

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики**  
**Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу**

**ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ В КУРСІ АЛГЕБРИ**  
**7-9 КЛАСІВ**

**Кваліфікаційна робота (проект)**

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

Виконала студентка 421 групи  
Спеціальності 014.09 Середня освіта  
(математика)  
Освітньо-професійної програми  
Середня освіта (математика)  
Цьот Анастасія Віталіївна

Керівник: к. ф.-м. н., доц.,  
Бистрянцева Анастасія Миколаївна  
Рецензент: старший вчитель, вчитель  
математики вищої категорії НВК  
«Школа гуманітарної праці»  
Гринько Олена Анатоліївна

Херсон – 2020

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП.....</b>	<b>3</b>
<b>РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ</b>	<b>5</b>
1.1. Місце та роль теми «Функції» в курсі алгебри 7-9 класів.....	5
1.2. Аналіз шкільних підручників з алгебри 7-9 класів щодо теоретичного матеріалу з теми «Функції» .....	10
<b>РОЗДІЛ 2 ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ В КУРСІ АЛГЕБРИ 7-9 КЛАСІВ .....</b>	<b>19</b>
<b>ВИСНОВКИ .....</b>	<b>28</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....</b>	<b>29</b>

## ВСТУП

Функції та їх властивості відіграють важливу роль і місце в шкільному курсі алгебри. Засвоєння теми, яка передбачає розширення понятійного апарату учнів через вивчення великої кількості означень та властивостей, потребує багато часу для вивчення в навчальному курсі. З першими означеннями та найпростішими властивостями відбувається знайомство вже з 7 класу. Але в курсі алгебри основне навантаження щодо цієї теми припадає на 8-й клас, коли звертається увага не лише на вивчення понять, а й на формування умінь учнів мислити, активізувати роботу думки. Учні демонструють свої творчі здібності намагаючись самостійно вирішити те чи інше завдання, заходячи для цього різні способи. Завдяки цьому в дітей з'являється інтерес до навчання. Для кращого розуміння теорії потрібно спробувати застосовувати її на практиці під час розв'язування завдань теми. Для цього потрібно розвивати розумові здібності, що потрібні для успішного навчання. До таких здібностей відносять уміння аналізувати, доводити, узагальнювати, вони дозволяють розвивати увагу, пам'ять, фантазію, абстрактне мислення.

Тому в шкільному курсі тема «Функції та їх властивості» відіграють важливу роль для учнів. За допомогою цієї теми учні навчаються розвивати пам'ять, вивчаючи базові означення теми, їх властивості, уяву при побудові графіків, вміння встановлювати та доводити властивості функцій при розв'язуванні вправ, знаходити різні способи розв'язування завдання.

**Об'єктом дослідження** виступає процес навчання алгебри в шкільному курсі математики 7-9 класів.

**Предметом дослідження** є функції та їх властивості, що розглядаються в курсі алгебри 7-9 класів.

**Мета даної роботи** є дослідити особливості вивчення функцій та їх властивостей в процесі навчання алгебри в 7-9 класах.

Розглядаючи мету, об'єкт, та предмет можна сформулювати такі **завдання**:

1. Провести аналіз чинної програми з математики щодо місця та ролі досліджуваної теми.
2. Проаналізувати підручники з курсу алгебри 7-9 класів, рекомендовані Міністерством освіти і науки України.
3. Провести аналіз та систематизацію вправ з теми «Функції та їх властивості».

## РОЗДІЛ 1

### ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

#### 1.1. Місце та роль теми «Функції» в курсі алгебри 7-9 класів

На сучасному етапі алгебра може вивчатися не лише як наука про системи об'єктів певної природи, для яких встановлюється операція, що за своїми властивостями є схожою на додавання та множення чисел. Шкільний курс алгебри включає не тільки суто алгебраїчний матеріал, а й той, що є підґрунтям для вивчення надалі математичного аналізу. До нього, наприклад, можна віднести вчення про функцію. Навчальний матеріал курсу алгебри групується навколо п'яти основних змістових ліній:

1. Розвиток поняття про число.
2. Тотожні перетворення виразів.
3. Рівняння та нерівності.
4. Вчення про функцію.
5. Елементи статистики, комбінаторики і теорії ймовірностей (Слепкань З.І.) [17].

В 1-6 класах учні вже зустрічаються із функціональною пропедевтикою, а вже явне введення поняття функції, відповідно до чинної програми з алгебри [14], відбувається в 7 класі. Саме на цьому етапі учні знайомляться з функціональною залежністю між величинами як моделлю реальних процесів.

Першою темою для вивчення в шкільному курсі алгебри в 7 класі є тема «Цілі вирази». Вона, відповідно до чинної програми, передуює темі «Функції» та передбачає знайомство з виразами зі змінними, цілими та раціональними виразами, поняттям тотожності та тотожними перетвореннями виразів, степенем з натуральним показником та його властивостями, поняттями одночлена та многочлена, їх

перетвореннями [14]. Засвоєння базових понять теми, оволодіння навичками, визначеними програмними вимогами, дає можливість перейти до другої теми – теми «Функції».

Друга тема, яка пропонується для вивчення – це тема «Функції». На ознайомлення з цією темою виділяється 10 годин [14], за цей час учні повинні навчитися наводити приклади функціональних залежностей, лінійних функцій, пояснювати такі поняття як «аргумент», «функція», «область визначення функцій», «область значень функції», «графік функції», а також формулювати означення зазначених понять.

В процесі навчання учні мають засвоїти способи задання функцій та навчитися ілюструвати їх на прикладах, навчитися описувати побудову графіка лінійної функції, а також її частинного випадку – прямої пропорційності.

