

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики
Кафедра фізики та методики її навчання

**ПОХИБКА ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛІ ТОЧКОВОГО ЗАРЯДУ
ДО РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ ДЕЯКИХ
ЗАРЯДЖЕНИХ ТІЛ**

**Кваліфікаційна робота (проект)
на здобуття рівня вищої освіти «бакалавр»**

Виконав: студент групи 15-411
Спеціальності 014 Середня освіта
(Фізика)
Освітньо-професійної програми
Середня освіта (Фізика)

Стельмах Юрій Олександрович

Керівник
кандидат фізико-математичних наук,
доцент Івашина Ю.К.

Рецензент
кандидат фізико-математичних наук,
доцент Заводяний В.В.

ХЕРСОН – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ I. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ ЗАРЯДЖЕНИХ ТІЛ	5
1.1. Моделі заряджених тіл	5
1.2. Електричне поле і його визначення	6
РОЗДІЛ II. РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ТІЛ	10
2.1. Методика розрахунку електричного поля заряджених тіл.....	10
2.2. Похибки застосування моделі точкового заряду до визначення електричного поля диска	13
2.3. Похибка застосування моделі точкового заряду до визначення електричного поля на осі стрижня	20
ВИСНОВКИ	28
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	29

ВСТУП

Розрахунок електричного поля заряджених тіл має важливе практичне і методичне значення. Він широко використовується при проектуванні різноманітних електричних пристроїв і приладів, а також при вивченні курсів «Електрика» і «Електродинаміка».

При цьому використовуються дві моделі заряджених тіл і відповідно дві різні методики розрахунку поля – модель точкового заряду і модель розподіленого заряду. Розрахунки на основі моделі точкового заряду набагато простіші, але можливості застосування цієї моделі і похибки, які виникають при її застосуванні в підручниках і методичній літературі не визначені, тому тема роботи є актуальною.

Кваліфікаційна робота виконувалась відповідно до тематичного плану наукових досліджень кафедри фізики та методики її навчання: «Інноваційні освітні технології навчання фізики та астрономії у закладах освіти різних рівнів» (реєстраційний номер No0119U101144 від 19.03.2019).

Метою роботи є визначення похибки застосування моделі точкового заряду до розрахунку електричного поля заряджених тіл.

Завдання дослідження:

1. Розглянути моделі заряджених тіл і методику розрахунку характеристик електричного поля на їх основі.
2. Розрахувати напруженість і потенціал електричного поля на осі рівномірно зарядженого диска на основі двох моделей, визначити абсолютну і відносну похибки застосування моделі точкового заряду в залежності від відстані.
3. Розрахувати напруженість і потенціал поля рівномірно зарядженого стрижня на основі двох моделей, визначити абсолютну і відносну похибки застосування моделей точкового заряду в залежності від відстані.

Об'єкт дослідження – електричне поле заряджених тіл.

Предмет дослідження – похибка застосування моделі точкового заряду до розрахунку електричного поля деяких тіл.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що показано, що модель точкового заряду можна застосовувати до розрахунку поля реальних тіл в реальних умовах – похибка менше 0,5% досягається, коли відносна відстань до точки спостереження буде більшою від 5 до 8 в залежності від форми тіл.

Структура роботи. Кваліфікаційна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел.

РОЗДІЛ I. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ ЗАРЯДЖЕНИХ ТІЛ

1.1. Моделі заряджених тіл

Природа і тіла в ній електричнонейтральні. Кількість позитивних і негативних зарядів в природі однакова. Якщо в тілі буде надлишок позитивних зарядів, то воно зарядиться позитивно, при надлишку від'ємних зарядів – негативно. У дійсності мобільними зарядами є від'ємні заряди, носіями яких є електрони. Позитивний або негативний заряд тіла визначається недостаткою або надлишком електронів.

Ступінь електризації тіла характеризується фізичною величиною – зарядом q . Заряд характеризує дві властивості наелектризованих тіл – створювати електричне поле і відчувати дію стороннього електричного поля.

Навколо заряду в оточуючому просторі завжди існує електричне поле. Заряд – джерело електричного поля.

Для розрахунку поля заряджених тіл і визначення сили дії поля на заряджене тіло використовують дві моделі заряджених тіл – точковий заряд і неперечно розподілений заряд. Точковий заряд – аналог матеріальної точки в механіці. Це тіло точкових розмірів, заряд якого рівний заряду тіла. Умова застосування моделі точкового заряду чітко не визначена ні в шкільних підручниках [1, 7, 10, 11, 24], ні в підручниках для закладів вищої освіти [4, 16, 17, 20, 21, 23, 27]. Приводиться абстрактна, ідеалізована умова $r \gg l$, відстань до точки, де визначається поле, значно більша розмірів тіла. Ця умова не може бути використана при розв'язуванні переважної більшості практичних задач.

