МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ПРОБЛЕМА ЧОТИРЬОХ ФАРБ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

Виконала: студентка 4 курсу

Спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математика)»

Соловйова Анастасія Олексіївна

Керівник: доктор фізико-математичних наук, професор Савченко О. Г.

Рецензент: кандидат технічних наук, доцент кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонського філіалу Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова

Литвиненко О. І.

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасна школа прагне вивести навчання у школі на новий рівень. Про це свідчить практико -орієнтованість сучасної школи, яка вимагає змін у методах та ставленні вчителів до навчального процесу.

Теорема про чотири фарби є актуальною темою для дослідження. Першим хто висунув гіпотезу про чотири фарби був Англійський студент Френсис Гутри. Облетівши увесь світ вона заполонила багато вчених умів того часу. Теоремою про чотири фарби займалися такі вчені, як Хівуд, Кемпе, Хеффте. Хівуд, у свою чергу, став першим хто довів цю теорему. Кожен з них вклав великий внесок у дослідження проблеми про чотири фарби. Її можна застосувати на уроках математики в якості додаткового завдання до задачі. Це допоможе розвивати в здобувачів освіти творче, абстрактне мислення та просторову уяву. Нестандартна постановка задачі, загалом, спонукатиме учнів поглянути на математику під іншим кутом. Учень, зауваживши, що математика - це не нудний шкільний предмет, сам вияве бажання навчатись.

Мета і завдання дослідження: дослідити можливість використання теореми про чотири фарби на уроках математики середньої школи.

1. Проаналізувати наукові дослідження вчених, які займалися проблемою чотирьох фарб;
2. Розглянути та з’ясувати особливості способів використання теореми про чотири фарби на уроках математики середньої школи, на основі додаткових завдань до задач.

Об’єкт дослідження: використання теореми про чотири фарби на уроках математики середньої школи.

Предмет дослідження: процес формування практико-орієнтовного світогляду за допомогою теореми про чотири фарби.

Методи дослідження: аналіз та узагальнення літератури з теми даної роботи.

РОЗДІЛ 1
ПРОБЛЕМА, ІСТОРІЯ ТА ЇЇ ФОРМУЛЮВАННЯ

1.1. Проблема чотирьох фарб

Озирнувшись довкола, ми бачимо що світ наповнений різними кольорами. Сім кольорів, на які дисперсія світла розбиває білий промінь, не єдині оточують наше око Холодні та теплі відтінки, чорний колір знайшли місце у повсякденному житті людства.

Важливе місце у промисловості займають фарби: друк підручників, журналів, пошив одягу, виготовлення кольорових олівців, тощо. Не останнє місце кольори займають при розфарбуванні політичної карти світу. Скільки кольорів потрібно, щоб розфарбувати усі країни

Як розфарбувати усі країни так, щоб дві країни з однією границею не мали однаковий колір, використавши при цьому найменшу кількість різних кольорів?

Щоб дати відповідь на це питання розпочнемо з найпростішого.

Якщо взяти область довільної форми для її розфарбування знадобиться лише один колір (Рисунок 1.1) При яких умовах достатньо використовувати лише два кольори? Найпростіший приклад шахова дошка, вона має лише два кольори. (Рисунок 1.2)

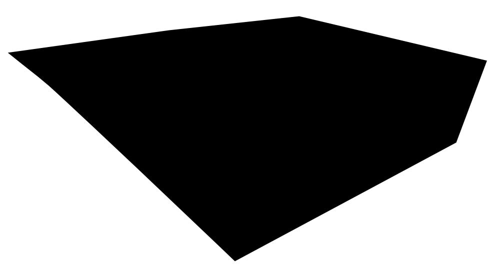


Рисунок 1.1

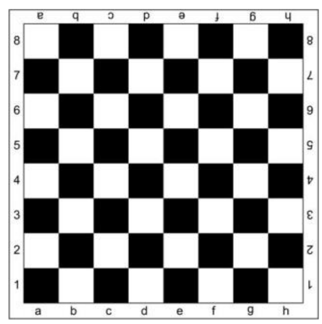
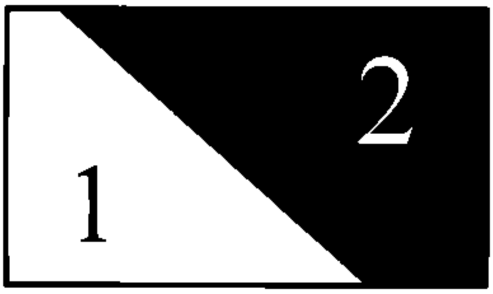


Рисунок 1.2

Ми бачимо, що два кольори достатньо, якщо прямі паралельні, але чи буде це виконуватися у інших випадках. Відповідь: так.

Наприклад, візьмемо довільну фігуру та розділимо його на дві частини за допомогою прямої лінії, яка проходить через усю фігуру від однієї її сторони до іншої. На (Рисунок 1.3) бачимо, що ми використали лише два кольори, перетнемо ще двома лініями фігуру. Навіть після перетину ще двома лініями, мінімальна кількість кольорів для його розфарбування не змінюється (Рисунок1.4).