Практична складова теми, відповідно до чинної програми [14], передбачає від учнів набуття умінь:

- розв'язувати вправи, які передбачають знаходження області визначення функції, значення функції за заданим значенням аргументу і навпаки (як з використанням обчислень, так і за графіком функції);
- будувати графік лінійної функції та визначати окремі характеристики функції за її графіком (визначення нулів функції, її додатних та від'ємних значень);
- складати та розв'язувати задачі на пряму пропорційність на основі життєвого досвіду;
- будувати графіки з використанням лінійної функції при моделюванні реальних процесів [14].

Зміст навчального матеріалу цієї теми:

- функціональна залежність між величинами як математична модель реальних процесів;
- функція; способи задання функції; область визначення та значень функції; графік функції.

- лінійна функція, її графік та властивості [14].

Формувати креативне та критичне мислення в процесі вивчення алгебри (Салтановська Н.І.) [15, 16] дозволяють визначені вимоги до знань і вмінь:

- розуміння змісту поняття «функція», знання трьох основних способів задання функцій;
- розуміння суттєвих ознак функцій, визначених чинною програмою, та вміння розпізнавати їх для інших функцій, що задані формулою;
- вміння будувати графіки функцій, читати за графіками властивості, наводити приклади залежностей, які виражаються ними (Слепкань З.І.) [17].

Третя тема яка вивчається в 7 класі це «Лінійні рівняння та їх системи». На виділений програмою [14] час виносяться вивчення лінійних рівнянь з однією змінною, лінійних рівнянь з двома змінними та побудова його графіку; систем двох лінійних рівнянь з двома змінними та їх розв'язування способом додавання, підстановки та графічним способом. Програмний матеріал передбачає знайомство з лінійними рівняннями та їх системами як з математичними моделями текстових задач. Також в цій темі розв'язують сюжетні задачі[14].

В 8 класі на вивчення виносяться 3 теми.

Перша із запропонованих програмою тем – це «Раціональні вирази». Зміст цієї теми передбачає вивчення степеня із цілим показником, його властивостей, раціональних виразів, дробів та основної властивості раціонального дроби, знайомство зі стандартним виглядом числа. Учні вчаться виконувати арифметичні дії з раціональними дробами, розв'язувати раціональні рівняння, розпізнавати рівносильні рівняння [14].

Завершується вивчення розділу знайомством із функцією  $y = \frac{k}{x}$ , її графіком та властивостями [14].

Друга тема, з якою знайомляться учні в курсі алгебри 8-го класу – це тема «Квадратні корені. Дійсні числа».

Зміст цієї теми складається з підтем, які передбачають відповідно до програми [14] вивчення функції  $y = x^2$ , її графіку та властивостей; арифметичного квадратного кореня та його властивостей; раціональних, ірраціональних та дійсних чисел; функції  $y = \sqrt{x}$ , її графіку та властивостей (Слепкань З.І.) [17].

На цьому етапі вивчення функцій не виділяється окремою темою, але вони є, діти характеризують властивості функцій  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{x}$ , за їх графіками.

І третя тема «Квадратні рівняння». Тема розглядається за таким змістом:

«Квадратні рівняння.

Формула коренів квадратного рівняння.

Теорема Вієта.

Квадратний тричлен.

Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.

Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних.

Квадратне рівняння та рівняння які зводяться до квадратних, як математичні моделі прикладних задач» [14].

В 9 класі також в курсі алгебри учні знайомляться з трьома темами, перша з них це «Нерівності». На вивчення її виносяться такі підтеми:

«Числові нерівності. Основні властивості числових нерівностей.

Нерівності зі змінними. Лінійні нерівності з однією змінною.

Числові проміжки.

Рівносильні нерівності.



Системи лінійних нерівностей з однією змінною» [14].

Після цієї теми вивчають «Квадратичні Функції».

Учні знайомляться з поняттям квадратичної функції, основними властивостями цієї функції та її графіками. Вивчають поняття нулів функції, проміжків знакосталості, зростання і спадання функції, поняттями найбільшого та найменшого значень функції. Вчать виконувати перетворення графіків функцій.

Знайомство з темою передбачає також вивчення підтем «Квадратна Нерівність. Система двох рівнянь з двома змінними. Система двох рівнянь з двома змінними як математична модель прикладної задачі» [14].

Працюють таким чином:

- Наводять приклади квадратичної функції;
- Обчислюють значення функції в точці;
- Пояснюють перетворення графіків функції:  $f(x) \rightarrow f(x) + a$ ;  $f(x) \rightarrow f(x + a)$ ;  $f(x) \rightarrow kf(x)$ ,  $f(x) \rightarrow -f(x)$ ;
- Складають алгоритми побудови графіку квадратичної функції;
- Характеризують функцію за її графіком
- Розв'язують вправи, що передбачають: «побудову графіка квадратичної функції; розв'язування квадратних нерівностей; знаходження розв'язків систем двох рівнянь з двома змінними, з яких хоча б одне рівняння другого степеня; складання і розв'язування систем рівнянь з двома змінними як математичних моделей прикладних задач» [14].

Передостанньою темою курсу алгебри у 9 класі є «Числові послідовності». Зміст третьої теми складається :

«Числові послідовності.

Арифметична та геометрична прогресії, їх властивості. Формули n-го члена арифметичної та геометричної прогресій.

Формули суми перших  $n$  членів арифметичної та геометричної прогресій»[14].

Завершується вивчення алгебри в 9 класі вивченням теми «Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики» це 4 тема, за короткий час вивчається «Основні правила комбінаторики. Частота та ймовірність випадкової події. Початкові відомості про статистику. Способи подання даних та їх обробки» [14].

