МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

АКСІОМА ВИБОРУ ТА ТЕОРЕМА БАНАХА-ТАРСЬКОГО

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

Виконав: студент 4 курсу

Спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математика)»

Тімченко Михайло Олександрович

Керівник доктор фізико-математичних наук, професор

Савченко Олександр Григорович

Рецензент кандидатка фізико-математичних наук, доцентка

Гудирева Олена Михайлівна

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Математика – це одна з найважливіших наук і с цим твердженням неможливо не погодитися. Багато хто висловлюється про неї як про царицю наук, оскільки зв'язок математики з іншими науками дуже тісний та багато наук не можуть існувати самостійно без неї. Майже все в природі підпорядковується законам фізики, які неможливо було б відкрити, якщо б не математика. У наш час відсутнє навіть єдине конкретне визначення поняття математика. Кожен вчений по-своєму формулював це поняття. Так, наприклад, Галілео Галілей за математикою визначав мову, якою написано книгу природи, Арістотель математикою вважав науку про порядок та відношення, а ось Альберт Ейнштейн говорив про математику як про єдиний досконалий метод водити самого себе за ніс.

Але окрім математики існує ще й математична освіта. І хоча це два різних поняття, але важливість їх однакова. Важливість математичної освіти для людини відзначали протягом всього існування людства, з моменту появи самої математичної освіти. І це не дивно, адже саме завдяки математичній освіті у дітей розвиваються навички логічного міркування, аналізу, узагальнення та багато іншого. Також формуються такі якості вираження своїх думок, як точність, стислість, порядок, обґрунтованість і таке інше.

Тепер хочеться сказати, що незважаючи на, так би мовити, суворість та складність математичної освіти та математики в цілому, вона є дуже цікавою наукою, яка може заінтригувати, а також здивувати. Є дуже багато цікавих задач, які привертають увагу не тільки учнів, а й дорослих. Вони на перший погляд здаються складні, але якщо подивитися з іншого боку, то мають дуже просте рішення. Але стала ця наука знаменитою серед великої кількості людей, які не були пов’язані з математикою, саме завдяки своїм «парадоксам». Так, наприклад, існує парадокс «Брехун», який був сформульований давньогрецьким філософом Евбулідом. Більш детально про нього можна почитати в книзі Целіщєва В. В. «Парадокс Лжеца и первая теорема Гёделя о неполноте» (Целищев В. В.) [1]. Існують також парадокси Грелінга, Бері, парадокси-петлі і всі вони дивують, але найдивовижнішим «парадоксом» в теорії множин і, мабуть, у всій математиці є теорема Банаха-Тарського або ж як її ще називають парадокс подвоєння кулі.

Ця теорема привернула увагу вчених з усього світу. Дослідженням питання, яке пов'язано з цією теоремою, окрім Стефана Банаха та Альфреда Тарського займалися також Кантор, Бернштейн, а також Гаусдорф та багато інших. Саме тому цю теорему також називають теоремою Гаусдорфа-Банаха-Тарського. Незважаючи на те, що теорема доведена ще в 1926 році, вона до сих пір привертає увагу сучасних вчених з усього світу. Вони працюють над вдосконаленням цієї теореми, а деякі навпаки шукають певні прогалини в доведенні, щоб спростувати її. Адже не всі беззаперечно приймають цей «парадокс». З цього приводу проводиться багато конференцій. І саме це і визначає ***актуальність*** даної роботи.

Об'єктом дослідження є аксіоматичний підхід в курсі геометрії.

***Предмет дослідження*:** аксіома вибору та теорема Банаха-Тарського.

***Мета роботи*:** розглянути застосування аксіоми вибору в математиці, розглянути теорема Банаха-Тарського, порівняти аксіоматичні підходи до вивчення шкільного курсу геометрії різних авторів.

Для того, щоб досягти поставлену мету необхідно виконати такі ***завдання*:**

1. сформулювати аксіому вибору та розглянути її застосування;
2. сформулювати теорему Банаха-Тарського та зробити огляд її доведення;
3. розглянути аксіоматичний підхід до вивчення шкільного курсу геометрії.

***Методи дослідження*:** для того, щоб вирішити поставлені завдання були використані такі методи: огляд філософської, психолого-педагогічної та математико-методичної літератури; застосування розроблених матеріалів в процесі навчання математики.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що певні матеріали з цієї роботи можуть бути використані вчителями математики в їх діяльності.

РОЗДІЛ 1

АКСІОМА ВИБОРУ

1.1 Формулювання аксіоми

Аксіома вибору має дуже просто формулювання, але не зважаючи на це, вона часто фігурує в дискусіях з проблем заснування математики.

Першим аксіому вибору сформулював і опублікував в 1904 році німецький математик Ернст Цермело. Хоча, як свідчить історія, Беппо Леві зробив це на два роки раніше [2].

Аксіома 1.1. *Нехай* $F = \{A_i : i \in I\}$ *є сукупність попарно непересічних непустих множин. Тоді знайдеться множина* $C = \{x_i : i \in I\}$*, яка містить рівно по одному елементу* x_i *з кожної множини* $A_i \in F$ [3].

Після всім відомого п'ятого постулату Евкліда про паралельні прямі жодна з аксіом не викликала такого хвилювання в математичних колах та не порушила так багато суперечок з проблем заснування математики, але аксіомі вибору це вдалося зробити. Чому ж така проста аксіома стала об'єктом численних обговорень та суперечок багатьох математиків?

Насправді відповідь очевидна і полягає в неконструктивній природі аксіоми вибору. Оскільки вона стверджує лише існування множини C з деякими властивостями, але не дає жодного натяку (алгоритму), як цю множину побудувати. Якщо подивитися на всі інші аксіоми теорії множин, то вони стверджують, що певні конструкції, відправляючись від множин, знову дають множини, та побудовані певним чином сукупності множин також є множинами. В якості прикладу можна навести аксіому степені, яка стверджує, що для будь-якої множини X сукупність $F(X)$ всіх її підмножин є множиною.

Бертран Рассел так відгукнувся про аксіому вибору: "Спочатку вона здається очевидною, але чим більше вдумуватися, тим більш дивними здаються висновки з цієї аксіоми; під кінець ж взагалі перестаєш розуміти, що ж вона означає" [2].

Як було сказана раніше, явне формулювання аксіоми вибору зазвичай приписується Цермело, але згідно Френкелю, Бар-Хіллелу та Леві (які дають чудовий огляд не тільки аксіоми вибору, але й проблем аксіоматичних заснувань теорії множин взагалі) першим хто зробив явне посилання на аксіому вибору в своїй праці з диференціальних рівнянь був Пеано.

Німецький математик Цермело в 1904 році довів, що кожну множину можна цілком впорядкувати. За декілька років до цього Кантор, побудувавши теорію кардинальних чисел, поставив проблему визначення величини континуума (*континуум-гіпотезу*). Він висунув припущення, що множину всіх дійсних чисел (континуум) можна цілком впорядкувати, або, що цю множину можна розкласти в трансфінітну послідовність, що є еквівалентним твердженням.

Для того, щоб довести, що кожна множина може бути цілком впорядкована, Цермело сформулював аксіому вибору. В тій формі, в якій він її сформулював, вона використовується тепер, але ж в сучасній термінології звучить ця аксіома дещо інше і формулюється наступним чином.

Аксіома 1.2.(вибору). *Для кожного сімейства F непустих множин знайдеться така функція f, що $f(X) \in X$ для кожної множини X з сімейства F* [3].

Функція, про яку йдеться в аксіомі, називається *функцією вибору* на F. Перед тим, як перейти до огляду доведення Цермело, треба переконатися, що формулювання аксіоми 1.2 еквівалентне першому формулюванню, тобто аксіомі 1.1. Так як якщо сімейство F складається з попарно непересічних множин, то аксіоми 1.1 та 1.2, очевидно, виражають одне і те ж, тобто аксіома 1.1 є окремим випадком аксіоми 1.2. Тепер покажемо, що якщо припустити принцип вибору для сімейств непересічних множин, то можна довести загальне формулювання 1.2.

Нехай F є сімейство непустих множин: $F = \{X: X \in F\}$. Щоб застосувати 1.1, використовуємо наступний прийом, «який робить множини з F непересічними». Для кожного $X \in F$, нехай A_x є сукупність всіх таких упорядкованих пар $\langle X, a \rangle$, що $a \in X$:

$$A_x = \{X\} \times X.$$

Тепер сукупність $\{A_x: X \in F\}$ складається з попарно непересічних непустих множин, і за допомогою 1.1 ми можемо вибрати по одному елементу z_x з кожної множини A_x. Але кожна множина z_x має вигляд пар $\langle X, a_x \rangle$, де $a_x \in X$. Отже, ми можемо легко отримати шукану функцію вибору на F, визначивши $f(x) = a_x$ для кожного $X \in F$ [3].