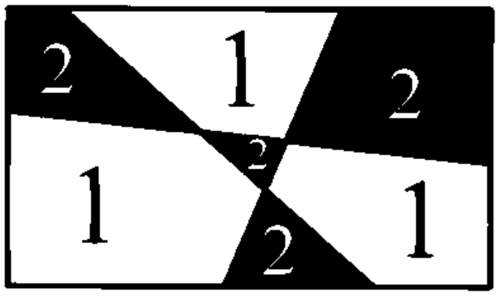


Рисунок 1.3 Рисунок 1.4

На Рисунок 1.5 видно, що кількість кольорів не змінна, хоча кількість областей для розфарбування збільшилась.

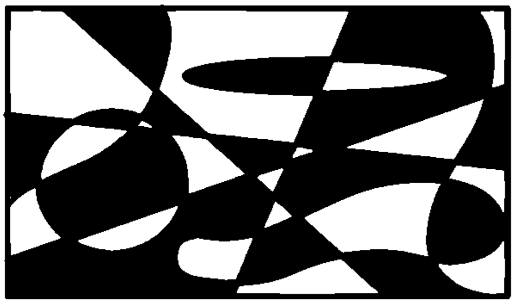
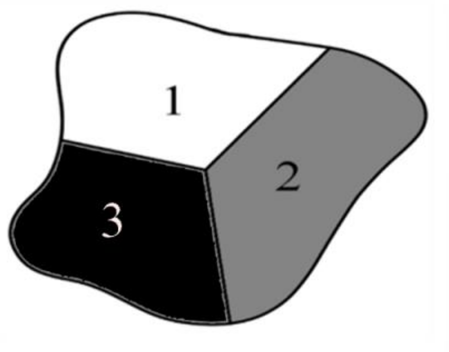


Рисунок 1.5

Розглянемо іншу довільну фігуру, яка розділена трьома променями, що виходять з однієї точки (Рисунок 1.6). Видно що два кольори буде недостатньо щоб задовольняло умові. Можна зробити висновок, що достатньо трьох кольорів, проте він хибний.

Зобразимо у центрі (Рисунок 1.7) коло, стане зрозуміло що неможливо вибрати один з кольорів «1», «2», «3», так щоб хоча б один з них не співпадав з кольором центральної області.



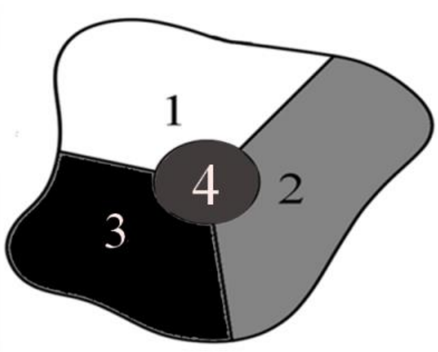


Рисунок 1.6 Рисунок 1.7

Чи достатньо чотири кольори для розфарбування карти на площині, чи на сфері, якщо кожна область цієї карти можливо розфарбувати у один з чотирьох кольорів так, щоб будь-які дві області які мають спільну границю мали різні кольори? Так звучить одне з формулювань проблеми про чотири фарби. Математики не знають відповідь на це питання, але вважають, що відповідь-так, це називається гіпотеза про чотири фарби (її доведення математичним шляхом досі ніхто не знайшов, але існує доведення яке виконано з використанням комп'ютерної техніки)[18].

1.2. Історія виникнення теореми

У 1852 році студент Лондонського університету Френсис Гутри під час складання карти Англії зауважив, що для розфарбування усіх графств достатньо чотирьох кольорів, про це спостереження він розповів своєму викладачеві Аугусту Де Моргану, а той у свою чергу поділився відкриттям молодого студента зі своїм другом Вільямом Гамільтоном тим самим розпочавши багаторічний ажіотаж навколо цієї проблеми [17].

Найпершим документом де було письмово задокументовано про проблему був лист де Аугуст Де Морган розповідає про проблему чотирех фарб своєму другові Вільяму Гамільтону, який був написаний у 1852 [18].

Теорема про чотири фарби була повністю забута аж до 1878 року, цей рік вважають роком «народження» теореми це відбулось, коли під час засідання Британського географічного товариства з вуст математика А. Келі пролунала чітко сформульована теорема, що звучала так : «Будь-яку географічну карту на площині чи на глобусі можливо вірно розфарбувати лише чотирьома фарбами, так що жодні дві країни що мають спільні границі не розфарбовані в один колір»[17].

Згодом, через 11 років Англійський математик Хивуд знайшов неточність у доведенні Кемпе. Не зважаючи на те, що Хивуд спростував доведення Кемпе , він був першим хто сформував доведення теореми про п’ять фарб правильно, яка стверджує, що будь-яку карту на сфері можна розфарбувати п’ятьма кольорами[18, 19].

Доведення теореми про чотири фарби знайшлось у теорії графів про що свідчать наробки вчених[1,5].

Розглянемо сферу з трьома ручками (Рисунок 1.8). У більш загальному випадку нехай S_p – поверхня сфери з p ручками.

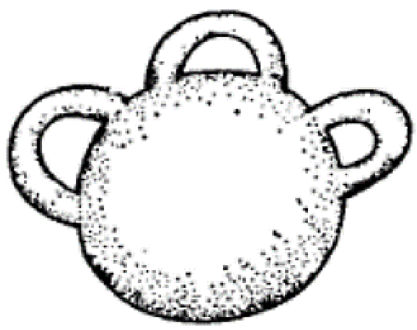


Рисунок 1.8

Поверхня S_p э стандартною моделлю її ще називають орієнтовною поверхнею роду p. З цими значеннями S_0-сфера, S_1- тор.

