнюється за допомогою теореми про ω- відображення на випадок бікомпактів. (П.С.Александров В.В.Федорчук, В.И.Зайцев) [18]

Доведемо нерівність (3). Розглянемо довільне скінченне покриття ω бікомпакта $Z = X \times Y$.

За припущенням 1 існують такі відкриті покриття $\xi = \{U_i\} i = 1, \ldots, s$ і $\eta = \{V_j\} j = 1, \ldots, r$ бікомпактів X і Y відповідно, що покриття

$\xi \times \eta = \{U_i \times V_j\}$ вписане в ω. За теоремою про ω-відображення існують: $\xi -$ відображення $f: X \to P_\xi$ і η- відображення $g: Y \to P_\eta$ просторів X і Y на поліедри P_ξ і P_η розмірності

$\dim P_\xi \leq \dim X\ i\ \dim P_\eta \leq \dim Y$

$\dim\left(P_\xi \times P_\eta\right) \leq \dim X + \dim Y.$

Покажемо, що добуток

$$h: X \times Y \to P_\xi \times P_\eta$$

відображень f і g є ω-відображеннями. Достатньо показати, що h є $\xi \times \eta$- відображення.

Візьмемо точку $(p, q) \in P_\xi \times P_\eta$. За побудовою існують такі околи O_p і O_q, що $f^{-1}O_p \subseteq U_i$ і $g^{-1}O_q \subseteq V_j$ для деяких i та j. Але тоді із умови добутку відображень слідує, що

$$h^{-1}(O_p \times O_q) \subseteq U_i \times V_j.$$

Таким чином, g є ω-відображення. Так як покриття ω довільне, то із братерського принципу інваріантності слідує, що $\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$, що і треба було довести. (Александров П.С., Пасынков Б.А.) [1]

Визначення. Компакт X називається розмірно повноцінним, якщо для довільного компакта Y має місце рівність $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.

Зауважимо, що всі одновимірні компакти і поліедри розмірно повноцінні. (Кузьминов В.И.) [13]

Нерівність (3) – це все, що можна сказати про розмірність добутку навіть у випадку компактів. На основі гомологічної теорії розмірності Л.С. Понтрягін побудував приклад двомірних компактів X і Y, що лежать в R^4, добуток яких $X \times Y$має розмірність 3, і довів, що для компактів X і Y, що лежать в R^3, завжди $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$. (Александров П.С., Федорчук В.В., Зайцев В.И.) [2]

$\dim X^n \leq n\dim X$ *(1)*

Постає питання: чи можна цю нерівність замінити рівністю?

За формулами Бокштейна $\dim X^n = \max_p \dim_{R_p} X^n = n\dim X$. Компакт X є компактом звичайного типу. (Кузьминов В.И.) [13]

Для довільного компакта X виконується нерівність $\dim(X \times X) \geq 2\dim X - 1$

Наступні визначення належать В.І. Кузьмінову. (Кузьминов В.И.) [13]

Визначення. Компакт називається компактом звичайного типу, якщо для будь-якого натурального числа n маємо

$$\dim X^n = n\dim X.$$

Визначення. Компакт називається компактом особливого типу, якщо для будь-якого натурального числа n маємо

$$\dim X^n = n\dim X - n + 1$$

1.6 Компакти В.Г. Болтянського

Так звана теорема додавання розмірностей при топологічному добутку просторів заключається в тому, що розмірність топологічного добутку двох просторів дорівнює сумі розмірностей співмножників. Якщо один із співмножників є поліедром, а інший – довільним компактом, то ця теорема справедлива. Проте для двох довільних компактів теорема додавання розмірностей невірна. Це було встановлено в 1930 році Л.С. Понтрягіним, який побудував послідовність двовимірних компактів $F_1, F_2, \dots, F_m, \dots$, в якій топологічний добуток $F_m \times F_n$ має при взаємно простих m і n розмірність 3.

Компакти F_m такі, що якщо m і n не взаємно прості, то $\dim(F_m \times F_n) = 4$. Зокрема, топологічнй квадрат кожного компакта F_m має розмірність 4. Таким чином, при добутку компакта F_m на себе відступу від теореми додавання розмірностей немає. Виникає питання, чи може розмірність топологічного квадрата деякого компакта відрізнятися від подвоєної розмірності самого компакта, тобто чи справедлива теорема додавання розмірностей, якщо обидва співмножники співпадають? Це питання було сформоване Л.С. Понтрягіним у 1930 році і вирішене В.Г. Болтянським, який 1949 р. побудував двовимірний компакт P_m, який володіє трьохвимірним топологічним квадратом, що $\dim P = 2$ і $\dim P^2 = 3$. Саме приклад Болтянського став одним із етапів розв'язування задачі П.С. Александрова про опис класу розмірно повноцінних компактів. (Болтянский В.Г.) [8]

Теорема. Топологічний квадрат компакта P_m має розмірність, що дорівнює трьом.