Тепер повернемося знову до Цермело. Доведення теореми про повну впорядкованість має такий вигляд: нехай S - будь-яка довільна множина; побудуємо повну впорядкованість цієї множини. Тут нам доводиться використовувати аксіому вибору і заключати, що існує функція вибору f на сімействі F всіх непустих підмножин множини S. Тепер будуємо трансфінітну послідовність $\langle a_\alpha : \alpha < \theta \rangle$ елементів множини S, за допомогою трансфінітної індукції, наступним чином: спочатку треба побудувати перші α членів $a_0, a_1, \dots, a_\xi, \dots (\xi < \alpha)$ цієї послідовності, потім перевірити, чи існують такі елементи множини S, які не фігурують серед інших членів, тобто чи є непустою множина

$X = S - \{a_\xi : \xi < \alpha\}$. Якщо ж ця множина є непустою, то, використовуючи аксіому вибору, вибираємо a_α за допомогою нашої функції вибору $f: a_\alpha = f(X)$. Робимо цю процедуру до тих пір, поки для деякого ординала θ множина $S - \{a_\xi : \xi < \theta\}$ не стане пустою; інакше кажучи, поки не буде $S = \{a_\xi : \xi < \theta\}$. Саме такий перелік множини S ординалами і дає впорядкованість S.

Виходячи з цього можна зробити висновок, що хоча ми і довели припущення Кантора про можливість повного впорядкування континуума, ми, однак, не побудували ніякого «відчутного» повного впорядкування. Саме це і викликає обурення в багатьох математиків. Грубо кажучи, одне сумнівне припущення ми лише замінили іншим на стільки ж сумнівним припущенням, яке і є нашою аксіомою вибору.

Фактично аксіома вибору та теорема Цермело про повне впорядкування є логічно еквівалентними. Покажемо, як аксіома вибору виводиться з припущення про те, що кожну множину можна цілком впорядкувати. Візьмемо довільне сімейство F непустих множин та через S позначимо об'єднання всіх множин цього сімейства: $S = \bigcup\{X: X \in F\}$. За допомогою якого-небудь повного впорядкування $<$ множини S ми можемо визначити функцію вибору f на сімействі F наступним чином: якщо $X \in F$, то $f(X)$ є найменший елемент множини X в сенсі порядку $<$ [3].

Багато цікавого матеріалу про аксіому вибору і взагалі про теорію множин, а також про топологію можна дізнатися з книги Александрова П. С. «Введение в теорию множест и общую топологию» (Александров П. С.) [4].

1.2 Застосування аксіоми вибору

У цьому пункті я хочу розглянути деякі типові застосування аксіоми вибору в математиці і таким чином продемонструвати її важливість. В якості прикладу можна навести теорему Тихонова. Ця теорема стверджує, що топологічний добуток будь-якого сімейства компактних просторів є компактним. Людина, яка має справу з математикою помітить, що твердження цієї теореми є переформулюванням аксіоми вибору. В цій теоремі елементи декартового добутку є функціями вибору.

Достатньо відомий математик Келлі показав, що зв'язок між аксіомою вибору та теоремою Тихонова дуже близький. Він продемонстрував, що аксіома вибору виводиться з припущення про те, що дана теорема справедлива. В теорії множин ці два твердження є логічно еквівалентними.

Більша частина доведень, які застосовують аксіому вибору проходять майже однаковим шляхом. У доведенні вищезгаданої теореми Тихонова йдеться про існування *максимального* об’єкту в певному класі об’єктів. Можна також розглянути теорему, яка стверджує, що кожний векторний простір має базис. Доведення цієї теореми зводиться до того, щоб показати існування максимально лінійно незалежної множини векторів.

В функціональному аналізі також існує такого роду теорема – теорема Хана-Банаха. Вона має дуже багато формулювань, але одне з них стверджує, що будь-який лінійний функціонал, визначений на підпросторі даного векторного простору, може бути продовжений на весь простір. Якщо розглянути доведення цієї теореми, то ми дійдемо до висновку, що певні продовження цього функціоналу будуть максимальними елементами деякого розглянутого сімейства F.

Невдовзі був усвідомлений той факт, що майже всі доведення, які спираються на аксіому вибору використовують існування деяких максимальних об'єктів і це привело до формулювання деякого загального принципу, який називають лемою Цорна, хоча вперше він був доведений Куратовським, а вже через 20 років був, так сказати, передоведений Цорном.

Лема 1.1.(лема Цорна). *Нехай* $\langle P, < \rangle$ *є непуста частково впорядкована множина, що задовольняє наступним умовам: кожний ланцюг в P має верхню грань. Тоді в P знайдеться максимальний елемент* [3].

Доведення цієї леми ми розглядати не будемо, але вона дуже легко доводиться за допомогою аксіоми вибору. Хочеться також сказати, що не тільки з аксіоми вибору випливає лема Цорна, а і навпаки, з леми Цорна випливає аксіома вибору.

Тепер я хочу розглянути один цікавий наслідок, який випливає з аксіоми вибору та який володіє деякою властивістю, що теореми, які здавалося б не мають до нього ніякого відношення стануть йому еквівалентними.

Підмножина I булевої алгебри B називається *ідеалом*, якщо мають місце такі три умови:

1) $0 \in I, 1 \notin I.$
2) Якщо $a \in I$ та $b \leq a,$ то $b \in I.$
3) Якщо $a \in I$ та $b \in I$, то $a + b \in I.$

Ідеал I в алгебрі B називають *простим ідеалом*, якщо для кожного $a \in B$ виконується або $a \in I$, або $-a \in I$.

Теорема 1.1. Про простий ідеал (теорема Тарського). *Кожна булева алгебра має простий ідеал* [3].

Доведення цієї теореми базується на лемі Цорна.

Теорема про простий ідеал дуже часто застосовується в логіці і цікавим фактом є те, що теорема компактності еквівалентна теоремі про простий ідеал, а саму теорему компактності застосовують в деяких доведеннях замість аксіоми вибору. Також хочеться сказати, що теорема Хана-Банаха є наслідком теореми про простий ідеал.

В різних додатках аксіоми вибору не завжди обов'язково використовувати її самий загальний варіант, який стверджує існування функції вибору на будь-якому сімействі непустих множин. У багатьох доведеннях, зокрема в аналізі, достатньо використовувати твердження про те, що кожне зліченне сімейство непустих множин має функцію вибору. Досить дивно, що цей варіант аксіоми вибору більш прийнятний для критиків цієї аксіоми, адже він має таке ж неконструктивне формулювання, як і загальне формулювання, і особисто мені не зрозуміло, чому він повинен бути більш правдоподібним [3].

Зліченна аксіома вибору використовується в дескриптивній теорії множин, в класичному аналізі та в теорії міри, зокрема для доведення міри Лебега та основних властивостей борелівських множин.

Більш детально про аксіому вибору та її застосування в математиці розповідається в книзі Мєдвєдєва Ф. А. «Ранняя история Аксиомы выбора» (Медведев Ф. А.) [5].

У Мєдвєдєва є ще одна дуже цікава книга, в якій також йдеться про аксіому вибору та розповідається про її зв'язок з математичним аналізом (Медведев Ф. А.) [6].

1.3 Несуперечливість аксіоми вибору

В цьому пункті ми розглянемо питання несуперечливості аксіоми вибору, яке на відміну від питання правдоподібності, є суто формальною проблемою аксіоматичної теорії множин.

Позначимо через $\sum$ систему аксіом, тоді $\sum$ для якоїсь математичної теорії називають несуперечливою, якщо не можна отримати протиріччя, спираючись на аксіоми з $\sum$. Існує дуже відома теорема Геделя про неповноту, яка стверджує, що несуперечливість досить сильної теорії (такою є, наприклад, теорія множин) не може бути встановлена методами, формалізованими в розглянутій теорії. Якщо сказати іншими словами, то це означає, що не можна формально довести несуперечність аксіоматичної арифметики, теорії множин і тому подібних теорій в цій же розглянутій теорії.

Тепер перед нами постає питання, чи є деяка аксіома А *несуперечливою* щодо деякої аксіоматичної системи $\sum$. Іншими словами, чи буде система з доданою аксіомою А несуперечливою в припущенні того, що сама $\sum$ несуперечлива. З цього випливає, що заперечення певної аксіоми А можна довести в теорії $\sum$ (якщо використовувати наше припущення). Якщо ж розглядати нашу аксіому вибору, то питання полягає в тому, щоб довести, що вона несуперечлива відносно інших аксіом теорії множин. Таким чином, якщо ми це доведемо, то можна зробити висновок, що її не можна спростувати, використовуючи інші аксіоми (якщо ці аксіоми самі утворюють несуперечливу теорію).

В 1939 році австрійським математиком Геделем була доведена несуперечливість аксіоми вибору і це було зроблено разом з несуперечливістю континуум-гіпотези. Але перед як зробити огляд доведення Геделя, скажемо кілька слів про доведення несуперечності взагалі.

Як ми вже зазначали вище, то кожен, навіть не математик, знайомий з проблемою постулату Евкліда про паралельні прямі і з різними моделями неевклідової геометрії (наприклад, з геометрією Лобачевського). Саме ці моделі неевклідової геометрії встановлюють недовідність постулату про паралельні прямі в геометрії тим, що вони задовольняють всім іншим аксіомам геометрії, окрім того самого постулату про паралельні прямі. Для того, щоб довести несуперечливість деякої аксіоми, в нашому випадку аксіоми вибору, щодо якоїсь теорії $\sum$, то зазвичай будують модель теорії $\sum$, в якій ця аксіома істинна, відштовхуючись від деякої даної моделі теорії $\sum$.

Розповімо про два методи отримання моделей теорії множин, які задовольняють нашій аксіомі вибору. Ці методи вперше зазначив Гедель.