За неможливості застосування моделі точкового заряду (наприклад на ділянках поблизу заряджених тіл) використовують модель неперервно розподіленого заряду. У ній вважається, що заряд неперервно розподілений по тілу. Для характеристики розподілу заряду вводять густину заряду. У залежності від форми зарядженого тіла вводять об'ємну густину заряду ρ , поверхневу густину – σ і лінійну густину заряду – τ .

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{dq}{dV} \\ \sigma &= \frac{dq}{dS} \\ \tau &= \frac{dq}{dl}\end{aligned}\quad (1.1)$$

Об'ємна густина заряду рівна заряду одиниці об'єму тіла. Аналогічно вводяться σ і τ . Заряд тіла через густину визначається інтегруванням по зарядженому тілу

$$\begin{aligned}q &= \int_V \rho dV \\ q &= \int_S \sigma dS \\ q &= \int_l \tau dl\end{aligned}\quad (1.2)$$

У випадку рівномірного розподілу заряду густина заряду буде незмінною і вирази (1.2) спрощуються

$$\begin{aligned}q &= \rho V \\ q &= \sigma S \\ q &= \tau l\end{aligned}\quad (1.3)$$

1.2. Електричне поле і його визначення

Джерелом електричного поля є заряди, які розташовуються на тілах або частинках [4]. Поле локалізоване не на тілах, а в оточуючому просторі [12]. Електричне поле матеріальне, виявити

його можна по дії на внесений пробний заряд. Як і речовина, поле має енергію.

Основною характеристикою електричного поля, яка відображає його властивість діяти на заряди є напруженість. Це силова характеристика поля, яка чисельно рівна силі, що діє на одиничний позитивний заряд, внесений в деяку точку поля [4]. Але визначають напруженість не по силі, що діє на пробний заряд, так як це незручно. Поле визначається величиною і розподілом в просторі зарядів, що створюють поле. Напруженість поля точкового заряду пропорційна його величині і залежить від положення точки спостереження [15].

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad (1.4)$$

де \vec{r} - радіус-вектор точки спостереження.

Напруженість поля системи точкових зарядів

$$\vec{E}_{p_A} = \Sigma \vec{E}_{i_A} \quad (1.5)$$

де E_{i_A} - напруженість поля i -того заряду в точці спостереження A .

Крім силової характеристики, електричне поле, як потенціальне поле, характеризується скалярною енергетичною характеристикою – потенціалом φ . Потенціал поля в даній точці чисельно рівний енергії взаємодії поля з одиничним позитивним пробним зарядом внесеним в дану точку. Потенціал поля точкового заряду обернено пропорційний відстані r до точки спостереження [20].

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (1.6)$$

Потенціал поля системи точкових зарядів визначається на основі принципу суперпозиції алгебраїчною сумою потенціалів полів зарядів, що входить в систему.

$$\varphi_{рез_A} = \Sigma \varphi_{i_A} \quad (1.7)$$

Знак потенціалу поля заряду визначається його знаком.

Характеристики електричного поля на основі моделі точкового заряду визначають за формулами (1.4)-(1.7) достатньо просто.

У випадках, коли модель точкового заряду застосувати не можна, розрахунок характеристик поля проводять за допомогою моделі неперервно розподіленого заряду [23]. Основою для визначення поля також є формули (1.4) і (1.6). У якості точкового заряду розглядається елемент зарядженого тіла, що несе заряд dq , який розглядається як точковий

$$\begin{aligned} dq &= \rho dV \\ dq &= \sigma dS \\ dq &= \tau dl \end{aligned} \quad (1.8)$$

де ρ , σ , τ – об'ємна, поверхнева або лінійна густина заряду. Поле, що створюється всім зарядженим тілом знаходиться на основі принципу суперпозиції шляхом інтегрування по всьому об'єму тіла. Аналогом виразу (1.5) буде інтеграл

$$\vec{E} = \int_V d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV \vec{r}}{r^3} \quad (1.9)$$

По аналогії з (1.7) потенціал поля зарядженого тіла

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r} \quad (1.10)$$

Методично характеристики поля зарядженого тіла на основі (1.9) і (1.10) визначити не складно. Розв'язання цієї задачі має суттєві математичні затруднення, так як операція інтегрування складна, і не завжди можна визначити інтеграл в квадратурах. Тому розрахунок поля на основі моделі неперервно розподіленого заряду по можливості бажано змінити розрахунком за допомогою моделі точкового заряду.