Дійсно, $\dim(P_m \times P_m) \leq 3$. Але розмірність цього добутку, очевидно, і не менше трьох, бо вже добуток $B(P_m) \times P_m \subset P_m \times P_m$ має розмірність 3, як добуток одновимірного поліедра $B(P_m)$ на двовимірний компакт ${P_m}^1$. Теорема доведена.

Відмітимо, що топологічний добуток $P_m \times P_n$ для будь-яких m і n має розмірність 3; зокрема, топологічний квадрат компакта P_mдля будь-якого m (а не тільки для простого) трьохвимірний. Доведення проводиться такими ж методами с деякими непринциповими ускладненнями. (Болтянский В.Г.) [8]

Зауважимо, що компакт Болтянського є двовимірним компактом особливого типу. Добуток компакта особливого типу на вимірно повноцінний компакт є компактом особливого типу. (Кузьминов В.И.) [13]

РОЗДІЛ 2

Методика викладання топології у курсі геометрії основної школи

Введення топологічного матеріалу у шкільний курс геометрії сприяє більш глибокому розумінню геометрії та її методів, виявляє фундаментальні геометричні властивості об’єктів, а також сприяє формуванню наукового стилю мислення.

У шкільному курсі геометрії немає такого розділу, як топологія. Лише окремі визначення віддалено спираються на топологічні властивості фігур. Проте, встановити зв'язок між елементарною геометрією та топологією цілком можливо, адже прагнення визначити найбільш глибокі геометричні властивості натикається на топологічні ідеї. Наприклад, такі топологічні поняття, як «внутрішня область», «зовнішня область», «границя», що є основою в розумінні будь-якої двовимірної або трьохвимірної фігури, вивчаються в шкільному курсі планіметрії та стереометрії, які визначаються як частина площини чи простору, що обмежені відповідні лінією або поверхнею.

Геометричні перетворення відіграють важливу роль в сучасній геометрії. Ще в XIX столітті першим, хто це помітив, був Ф.Клейн. Основним поняттям шкільного курсу геометрії є поняття геометричного перетворення. Інваріантами називаються властивості фігур, що зберігаються при цьому перетворенні.

Традиційні програми і підручники, за якими навчаються сучасні учні, мають цілу низку недоліків. Якщо проаналізувати нинішні підручники, за якими навчаються більшість учнів, можна помітити, що акцент в них робиться на типові завдання зі стандартним алгоритмом розв’язання. Такий підхід орієнтований на середнього учня. При цьому страждають більш здібні учні, бо вони не отримують достатньо матеріалу для розвитку своїх здібностей. Виходячи з цього, виникає потреба знаходження компромісу: використовувати традиційні підручники, але включати в програму додатковий матеріал для більш здібних учнів. Цей матеріал повинен бути спрямований, по-перше, на поглиблення теоретичних знань учнів, по-друге, -на розвиток особистості.

Адже, головним в сучасній педагогіці є особистісно орієнтоване навчання. Тому слід віднести закономірності розвитку особистості та її психологічну структуру до специфіки методичної системи навчання математики.

Як було зазначено вище, геометричні перетворення, а, отже, і топологічні перетворення відіграють дуже вадливу роль у геометрії. Більш того, відоме тлумачення геометрії як науки, що вивчає властивості фігур, які не змінюються відносно геометричних перетворень. Їх використання в шкільному курсі геометрії має велике методичне значення. Топологічні методи дозволяють вирішувати великий клас топологічних задач на доведення, обчислення, побудову топологічних моделей, вони також застосовуються при розв’язування геометричних та алгебраїчних задач. Навіть елементарні топологічні задачі є досить хорошим матеріалом для розвитку математичної уяви та інтуїції здобувачів освіти, вони сприяють більш глибокому розумінню фундаментальних властивостей математичних об’єктів.

Діюча програма з геометрії основної школи не передбачає використання ідеї геометричних перетворень в якості головної ідеї шкільного курсу геометрії, проте, передбачає ознайомлення учнів з окремими видами руху (осьовою симетрією, поворотом навколо точки, подібністю і так далі). Більш детально про геометричні перетворення учні можуть дізнатися позакласних та факультативних заняттях.

При навчанні топології, перш за все, треба оволодіти методами даної науки – топологічними. Слід зазначити, що при вивченні топології особливого забарвлення набувають також і загально математичні методи. Наприклад, методи класифікації, порівняння, моделювання стають топологічними, так як основою для них є топологічні властивості об’єктів. І навпаки, специфічні топологічні методи можуть як повністю, так і частково використовуватися при розв’язуванні задач шкільного курсу математики.