Якщо S- деяка поверхня і будь-яка карта на S дозволяє розфарбування у n кольорів, але не будь-яка карта S дозволяє розфарбовку у $n-1$ то ми будемо вважати n- хроматичним числом поверхні S і писати $x(S) = n$.

Хівуд довів наступну нерівність для хроматичного числа $x(S_p)$ орієнтовної поверхні роду $p \geq 1$ для $x(S_1) = 7$:

$$x(S_p) \leq \left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right] \text{ для } p \geq 1 \quad (1.1)$$

Символом $[x]$ позначено найбільше ціле число , не більше за x. Хівуд гадав, що встановив рівність в (1.1). Проте це не так, і лише у 1968 році твердження

$$x\left(S_p\right) = \left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right] \text{ для } p \geq 1 \quad (1.2)$$

Яку Хівуд назвав теоремою про розфарбування карт, дійсно було доведено.

Якщо гіпотеза чотирьох фарб вірна, то (1.1) та (1.2) виконується і при $p = 0$.

Хеффтер у 1891 році звернув увагу на неповність у роздумах Хівуда , та довів, що рівність (1.2) виконується для $1 \leq p \leq 6$ та деяких інших значень p.[18].

У наступні роки інші математики намагались знайти вирішення проблеми чотирьох фарб, проте, нажаль, їх намагання виявилися марними.

У 1920 р. Філіп Франклін продемонстрував, що усі карти на сфері, що мають 25 або менше областей, можна розфарбувати чотирма кольорами. У наступні роки кількість областей збільшувалася, проте, чисто математичного доведення для карти на сфері яка має n областей знайти не вдалося, тільки з використанням комп'ютерної техніки[18].

Доведення теореми було пов'язано з теорією графів. У 1976 році Кеннет Апель та Вольфганг Хакен, змогли звести до скінченної кількості випадків (варіантів), це і стало доведенням теореми, проте це вдалося лише з використанням комп'ютерної техніки.

Практично, теорема про чотири фарби стала першою математичною задачею доведеною не математично. При розрахунках було розглянуто 1936 мап, та проведено чотириста сторінок розрахунків. На честь цієї події, у тираж пошти США вийшла марка на якій написано «Чотирьох фарб достатньо»[3]. Багато світил математичної науки не приймали доведення здійснене комп'ютером.

Нажаль класичне математичне доведення не знайдено і до нині (доведення існує лише для 41 мапи). Складність доведення привернуло до себе увагу настільки, що теорема потрапила до семи математичних задач тисячоліття. За математичне доведення теореми Інститут Клєя запропонував грошову винагороду, розміром в один мільйон доларів[3].

1.3. Розв'язок проблеми на складних поверхнях

Проблема чотирьох фарб ,насправді, є малою частиною великої проблеми, якщо розглядати поверхні більш складної природи, що відрізняються від сфери.

Перший приклад – тор.

Тор- геометричне тіло утворено у наслідок обертання круга навколо осі, яка лежить у площині цього круга і не перетинає його (Рисунок 1.9) [20].

Для зручного розібрання карт зображених на торі доцільно спочатку знайти пласке зображення тора (Рисунок 1.10).

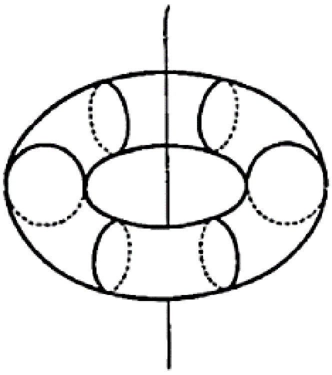


Рисунок 1.9

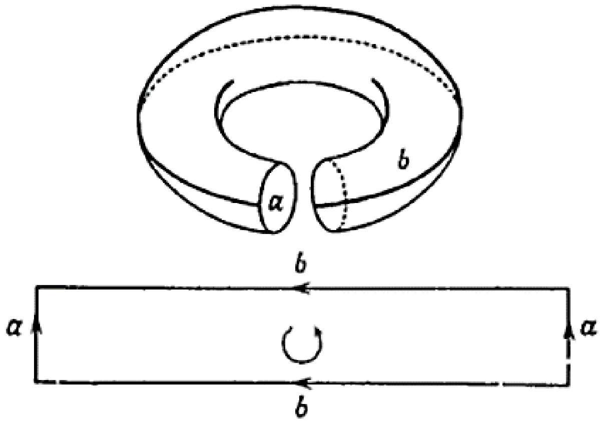


Рисунок 1.10

Розріжемо тор вздовж утвореного окружності a; поверхня перетвориться у деформований циліндр. Розправляємо його та розріжемо вздовж однієї з існуючих b. Вийшов прямокутник. Цей прямокутник представляє наш тор, якщо виконується умова, що дві пари паралельних сторін ототожнюються. На Рисунок 1.11 представлена карта на торі, яка складається з 7 країн.

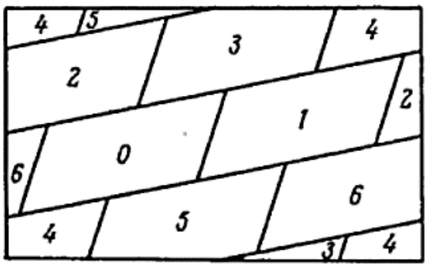


Рисунок 1.11

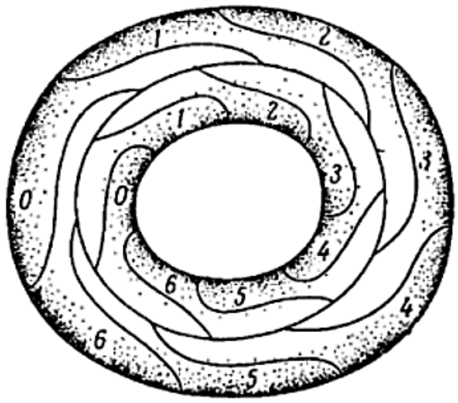


Рисунок 1.12

Кожна країна є сусідкою з будь-якою іншою. Рисунок 1.12 дає інше уявлення карти на торі з 7 попарно сусідніми країнами.