Перша модель складається з *конструктивних множин*. В основі конструктивних множин лежить наступна ідея. Так як аксіоми теорії множин постулюють можливість різних побудов, то повинна існувати мінімальна сукупність множин, які замкнуті відносно всіх теоретико-множинних конструкцій. Таким чином, *конструктивну модель* L (універсум всіх конструктивних множин) будують трансфінітною індукцією, відправляючись від порожньої множини і виконуючи замикання щодо теоретико-множинних операцій. Конструктивна модель задовольняє всім аксіомам теорії множин, а також аксіомі вибору. Аксіома вибору виявляється істинною в цій моделі з тієї причини, що всі множини в конструктивній моделі можна розташувати в трансфінітну послідовність: конструктивна множина X передує конструктивній множині Y, якщо X будується раніше Y. [3]

Інакше кажучи, в конструктивній моделі L ми маємо повне впорядкування універсума, і таким чином аксіома вибору виконується в цій моделі.

Інша модель (модель HOD) використовує *визначені множини*. Вона складається з усіх множин, які є *спадково ординально визначеними*. Це означає, що беруться множини, визначені формулою, яка містить тільки ординали в якості параметрів, причому таким же чином визначені елементи цих множин, елементи їх елементів і так далі. Модель HOD замкнута щодо теоретико-множинних операцій і в основному по цій причині задовольняє всім аксіомам теорії множин. Знову існує повне впорядкування універсуму HOD: ми можемо перенумерувати всі можливі способи визначення множин, і за допомогою цієї нумерації і звичайного повного впорядкування ординальних параметрів влаштувати повне впорядкування HOD множин. [3]

1.4 Математика без аксіоми вибору

У попередньому пункті ми довели, що аксіома вибору не суперечить іншим аксіомам з теорії множин, а, отже, не видно причин, чому її не можна було б застосовувати в математичних доведеннях. Але через те, що аксіома вибору має специфічний «характер», що і відрізняє її від інших аксіом, краще все ж таки досліджувати моделі теорії множин, в яких аксіома вибору не застосовується або ці моделі їй не задовольняють. Знову можна побачити аналогію з неевклідовою геометрією: але все ж таки вивчаючи такі моделі, де застосовується аксіома вибору, ми дізнаємося, які теореми в дійсності спираються на аксіому вибору і які зв'язки між наслідками і різними ослабленими формами цієї аксіоми.

Є дуже багато відомих результатів, пов’язані з аксіомою вибору, але найцікавішими з цього числа є ті, які відносяться до дійсних чисел.

Таким, наприклад, є результат Соловея. Американський математик в середині XX ст. побудував модель теорії множин, де кожна множина дійсних чисел вимірюється по Лебегу. В цій моделі можуть бути доведені всі стандартні теореми з теорії мір Лебега та дескриптивної теорії множин, оскільки в ній виконується принцип залежного вибору. Модель Соловея привертає увагу багатьох вчених тим, що в ній немає різних штучних контрприкладів таких, як невимірна множина Віталі, розривна адитивна функція і тому подібне.

Американський математик Коен побудував свою модель множини дійсних чисел, що не містить зліченних підмножин. Така множина дійсних чисел називається *дедекіндовою*. Саме ця множина дійсних чисел A породжує ряд цікавих прикладів. Напевно кожен зможе показати, що існує гранична точка a у цій множині A. Проте вона не може бути межею, а, отже, і граничною точкою, ніякої послідовності елементів множини $A-\{a\}$, так як A - дедекіндова множина. Цим всім я хотів показати, що якщо немає аксіоми вибору, то два стандартних визначення граничної точки не будуть еквівалентними.

Неперервність функції дійсної змінної також визначається двома способами: один через $\varepsilon-\delta$-визначення, а інший говорить, що з $lim x_n = x$ слідує $lim f(x_n) = f(x)$. За допомогою дедекіндової множини дійсних чисел можна побудувати функцію, яка неперервна в сенсі визначення через границі, але має розрив в сенсі $\varepsilon-\delta$-визначення [3].

Є ще одна дуже цікава модель, яка була побудована Феферманом і Леві. В цій моделі множина всіх дійсних чисел є об'єднанням зліченного числа зліченних множин.

Пермутаційні моделі разом з теоремами про перенесення є джерелом деяких інших цікавих контрприкладів. Наступні приклади були побудовані Лейхлі в пермутаційних моделях, а потім перенесені на теорію множин за допомогою теореми про вкладення (за винятком прикладу поля без алгебраїчного замикання, перенесення якого зробив Пінкус):

1) векторний простір, що не має базису;

2) векторний простір, у якого є два базиси різної потужності;

3) вільна група, комутант якої не є вільною групою;

4) поле, яке не має алгебраїчного замикання [3].

В пункті 1.2. ми докладно обговорювали теорему Тарського про простий ідеал. Ця теорема тягне за собою теорему про впорядкування, а це остання недоведена теорема в теорії множин, якщо не враховувати аксіому вибору. З цього випливає, що і сама теорема про простий ідеал буде недоведена. Сама аксіома вибору не випливає з теореми про простий ідеал. Це показали Халперн та Леві.

Хочеться сказати ще декілька слів про ультрафільтри. Американський математик Соломон Феферман побудував модель, в якій немає нетривіальних ультрафільтрів над множиною всіх натуральних чисел, а пізніше цей результат був посилений німецьким математиком Блассом, який побудував модель, де взагалі немає нетривіальних ультрафільтрів.

Тепер хочу звернути свою увагу на теорію кардинальних чисел, яка стає вельми цікавою, якщо прибрати аксіому вибору. Без аксіоми вибору, наприклад, неможливо довести, що будь-які два кардинала можна порівняти.

Один старий результат Тарського стверджує, що якщо для кожного нескінченного кардинала $\aleph$ виконується $\aleph \cdot \aleph = \aleph$, то аксіома вибору має місце. Недавня конструкція Сагєєва показує, що для рівності

$\aleph + \aleph = \aleph$ ситуація інша. У моделі Сагєєва ця рівність істинна для всіх нескінченних $\aleph$, але аксіома вибору не вірна [3].

1.5 Аксіома детермінованості – альтернатива до аксіоми вибору

Багато аксіом мають свої наслідки і аксіома вибору цьому не виключення, але ряд наслідків, які з неї випливають, в основному, до певної степені є небажаними. Прикладом такого наслідку є наприклад, існування невимірної множини дійсних чисел. Внаслідок цього вченими було зроблено декілька спроб сформулювати аксіоми, які суперечать аксіомі вибору, але з яких випливають більш цікавіші та привабливі наслідки. Тут знову можна побачити деяку аналогію з неевклідовою геометрією. Таким чином з'явилася найбільш цікава та відома альтернатива аксіомі вибору – *аксіома детермінованості*.

Кожна множина A нескінченних послідовностей натуральних чисел визначає наступну нескінченну гру G_A двох гравців. Гравець 1 пише натуральне число n_0 гравець 2 відповідає тим, що пише натуральне число n_1, потім гравець 1 пише n_2, гравець 2 пише n_3 і так далі. Якщо отримана в результаті гри послідовність $n_0, n_1, n_2, \dots$ належить множині A, то переможцем вважається гравець 1, в іншому випадку виграє гравець 2. Гра G_A називається детермінованою, якщо або гравець 1 має виграшну стратегію, або гравець 2 має виграшну стратегію. Аксіома детермінованості стверджує, що для кожної такої множини послідовностей A гра G_A є детермінованою [3].

Але чи можна побудувати гру, яка не буде детермінованою? Відповідь на це запитання «так» і це легко зробити, використовуючи повне впорядкування множини всіх послідовностей натуральних чисел. З цього можна зробити висновок, що аксіома детермінованості суперечить аксіомі вибору.

Найкраще на аксіому детермінованості відреагували фахівці з області дескриптивної теорії множин, оскільки саме ця аксіома тягне за собою зліченну аксіому вибору, і таким чином основні теореми теорії дійсних чисел не страждають від відсутності аксіоми вибору. Також з аксіоми детермінованості слідує, що будь-яка множина дійсних чисел вимірюється по Лебегу, має властивість Бера і або зліченна, або має потужність континууму. Окрім вище сказаного, ця незвичайна аксіома вирішує різні проблеми в області дескриптивної теорії множин. До таких проблем належать теореми уніформізації та редукції.

Окрім тих бажаних наслідків, які аксіома детермінованості має в дескриптивній теорії множин, мало що можна сказати в користь цій аксіомі як альтернативі до аксіоми вибору. Можна відзначити, наприклад, що з неї випливає, що кардинали $\aleph_1$ і $\aleph_2$ вимірні, кардинали $\aleph_3, \aleph_4, \aleph_5, \dots$ сингулярні, а кардинали $\aleph_{\omega+1}$та $\aleph_{\omega+2}$ знову вимірні. Все ж ця аксіома надзвичайно цікава. Оскільки вона тягне виконання різних властивостей типу великих кардиналів, то потрібно відштовхуватися від великих кардиналів, якщо ми хочемо довести несуперечність аксіоми детермінованості. Це виглядає дуже важкою проблемою, так як ми до сих пір не знаємо навіть, чи є несуперечливими деякі наслідки детермінованості. Одним із наслідків цієї аксіоми є, наприклад, таке твердження:

кожна підмножина кардинала $\aleph_1$ або містить деяку замкнену необмежену в $\aleph_1$, множину, або не перетинається з деякою такою множиною [3].