У геометричному матеріалі, що вивчається учнями у 5-6 класах, міститься первинне знайомство з деякими плоскими фігурами та фігурами у просторі (точка, відрізок, промінь, пряма, трикутник, прямокутник, коло, куб, куля і т.д.); знайомство з вимірюванням параметрів фігур та вимірювальними приладами, що при цьому використовуються; знайомство з найпростішими формулами обчислення периметра і площі фігур на площині; знайомство з симетрією (центральною, осьовою), зображення симетричних фігур.

У 7-9 класі геометричний курс передбачає вивчення метричних характеристик і виміру різних фігур, з якими учні познайомилися у 5-6 класах, а також розгляд нових фігур і їх властивостей. Сюди відносяться рівність і подібність трикутників, співвідношенням між сторонами і кутами трикутника, вивчення чотирикутників та їх ознак (паралелограм, трапеція, ромб, квадрат), паралельність і перпендикулярність прямих. Учні вже вміють обчислювати площу, градусну міру кута і дуги, і вчаться обчислювати довжину окружності, синус та косинус кута. Вводиться поняття вектора і прямокутної системи координат. Остання тема 9 класу передбачає вивчення руху (осьової симетрії, паралельного переносу та повороту). Починається поверхневе ознайомлення з аксіомами планіметрії.

Геометричний курс 10-11 класу майже повністю присвячений знайомству учнів з аксіомами стереометрії та їх застосуванню для розв’язування задач на побудову, обчислення та доведення. Також курс передбачає питання про взаємне розташування прямих і площин у просторі, учні дізнаються, що таке геометричне тіло, знайомляться з найпростішими видами багатогранників (тетраедр, паралелепіпед, піраміда, призма, правильні багатогранники), тілами обертання (циліндр, конус, куля). Узагальнюють поняття вектора, прямокутної системи координат та руху.

Під проведення аналізу літератури з проблеми дослідження, виявилась необхідність знайомства учнів з топологічними поняттями ще у 5-6 класах, де вивчається геометричний матеріал, що є підґрунтям для основного курсу геометрії.

З огляду на сформульовані принципи, топологічний зміст повинен бути сформований з окремих тем, що формують пропедевтичний курс геометрії. При цьому треба дотримуватися плавного переходу між урочним і позаурочним матеріалом з топології. Для цього необхідно детально проаналізувати програму [20] з математики для 5-6 класів.

2.1 Рівність фігур

Рівність фігур сама по собі не є топологічним поняттям. Однак поняття рівності близьке з поняттям топологічної еквівалентності. Дійсно, рівні фігури – це ті фігури, які неможливо розрізнити, вони однакові та володіють однаковими властивостями (з точки зору евклідової геометрії); топологічно еквівалентні фігури – це фігури, нерозрізнені з точки топології. Тому доцільне паралельне формування та розвиток цих понять. Поняття рівності фігур у учнів на рівні інтуїції формується під час виконання таких завдань, як вирізання фігур з паперу, перекреслення фігури по клітинкам на квадратній сітці та інших.

2.2 Фігури на площині і в просторі. Розгортка

Одне із головних питань цієї теми – виготовлення паперових моделей багатогранників, знайомих учням. Розглядаються питання, якою саме має бути розгортка певного багатогранника, чи співпадуть точки і ребра при склеюванні, які саме? Для даної вікової групи учнів моделювання поверхонь досить актуально, тому що домінуючим у них є наочно-образне мислення. Виходячи з цього, доцільно проводити топологічне моделювання і на позаурочних заходах.

На позаурочному заході учні вміють самостійно знайти топологічні інваріанти основних поверхонь, виготовляють різноманітні моделі цих поверхонь, проводять експерименти з використанням розрізання тощо.

Як зазначалося вище, курс геометрії 7-9 класів спрямований на використання метричних характеристик геометричних фігур. Отже, було б доцільно розробити спеціальний курс «Елементи топології» для цих класів, це дозволило б закріпити та розвинути знання з топології, що учні отримали у 5-6 класах. У курсі стереометрії старших класів межі геометричних понять, що вивчаються, значно розширюються, виклад проводиться на більш строгому рівні. Тому доцільно більш детально знайомити здобувачів освіти з топологічними характеристиками вже на більш високому рівні. Учні вже повинні володіти достатніми знаннями з алгебри, а саме: апаратом розв'язання лінійних і квадратних рівнянь і нерівностей, певними знаннями з теорії функцій і т.д.

На основі дослідження учнів середньої школи про топологічні уявлення, отримані наступні висновки:

1. Необхідність виокремлення топологічної лінії в шкільному курсі математики обумовлена наступними умовами:

   а) Психологічна. Топологічна структура передує по відношенню до проективної і метричної підструктур, а тому і навчання необхідно будувати згідно з розвитком математичного мислення учнів.