Таку карту вперше описав Хивуд. Він довів, що будь-яка карта на торі допускає розфарбування у сім кольорів. Приклад, який зображений на рис3 і рис 4, демонструє, що менше ніж для 7 кольорів твердження хибне [16, 18].

Наступний приклад – лист Мебіуса.

Лист Мебіуса (стрічка Мебіуса)- топологічний об’єкт, найпростіша неорієнтовна поверхня з краєм, одностороння у тривимірному евклідовому просторі. Потрапити з однієї точки цієї поверхні у будь-яку іншу можливо не перетинаючи край [9].

У випадку стрічки Мебіуса вдалось довести, що достатньо 6 кольорів і що є карти для яких достатньо рівно шість фарб. Якщо розмежувати стрічку як вказано на Рисунок 1.13 утворити з неї лист Мебіуса (склеїти та перекрутити), то буде видно, що отримується 6 областей кожна з якої буде дотикатися до усіх інших.

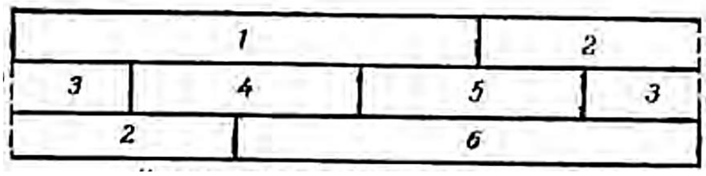


Рисунок 1.13

Оскільки у листа Мебіуса одна сторона, будемо вважати, що він прозорий: кожна область має один і той же колір, незалежно який напрямок вибрано для спостерігання[2].

Приклади розв’язання проблеми висвітлені у роботах вчених [8,16,19].

РОЗДІЛ 2
ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ У КУРСІ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ

2.1. Доцільність та компетентності

У навчальній програмі з математики 5-9 класів вказано ключові компетентності які повинна формулювати математика. Теорема про чотири фарби має змогу забезпечити формулювання компетентностей.

Проблема чотирьох фарб розширює мовний кругозір, допомагає учням навчитися ставити запитання та розпізнавати проблему, міркувати та робити висновки на основі поданої інформації, доречно вживати математичну термінологію

Для досягнення математичної компетентності практикується уміння оперувати числовою інформацією, геометричними об'єктами на площині та у просторі.

Основні компетентності у математичних науках учні навчаються розпізнавати проблеми, що виникають у довкіллі і які можна розв'язати засобами математики, будувати та досліджувати математичні моделі[14].

Під час використання теореми про чотири фарби на уроках математики середньої школи формуються вміння для здійснення необхідних розрахунків, унаочнення математичних моделей та здатність зображати схеми, рисунки, графіки, тощо. Це є складовою частиною формування компетентності обізнаності і самовираження у сфері культури[14].

Доцільно використовувати додаткові умови до задач які не стосуються задачі у цілому, або зачіпають логічні дії. Однією з таких умов може стати використання цікавої теореми про чотири фарби. Теорема про розфарбування мап підходить для розширення кругозору учнів, а також їх усвідомлення важливості математики, як універсальної мови наук.

Завдяки небанальній математиці є можливість у повній мірі залучити учнів до математичного життя. Їх ставлення до математики буде змінено, це буде не нудна наука про цифри , а цікава та захоплююча математика яка є невід'ємною складовою людського життя.

Використання теореми про чотири фарби допомагає виховати патріотичні цінності. Зрощення патріотичного духу є важливим моментом у формуванні дитини як особистості.

Завдяки теоремі про 4 фарби не складно буде досягти соціальної та громадської компетентності. Вирішення задачі у групах або усім класом дозволить учням навчитись висловлювати власну думку, слухати і чути один одного та оцінювати аргументи і факти задля досягнення істини [14].

2.2. Застосування на уроках математики

У курсі математики середньої школи є місце теоремі про чотири фарби. У шостому класі під час вивчення теми «Відношення і пропорції» учні розуміють та вміють розв'язувати задачі на відсотки, та виконувати відсоткові розрахунки[14].

Задача. За даними Державної служби статистики України загальна кількість яка проживає на території України станом на 01.01.2021р. складає 41588,4 млн. чоловік [15].

I. Знайти який відсоток від загальної кількості населення України складає населення таки областей:

а) Херсонської; в) Донецької;

б) Харківської; г) Київської.

II. Порівняти на скільки за відсотковим складом населення Донецької області більше населення Херсонської області.

III. Розглянути мапу України на Рисунок 2.1 та довести що для розфарбування мапи України не достатньо трьох кольорів. Переконатися у цьому на практиці.

Дані представлені у вигляді таблиці (Таблиця 2.1)

Таблиця 2.1

Варіант	Область	Кількість населення у млн.
а	Херсонська	1016,7
б	Харківська	2633,8
в	Донецька	4100,3
г	Київська(без м.Київ)	1788,5

Рисунок 2.1

Розв’язання: І. знайдемо відсоток для кожної області.