З вивчення курсу алгебри можна зробити висновок, що в 7-8 класі вивчають тему «Функції», розглядаючи більш прості теми за змістом, а в 9 класі вже більше виділяється часу на вивчення і більш складні теми, які ґрунтуються на знаннях, отриманих у попередніх класах. Тому надзвичайно важливо максимально сприяти засвоєнню учнями матеріалу 7 класу, щоб надалі забезпечити вивчення тем 8 і 9 класів.

## **1.2. Аналіз шкільних підручників з алгебри 7-9 класів щодо теоретичного матеріалу з теми «Функції»**

Для аналізу було взято підручники трьох авторських колективів для кожного класу. Обрано підручники, які є рекомендованими Міністерством освіти і науки України.

Математичні вміння і знання розглядаються як засіб розвитку особистості школяра, а також забезпечення розвитку його математичної грамотності. Це сприяє розумінню ролі математики в світі, використанню математичних знань, висловлюванню обґрунтованих математичних суджень для задоволення практичних і пізнавальних потреб.

У навчанні математики важливу роль відіграє систематичне використання історичного матеріалу, він підвищує інтерес до вивчення

математики, пробуджує критичне ставлення до фактів, дає уявлення учням про математику як невід'ємну складову загальнолюдської культури. На змістових дохідливих прикладах слід показувати учням, як розвивалися теорії та методи, відношення і поняття. Ознайомлювати учнів з біографіями та іменами виданих учених, які створювали математику, зокрема українських математиків, що сприятиме патріотичному і національному вихованню (Слепкань З.І.) [17].

Порівняємо такі підручники з алгебри для 7 класу:

1. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. 2-ге вид. Київ, 2016. 288 с. [1]
2. Істер О.С. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ, 2007. 223 с. [5]
3. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків, 2015. 256 с. [9]

Розглядаючи ці три підручники можна зробити висновок, що більш зрозумілою для учнів тема може бути у підручнику (Істер О.С.) [5].

Зміст навчального матеріалу складається з тем:

«Функціональна залежність між величинами як математична модель реальних процесів.

Функція. Область визначення та область значень функції. Способи задання функції. Графік функції.

Лінійна функція її графік та властивості» (Істер О.С.) [5].

За змістом в першому параграфі розглядаємо взагалі поняття функції.

Означення, яке наводиться автором: «Якщо кожному значенню змінної  $x$  з деякої множини відповідає єдине значення змінної  $y$ , то таку залежність називають функціональною залежністю, або функцією» (Істер О.С.) [5].

Незалежну змінну інакше називають аргумент, а про залежну змінну говорять, що вона є функцією цього аргументу (Істер О.С.) [5].

Потім розглядаються друге означення: «усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють область визначення функції; усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють область значення функції»(Істер О.С.) [5].

Потім даються приклади з розв'язанням. І для самостійного розв'язування.

Книга (Бевз Г.П., Бевз В.Г.) [1], зацікавила тим що вона більш кольорова, наповнена більшою кількістю розв'язаних прикладів, до яких додається малюнок.

У всіх цих книгах дається в кінці кожного параграфу запитання для самоперевірки. Це дуже добре для того, щоб перевірити свої знання, дізнатись як діти засвоїли тему. Потім даються приклади для розв'язання.

У всіх книгах по різному дається назва параграфу в книзі Бевз Г.П., Бевз В.Г., Алгебра 7 клас[1], називається параграф «Графік функції», у книзі Істер О.С., Алгебра 7 клас [5], «Графік функції. Графічний спосіб завдання функції». А в підручнику Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра 7 клас [9]спочатку розглядається «Способи задання функції». А потім вже іде тема «Графік функції».

Означення: «Графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, ординати – відповідним значенням функції» (Бевз Г.П., Бевз В.Г.) [1].

Користуючись графіком функції можна, можна скласти таблицю їх значень, тобто графік задає функцію. Дивлячись на графік можна з'ясувати такі її характеристики:

- Область визначення і область значення функції;
- При яких значеннях аргументу значення функції додатні, при яких – від'ємні, при яких дорівнюють нулю.

- На яких проміжках функція зростає, а на яких – спадає.

Означення: «Функція називається зростаючою, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції».

Функція називається спадною, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції».

Нулі функції – значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю» (Бевз Г.П., Бевз В.Г.) [1].

Користуючись змістом навчального матеріалу третьою підтемою є «Лінійна Функція»

За параграфом дається означення: «Лінійною називають функцію, яку можна задати формулою виду  $y = kx + b$ , де  $x$ -аргумент,  $k$  і  $b$  – дані числа».

Означення: «Графік кожної лінійної функції – пряма. І кожна пряма на координатній площині, не перпендикулярна до осі абсцис, - графік деякої лінійної функції» (Бевз Г.П., Бевз В.Г.) [1].

Властивості можна подати у вигляді таблиці:

Властивості функції	Вид функції ( $k \neq 0$ )	
	$y = kx + b, k > 0$	$y = kx + b, k < 0$
Область визначення	Усі числа ( $R$ )	Усі числа ( $R$ )
Область значень	Усі числа ( $R$ )	Усі числа ( $R$ )
Додатні значення	$x > -\frac{b}{k}$	$x < -\frac{b}{k}$
Від'ємні значення	$x < -\frac{b}{k}$	$x > -\frac{b}{k}$
Проміжки спадання	—	Усі числа ( $R$ )
Проміжки зростання	Усі числа ( $R$ )	—

Рисунок 1.1 – Фрагмент підручника Бевз Г.П., Бевз В.Г., Алгебра 7 клас. Тема «Лінійна функція» (Бевз Г.П., Бевз В.Г.) [1]

В кінці тільки одного підручника Бевз Г.П., Бевз В.Г., Алгебра 7 класу (Бевз Г.П., Бевз В.Г.) [1] є самостійна робота та тестові завдання.