   б) Світоглядна. На сьогоднішній момент геометрія розуміється як теорія структур більш широких, ніж топологічна структура, тобто всі простори, що вивчаються в геометрії перш за все топологічні простори. Більше того, вони є топологічним різноманіттям зі збагаченою структурою. З цієї точки зору, яку більше ста років назад сформував Ф.Клейн, на геометрію визначається важливість вивчення топології.

2. Зрозуміло, що при навчанні топології потрібно враховувати особливості сучасного курсу математики основної школи та швидкість процесу його зміни в теперішній час. Сюди відноситься скорочення кількості годин, відведених на вивчення математики, зокрема, геометрії; велика варіативність змісту курсу, його геометризація тощо.

У наступному пункті представлені деякі приклади топологічних добутків, які можна використовувати в якості цікавих задач або завдань підвищеної складності для учнів з високим рівнем знань, як на уроці так і в позаурочний час. Ці задачі також можна використовувати в якості олімпіадних чи конкрусних завдань.

2.3 Приклади топологічних добутків

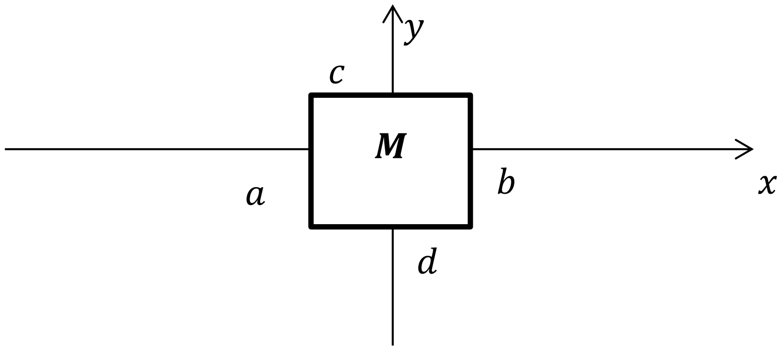
Теорема 1. (Гейне – Борель). Відрізок $[a, b]$ компактний.

Доведення. Припустимо, що $[a, b] \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ та із відкритого покриття U_{α} не можна вибрати скінченне підпокриття. Розділимо відрізок навпіл і позначимо через $[a_1, b_1]$ той, який не можна покрити скінченним числом множин U_{α}. І т.д. На n-ному кроці отримаємо відрізок $[a_n, b_n]$, довжина якого дорівнює $(b-a)^{2-n}$. За теоремою про вкладені проміжки існує точка c, що належить усім $[a_n, b_n]$. За умовою $c \in U_{\alpha_0}$. Протиріччя.

Приклад 1. Результатом добутку двох відрізків є квадрат $I \times I = I^2 = [0,1] \times [0,1]$ – компактний простір.

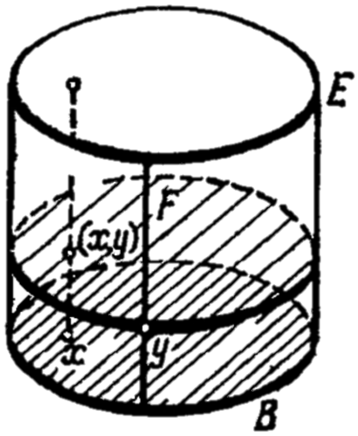
Декартовий добуток множин. Нехай на площині задана декартова система координат. Зобразьте на площині наступну множину: $\boldsymbol{M} = [a, b] \times [c, d]$, де $a, b, c, d \in R$, $a < b, c < d$.

Розв’язання. При зображенні прямого добутку $\boldsymbol{M} = [a,b] \times [c,d]$ кожній точці x із відрізка $[a,b]$ ставляться пари $(x,y), y \in [c,d]$, тому в результаті отримаємо множину.

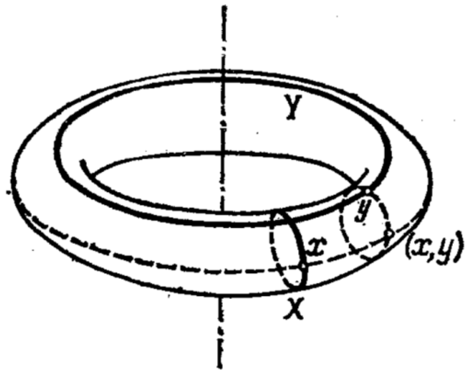


Приклад 2. Куб $I \times I \times I = I^3 = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ – компактний простір, так як є добутком відрізків. (Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко) [10]

Приклад 3. Кожна точка циліндра E може бути задана парою точок (x,y), де x- лежить на нижній основі B, а y – на твірній F, провівши через x відрізок, паралельний F, а через y – коло, паралельне B, ми отримаємо на їх перетині шукану точку циліндра. Таким чином, циліндр Eможна розглядати як множину всіх пар (x,y), де x - точка однієї фігури B(кола), а y – точка іншої фігури F (відрізка). (Болтянский В.Г., Ефремович В.А.) [7]