а) нехай відсоток населення Херсонської області від загальної кількості населення-100% складає х%, тоді складаємо пропорцію:

41588,4 відноситься до 1016,7 як 100% до х%, отже

$\frac{41588,4}{1016,7} = \frac{100\%}{x\%}$, з цього слідує що $41588,4 \cdot x\% = 1016,7 \cdot 100\%$.

$$x\% = \frac{1016{,}7 \cdot 100\%}{41588{,}4} \approx 2{,}4\%.$$

Аналогічно виглядають розрахунки для Харківської, Донецької та Київської області.

б) нехай відсоток населення Харківської області від загальної кількості населення-100% складає y%, тоді складаємо пропорцію:

41588,4 відноситься до 2633,8 як 100% до y%, отже

$\frac{41588{,}4}{2633{,}8} = \frac{100\%}{y\%}$, з цього слідує що $41588{,}4 \cdot \mathrm{y}\% = 2633{,}8 \cdot 100\%$.

$$x\% = \frac{2633{,}8 \cdot 100\%}{41588{,}4} \approx 6{,}3\%.$$

в) нехай відсоток населення Донецької області від загальної кількості населення-100% складає z%, тоді складаємо пропорцію

41588,4 відноситься до 4100,3як 100% до z%, отже

$\frac{41588{,}4}{4100{,}3} = \frac{100\%}{z\%}$, з цього слідує що $41588{,}4 \cdot \mathrm{z}\% = 4100{,}3 \cdot 100\%$.

$$z\% = \frac{4100{,}3 \cdot 100\%}{41588{,}4} \approx 9{,}9\%.$$

г) нехай відсоток населення Київської області (без м. Київ) від загальної кількості населення- 100% складає k%, тоді складаємо пропорцію:

41588,4 відноситься до 1788,5як 100% до k%, отже

$\frac{41588{,}4}{1788{,}5} = \frac{100\%}{k\%}$, з цього слідує що $41588{,}4 \cdot \mathrm{k}\% = 1788{,}5 \cdot 100\%$.

$$k\% = \frac{1788{,}5 \cdot 100\%}{41588{,}4} \approx 4{,}3\%.$$

Відповідь представимо у вигляді Таблиця 2.2:

Таблиця 2.2

Варіант	Область	Відсоткова частка від загальної кі - сті населення України у %
а	Херсонська	2,4
б	Харківська	6,3
в	Донецька	9,9
г	Київська(без м. Київ)	4,3

II. Донецька область має 9,9%, а Херсонська- 2,4% , Донецька область більше за відсотковим складом Херсонську на (9,9%-2,4%=7,5%) 7,5 %.

III. Доведення: згідно з теоремою про розфарбування мап: для розфарбування будь-якої мапи достатньо чотирьох кольорів. Позначимо кількість кольорів через n. Отже, кількість кольорів для розфарбування $n \leq 4$.

Розглянемо Рисунок 2.2 область, що знаходиться всередині фігури має колір номер «1», кількість областей навколо позначимо k. Наочно переконаємось, якщо k – парне, як на Рисунок 2.3 то $n = 3$, а якщо k – непарне (Рисунок 2.4) - $n = 4$.

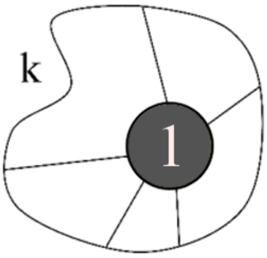


Рисунок 2.2

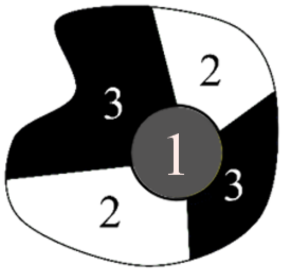


Рисунок 2.3

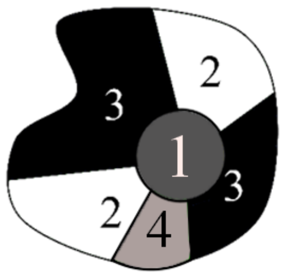


Рисунок 2.4

Робимо висновок, при k– парне , $n = 3$; k – непарне, $n = 4$.

Шукаємо такий приклад на мапі України, щоб кількість областей довкола однієї області було непарним. На Рисунок 2.5 заштрихована Дніпропетровська область, яку оточують Кіровоградська, Полтавська, Харківська, Донецька, Запорізька, Херсонська та Миколаївська області, їх непарна кількість, отже трьох кольорів не достатньо для розфарбування мапи України.

Рисунок 2.5

Задача. Згідно з постановою Верховної ради України про утворення районів, з 17 липня на території України налічується 136 районів[15]. Учням пропонується:

I. Практично довести, що чотирьох фарб достатньо для розфарбування усіх районів (Рисунок 2.6) так, щоб райони, які мають спільний кордон мали різний колір.