Висновки до розділу I

1. Заряджені тіла описують за допомогою двох моделей – точкового і неперервно розподіленого заряду.

2. Розрахунок характеристик поля за допомогою моделі точкового заряду виконують набагато простіше, ніж на основі моделі неперервно розподіленого заряду.

3. Використання наближеної моделі точкового заряду в реальних умовах пов'язане з виникненням похибки, величина якої залежить від відстані до точки спостереження. Величина цієї похибки в залежності від відстані до точки спостереження для тіл різної форми в науково-методичній літературі не приводиться.

РОЗДІЛ II. РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ТІЛ

2.1.Методика розрахунку електричного поля заряджених тіл

Розрахунок електричного поля заряджених тіл виконують на основі двох моделей заряджених тіл: моделі точкового заряду і моделі неперервно розподіленого заряду. Згідно першої моделі розраховується електричне поле в шкільному курсі фізики [10].

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.1)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (2.2)$$

де r – відстань до точки спостереження, q – величина точкового заряду.

Поле точкового заряду є основою для визначення поля заряджених тіл, до яких не можна застосовувати модель точкового заряду. Заряджені тіла розбивають на елементи dV , dS або dl в залежності від форми тіл (об'ємне, плоске або лінійне тіло). Ці елементи несуть заряд dq , який розглядається як точковий і до нього застосовуються вирази (2.1) та (2.2)

$$\begin{aligned} dq &= \rho dV \\ dq &= \sigma dS \\ dq &= \tau dl \end{aligned} \quad (2.3)$$

ρ , σ , τ – об'ємна, поверхнева і лінійна густина електричного заряду на тілах відповідної форми.

Розглянемо приклад об'ємного заряду.

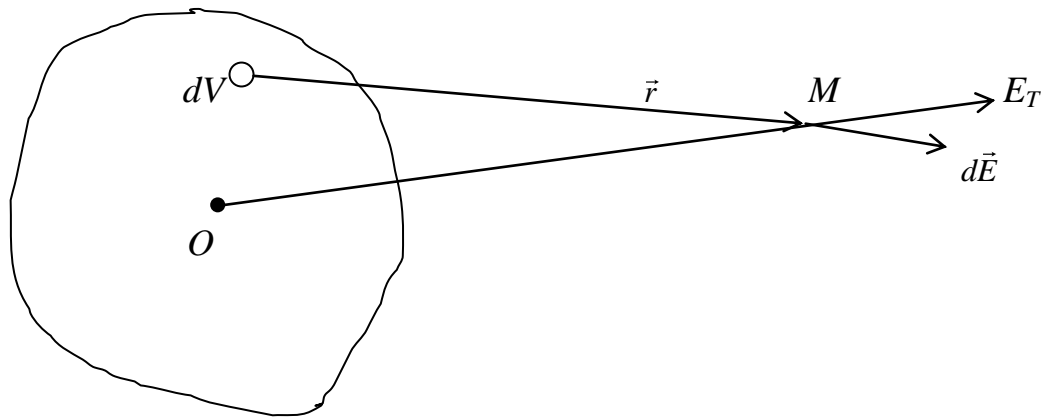


Рис. 2.1. Напруженість поля розподіленого заряду

Згідно моделі точкового заряду

$$E_T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{OM^2} \quad (2.4)$$

де OM – відстань від центру заряду тіла до точки спостереження M . При рівномірному розподілу заряду по тілу центр розташування заряду співпадає з геометричним центром тіла. Якщо тіло симетричне, то цей центр розташовується на осі симетрії, якщо тіло має дві або три осі симетрії, то центр буде розташований в точці перетину цих осей.