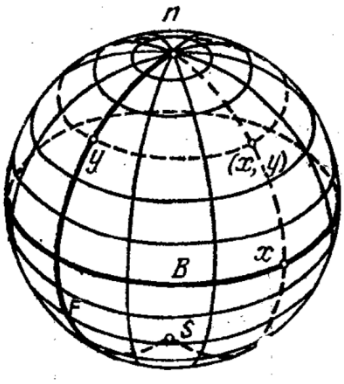
Приклад 4. Обмеженість і замкненість множини в R^n еквівалентна компактності. Насправді, таку множину в R^n можна заключити у замкнений паралелепіпед $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \dots \times [a_n,b_n]$, компактність якого встановлюється так само, як у прикладі 2. (Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко) [10]



Приклад 5. На торі E проведемо меридіан B і паралель F. Для задання будь-якої точки тору достатньо вказати точку $x \in B$ і точку $y \in F$. Провівши через x паралель, а через y меридіан, ми отримаємо на їх перетині шукану точку тора. Таким чином, тор E можна розглядати як множину всіх пар (x, y), де $x \in B$, а $y \in F$. (Болтянский В.Г., Ефремович В.А.) [7]

В розгляданих прикладах ми мали топологічний добуток фігур B і F, циліндри є топологічний добуток кола і відрізка, тор – топологічний добуток двох окружностей. Взагалі, фігура E називається топологічним добутком фігур B і F, якщо E можна розглядати як множину всіляких пар (x, y), де $x \in B$, а $y \in F$. (Болтянский В.Г., Ефремович В.А.) [7]

Приклад 6. Розглянемо на сфері екватор B і нульовий меридіан F.



Для задання точки на сфері достатньо вказати її географічні координати, тобто точки $x \in B$, $y \in F$. Провівши через ці точки меридіан і паралель, ми отримаємо на їх перетині шукану точку (x, y) сфери. Але це не означає, що сфера – топологічний добуток екватора в меридіана; дійсно, якщо x і x' - дві різні точки екватора, а n - верхній кінець меридіана (північний полюс), то різним парам (x, n) і (x', n) відповідає одна і та ж точка n на сфері. (Болтянский В.Г., Ефремович В.А.) [7]

Розглянемо деякі топологічні задачі, виділяючи при цьому тільки спеціальні дії. Подібні завдання часто пропонують учням на уроках і позаурочних заходах як цікаві завдання підвищеної складності, вони також включаються в олімпіадні завдання і конкурси.

Двовимірні поверхні

В цьому пункті більш детально розглянуто деякі властивості двовимірних поверхонь.

Вузол трилисник можна розмістити на торі (рис.1). При цьому отримаємо замкнену криву, яка тричі обвиває тор у напрямі меридіана і двічі у напрямі паралелі. (Прасолов В.В.) [21]

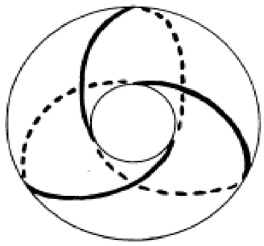


Рис.1

Задача 1. Нехай p і q – взаємно прості натуральні числа. Доведіть, що на торі існує замкнена крива, що не самоперетинається, і яка обвиває його p разів у напрямку меридіана і q разів у напрямку паралелі.

Для меридіана $p = 1$ і $q = 0$, а для паралелі $p = 0$ і $q = 1$. Виявляється, що ці значення p і q разом зі значеннями, що вказані в задачі 1., вичерпують всі можливі значення p і q. Одне із найбільш простих доведень цього твердження використовує задачу 2 а). (Прасолов В.В.) [21]

Задача 2 а). Розглянемо на площині довільну криву, що з'єднує точки A і B. Доведіть, що якщо n – натуральне число, то існує відрізок PQ довжиною $\frac{AB}{n}$, кінці якого лежать на даній кривій, а він сам паралельний відрізку AB.

б) Доведіть, що якщо додатне число d не є натуральним, то існує крива, що зєднує точки A і B, для якої твердження задачі а) невірне, тобто, якщо точки P і Q належать цій кривій і відрізок PQ паралельний AB, то довжина відрізка PQ не дорівнює $\frac{AB}{d}$. (Прасолов В.В.) [21]

Задача 3. Доведіть, що якщо замкнена крива, що не самоперетинається, на торі обвиває його p разів у напрямку меридіана і q разів у напрямку паралелі, то або числа p і q взаємно прості, або одне з них дорівнює 1, а інше дорівнює 0. (Прасолов В.В.) [21]