II. Математично довести мінімальну кількість фарб.

III. Відповісти на запитання: чи можливе розфарбування мапи Херсонської області (Рисунок 2.7) тільки трьома кольорами?

Рисунок 2.6

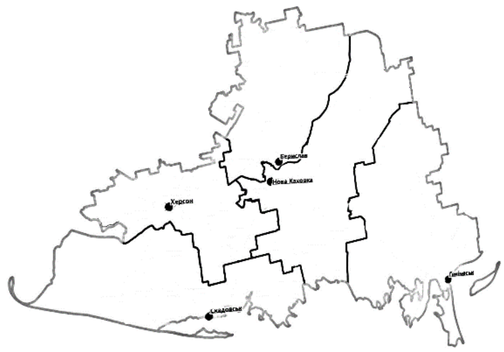


Рисунок 2.7

Зауваження до розв’язання:

I. Наголосити на відповіді до минулої задачі. Звернути увагу на незмінність кількості кольорів при збільшені кількості областей для розфарбування. Практичне доведення закладається у розфарбуванні Рисунок 2.6. будь-якими чотирма кольорами. Під час виконання завдання бути уважним для уникнення помилок у вигляді двох сусідніх районів, одного кольору.

II. Використовуючи приклад доведення на сторінці 16.

III. Не важко здогадатись, що район у середині якого міститься м. Херсон буде мати колір «1», тоді район який містить м. Нова Каховка – «2», а м. Берислав, відповідно, «3». У свою чергу, для районна м. Скадовськ колір розфарбування – «3», бо «1», і «2» вже не можуть бути використані. Для районна м. Геніческ колір розфарбування на вибір або «3» , або «1».

2.3. Застосування на уроках геометрії

На уроках геометрії під час вивчення тем за для підвищення здатності учнів сприймати нову інформацію доцільно використовувати незвичайні додаткові умови до звичайних задач. Незвична ситуація сприятиме покращенню мозкової активності учнів. Використання додаткової умови, що стосується теореми про чотири фарби не тільки стимулюватиме учнів до навчання, але й розвиватиме творчі здібності та уяву, що дуже вадливо для майбутнього дитини.

Наприклад, використання додаткової умови доцільно використовувати для розв’язування задач у курсі геометрії 7-го класу, під час вивчення теми коло і круг.

Задача. У трикутник з кутами 30°, 70° вписане коло. Знайдіть кути трикутника, вершини якого є точками дотику вписаного кола до сторін даного трикутника[12].

Розв’язання: зобразимо малюнок який задовольняє умові задачі (Рисунок 2.8).

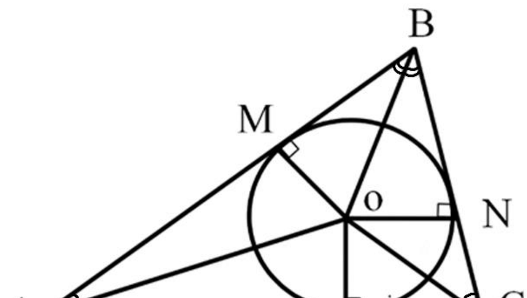


Рисунок 2.8.

Знайдемо градусну міру третього кута. $\angle BAC = 30^{\circ}$, $\angle BCA = 70^{\circ}$, отже $\angle ABC = 180^{\circ} - (\angle BAC + \angle BCA) = 180^{\circ} - (30^{\circ} + 70^{\circ}) = 80^{\circ}$.

Центр кола, вписаного у трикутник знаходиться у точці перетину бісектРисунок Згідно з цього:

1) AO – бісектриса $\angle BAC$, тоді $\angle MAO = \angle LAO = \angle BAC{:}\,2 = \frac{30^{\circ}}{2} = 15^{\circ}$.

2) BO – бісектриса $\angle ABC$, тоді $\angle MBO = \angle NBO = \angle ABC{:}\,2 = \frac{70^{\circ}}{2} = 35^{\circ}$.

3) CO – бісектриса $\angle BCA$, тоді $\angle NCO = \angle LCO = \angle BCA{:}\,2 = \frac{80^{\circ}}{2} = 40^{\circ}$.

За умовою O – центр вписаного кола, тоді за властивістю дотичних (дотична до кола перпендикулярна до радіуса проведеного у точці дотику[12].) AB, BC,AC – дотичні до кола, отже OM, ON, OL – радіуси вписаного кола.

Розглянемо Δ AMO і Δ ALO – прямокутні $\angle AMO = \angle ALO = 90^{\circ}$, OM=OL, AO – спільна.

За ознакою рівності прямокутних трикутників (якщо гіпотенуза та катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнює гіпотенузі та катету другого, то ці трикутники рівні[12].), маємо: Δ AMO=Δ ALO. Звідси $\angle MOA = \angle LOA = 90^{\circ} - 15^{\circ} = 75^{\circ}$. $\angle MOL = \angle MOA + \angle LOA = 75^{\circ} + +75^{\circ} = 150^{\circ}$.

Розглянемо Δ MOL – рівнобедрений.

За властивістю кутів рівнобедреного трикутника (кути при основі рівнобедреного трикутника – рівні), маємо $\angle MOL = \angle OLM = (180^{\circ} - -150^{\circ}){:}\,2 = 30^{\circ}{:}\,2 = 15^{\circ}$.

Аналогічно $\angle MON = 110^{\circ} \angle NOL = 100^{\circ}$.

$\angle NMO = \angle MNO = (180^{\circ} - 110^{\circ}){:}\,2 = 35^{\circ}$.