Для розгляду тем 8 класу взято такі джерела:

1. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків, 2016. 256 с.[2]

2. Істер О.С. Алгебра: підруч. для 8-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ, 2016. 272 с. [6]

3. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків, 2016. 240 с. [10]

В 8 класі розглядається така тема «Функція  $y = x^2$ ».

До цієї теми формується властивість функції  $y = x^2$ , яка подана у вигляді таблиці.

Властивості функції	Вид функції
	$y = x^2$
Область визначення	Усі числа ( $R$ )
Область значень	Усі невід'ємні числа ( $y \geq 0$ )
Додатні значення	$x \neq 0$
Від'ємні значення	—
Проміжки спадання	$x < 0$
Проміжки зростання	$x > 0$

Рисунок 1.2 – Фрагмент підручника Бевз Г.П. , Бевз В.Г., Алгебра 8 клас. Тема «Функція  $y = x^2$ » (Бевз Г.П., Бевз В.Г.) [2]

Потім вивчаються квадратні корені. За допомогою чого нам допомагаю ця тема вивчити наступну Функція  $y = \sqrt{x}$

До цієї теми також надаються такі властивості та пояснення до них:

1. Область визначення функції є множина всіх невід'ємних чисел:  $x \geq 0$ (Бевз Г.П., Бевз В.Г.) [2].

2. Область значень функцій є множина всіх невід'ємних чисел  $y \geq 0$ (Бевз Г.П., Бевз В.Г.) [2].

3. Графік функції – гілка параболи, що входить з точки  $(0; 0)$ , усі інші точки графіка лежать у першій координатній чверті (Бевз Г.П., Бевз В.Г.) [2].

4. Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції (Бевз Г.П., Бевз В.Г.) [2].

За цими властивостями і розв'язуються вправи.

В 8 класі на вивчення теми «Функції» приділяється менше часу, а от в 9 класі вже обсяг годин для вивчення збільшується.

Для розгляду 9 класу взяли такі три підручники.

1. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підруч для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ, 2017. 272 с. [3]

2. Істер О.С. Алгебра: підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ, 2017. 264 с. [7]

3. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків, 2017. 272 с. [11]

В 9 класі працюють за таким змістом:

«Властивості функції. Нулі функції, проміжки знакосталості, зростання і спадання функції, найбільше та найменше значення функції.

Перетворення графіків функцій.

Квадратична функція, її графік і властивості.

Квадратна нерівність. Система двох рівнянь з двома змінними.

Система двох рівнянь з двома змінними як математична модель прикладної задачі» [14].

В цій темі повторюється все що вивчалось в 7-8 класі. Потім вже розглядається означення графіка функції  $y = kf(x)$ , де  $k > 0$ , який можна отримати, замінивши кожную точку графіка функції  $y = f(x)$  на точку з тієї самою абсцисою та з ординатою, помноженою на  $k$ .

Потім вивчається «Перетворення графіків функцій».

За допомогою означення: «Графік функції  $y = f(x + a)$ , можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції

$y = f(x)$  вздовж осі абсцис на  $a$  одиницю вліво, якщо  $a > 0$ , і на  $-a$  одиницю вправо, якщо  $a < 0$ » (Мерзляк А.Г. Полонський В.Б. Якір М.С.) [11].

Означення: Графіком функції  $y = k(x + a)^2 + b, k \neq 0$ , є парабола, яка дорівнює параболі  $y = kx^2$  і вершиною якої є точка  $(-a; b)$  (Мерзляк А.Г. Полонський В.Б. Якір М.С.) [11].

Потім вивчається тема «Квадратична функція, її графік і властивості».

Означення: Функцію вигляду  $y = ax^2 + bx + c$ , де  $x$  змінна,  $a, b$  і  $c$  деякі числа, причому  $a \neq 0$ , називають квадратичною функцією (Істер О.С.) [7].

Властивість даної функції наводяться у вигляді таблиці:

Властивості функції $y = ax^2, a \neq 0$		
	$a > 0$	$a < 0$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Область значень	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Графік	парабола з вершиною $(0; 0)$	
Напрямок гілок	вгору	униз
Нулі функції	$x = 0$	
Проміжки знакосталості, $y > 0$	$(-\infty; 0),$ $(0; +\infty)$	-
Проміжки знакосталості, $y < 0$	-	$(-\infty; 0),$ $(0; +\infty)$
Зростає на проміжку	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Спадає на проміжку	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$
Найбільше значення функції	-	0
Найменше значення функції	0	-

Рисунок 1.3 – Фрагмент підручника Істер О.С., Алгебра 9 клас.  
Тема «Функція  $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ . Її графік та властивості»  
(Істер О.С.) [7]

За такою схемою пропонується будувати графік функції:

1. Знайти абсцису вершини параболи за формулою  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ .
2. Знайти координати вершини параболи за формулою



$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$$

Де  $D$  – дискримінант квадратного тричлена  $ax^2 + bx + c$ , і позначити на координатній площині вершину параболи;

3. Визначити напрям віток параболи;

4. Знайти координати додаткових кількох точок, які належать шуканому графіку, зокрема координати точок перетину параболи з віссю абсцис (якщо дана функція має нулі), координати точки перетину параболи з віссю ординат; позначити ці точки на координатній площині (Істер О.С.) [7].

Далі розглядається тема «Квадратна нерівність. Система двох рівнянь з двома змінними».

Означення: Нерівності виду  $ax^2 + bx + c > 0$ ,  $ax^2 + bx + c < 0$ ,  $ax^2 + bx + c \geq 0$ ,  $ax^2 + bx + c \leq 0$ , де  $x$  – змінна,  $a, b$  і  $c$  – деякі числа, причому  $a \neq 0$ , називають квадратичними (Мерзляк А.Г. Полонський В.Б. Якір М.С.) [11].