Відповіді

Задача 1. Тор можна отримати, якщо склеїти точки площини с координатами (x,y) і $(x+m, y+n)$, де m і n – цілі числа. Насправді, в результаті такої склейки отримаємо квадрат, що зображений на рис. 2; стрілки показують, які точки його сторін потрібно склеїти. (Прасолов В.В.) [21]

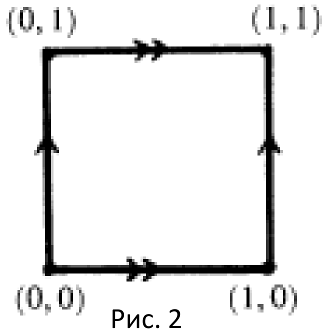


Рис. 2

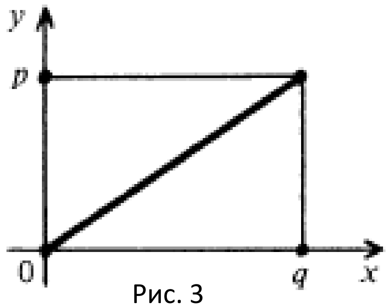


Рис. 3

Щоб отримати тор способом, що описаний вище, немає необхідності розглядати всю площину. Можна взяти довільну його частину, що містить квадрат, який зображений на рис. 2. Наприклад, можна взяти прямокутник з вершинами $(0,0)$, $(0,p)$, $(q,0)$ і (q,p) (рис. 3). Діагональ цього прямокутника, що виходить із початку координат, в результаті склейки перетворюється у замкнену криву на торі. Ця крива обвиває тор p разів у напрямку меридіана і q разів у напрямку паралелі (або q разів у напрямку меридіана і p разів у напрямку паралелі; це залежить від того, як саме ми склеїли тор із квадрату).

Залишається перевірити, що на торі отримується крива, що не самоперетинається. Координати точок діагоналі прямокутника, яка розглядається, задовольняють рівнянню $px = qy$. Припустимо, що точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2), що лежать на діагоналі, ототожнюються при склейці, тобто $x_1 = x_2 + m$ і $y_1 = y_2 + n$, де m і n – цілі числа. Враховуючи, що $px_1 = qy_1$і $px_2 = qy_2$, отримаємо $p(x_2 + m) = q(y_2 + n)$. Так як числа p і q взаємно прості, то $m = kq$ і $n = kp$. Отже, при склейці ототожнюються лише координати діагоналі; ніякі інші точки діагоналі не ототожнюються. (Прасолов В.В.) [21]

Задача 2.а) Будемо вважати, що на кривій, що з'єднує точки A і B, реалізується відстань d, якщо існує відрізок довжини d, кінці якого

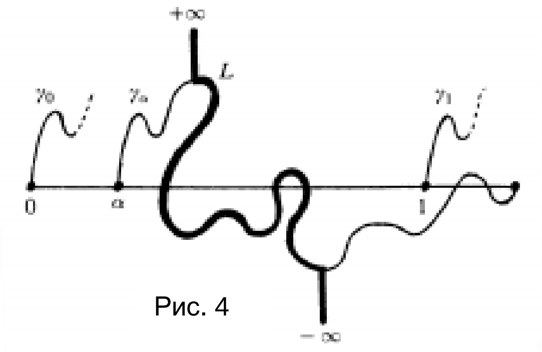


Рис. 4

лежать на цій кривій, а сам відрізок паралельний AB. Треба довести, що відстань $\frac{AB}{n}$ реалізується на будь-якій кривій, що з'єднує точки A і B. Доведемо спочатку, що якщо $0 < \alpha < 1$, то на будь-якій кривій, що з'єднує точки A і B, реалізується хоча б одна із відстаней αAB і $(1-\alpha)AB$. Можна вважати, що відрізок AB знаходиться на осі O_x, причому абсциси його кінців дорівнюють 0 і 1. Припустимо, що на кривій γ_0 не реалізується відстань α і $1-\alpha$. Тоді при зсувах цієї кривої вздовж осі O_x на відстані α і $1-\alpha$ отримуються криві, що не мають спільних точок с початковою кривою. Нехай γ_α і γ_1 – криві, отримані із кривої γ_0 зсувами вздовж осі O_x на відстань α і 1 в додатному напрямку. Тоді крива γ_α не перетинається ні з γ_0, ні з γ_1. Побудуємо криву L наступним чином. Виберемо на кривій γ_α точку з максимальною ординатою і проведемо із неї промінь, паралельний осі O_y, за напрямом до $+\infty$, а із точки з мінімальною ординатою проведемо промінь за напрямом $-\infty$ (рис. 4). Крива L складається із цих двох променів і частини кривої γ_α, що йде із початку одного променя до початку іншого. Криві γ_0 і γ_1не перетинаються ні з кривою γ_α, ні з променями, які розглядаються. Тому вони не перетинаються з кривою L. А так як крива L розбиває площину на дві частини, причому точки кривих γ_0 і γ_1 з максимальними ординатами лежать в різних частинах, то криві γ_0 і γ_1 лежать в різних частинах.