Це твердження ми позначимо символом (*). Воно тягне за собою вимірність кардинала $\aleph_1$. Твердження (*) буде виглядати значно більш сильнішим, якщо ми будемо вважати встановленою несуперечливість пропозиції про вимірність $\aleph_1$. Але як це зробити? До нас цим займалися

Мартін та Мітчелл. Саме вони підтвердили ту пропозицію, побудувавши модель теорії множин, в якій багато вимірних кардиналів. Робили вони це, відштовхуючись від нашого твердження (*).

На мою думку, доведення несуперечливості нашого твердження (*) або інших тверджень такого ж роду, які випливають з аксіоми детермінованості повинно бути першим кроком на шляху вирішення проблеми несуперечливості самої аксіоми детермінованості, яка безумовно є найбільш цікавою проблемою, що відноситься до аксіоми вибору і є її альтернативою, а в деяких випадках навіть і запереченням.

Більш детально про аксіому детермінованості, а також про її застосування в математиці можна почитати у В. Г. Кановея (Кановей В. Г.) [7].

РОЗДІЛ 2
ТЕОРЕМА БАНАХА-ТАРСЬКОГО

2.1 Вимірні та невимірні множини

Множина - це фундаментальне поняття не тільки математики, а й усього навколишнього світу. Візьміть прямо зараз в руку будь-який предмет. Ось вам і множина, що складається з одного елементу.

У широкому сенсі, множина - це сукупність об'єктів (елементів), які розуміються як єдине ціле (за тими чи іншими ознаками, критеріями або обставинами). Причому, це не тільки матеріальні об'єкти, але і букви, цифри, теореми, думки, емоції і т. д.

Зазвичай множини позначаються великими латинськими літерами $A, B, C, \dots, X, Y, Z$ (як варіант, з підрядковими індексами: A_1, A_2, B_7 і т.п.), а його елементи записуються в фігурних дужках, наприклад: [8]

1. $A = \{а, б, в, \dots, ю, я\}$ - множина букв українського алфавіту.
2. $B = \{1,2,3,4,5, \dots\}$ - множина натуральних чисел.

Міра Жордана – це спосіб формалізації поняття довжини, площі, а також n-мірного об'єму в евклідовому просторі, який є n-вимірним.

Міра Жордана визначається як кінцево-адитивна міра, яка задовольняє наступним умовам:

1) Міри всіх конгруентних багатогранників рівні.
2) Міра будь-якого одиничного куба дорівнює одиниці.

Міра Жордана $m\Delta$ паралелепіпеда $\Delta = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ в R^n визначається як добуток $m\Delta = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

Для обмеженої множини $E \subset R^n$ визначаються:

● зовнішня міра Жордана

$$m_e E = inf \sum_{k=1}^{N} m\Delta_k, \bigcup_k \Delta_k \supset E.$$

● внутрішня міра Жордана

$$m_i E = sup \sum_{k=1}^{N} m\Delta_k, \bigcup_k \Delta_k \subset E, \Delta_k \cap \Delta_m = \emptyset, \text{якщо } k \neq m,$$

тут $\Delta_1, \ \Delta_2, \dots , \ \Delta_N -$ паралелепіпеди описаного вище виду.

Множина E називається вимірною по Жордану, якщо $m_e E = m_i E$. В цьому випадку міра Жордана дорівнює $mE = m_e E = m_i E$.

Розглянемо міру Жордана m визначену на R. Нехай $A = [0,1] = \{x \in R: 0 \leq x \leq 1\}$ - множина точок одиничного відрізка, Q - підмножина раціональних точок множини A, тоді Q - невимірна по Жордану множина, так як $m_e Q = 1, m_i Q = 0, m_e Q \neq m_i Q$. Таким чином нижня та верхня міри Жордана не співпадають [9].

Приклад. Довести, використовуючи визначення міри Жордана, вимірність відрізка $F = [a, b] \subset R^n, a < b$, та знайти його міру.

Розв'язання. Для визначеності будемо вважати, що $a > 0$. Представимо числа a та b у вигляді нескінченного десяткового дробу.

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots,$$

$$b = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots b_k \dots.$$

При цьому справедливі рівності

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \leq a \leq a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k + \frac{1}{10^k},$$

$$b_0, b_1 b_2 b_3 \dots b_k \leq a \leq b_0, b_1 b_2 b_3 \dots b_k + \frac{1}{10^k}.$$

Виберемо натуральне k. Нехай F_k множина всіх тих відрізків (куби в одномірному випадку) порядку k, які цілком містяться у відрізку $[a, b]$, а F^k - множина всіх тих відрізків порядку k, які мають непустий перетин з $[a, b]$. Очевидно, що справедливі наступні нерівності

$$b_0, b_1 \dots b_k - a_0, a_1 \dots a_k - \frac{2}{10^k} \leq \mu F_k \leq \mu F^k \leq b_0, b_1 \dots b_k -$$
$$a_0, a_1 \dots a_k + + \frac{2}{10^k}.$$

Спрямовуючи k до нескінченності, отримуємо, що

$$b - a \leq \mu_* F_k \leq \mu^* F_k \leq b - a.$$

Звідси слідує вимірність відрізка $[a, b]$. При цьому його міра $\mu[a, b]$ дорівнює $b - a$ [10].

Міра Лебега на R^3 – це міра, яка є продовженням або, як можна ще сказати, розширенням міри Жордана на більш широкий клас множин. Вона була введена французьким математиком Лебегом в 1902 році.

Для будь-якої підмножини E числової прямої можна знайти безліч різноманітних систем, об'єднання яких містить множину E. Ці системи беруться з кінцевого числа інтервалів. Такі системи будемо називати покриттями. Так як сума довжин інтервалів, які складають довільне покриття, є величиною невід'ємною, то виходить, що вона обмежена знизу. Таким чином, можна зробити висновок, що множина довжин всіх покриттів завжди має точну нижню грань. Ця точна нижня грань, що залежить тільки від множини E, і називається зовнішньої мірою:

$$m^* E = inf \left\{ \sum_i \Delta_i \right\}.$$

Інші еквівалентні позначення зовнішньої міри: $m^*E = \varphi(E) = |E^*|$.

Якщо множина E обмежена, то її внутрішньою мірою називається різниця між довжиною сегмента $[a,b]$, який містить множину E і зовнішньою мірою доповнення E в $[a,b]$:

$$m_*E = (b-a) - m^*([a,b]\backslash E).$$

Для необмежених множин, внутрішня міра m_*E визначається як точна верхня грань $(b-a){-}m^*([a,b]\backslash E)$ по всім відрізкам $[a,b]$.

Множина називається вимірною по Лебегу, якщо її зовнішня m^*E і внутрішня міри m_*E дорівнюють одна одній.

З цього можна зробити висновок, що останні значення і називаються мірою множини по Лебегу. Їх позначають так: $mE, \mu E, |E|, \lambda(E)$ або $mes\ E$.

Приклад 1. Будь-який кінцевий проміжок (сегмент, інтервал або напівінтервал) є вимірною по Лебегу множиною і її міра дорівнює довжині цього проміжку.

Приклад 2. Будь-яка кінцева множина вимірна по Лебегу і її міра дорівнює нулю.

Приклад 3. Будь-яка зліченна множина $E = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ вимірна по Лебегу та $\mu(E) = 0$.

Приклад 4. Будь-яка відкрита обмежена множина G вимірна.

Приклад 5. Будь-яка обмежена закрита множина F вимірна [11].

Розглянемо приклад невимірної по Лебегу множини. В цьому нам допоможе розглянута раніше аксіома вибору, оскільки без неї тут не обійтись. Це знову підтверджує той факт, що аксіома вибору важлива в математиці та без неї ніяк. Зараз ми з її допомогою побудуємо на колі S^1 невимірну по Лебегу множину.

Міра $\mu(A)$ - «довжина множини A» - це функція, яка задовольняє наступним властивостям:

1. $\mu(S^1) = 1$.

2. Для зліченного числа попарно непересічних множин $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ міра об'єднання цих множин дорівнює сумі мір самих множин:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

3. $\mu(A) \geq 0$.

Окрім цього, вимагатимемо від міри Лебега ще одну властивість, яка, взагалі кажучи, не вимагається від довільної міри. Ця властивість називається інваріантністю.

4. Якщо множину посунути (у випадку кола – повернути), міра не повинна змінитися.

$$\mu(A) = \mu\big(\varphi(A)\big),$$

де φ - поворот.

Наприклад, якщо A - це половина дуги кола, то $\mu(A) = \frac{1}{2}$. Дійсно, якщо $B = S^1 \backslash A$ - доповнення до A, то $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) = \mu(S^1) == 1$ та $\mu(B) = \mu\big(\varphi_\pi(A)\big) = \mu(A)$, тому $2\mu(A) = 1$ та $\mu(A) = \frac{1}{2}$.

А чи будь-яка множина на колі вимірна по Лебегу, тобто чи для кожної множини A можна порахувати її міру $\mu(A)$? Виявляється, що не для кожної.

Перший приклад невимірної по Лебегу множини привів Віталі.