Схематичне розміщення параболи  $y = ax^2 + b + c$  відносно осі абсцис залежно від знаків чисел  $a$  і  $D$  відображено в таблиці ( $x_1$  і  $x_2$  – нулі функції,  $x_0$  – абсцисса вершин параболи (Мерзляк А.Г. Полонський В.Б. Якір М.С.) [11].


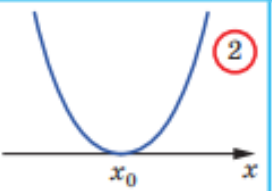
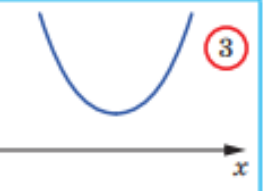
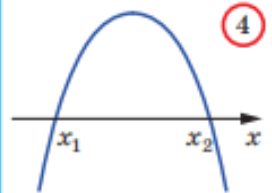
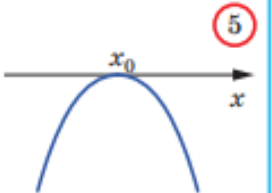
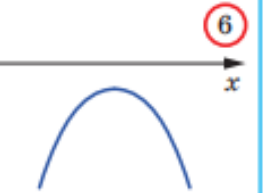
	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Рисунок 1.4 – Мерзляк А. Г. Полонський В.Б. Якір М.С., Алгебра  
9 клас. Тема «Розв’язування квадратних нерівностей»  
(Мерзляк А.Г. Полонський В.Б. Якір М.С.) [11]

Остання тема «Система двох рівнянь з двома змінними як математична модель прикладної задачі», вона їде повторенням з 7 класу.

## РОЗДІЛ 2

### ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ В КУРСІ АЛГЕБРИ 7-9 КЛАСІВ

Для розгляду теми «Функція» можемо надати такі вправи для учнів 7 -9 класів .

**Приклад 1.** Побудуйте графік функції  $y = -x^2 + 4x + 5$ .  
Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) Область значень функції;
- 2) Проміжок спадання функції.

Розв'язання.

Дана функція є квадратичною функцією, її графік – парабола, вітки якої напрямлені вниз.

$$\text{Абсциса вершини параболі: } x_0 = -\frac{4}{-2} = 2.$$

$$\text{Ордината вершини: } y_0 = y(2) = -4 + 8 + 5 = 9.$$

Знайдемо точку перетину параболі з віссю абсцис:

$$-x^2 + 4x + 5 = 0;$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0;$$

$$x_1 = -1; x_2 = 5.$$

Таким чином, парабола перетинає вісь абсцис у точках  $(-1; 0)$  і  $(5; 0)$ .

Знайдемо точку перетину параболі з віссю ординат:  $y(0) = 5$ .  
Парабола перетинає вісь ординат у точці  $(0; 5)$ .

Використовуючи знайдені чотири точки параболі, виконуємо побудову. Графік даної функції зображений на рисунку 2.1.

$$1) \text{ Область значень функції: } E(y) = (-\infty; 9].$$

2) Функція спадає на проміжку  $[2; -\infty)$ . (Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.) [12].

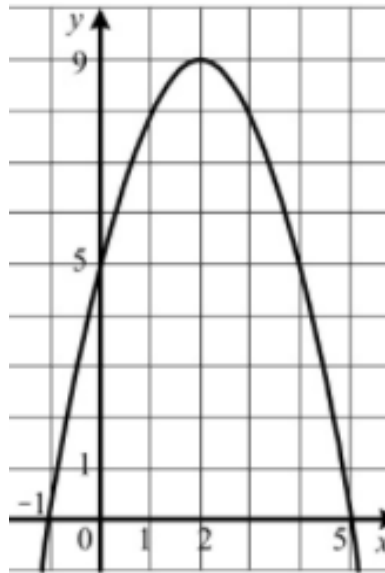


Рисунок 2.1

Ілюстрацію побудови графіка взято з підручника Мерзляк А.Г. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики, 9-й клас (Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.) [12].

**Приклад 2.** Знайти область визначення

$$f(x) = \sqrt{6x - x^2} + \frac{1}{\sqrt{5 - x}}.$$

Розв'язання.

Область визначення даної функції є множина розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 6x - x^2 \geq 0, \\ 5 - x > 0. \end{cases}$$

Маємо

$$\begin{cases} x^2 - 6x \leq 0, \\ x < 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 6, \\ x < 5; \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 5.$$

Отже, шукана область визначення – це множина  $D(f) = [0; 5)$  (Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.) [12].

Приклад 3. Використовуючи графік функції  $y = x^2 - 1$ , де  $-3 \leq x \leq 2$ , знайти:

1) Нулі функції;

2) Область значень функції;

3) Значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;

4) Значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень (Істер О.С.) [5].

Розв'язання.

Графік функції зображений на рисунку 2.2.

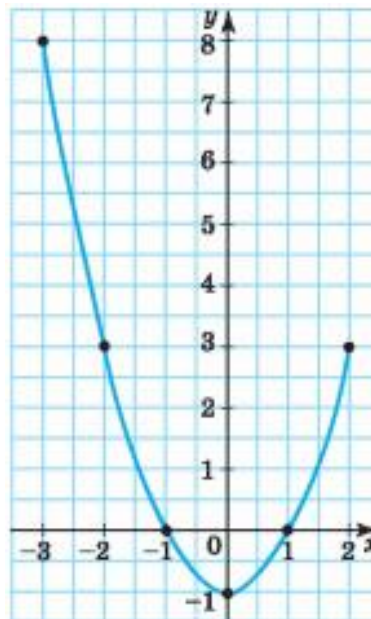


Рисунок 2.2

Фрагмент використаний з підручника Істер О.С. Алгебра, підручник для 7 класу(Істер О.С.) [5].