З іншого боку, криві γ_0 і γ_1 мають спільну точку з координатами (1,0). Отримано протиріччя, тому хоча б одна із відстаней α і $1-\alpha$ реалізується.

Доведемо тепер індукціє по n, що відстань $\frac{AB}{n}$ реалізується на будь-якій кривій. При $n = 1$ твердження очевидно. Крок індукції робиться наступним чином. Нехай $\alpha = 1/n$. Тоді

$1 - \alpha = \frac{n-1}{n}$,

тому одна із відстаней $\frac{AB}{n}$ і $\frac{(n-1)AB}{n}$ реалізується. Якщо реалізується відстань $\frac{AB}{n}$, то твердження доведено. Якщо реалізується відстань $\frac{(n-1)AB}{n}$, то для кривої, що зєднує кінці відрізка довжини $\frac{(n-1)AB}{n}$, згідно з припущенням індукції реалізується відстань

$$\frac{1}{n-1}\frac{(n-1)AB}{n} = \frac{AB}{n}$$

б) Нехай n – ціла частина числа d. Поділимо відрізок $[n, d]$ на n рівних частин. На рис. 5 зображена крива γ, що зєднує кінці відрізка AB довжини d. Пунктирна крива γ' отримана із кривої γ зсувом вздовж відрізка AB на відстань 1. Так як криві γ і γ' не перетинаються, то на кривій γ реалізується відстань $\frac{AB}{d} = 1$. (Прасолов В.В.) [21]

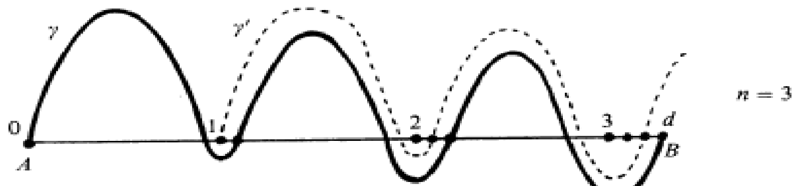


Рис. 5

Задача 3. Нехай замкнена крива γ обвиває тор p разів у напрямку меридіана і q разів у напрямку паралелі. Ототожнимо точки площини, що мають координати (x, y) і $(x+m, y+n)$, де m і n – цілі числа. В результаті отримаємо тор. При такій склейці криву γ можна отримати із кривої Г, що з'єднує на площині точки $A = (0,0)$ і $B(p, q)$.

Припустимо, що числа p і q або обидва не дорівнюють нулю і мають спільний дільник $d \neq 1$, або одне з них дорівнює нулю, а інше дорівнює

$d \neq 1$. Згідно з задачею 2.а) на кривій Г реалізується відстань $\frac{AB}{d}$, тобто на кривій Г можна вибрати точки P і Q так, що

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{d}\overrightarrow{AB}$$

Вектор $\overrightarrow{PQ}$ має цілочисленні координати $\left(\frac{p}{d}, \frac{q}{d}\right)$, тому точки P і Q ототожнюються, тобто вони відповідають одній і тій самій точці тора. Це означає, що крива γ самоперетинна. (Прасолов В.В.) [21]

ВИСНОВКИ

Відповідно до мети дослідження були досягнуті поставлені завдання.

Підсумовуючи результати дослідження, можна зробити такі висновки:

1) Проведений аналіз наукової літератури з проблеми дослідження засвідчив, що всі компакти, які знаходяться в R^3, є компактами звичайного типу. Але існують такі двовимірні компакти в R^4, що $\dim X^n \neq n \dim X$.

2) Функція, що визначає розмірність просторів виду X^n має або вигляд $\dim X^n = n \dim X$ або $\dim X^n = n \dim X - n + 1$. Це залежить від того, до компактів якого типу належить простір X. (Тобто це є клас компактів звичайного типу або клас компактів особливого типу).

3) Методична система дослідження включає такі етапи: 1) аналіз психолого-педагогічної і науково-методичної літератури з проблеми дослідження; порівняльний аналіз навчальних програм і підручників з математики, рекомендованих міністерством освіти, для закладів загальної середньої освіти; 2) розробка методичного матеріалу для учнів для вивчення елективного курсу «Елементи наочної топології». Проведений аналіз навчальних програм засвідчив, що у жодному з діючих підручників з математики для 5-6 класів топологічна лінія не прослідковується. Ті елементарні топологічні уявлення, що містяться у підручниках відіграють більше допоміжну роль і не мають подальшого розвитку. Найбільш прийнятний вік учнів для навчання елементам топології, є 5-6 клас. Це зумовлено тим, що треба якомога раніше починати знайомство школярів з топологією, тим паче, що учні вже оперують числовими і буквеними виразами, мають уявлення про геометричні фігури. Наприкінці відзначимо, що вивчення елективного курсу «Елементи наочної топології» ознайомить учнів з поняттям