Кожна точка кола задається кутом від 0 до 2π - і далі ми будемо позначати точки кола числами від 0 до 2π. Назвемо дві точки a та b еквівалентними, якщо

$$a - b = q \cdot 2, q \in Q$$

(будемо в такому випадку писати $a \sim b$. Таким чином, коло розбивається на так звані *класи еквівалентності* – множини A_x, в які разом з точкою x входять і всі точки , еквівалентні x. Чи можуть дві такі множини A_xта A_y перетинатися? Якщо u - спільний елемент цих множин, то $u \sim x$ для будь-якого елемента $x \in A_x$ та $u \sim y$ для будь-якого елемента $y \in A_y$. Але якщо

$$u - x = q_1 \cdot 2\pi, q_1 \epsilon\, Q,$$

$$u - y = q_2 \cdot 2\pi, q_2 \epsilon\, Q,$$

то $x - y = (q_2 - q_1)2\pi$, тобто $x \sim y$, оскільки $q_2 - q_1 \epsilon\, Q$. Отже, $A_x = A_y$.

Таким чином, як і рівність (=), наше відношення еквівалентності ($\sim$) володіє транзитивністю: якщо $a \sim b$, $b \sim c$, то і $a \sim c$. Відношення еквівалентності, очевидно, володіє також симетричністю та рефлексивністю: якщо $a \sim b$, то і $b \sim a$; $a \sim a$ для будь-якого a.

Використовуючи аксіому вибору, виберемо з усіх класів еквівалентності по одному представнику та створимо з них множину V. Чому може бути дорівнювати міра отриманої множини V? Міра $\mu(V)$ не може бути рівна 0, оскільки

$$\bigcup_{q \epsilon Q} \varphi_{2\pi q}(V) = s^1$$

(множини $\varphi_{2\pi q}(V)$ попарно не перетинаються), а $\sum_{q\epsilon Q}\mu(\varphi_{2\pi q}(V)) = \sum_{q\epsilon Q} 0 \neq 1$. З аналогічних причин міра $\mu(V)$ не може бути більше 0, оскільки виходить, що

$$\mu(S^1) = \sum_{q\epsilon Q}\mu\left(\varphi_{2\pi q}(V)\right) = +\infty.$$

Тому вважається, що міра $\mu(V)$ невизначена, тобто V є невимірною по Лебегу множиною (Ященко И. В.) [12].

2.2 Квадратура кола Тарського

Людству відомі декілька, а якщо бути точнішим, три класичні задачі з давньогрецької математики. Вони справили величезний вплив на розвиток геометрії, а також всієї математики в цілому. Це, так звані, задачі про квадратуру кола, подвоєння куба і трисекцію кута, які призвели до того, що багато вчених в пошуках розв'язання цих задач зійшли з розуму.

Задача про квадратуру кола в тій формі, в якій ми знаємо її сьогодні, виникла в грецькій математиці, і її сенс не завжди правильно розуміли. А сама задача потребує, щоб для довільного кола побудували геометричними методами квадрат, причому площа цього квадрата повинна дорівнювати площі даного кола. На перший погляд все дуже легко та зрозуміло, але це тільки на перший погляд. Методи, які було дозволено використовувати, щоб зробити таку побудову, були не зовсім зрозумілі тих, хто за це брався. Як відомо спектр методів, використовуваних в геометрії греків, було розширено саме завдяки різним спробам вирішення цієї та інших класичних задач. Отже, в цьому є і свої плюси.

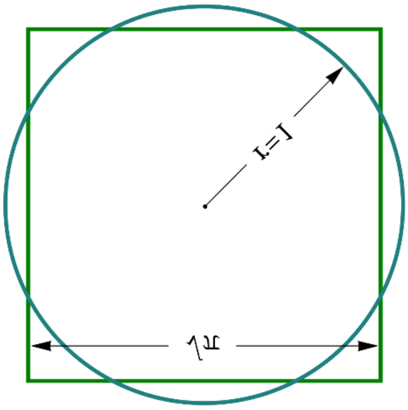
Першим математиком, який намагався квадрирувати коло і таким чином вирішити цю задачу, є давньогрецький філософ Анаксагор.

Незабаром після цього задача стає вельми популярною навіть серед великого числа людей, які не були математиками. Гіппократ, або як його ще називають «батько медицини» був першим, хто використав плоску побудову, щоб вирішити цю задачу. Гіппій і Діностраt намагалися це зробити методом квадратури кола з використанням плоскої трансцендентної кривої, яку називають квадратріса. У 1450 році німецький мислитель Микола Кузанський намагався довести, що коло може бути квадрируване за допомогою плоскої побудови. В 1761 році Ламберт довів ірраціональність числа π. Це стало важливим кроком в доведенні того, що коло, все ж таки, не можна квадрирувати за допомогою циркуля та лінійки. Але як відомо, деякі алгебраїчні числа можуть бути побудовані саме з використанням лише циркуля та лінійки. Отже, цього було недостатньо, щоб довести, що за допомогою циркуля і лінійки неможливо квадрирувати коло. Всі ці події призвели до того, що потік аматорських рішень задачі про квадратуру кола лише збільшився. В 1775 році Паризька Академія наук, виходячи з усього цього, прийняла рішення, згідно якого жодна спроба розв’язання цієї задачі, представлена в ній, не буде розглянута. В 1880 році видатний вчений Ліндеман довів, що число π трансцендентне, тобто що воно не являється коренем ніякого полінома з раціональними коефіцієнтами. Таким чином людство отримало остаточну відповідь на питання, чи можливо все ж таки квадрирувати коло з використанням лише таких інструментів як циркуль та лінійка. Трансцендентність числа π остаточно доводить, що такої побудови не існує і існувати не може.

На думку багатьох, інтерес до задачі мав би зникнути, але все склалося навпаки і вчені пішли ще далі.

Квадратура кола Тарського – це, так звана, задача про рівноскладеність кола та рівновеликого квадрата.

Вона має дуже просте формулювання і звучить так: чи можливо розрізати коло на деяку кількість частин та деякими перетвореннями зібрати з них квадрат, який буде такий же за площею? Також є і інше формулювання, в якому замість розбиття кола на частини використовується розбиття на підмножини, причому на такі, які не перетинаються та стоїть умова пересувати їх так, щоб вони утворили розбиття квадрата, який за площею буде рівний вихідному колу.



В 1925 році цю задачу сформулював польський вчений Альфред Тарський. І тільки в 1990 році знайшов рішення цієї задачі угорський математик Лацкович, але зробив він це через 7 років після смерті Альфреда Тарського. В доведенні використовується аксіому вибору. Для того, щоб це зробити потрібно майже 10^{50} частин, які є невимірними множинами. Частини переміщували паралельно і не використовувалися повороти та відбиття. Лацкович також продемонстрував, що це можна зробити з колом та будь-яким іншим багатокутником. Американський математик Тревор Вілсон довів, що це можна зробити, причому з умовою, що при паралельних перенесеннях частини залишалися непересічними [13].

І знову ми зустрічаємо використання аксіоми вибору, при знаходженні розв’язку задачі, точніше при доведенні цього розв’язку. Без неї цього зробити не можна було б і задача про квадратуру кола так і залишилась би нерозв'язаною. В цьому і полягає практичне значення цієї «дивної» аксіоми.

У 2017 році Ендрю Маркс і Спенсер Унгер знайшли повністю конструктивне рішення задачі Тарського з розбиттям на борелівські шматки [14].

Багато чого цікавого про квадратуру кола можна почитати в книзі Перельмана. Там розповідається про правду та вимисел, про двохтисячорічні пошуки розв'язання, про завершення пошуків та про практичне значення цієї задачі (Перельман Я. И.) [15].

2.3 Формулювання теореми Банаха-Тарського та огляд її доведення

Багато вчених виступали проти розглянутої раніше аксіоми вибору, а все через те, що ця аксіома має дуже парадоксальні наслідки. За допомогою аксіоми вибору можна отримати дуже цікаві результати, які суперечать нашій інтуїції та логіці. Найбільш відомим прикладом, який це підтверджує є наступний парадокс.

Парадокс Банаха-Тарського: *сферу можна розбити на кінцеве число частин (шматків), які можна переставити так, що вийде дві сфери такого же розміру, як і вихідна сфера.*

Цей парадокс був відкритий в 1926 році видатними вченими Стефаном Банахом та Альфредом Тарським. Його часто називають ще парадоксом Гаусдорфа-Банаха-Тарського, оскільки він дуже подібний на більш ранній парадокс Гаусдорфа.

Дві підмножини в евклідовому просторі називаються *рівноскладеними*, якщо одну з них можна розбити на кінцеве число частин і скласти з них іншу.

Для того, щоб парадокс Банаха-Тарського виконався достатньо п'яти частин, але чотирьох – ні.

Але якщо бути точнішим, дві множини A та B називаються *рівноскладеними*, якщо їх можна представити як кінцеве об'єднання підмножин без перетинів $A = \bigcup_i^n A_i$, $B = \bigcup_i^n B_i$ так, що для кожного i підмножина A_i конгруентна B_i.

Існує також більш сильніший варіант цього парадоксу: будь-які дві обмежені підмножини з евклідового простору, у яких непорожня внутрішність є рівноскладеними.

Цей парадокс є неправдоподібним, але його часто використовують як аргумент проти прийняття аксіоми вибору. Хоча саме ця аксіома використовується для побудови такого розбиття. Але якщо прийняти відповідну альтернативну аксіому, то це дозволить довести неможливість зазначеного розбиття і місця для парадоксу не залишиться.