1) Нулі функції – це абсциси точок перетину графіків функції з віссю  $x$ . Тому  $x = -1$  і  $x = 1$  - нулі функції. Зауважимо, що нулі функцій можна знайти, і не користуючись графіком даної функції. Для їх знаходження достатньо розв'язати рівняння  $x^2 - 1 = 0$ .

2) Функція, зображена на рисунку 2.2, може набувати будь-яких значень із інтервалу від  $-1$  до  $8$ . Тому область значень – всітакі значення для змінної:  $-1 \leq y \leq 8$ .

3) для значення  $x$  таких, що  $-3 < x < -1$ , точки графіка розташовані вище осі абсцис. Тому функція набуває додатних значень при  $-3 < x < -1$ . Який зображений на рисунку 2.3.

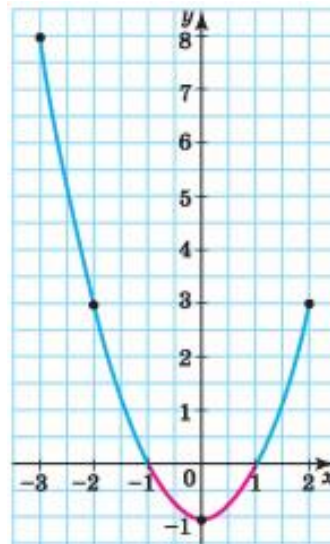


Рисунок 2.3

Фрагмент побудови графіку використаний з підручника Істер О.С. Алгебра, підручник для 7 класу(Істер О.С.) [5]

На рисунку 2.3. цю частину позначень синім кольором. Так само вище осі абсцис знаходить точку графіка для  $1 < x < 2$ . Тому при  $1 < x < 2$  функція знову набуває додатних значень (на рисунку 2.3 цю частину графіка також позначено синім кольором). Отже, при  $-3 < x < -1$  або  $1 < x < 2$  функція набуває додатних значень.

4) Для значення  $-1 < x < 1$ , точки графіка розташовані нижче осі абсцис (на рисунку 2.3 цю частину позначено червоним кольором ). Тому при  $-1 < x < 1$  функція набуває від'ємних значень(Істер О.С.) [5].

Переконуємось, що використовуючи графік функції, для будь-якого значення аргументу з області визначення можна знайти відповідне йому значення функції.

Приходимо до висновку, що функція може бути задана графіком, а такий спосіб задання називається графічним.

**Приклад 4.** Функцію задано формулою  $y = \frac{8}{x-2}$ . Знайти:

- 1) Область визначення функції;
- 2) Значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює  $-2$ ;  $6$ ;  $10$ ;
- 3) Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює  $-1$ . Розв'язання.

1) Область визначення функції є всі такі значення  $x$ , при яких дріб  $\frac{8}{x-2}$  має зміст. Знаменник дроби дорівнює нулю при  $x = 2$ . Отже, область визначення функції є всі числа, крім числа  $2$ ,

2) Якщо  $x = -2$ , то  $y = \frac{8}{-2-2} = \frac{8}{-4} = -2$ ; якщо  $x = 6$ , то  $y = \frac{8}{6-2} = 2$ ; якщо  $x = 10$ , то  $y = \frac{8}{10-2} = 1$ .

3) Щоб знайти  $x$ , при якому  $y = -1$ , треба підставити у формулу функції замість  $y$  число  $-1$ . Матимемо рівняння:  $-1 = \frac{8}{x-2}$ , коренем якого є число  $-6$ . Отже, значення  $y = -1$  функція набуває при  $x = -6$  (Істер О.С.) [5].

**Приклад 4.** Знайдіть нулі функції  $y = x^2 - x - 6$ .

Розв'язання. Розважимо рівняння  $x^2 - x - 6 = 0$ .

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25;$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = -2; x_2 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = 3.$$

Відповідь. Нулями функції є числа  $-2$  і  $3$  (Бевз Г. П., Бевз В. Г.) [1].

**Приклад 5.** Доведіть, що функція  $y = x^2 + 3$  на проміжку  $(-\infty ; 0)$  спадає.

Розв'язання. Нехай  $x_1$  і  $x_2$  - два довільних значення аргументу  $x$  даної функції з проміжку  $(-\infty ; 0)$ , причому  $x_1 < x_2$ .

Відповідні їм значення:

$$y_1 = x_1^2 + 3, y_2 = x_2^2 + 3,$$

$$y_2 - y_1 = (x_2^2 + 3) - (x_1^2 + 3) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Значення  $x_1$  і  $x_2$  з проміжку  $(-\infty; 0)$  від'ємні. Оскільки  $x_1 < x_2$ , то  $x_2 - x_1$  - число додатне,  $x_2 + x_1$  - число від'ємне, їх добуток також від'ємний. Тому різниця  $y_2 - y_1$  від'ємна,  $y_2 < y_1$ .

Отже, переконуємось в правильності твердження щодо функції «більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції; дана функція на цьому проміжку спадна», розглянемо на рис 2.4. (Бевз Г.П., Бевз В.Г.) [3].

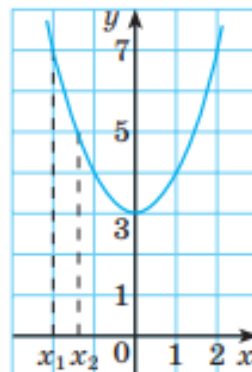


Рисунок 2.4

Фрагмент графіка використаний з підручника Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра 9 класу (Бевз Г. П., Бевз В. Г.) [3].