$\angle ONL = \angle 0LN = (180^{\circ} - 100^{\circ}): 2 = 40^{\circ}.$

$\angle NML = \angle NMO + \angle OML = 35^{\circ} + 15^{\circ} = 50^{\circ}.$

$\angle MLN = \angle MLO + \angle OLN = 15^{\circ} + 40^{\circ} = 55^{\circ}.$

$\angle LNM = \angle LNO + \angle ONM = 35^{\circ} - 40^{\circ} = 75^{\circ}.$

Відповідь: $\angle NML = 50^{\circ}, \angle MLN = 55^{\circ}, \angle LNM = 75^{\circ}.$

Додаткове завдання до задачі: знайти мінімальну кількість кольорів для розфарбування усіх областей фігури зображеної на Рисунок 2.8 так що кожна з сусідніх областей мала різні кольори.

Розв'язання: розглянемо Рисунок 2.9, методом почергового підбору з'ясуємо мінімальну кількість кольорів. Спочатку використаємо два кольори білий та чорний на Рисунок 2.10 бачимо, що два кольори достатньо для розфарбування усіх областей так щоб сусідні області мали різні кольори.

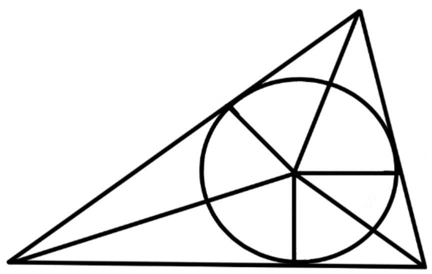


Рисунок 2.9

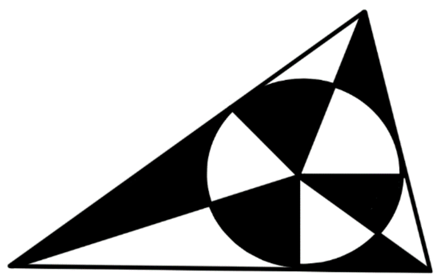


Рисунок 2.10

Відповідь: для розфарбування Рисунок 2.9 достатньо двох кольорів.

Інший приклад: використання у курсі геометрії 8-го класу у темі «Розв'язування прямокутних трикутників»[14].

Задача. у прямокутний трикутник ABC вписано коло. Знайти радіус вписаного кола, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 10, а менший катет – 6.

Розв’язання: Зобразимо рисунок який задовольняє умові задачі (Рисунок 2.11).

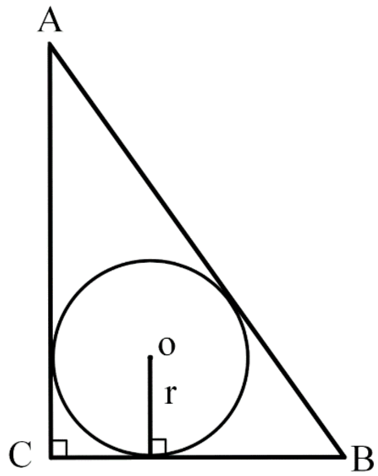


Рисунок 2.11

За теоремою Піфагора (у прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів[7]). $AB^2 = AC^2 + CB^2$, звідси $AC^2 = \ AB^2 - \ CB^2$, $AC^2 = 100 - 36$, $AC^2 = 64$, $AC = \sqrt{64}$, $AC = 8$.

З формули радіуса кола вписаного у прямокутний трикутник маємо:

$$r = \frac{AC + CB - AB}{2} = \frac{8 + 6 - 10}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Відповідь: радіус вписаного кола дорівнює 2.

Додатково. З’ясувати скільки кольорів потрібно для розфарбування Рисунок 2.10. так, щоб жодні з сусідніх областей не мали однаковий колір.

Розв’язання: розглянемо Рисунок 2.12 Використавши умову на ст.16, візьмемо за фігуру з кольором «1», яка повинна знаходитись у середині – центр кола. Кількість областей що знаходиться навколо «1» дорівнює трьом (непарна кількість). Отже мінімальна кількість кольорів для розфарбування – чотири (Рисунок 2.13).

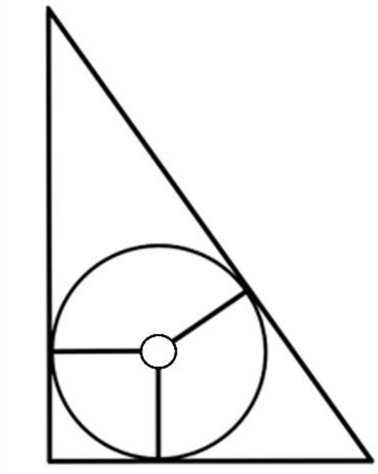


Рисунок 2.12

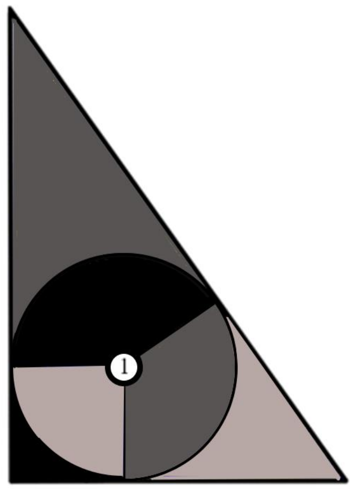


Рисунок 2.13

Відповідь: для розфарбування Рисунок 2.10 потрібно 4 кольори.

Цікаві задачі, та нестандартні рішення до них можна знайти у книгах пов’язаних с математичними головоломками[4,10,11].

Наведемо приклади задач для сьомого і восьмого класу з використанням додаткового завдання до задачі.

Задача. Розглянути Рисунок 2.14 Знайти градусні міру кута х. Додатково: довести, що для розфарбування достатньо трьох кольорів (границі рисунку прийняти за додаткові сторони)[6].