топологічного добутку та дасть їм змогу поглибити свої знання з геометрії та розширити фундаментальні властивості фігур. Враховуючи це, можна зробити підсумок, що найбільш оптимальним способом реалізації навчання є введення позаурочних заходів, які продовжують, доповнюють і розвивають урок.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности М., 1973 г., изд. Наука главная редакция физико-математической литературы
2. Александров П.С., Федорчук В.В., Зайцев В.И., Основные моменты в развитии теоретико-множественной топологии, УМН, 1978, том 33, выпуск 3(201), 3-48 URL: http://m.mathnet.ru/php/getFT.phtml?jrnid=rm&paperid=3420&what=fullt&option_lang=rus
3. Богатый С.А., Теория отображений в евклидово пространство, УМН, 1998, том 53, выпуск 5(323), 27 56 URL: http://m.mathnet.ru/php/getFT.phtml?jrnid=rm&paperid=68&what=fullt&option_lang=rus
4. Бокштейн М.Ф., Гомологическая теория размерности, УМН, 1966, том 21, выпуск 4(130), 17 22 URL: http://m.mathnet.ru/php/getFT.phtml?jrnid=rm&paperid=5892&what=fullt&option_lang=rus
5. Болтянский В.Г. О размерной полноценности компактов. – ДАН СССР, 1949, т. 67 №5. С.773-776.
6. Болтянский В.Г. Пример двумерного компакта, топологический квадрат которого имеет размерность, равную трем. – ДАН СССР,1949. т.67 №4, с.597-599
7. Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983.-160с.
8. Болтянский В.Г., О теореме сложения размерностей, УМН, 1951 том 6, выпуск 3(43), 99-128 URL: http://m.mathnet.ru/php/getFT.phtml?jrnid=rm&paperid=6854&what=fullt&option_lang=rus
9. Болтянский В.Г., Отображения компактов в эвклидовы пространства, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, том 23, выпуск 6, 871 892 URL: http://m.mathnet.ru/php/getFT.phtml?jrnid=im&paperid=3818&what=fullt&option_lang=rus
10. Введение в топологию/Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко: Учеб. пособие. – 2-е изд., доп. – М.: Наука.Физматлит, 1995. -416 с.

11. Виро О.Я., Иванов О.А., Николаев Н.Ю., Харламов В.М. Элементарная топология.- М.: МЦНМО, 2010.-352 с.
12. Кузьминов В.И. Гомологическая теория размерности. – УМН, 1968, т.23, вып.5, с.3-49
13. Кузьминов В.И., Тестовые пространства, Докл. АН СССР, 1963. Том 152, №4, 805 807 URL: http://m.mathnet.ru/php/getFT.phtml?jrnid=dan&paperid=28636&what=fullt&option_lang=rus
14. Мерзляк А.Г. Геометрія: підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти/А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонський, М.С.Якір. - 2-ге вид.,перероб.–Х.: Гімназія, 2020.-240с.: іл.
15. Мерзляк А.Г. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвітн. навч. закладів/А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонський, М.С.Якір.–Х.: Гімназія, 2016. – 208 с.: іл.
16. Мерзляк А.Г. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвітн. навч. закладів/А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонський, М.С.Якір.–Х.: Гімназія, 2017. – 240 с.: іл.
17. Мерзляк А.Г. Математика 5 клас: підруч. для закладів загальної середньої освіти/А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонський, М.С.Якір.- Вид. 2-ге, доправ. Відповідно до чинної навч. програми. – Х.: Гімназія, 2018.-272с.
18. Метрические пространства: учебное пособие/ Бондаренко В.А., Морозов А.Н., Николаев А.В.; Яросл. гос. ун-т им. П.Г.Демидова. –Ярославль: ЯрГУ,2017.-109 с.
19. Навчальна програма з математики поглиблений рівень URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-poglibl-rivenfinal.docx
20. Навчальна програма з математики URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/onovlennya-12-2017/5-progrma-z-matematiki.docx
21. Прасолов В.В. Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995
22. Ф.Клейн Лекции о развитии математики в XIX столетии часть I. Пер. с немецкого Б.Лившица, А.Лопшица, Ю.Рабиновича, Л.Тумермана М.-Я. ГОНТИ,1937-432с.
23. Ф.Клейн Неевклидова геометрия. Пер. с немецкого Н.К. Брушлинского. М.-Я., ГОНТИ, 1936-356с.
24. Худенко В.Н., Махоркин В.В. Лекции по топологии/Калинингр. ун-т. – Калининград, 2000.-111с.