**Приклад 6.** Парною чи непарною є функція:

а)  $y = x^2 - 7$ ;    б)  $y = 5x - 1$ ?

Розв'язання.

а) область визначення  $D(y)$  функція  $y = x^2 - 7$  - множина всіх дійсних чисел  $R$  - є симетричною відносно 0. Знайдемо  $f(x): f(-x) = (-x)^2 - 7 = x^2 - 7 = f(x)$ . Отже, функція  $y = x^2 - 7$  парна.

б)  $D(y) = R$  - симетрична відносно 0.

$$f(-x) = 5(-x) - 1 = -5x - 1 = -(5x + 1).$$

Ця функція не дорівнює ні  $f(x)$ , ні  $-f(-x)$ . Отже, функція  $y = 5x - 1$  ні парна, ні непарна (Бевз Г.П., Бевз В.Г.) [3].



**Приклад 7.** Побудуйте графік функції  $y = 2x^2 + 4x + 3$ .

Розв'язання . Користуючись графіком функції  $y = 2x^2 + 4x$ , або  $y = x(2x + 4)$ , перетинає вісь  $x$  у точках  $x = 0$  і  $x = -2$ . Можемо позначити їх на рисунку 2.5.

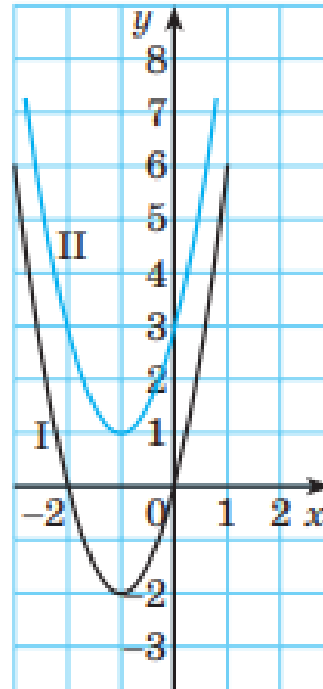


Рисунок 2.5

Фрагмент використаний з підручника (Бевз Г.П., Бевз В.Г.) [3].

Маємо точки які симетричні відносно осі параболу, яку маємо побудувати, тому можемо сказати, що абсциса її вершини  $x = -1$ . Ординат дорівнює  $2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = -2$ . Позначимо точку та координати  $(-1; -2)$ . Графік I функції  $y = 2x^2 + 4x$ , проходить через наші три точки.

Якщо переносимо на три одиниці вгору то будемо мати графік II даної функції  $y = 2x^2 + 4x + 3$ .

Звідси можемо проаналізувати . Які властивості використовує квадратична функція  $y = ax^2 + bx + c$ .

Графіком даної функції є парабола. Нехай її вершина – точка  $M(m; n)$ , звідси випиває що

$$m = -\frac{b}{2a}, n = -\frac{D}{4a}, \text{де } D = b^2 - 4ac.$$

Якщо  $a > 0$ , то вітки параболи спрямовані вгору. Тобто:

- 1) Область визначення функції – уся множина  $R$ ;
- 2) Область значень – промінь  $[n; \infty)$ ;
- 3) Якщо  $x < m$ , то функція спадна, при цьому  $x > m$  - зростає;
- 4) Якщо  $D > 0$ , то функція може мати два нулі:  $x_1$  і  $x_2$ ;
- 5) На проміжку  $(x_1; x_2)$  значення функції від'ємні то на проміжку  $(-\infty; x_1)$  і  $(x_2; \infty)$  функції додатні (Бевз Г. П., Бевз В. Г.) [4].

Приклад 8. Приклади парних функцій

1.  $y = x^2$ ;

–  $D(y) = (-\infty; +\infty)$  - симетрична відносно 0.

–  $(-x^2 = x^2)$ . функція парна.

2.  $y = \frac{4}{x^2-1}$ ;

–  $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$  - симетрична відносно 0.

–  $y(-x) = \frac{4}{(-x)^2-1} = \frac{4}{x^2-1} = y(x)$ . Функція парна (Гайштут О.Г.,

Ушаков Р.П., Шамонович О.А.) [4].

Приклади непарної функцій.

1.  $y = 3x$ ;

–  $D(y) = (-\infty; +\infty)$  симетрична відносно 0.

–  $y(-x) = 3 \cdot (-x) = -3x = -y(x)$ . Функція непарна.

2.  $y = \frac{x^3}{x(x^2-4)}$ .

Щоб знайти  $D(y)$ , розв'яжемо рівняння  $x(x^2 - 4) = 0$ .

$$x(x - 2)(x + 2) = 0;$$

$$x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = -2.$$

Отже, в  $D(y)$  входять усі дійсні числа, крім чисел  $0; 2; -2$ .

$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$  – симетрична відносно 0.

$y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-4} = \frac{-x^3}{x^2-4} = -y(x)$ . Функція непарна (Гайштут О.Г., Ушаков Р.П., Шамович О.А.) [4].

Надані вправи включають в себе завдання, які використовуються в процесі вивчення теми «Функції в 7-9 класах». Учні розв'язуючи ці задачі набувають навичок по розпізнаванню поняття, виділяють суттєві ознаки та розпізнають властивості.

Завдання призначені для перевірки теоретичних знань, та умінь розв'язувати на їх практиці. Приклади подані в розділі допомагають визначити рівень вмінь учня.

У даному розділі представлені типові приклади, в яких розглядаються основні властивості функцій різних типів.

Також надані вправи в яких розглядається графік функції, це завдання № 1, №3, №5 та № 7. Також ці завдання формують навички розпізнавання графіка функції за її рівнянням.