Задача. На Рисунок 2.15 $BC \parallel MK$, $BK = KE, CK = KD$. Довести, що $AD \parallel MK$. Додатково: Знайти мінімальну кількість кольорів для розфарбування (додатково з’єднати точки C і E)[12].

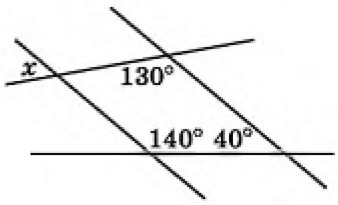


Рисунок 2.14

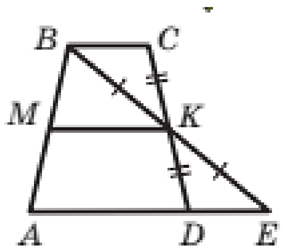


Рисунок 2.15

Задача. На Рисунок 2.16 зображено коло з центром у точці O та рівносторонній трикутник AOB , який перетинає трикутник у точках M і N. Точка D належить колу. Знайти градусну міру кута $MDK.$ Додатково: Знайти найменшу кількість кольорів для розфарбування[7].

Задача. У трапеції $ABCD$: $\angle A = 90^{\circ}, AB = 12$ см (Рисунок 2.17). Діагональ BD ділить середню лінію KL трапеції на відрізки KM і ML , при чому $KM = 5{,}5$ см і $ML = 3$ см . Обчисліть периметр трапеції ABCD. (у см). Додатково: розфарбувати трапецію найбільшою кількістю кольорів та найменшою[7].

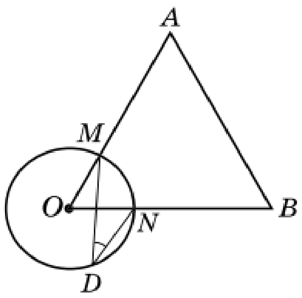


Рисунок 2.16

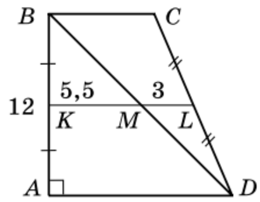


Рисунок 2.17

ВИСНОВОК

Використання теореми про чотири фарби на уроках математики у середній школі є доцільним та ефективним методом подання нової інформації. Додаткові завдання до задач позитивно впливають та розвивають міжпредметні зв’язки та уявлення про світ. Аналіз шкільних підручників показав, що використання теореми про чотири фарби можливе як у шостому, так і у восьмому класах.

Аналіз робіт вчених показав, що ця теорема не має конкретного математичного доведення, проте досить легко доводиться за допомогою комп'ютерних технологій. Це підкреслює міжпредметні зв'язки математики та інформатики.

Було розглянуто різні способи впровадження теореми за допомогою додаткових умов до здач. Простота і водночас наочність дає змогу проілюструвати різні випадки використання теореми. Застосування завдань до задач з використанням теореми більш доречне у шостому класі при вивчені теми відсотки. Діаграми, схеми можуть стати прикладом для ілюстрації теореми. У сьомих, восьмих класах відбувається більш серйозне викладення. Використання на уроках геометрії обумовлюється великою кількістю задач з рисунками кіл вписаних у трикутник, що є підґрунтям для використанням теореми.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров П. С., Ефремович В. А. Очерк основных понятий топологии. М. – Л. : ОНТИ, 1936. 94 с.
2. Барр С. Россыпи головоломок. М. :Мир,1987. 415 с.
3. Бибков М.М., Смирнова Л.А. Научно-иследовательская работа по математике: теорема о четырех красках. URL: https://files.school-science.ru/pdf/5/34582.pdf
4. Гарнер М. Математические головоломки и развлечения. М.: Мир, 1971. 511 с.
5. Донец Г. А., Шор Н. З. Алгебраичский подход к проблеме раскраски плоских графов. К.: Наукова думка, 1982. 144 с.
6. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза, 2015. 184 с.
7. Істер О.С. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. К. :Генеза, 2016. 216 с.
8. Касаткин В.Н. Необычные задачи математики. К. : Радянська школа, 1987. 155 с.
9. Лист Мебиуса URL: https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1007718
10. Мельников О. И. Занемательные задачи по теории графов. М.: ТетраСистемс, 2001. 144 с.
11. Мельников О. И. Незнайка в стране графов: Пособие для учашихся. М.: КомКнига, 2007. 160 с.
12. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти. Х. : Гімназія, 2020. 240 с.
13. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів з математики для 5-9 класів. URL:https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/onovlennya-12-2017/5-programa-z-matematiki.docx

14. Населення України URL:https://index.minfin.com.ua/reference/people/
15. Нові райони: карти+склад. URL:https://decentralization.gov.ua/news/12639
16. Прасолов В.В. Наглядная топология. М. : МЦНМО, 1995. 111 с.
17. Проблема четирех красок. URL:http://vasmirnov.ru/Lecture/4paints/4paints.htm
18. Рингель Г. Теорема о раскраске карт. М. :Мир, 1977. 256 с.
19. Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии. М.: Мир,1967. 225с.
20. Шмиг Р. А., Боярчук В. М., Добрянський І. М., Барабаш В. М. Термінологічний словник-довідник з будівництва та архітектури. Л., 2010. 222 с. URL:https://shron1.chtyvo.org.ua/Shmyh_Roman/Terminolohichnyi_slovnyk-dovidnyk_z_budivnytstva_ta_arkhitektury.pdf