Хочеться ще сказати, що суть парадоксу і можливість його виконання полягає в тому, що в доведенні використовуються невимірні множини, що не мають об'єму.

Зробимо невеликий огляд доведення цього «парадоксу» для того, щоб показати, як використовується аксіома вибору, і для того, щоб показати, що в цій теоремі немає нічого парадоксального, оскільки ми будемо працювати з невимірними множинами, конструкція яких мало чим відрізняється від добре відомої конструкції невимірної множини дійсних чисел.

Дуже легко зрозуміти, що частини, на які розбивається сфера, не можуть бути вимірними множинами, оскільки так би ми отримали протиріччя з властивістю адитивності міри. Згадаємо дуже відому конструкцію невимірної множини дійсних чисел, яка належить Віталі та розглянемо наступне відношення еквівалентності на дійсних числах інтервалу $[0,1]$:

$x \sim y$, тоді і тільки тоді, коли $x - y$ раціональне

Це відношення еквівалентності породжує розбиття одиничного інтервалу на класи еквівалентності. Використовуючи аксіому вибору, ми вибираємо по одному елементу з кожного класу еквівалентності та збираємо ці елементи у множину M. Ця множина $M \subseteq [0,1]$ не може бути вимірною.

Парадокс Банаха-Тарського базується на більш ранній теоремі Гаусдорфа, яка дає парадоксальне розбиття сфери.

Теорема Гаусдорфа. *Сфера S може бути розбита на непересічні множини $S = A \cup B \cup C \cup Q$ так, що:*

а) множини A, B, C конгруентні між собою;

б) множина $B \cup C$ конгруентна кожній із множин A, B та C;

в) множина Q зліченна.

Дамо дуже короткий начерк доведення. Більш детальне доведення міститься в книзі Йеха.

Розглянемо дві вісі a_φ та a_ψ обертання сфери та розглянемо групу всіх обертань, які породжені поворотом φ на 180° навколо осі a_φ та поворотом ψ на 120° навколо a_{ψ}. Кожен оберт з цієї групи може бути описаний формальним добутком («словом»), який складений з φ, ψ, ψ^2, з урахуванням того, що $\varphi^2 = 1$ та $\psi^3 = 1$ (вийшов, якщо угодний, вільний добуток груп $\{1, \varphi\}$ та $\{1, \psi, \psi^2\}$).

По-перше, ми стверджуємо, що вісі a_{φ} та a_{ψ} можна обрати таким чином, що різні «слова» описують різні оберти, які породжені поворотами φ та ψ. Щоб довести це, достатньо визначити кут θ між a_{φ} та a_{ψ} так, щоб ніяке нетривіальне слово не описувало тотожного обертання. Якщо деяке слово описує тотожне обертання, то θ буду розв'язком визначеного рівняння. При цьому виявляється, що це рівняння має тільки кінцеве число розв'язків, і, отже, існує лише зліченна множина таких кутів θ, що деяке нетривіальне слово описує тотожне обертання. Виходить, будь-який кут, який не належить цій зліченній множині, буду шуканим.

Нехай G є група всіх слів (або обертів, породжених поворотами φ та ψ). Вирішальним моментом доведення є розбиття множини G на три непересічні множини A', B' та C'такі, що

$$A' \cdot \varphi = B' \cup C', A' \cdot \psi = B', A' \cdot \psi^2 = C'.$$

Побудова такого розбиття нескладна, і кожен, ймовірно зможе самостійно його здійснити.

Тепер використаємо аксіому вибору аналогічно тому, як це зроблено в побудові Віталі. Кожний оберт $a \in G$ має дві нерухомі точки на сфері. Виходить, сукупність Q всіх точок сфери, які залишаються нерухомими при якому-небудь відмінному від тотожного обертання з G, є зліченною, а множина $S - Q$ є об'єднання непересічних класів еквівалентності («орбіт»), які відповідають відношенню еквівалентності: $x \sim y$, тоді і тільки тоді, коли $y = x\alpha$ для деякого $\alpha \in G$. Згідно аксіомі вибору існує множина M, яка містить рівно по одному елементу з кожної орбіти. Якщо ми покладемо

$$A = M \cdot A', B = M \cdot B', C = M \cdot C',$$

То множини A, B, C та Q будуть задовольняти вимогам теореми Гаусдорфа.

Тепер, щоб отримати парадокс Банаха-Тарського, розглянемо наступне відношення еквівалентності між множинами в тривимірному евклідовому просторі: $X \approx Y$, тоді і тільки тоді, коли існує таке розбиття $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ множини X на кінцеве число непересічних множин та таке розбиття $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$ на те ж саме число непересічних множин, що X_i конгруентно Y_i для кожного $i = 1, \ldots, m$.

Неважко перевірити, що $\approx$ дійсно буде відношенням еквівалентності, причому, якщо X не перетинається з X', Y не перетинається з Y', $X \approx Y$, $X' \approx Y'$, то $X \cup X' \approx Y \cup Y'$. Більш важливою властивістю є наступна: якщо $X \subseteq Y \subseteq Z$ та $X \approx Z$, то $X \approx Y$. (Доведення цієї властивості схоже на доведення теореми Кантора-Бернштейна: якщо $X \subseteq Y \subseteq Z$ та $|X| = |Z|$, то $|X| = |Y|$.)

Маючи в нашому розпорядженні розбиття сфери, яке дано теоремою Гаусдорфа, можна без особливих зусиль за допомогою згаданих властивостей відношення $\approx$ довести наступну теорему:

Теорема (Банах-Тарський, 1924). *Замкнена куля U може бути розбита на дві непересічних множини $U = X \cup Y$ так, що $U \approx X$* та $U \approx Y$ [3].

На цьому доведення нашого «парадоксу» завершується. Як бачите, то ми знову спиралися на аксіому вибору. Отже, все ж таки вона нам потрібна. Вона застосовується в різних розділах математики. Без неї багато задач математики так і залишилися би нерозв’язаними.

Повернемося до нашої теореми. Про деякі інші деталі парадоксу Банаха-Тарського можна дізнатися з книги Г. Сєкєя «Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике» (Секей Г.) [16].

Більш детальне доведення теореми Банаха-Тарського описується в книзі «Парадокс Банаха-Тарского» авторів В. С. Губа та С. М. Львовський (Губа В. С., Львовский С. М.) [17].

2.4 У просторі можна, на площині – ні

В цьому пункті я розповім, чому на площині аналога теореми Банаха-Тарського немає. Але саме доведення я дам поверхнево, оскільки знань поверх шкільної програми тут потребуватиметься дуже багато.

Для того, щоб це продемонструвати треба показати, що коло не рівноскладене об'єднанню двох непересічних кіл. Вірний наступний факт:

Правило 1. Нехай D - коло на площині. Тоді неможливо розбити D на попарно непересічні підмножини $X_1, \ldots, X_n$ таким чином, щоб множини, конгруентні деяким k з них, створювали розбиття кола D, а множини, конгруентні тим $n-k$, які залишилися, також утворювали розбиття кола D.

Правило 2. Нехай C - окружність з центром O. Тоді неможливо розбити C на попарно непересічні підмножини $X_1, \ldots, X_n$ таким чином, щоб деякі k з них після відповідних поворотів відносно O утворювали розбиття окружності C та $n-k$ з них, які залишилися після відповідних поворотів відносно O також утворювали розбиття C.

Те, що ми дозволяємо підмножини окружності тільки повертати, але не відображати, несуттєво: якщо дозволити ще й відображати, подвоєння все одно не вийде, тільки доведення буде трохи складніше. Нам зараз важливо продемонструвати загальний принцип.

Почнемо з абсолютно елементарної задачі.

Задача про бліх. На площині в кожній точці з цілими координатами сидить по блосі. Всі блохи одночасно здійснюють стрибки, довжини яких в сукупності обмежені (скажімо, не перевищують 10000), і виявляються в іншій точці з цілими координатами (або в тій же самій). Чи можуть вони стрибнути так, щоб в результаті в кожній точці сиділо по дві або більше блохи?

Відповідь на це питання "ні", і рішення дуже просте. Спочатку в квадраті, що складається з точок з координатами, що не перевершують по модулю натурального числа n, сиділи $(2n+1)^2$ бліх, а після стрибка там повинно виявитися як мінімум удвічі більше, тобто по меншій мірі $2(2n+1)^2$. З іншого боку, всі ці блохи могли прийти тільки з квадрата, утвореного точками з координатами, що не перевершують (знову по модулю) $n+10000$. Отже,

$$2(2n+1)^2 \leq (2(n+10000)+1)^2,$$

але при досить великих n ця нерівність виконуватися не може - протиріччя.

Повчально порівняти цей результат з наступною задачею.

Задача 1. У кожній вершині ab-графа сидить блоха. Всі блохи одночасно здійснюють стрибок і виявляються в інший (або в тій же самій) вершині, причому довжина стрибка (тобто довжина шляху по ребрах зі старої вершини в нову) для кожної блохи не перевищує 10000. Чи можуть вони стрибнути так, щоб в результаті в кожній вершині сиділо по дві або більше блохи? (Підказка: відповідь позитивна, і обмеження 10000 сильно завищено.