Завдання № 2 передбачає виконання розрахунків.

Цікавим завданням для учнів можна назвати під № 5 та № 7, воно потребує від учнів базових знань та значної уваги.

Всі ці завдання можна запропонувати учням при розгляді теми «Функції», та для окремого розгляду для зацікавлених учнів темою для кращого засвоєння теоретичного матеріалу теми.

## ВИСНОВКИ

Відповідно до поставлених завдань, опрацьованих нормативних документів, навчальної та науково-методичної літератури, в результаті виконання кваліфікаційної роботи:

1. Проведено аналіз чинної програми з математики, зокрема, алгебри, для 7-9 класів рівня стандарту з метою визначення особливостей та ролі в ній теми «Функції». Зазначена тема вивчається в 7, 8 та 9 класах, передбачає знайомство з декількома типами функцій та їх основними властивостями.

2. Проаналізовано підручники авторських колективів Бевз Г.П., Бевз В.Г.; Істер О.С.; Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.З всіма підручниками логіка вивчення теми передбачає знайомство з поняттям функції у 7 класі, даються для розгляду деякі властивості. У 8 класі більш розгорнуто йдеться про функції і даються властивості, за якими учні вже аналізують функції, розв'язуючи завдання, що розвиває в учнів уяву, абстрактне мислення.

3. Проаналізовано та систематизовано базові завдання, які рекомендовані в підручниках з алгебри під час вивчення теми «Функції та їх властивості». Продемонстровано застосування теоретичного матеріалу з теми на прикладах, які можуть бути використані на уроках з алгебри у 7-9 класах, та передбачають знайомство з першими кроками у дослідженні функцій та побудові їх графіків.

Отже можна зробити висновок, для учнів тема «Функції та їх властивості» є важливою. Вивчаючи тему, учні навчаються аналізувати, порівнювати, вибудовувати алгоритми, доводити властивості на практиці. Матеріали, представлені в роботі, можуть бути використані під час вивчення теми «Функції», підготовки для зовнішнього незалежного оцінювання або державної підсумкової атестації з математикию

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. 2-ге вид. Київ, 2016. 288 с.
2. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків, 2016. 256 с.
3. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підруч для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ, 2017. 272 с.
4. Гайштут О.Г., Ушаков Р.П., Шамович О.А. Зовнішнє незалежне оцінювання математика, комплексне видання ДПА + ЗНО. Київ, 2017р.
5. Істер О.С. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ, 2007. 223 с.
6. Істер О.С. Алгебра: підруч. для 8-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ, 2016. 272 с.
7. Істер О.С. Алгебра: підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ, 2017. 264 с.
8. Лов'янов І.В. Методика навчання математики у запитаннях і відповідях. Навчальний посібник для підготовки студентів до атестації здобувачів вищої освіти. Кривий Ріг, 2016. URL: [http://elibrary.kdpu.edu.ua/bitstream/0564/2493/1/2016\\_%D0%9C1\\_%D0%9C%D0%9D%D0%9C%20%D0%B2%20%D0%B7%D0%B0%D0%BF%D0%B8%D1%82%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F%D1%85%20%D1%96%20%D0%B2%D1%96%D0%B4%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D1%96%D0%B4%D1%8F%D1%85.pdf](http://elibrary.kdpu.edu.ua/bitstream/0564/2493/1/2016_%D0%9C1_%D0%9C%D0%9D%D0%9C%20%D0%B2%20%D0%B7%D0%B0%D0%BF%D0%B8%D1%82%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F%D1%85%20%D1%96%20%D0%B2%D1%96%D0%B4%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D1%96%D0%B4%D1%8F%D1%85.pdf)
9. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків, 2015. 256 с.
10. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків, 2016. 240 с.

11. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків, 2017. 272 с.
12. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики: 9-й клас. Київ, 2014. 256 с.
13. Москаленко Ю.Д., Коваленко О.В. Реалізація прикладної спрямованості вивчення функцій в основній школі. Наукові записки. Полтава, 2005. С. 65
14. Навчальні програми для 5-9 класів. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas>.
15. Салтановська Н.І. Інструктивно-методичні рекомендації щодо вивчення математики у 2017-2018 навчальному році. На допомогу методисту, №3, 2017. URL: [http://metodcluster.vn.ua/page/na\\_dop\\_met/3\\_2017/kaf\\_ekolog/lab\\_mat/matem.pdf](http://metodcluster.vn.ua/page/na_dop_met/3_2017/kaf_ekolog/lab_mat/matem.pdf)
16. Салтановська Н.І. Інструктивно-методичні рекомендації щодо вивчення математики у 2020-2021 навчальному році. На допомогу методисту, № 6, 2020. URL: [http://metodcluster.vn.ua/page/na\\_dop\\_met/1\\_2020/kaf\\_ekolog/lab\\_mat/lab\\_mat.pdf](http://metodcluster.vn.ua/page/na_dop_met/1_2020/kaf_ekolog/lab_mat/lab_mat.pdf)
17. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. Київ, 2000. 512 с.
18. Хомчак В.М., Хомчак Н.В. Міжпредметні зв'язки при вивченні функцій в основній школі. Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математика. 2016. С. 137.
19. Шищенко І.В. Деякі аспекти наступності вивчення функцій у основній школі та класах з гуманітарним профілем навчання. 2016. URL:

<http://dspace.pdpu.edu.ua/bitstream/123456789/2454/1/Sychenko%202016.pdf>

20. Яковлєва О.М., Каплун В.М. Аналіз завдань практичного ЗНО з математики 2017-2019 років. Фізико-математична освіта. 2019. Випуск 4(22). С.142-149.