Тепер застосуємо задачу про бліх до справи. Припустимо, що блохи сидять не на одному, а на кількох однакових аркушах r-мірного кліткового паперу, а стрибки проходять так: спочатку кожна блоха стрибає в межах свого листа (довжини стрибків обмежені), а потім вона за бажанням може перескочити в точку з тими ж координатами на іншому аркуші.

Задача 2. Покажіть, що і в цьому випадку неможливо організувати стрибки так, щоб на кожному аркуші в кожній вершині сиділо по дві або більше блохи.

Отже, ми довели неможливість «подвоєння» кола (приклад 2). Основну роль в цьому доведенні зіграло те, що група поворотів площини комутативна. Тому довести приклад 1 буквально так само не вдасться. Проте виявляється, що група рухів площини хоч і не комутативна, але в певному сенсі «близька» до комутативності (Губа В. С., Львовский С. М.) [17].

В кінці всього цього хочеться розповісти про групи рухів площини та простору. В чому ж їх суттєва відмінність?

Нехай G - група рухів площини. Зіставимо кожному руху число +1, якщо він зберігає орієнтацію, і число -1, якщо він орієнтацію змінює. Позначимо через H_1 групу, що складається з чисел +1 і -1 (операція - множення); ця група, звісно ж, комутативна. Відображення, яке ставить у відповідність руху (зазначеним вище чином) число +1 або -1, позначимо $f_1: G \to H_1$; це відображення є гомоморфізмом (тобто образ добутку дорівнює добутку образів).

Позначимо через G_1 «ядро» відображення f_1, тобто множину елементів групи G, що переходять при відображенні f_1 в одиницю. Група G_1 складається з рухів, які зберігають орієнтацію, тобто з поворотів і паралельних переносів. Якщо кожному руху площини, який зберігає орієнтацію зіставити кут, на який він повертає вектори, то при композиції рухів ці кути складаються. Тому якщо позначити групу кутів (вона ж, якщо завгодно, група поворотів щодо початку координат) через H_2, то відображення $f_2: G \to H_2$, яке зіставляє кожному руху кут, є гомоморфізмом; зауважимо, що група H_2 комутативна. Нехай, нарешті, G_2 - ядро гомоморфізму f_2; ця група складається з рухів, які зберігали орієнтацію і не повертали вектори, тобто з паралельних переносів, і вона вже комутативна. Якщо групу можна подібним чином «розгвинтити» на комутативні, її називають вирішуваною. Ось точне визначення.

Визначення 1. *Нехай $G = G_0$ - група. Якщо існує кінцева послідовність комутативних груп $H_1, \dots, H_n$ та гомоморфізмів $f_1, \dots, f_n$, в якій $f_j: G_{j-1} \to H_j$, G_j - ядро гомоморфізму f_j та група G_n, яка є ядром F_n, вже комутативна, то групу G називають вирішуваною.*

Звісно, згідно з цим визначенням всяка комутативна група автоматично вирішувана: можна взяти $n = 1$, а в якості гомоморфізму f_1 - гомоморфізм в групу, що складається тільки з одиничного елемента. З обговорення вище випливає, що група рухів площині вирішувана. Група ж рухів простору вирішуваною вже не є (Губа В. С., Львовский С. М.) [17].

В цьому і полягає суттєва відмінність групи рухів площини та простору. І на цьому с теоремою Банаха-Тарського ми завершимо та перейдемо ще до одного цікавого пункту, який зв'язує мою тему зі шкільним курсом математики.

2.5 Аксіоматичний підхід до вивчення шкільного курсу геометрії

Просторове мислення є дуже важливим компонентом інтелектуального розвитку учнів. Воно забезпечує орієнтацію в просторі, ефективність засвоєння знань, та успіх у оволодінні вміннями та навичками у самому процесі навчання математики, а особливо геометрії.

Вивчення геометрії в школі сприяє формуванню просторового мислення учнів, але як показує практика, матеріал, що розглядається на уроках з геометрії викликає в учнів деякі труднощі, насамперед пізнавального та психологічного характеру. Все це відбувається через те, що шкільний курс геометрії побудований на дедуктивній основі.

Аксіоматичний метод пройшов у своєму, якщо так можна сказати, історичному розвитку три стадії.

Перша стадія пов'язана з побудовою геометрії ще в Стародавній Греції. Саме в цей період з'являється робота Евкліда «Початки». Більшість шкільних підручників з геометрії будувалися саме на геометричному матеріалі з роботи Евкліда, а деякі навіть зараз сформовані таким чином.

Особливо популярним став підручник з геометрії для учнів середньої школи А. П. Кисельова, який був виданий вперше наприкінці ХХ століття. Цим підручником користувалися в школах України дуже тривалий час [18].

Структура підручника А.П. Кисельова мала такий вигляд: перед початком вивчення самої планіметрії сформульовані *основні властивості площини* і *прямої*. Ці властивості в подальшому назвали аксіомами, а також були наведені три аксіоми з «Початків» Евкліда. Всі інші твердження з планіметрії в подальшому були доведені без посилання на ці аксіоми. Був використаний, так званий, метод накладання.

В іншому розділі, а саме в стереометрії були сформульовані три властивості площини, названі аксіомами. Ці три властивості певним чином використовувались при доведенні теорем. Але слід зазначити, що саме про систему аксіом та застосування аксіоматичного методу до вивчення шкільного курсу геометрії у підручнику Кисельова мови не було.

В своїх додатках до стереометрії А.П. Кисельова професор Н. Д. Глаголєв виклав суть аксіоматичного методу побудови геометрії, а також короткий зміст «Початків» Евкліда та закінчив все це системою аксіом Д. Гільберта (Петренко С. В., Нестеренко І. О.) [19].

У 70-ті роки двадцятого століття в школах України планіметрію вивчали за навчальним посібником, який був підготовлений авторським колективом під керівництвом видатного радянського математика Колмогорова (Колмогоров А. М., Семенович О. Ф., Черкасов Р. С) [20].

В цьому підручнику систему аксіом, на якій би розглядалась в подальшому планіметрія, не сформульовано, отже, аксіоматичний метод не був реалізований.

Професор Н.Д. Глаголєв у своїх додатках запропонував одну із можливих систем аксіом. Ця система аксіом відповідала системі викладу геометричного матеріалу у вищезгаданому підручнику.

Система аксіом Н. Д. Глаголєва складалася з дванадцяти аксіом, які були поділені на п'ять груп: до першої групи увійшли аксіоми належності (три аксіоми); до другої групи – аксіоми відстані (три аксіоми); в третій групі були аксіоми порядку (чотири аксіоми); в четвертій групі розташувалася аксіома рухомості; до п’ятої групи увійшла аксіома паралельних (Петренко С. В., Нестеренко І. О.) [19].

У 80-і роки двадцятого століття знову було зроблено кілька спроб побудувати на аксіоматичній основі шкільний курс геометрії. Найпопулярнішим став підручник радянського математика О.В. Погорєлова (Погорєлов А. В.) [21] та підручник Л.С. Атанасяна.

Після всього цього почалася друга хвиля в історії аксіоматичного методу. Вона була пов'язана, певним чином, з відкриттями Лобачевського, Гауса та Бойяи. Вони зробили можливою побудову несуперечливої системи аксіом, яка відрізнялась від евклідової. Друга хвиля розвитку аксіоматичного методу завершилася створенням. Так званих, аксіоматичних систем геометрії, арифметики, числення висловів та предикатів і т. д.

Клейн та Пуанкаре пізніше довели несуперечливість геометрії Лобачевського. Це було зроблено завдяки аксіоматики Гільберта. Незабаром були описані логічні засоби виведення теорем з аксіом і, як наслідок, вчені підійшли до концепції формального аксіоматичного методу. Так почалася третя хвиля (Петренко С. В., Нестеренко І. О.) [19].

Дедуктивна побудова геометрії повинна визначатися її аксіоматикою. Але не потрібно змішувати та вважати однаковою аксіоматичну побудову шкільного курсу геометрії з аксіоматичною побудовою геометрії як науки. Спроби авторів поєднати ці аксіоматичні побудови в шкільних підручниках приводили до невдач. Наприклад, всі знають досить популярну система аксіом великого математика Гільберта, але для побудови шкільної геометрії вона не підходить. Оскільки для дедуктивної побудови шкільного курсу геометрії необхідно мати дуже легку систему аксіом, яка буде доступна та зрозуміла учням. Найбільше цим вимогам відповідала система аксіом радянського математика О.В. Погорєлова. В його підручнику геометричний матеріал викладався на основі оригінальної і економної системи аксіом, яка була легкою в сприйнятті учнів і при цьому, а це найголовніше, аксіоматичний виклад розпочинався від початку курсу.

На початку XXI століття з’являються нові, більш сучасні підручники з геометрії, які відповідають вимогам сучасності та за якими і надалі продовжують навчатися учні багатьох шкіл.

Розглянемо структуру сучасного підручника с геометрії. До таких належить підручник з геометрії, який виданий авторами Бурда та Тарасенкова.

В їх підручнику основними фігурами є *точка* та *пряма*. Використовуються такі відношення як *«належати», «лежати між»* та *«накладання»*. Вони вводяться без означень. На цих основах даються означення інших складових підручника. Розглядаються 10 аксіом планіметрії. Після цього переходять до стереометрії, де вивчаються ті ж фігури, але в просторі. Використовують аксіоматичний метод, який тут дуже доцільний. Основними фігурами тут є *точка, пряма* та *площина*. Вводяться також 4 аксіоми стереометрії та розглядаються їх три наслідки (Бурда М. І., Тарасенкова Н. А.) [22].

Отже, якщо підбити підсумки, то аксіоматичний метод відіграє особливу роль в математиці. Предметом досліджень в математиці є безліч математичних структур, а дослідження цих всіх структур відбувається на основі аксіоматичного методу.

Таким чином, розвиток наук на початку XX століття показав, що математика в системі наук є єдиною, що використовує аксіоматичний метод дуже широко. Але найголовнішим є те, що цей метод дійсно працює та значною мірою зумовлює вражаючу ефективність математики, особливо в процесі пізнання навколишнього світу та ще в багато чому.

Сама побудова шкільного підручника з геометрії на аксіоматичній основі ставить перед вчителем математики надзвичайно важливе завдання – досконало володіти матеріалом, враховувати методичні особливості матеріалу та створювати умови для його ефективного засвоєння та використання при розв’язуванні задач на уроках геометрії.

На факультативних заняттях, учням, яким це буде цікаво, можна розповісти про аксіоматичний підхід в теорії множин. Аксіоматична підхід в теорії множин – це напрям у математичній логіці, який присвячений вивченню фраґментів змістовної теорії множин методами математичної логіки. З цією метою саме ці фраґменти теорії множин подають у вигляді аксіоматичної теорії. В її основі лежить система аксіом, які приймаються без доведення і з яких виводяться усі інші теореми теорії множин. Причиною, яка обумовила створення такої теорії стало відкриття деяких парадоксів (антиномій, суперечностей), так званої, «наївної» теорії множин. Серед найвідоміших парадоксів є парадокс Кантора і Рассела. Таким чином можна розглянути деякі аксіоми з цієї теорії множин, однією з яких є наша аксіома вибору. А потім привести приклади застосування аксіоми вибору і тут розповісти про дуже цікавий «парадокс» Банаха-Тарського, який реалізується саме з її допомогою.

ВИСНОВКИ

У даній роботі я розглянув питання, яке пов'язане з аксіомою вибору та теоремою Банаха-Тарського.

Під час написання цієї роботи були проведені відповідні дослідження, які вирішували поставлені мною завдання, а саме:

1. Я сформулював аксіому вибору та розглянув питання її застосування.

Вирішуючи це завдання, я дійшов до висновку, що аксіома вибору стверджує, що для кожного сімейства F непустих множин знайдеться така функція f, що f(X) ∈ X для кожної множини X з сімейства F. А сама функція f називається функцією вибору. Також я зробив висновок, що аксіома вибору є дуже важливою в математиці, оскільки вона багато де застосовується. Наприклад, вона використовується в доведенні теореми Тихонова, а якщо копати глибше, то можна побачити, що теорема Тихонова та аксіома вибору є логічно еквівалентними твердженнями. Також за допомогою аксіоми вибору дуже легко провести доведення леми Цорна, теореми Хана-Банаха, теореми про простий ідеал, теореми, яка стверджує, що кожен векторний простір має базис. Підбиваючи підсумки можна сказати, що доведення всіх цих теорем відбувається одним шляхом: стверджується існування якогось максимального об'єкту (елементу). Також було показано, що теорема компактності може використовуватися в деяких доведеннях замість аксіоми вибору. Наприклад, в доведенні твердження, що кожну множину можна лінійно впорядкувати. Було продемонстровано існування зліченної аксіоми вибору та її використання в дескриптивній теорії множин, в класичному аналізі та в теорії міри, зокрема для доведення міри Лебега та основних властивостей борелівських множин. Мною також було продемонстровано існування математики без аксіоми вибору. І я показав, що без аксіоми вибору два стандартних означення граничної точки не будуть еквівалентними, а в теорії кардинальних чисел неможливо буде довести, що два будь-які кардинали можна порівняти.

2. Я сформулював теорему Банаха-Тарського та зробив короткий огляд її доведення.

Підбиваючи підсумки цього завдання, можна сказати, що теорема Банаха-Тарського стверджує, що сферу можна розбити на п’ять частин, які можна переставити так, що вийде дві сфери такого же розміру, як і вихідна сфера. Також можна наголосити на тому, що для подвоєння сфери чотирьох частин не достатньо. З приводу доведення цієї теореми можна сказати тільки, що її доведення відбувається за допомогою аксіоми вибору і ми працюємо з невимірними множинами у просторі і таким чином теорема має право на існування. На площині ж теорему довести неможливо, оскільки групи рухів площини та простору мають суттєву відмінність: група рухів площини – вирішувана, а ось простору – ні.

3. Я розглянув аксіоматичний підхід до вивчення шкільного курсу геометрії.

Розглядаючи це завдання я дійшов до висновку, що аксіоматичний підхід пройшов у своєму розвитку три періоди. В кожному з цих періодів були свої підручники та своя аксіоматика. Але для того, щоб зробити дедуктивну побудову шкільного курсу геометрії потрібна така система аксіом, яка буде зрозуміла учням. Цій вимозі найбільше відповідала система аксіом радянського математика О.В. Погорєлова. Тому саме його підручником тривалий час користувалися в школах України. На даний момент більшість шкіл користуються підручником з геометрії таких авторів як Бурда М. І. та Тарасенкова Н. А. Підручник побудований на 10 аксіомах планіметрії та 4 аксіомах стереометрії з трьома наслідками.

Виходячи із всього цього, я хочу сказати, що аксіоматичній підхід до вивчення шкільного курсу геометрії є дуже ефективним, але щоб досягти результату необхідно виконувати певні вимоги та враховувати особливості дітей, а також удосконалювати систему аксіом підручників. Але великий відсоток ефективності, в основному, залежить від вчителя. Перед ним стоїть надзвичайно важливе завдання – навчити, а для цього необхідно досконало володіти матеріалом та враховувати вікові особливості дітей.

Отже, всі поставлені мною завдання виконані, а тому мета моєї бакалаврської роботи досягнута.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Целищев В. В. Парадокс лжеца и первая теорема Гёделя о неполноте / В. В. Целищев. // Schole. Философское антиковедение и классическая традиция. – 2017. – №2. – С. 415–427.

2. Аксіома вибору [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://znaimo.com.ua/Аксіома_вибору.

3. Справочная книга по математической логике: В 4–х частях / Под ред. Дж. Барвайса. – Ч. II. Теория множеств: Пер. с англ. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 376 с.

4. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П. С. Александров. – М.: Наука, 1977. 368 с.

5. Медведев Ф. А. Ранняя история Аксиомы выбора / Ф. А. Медведев. – М.: Наука, 1982. 304 с.

6. Медведев Ф. А. Аксиома выбора и математический анализ // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1980. – № 25. – С. 167-188.

7. Кановей В. Г. Аксиома выбора и аксиома детерминированности / В. Г. Кановей. – М: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – (Проблемы науки и технического прогресса) . – 64 с.

8. Емелин А. Множества. Операции над множествами. Отображение множеств. Мощность множества [Електронний ресурс] / Александр Емелин – Режим доступу до ресурсу: http://mathprofi.ru/mnozhestva.html.

9. Мера Жордана [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://ru.wikipedia.org/wiki/Мера_Жордана.

10. Рудой Е. М. Математический анализ: мера Жордана. Кратный интеграл [Електронний ресурс] / Е. М. Рудой. – 2009. – Режим доступу до ресурсу: http://nocmss.hydro.nsc.ru/files/rudoy3.pdf.

11. Примеры измеримых множеств. Открытые и замкнутые множества [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://eor.dgu.ru/lectures_f/Электр_учебное_пособие_Рамазанов_Интеграл_Лебега/4.htm.

12. Ященко И. В. Парадоксы теории множеств / И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2002. 40 с.

13. Формулювання теореми Банаха-Тарського [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://ua-referat.com/uploaded/1-formulyuvannya-teoremi-banaha-tarsekogo-paradoks-banaha-tar/index1.html.

14.Квадратура круга Тарского [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://ru.googl-info.com/3610361/1/kvadratura-krugatarskogo.html.

15. Перельман Я. И. Квадратура круга / Я. И. Перельман. – Л.: Дом занимательной науки, 1941. 28 с.

16.Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике / Г. Секей. – М.: Мир, 1990. 240 с.

17. Губа В. С. "Парадокс" Банаха-Тарского / В. С. Губа, С. М. Львовский. – М.: МЦНМО, 2012. 48 с.

18. Энциклопедия элементарной математики: Книга пятая: Геометрия. – М.: Наука, 1966. 624 с.

19. Петренко С. В. Аксіоматичний підхід до вивчення шкільного курсу геометрії / С. В. Петренко, І. О. Нестеренко. – 2013. – №1. – С. 38–46.

20. Колмогоров А.М., Семенович О.Ф., Черкасов Р.С.. Геометрія: Навчальний посібник для 6-8 класів середньої школи. – К.: Рад. школа, 1973.

21. Погорєлов А.В. Геометрія 7-11 клас / Погорєлов А.В. – К.: Радянська школа, 1991. 352 с.

22. Бурда М.І. Геометрія 10 клас / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К.: Зодіак – ЕКО, 2010. 174 с.