Напруженість поля елемента тіла dV

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.5)$$

Потенціал поля елемента dV

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r} \quad (2.6)$$

Поле, що створюється зарядженим тілом в точці спостереження M визначимо на основі принципу суперпозиції як суму полів елементів із яких складається тіло, тобто інтегруванням виразів (2.5) і (2.6) по всьому об'єму тіла V .

$$\vec{E} = \int_V d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dV \quad (2.7)$$

$$\varphi = \int_V d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV \quad (2.8)$$

Для інтегрування вектора $d\vec{E}$ необхідно перейти до скалярних величин. Для цього вводять систему координат і проєктують $d\vec{E}$ на осі. Потім інтегрують скалярні величини dE_x , dE_y , dE_z і визначають проєкції вектора напруженості поля елемента в точці спостереження на осі координат

$$\begin{aligned} dE_x &= dE \cos(d\vec{E}, \hat{i}) \\ dE_y &= dE \cos(d\vec{E}, \hat{j}) \\ dE_z &= dE \cos(d\vec{E}, \hat{k}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Проєкції вектора напруженості поля тіла на осі координат

$$\begin{aligned} E_x &= \int_V dE_x \\ E_y &= \int_V dE_y \\ E_z &= \int_V dE_z \end{aligned} \quad (2.10)$$

Модуль напруженості поля

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \quad (2.11)$$

Напрямок вектора \vec{E} в точці спостереження визначається направляючими косинусами – косинусами кутів між вектором \vec{E} і осями координат.

$$\begin{aligned} \cos(d\vec{E}, \hat{i}) &= \frac{E_x}{E} \\ \cos(d\vec{E}, \hat{j}) &= \frac{E_y}{E} \\ \cos(d\vec{E}, \hat{k}) &= \frac{E_z}{E} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Потенціал поля тіла, як скалярна величина, визначається згідно (2.8) значно простіше.

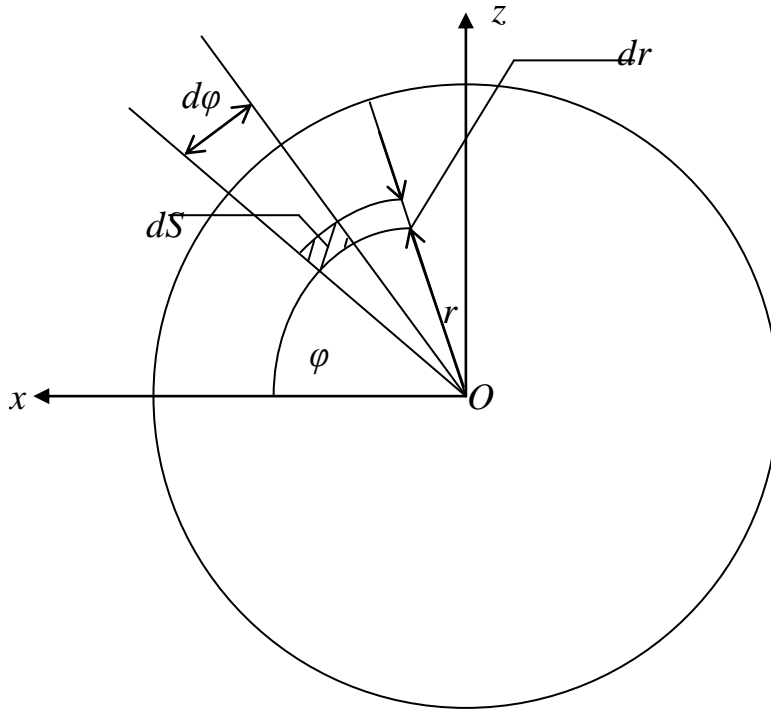
Якщо заряд по тілу розподілено рівномірно, то вирази (2.7) і (2.8) спрощуються, так як густина заряду, як постійна величина, виноситься із під знаку потенціалу.

Слід відмітити, що при визначенні поля згідно (2.1), (2.2), (2.5) і (2.6) необхідно враховувати знак заряду. Якщо тіло заряджене негативним зарядом, то потенціал поля елемента тіла і всього тіла буде від'ємним. Напрямок напруженості поля елемента і всього тіла також змінюється на протилежний.

2.2. Похибки застосування моделі точкового заряду до визначення електричного поля диска

Визначимо напруженість і потенціал поля рівномірно зарядженого диска на його осі симетрії на основі двох моделей і порівняємо результати. Так як похибка застосування моделі точкового заряду залежить не тільки від відстані до точки спостереження, а і від розмірів тіла, будемо використовувати відносну відстань $\frac{r}{R}$, де R – радіус диска, r – відстань від центру заряду (центру диска) до точки спостереження лежить на осі y , то відносна відстань буде $\frac{y}{R}$.

Для визначення площі елемента диска і інтегрування по його поверхні зручно використовувати полярну систему координат з координатами r і φ . Елемент площі вирізається двома радіусами з кутами між ними $d\varphi$ і двома дугами радіусом r і $r+dr$

Рис. 2.2. Елемент диска dS

Площа елемента

$$dS = rd\varphi dr \quad (2.13)$$

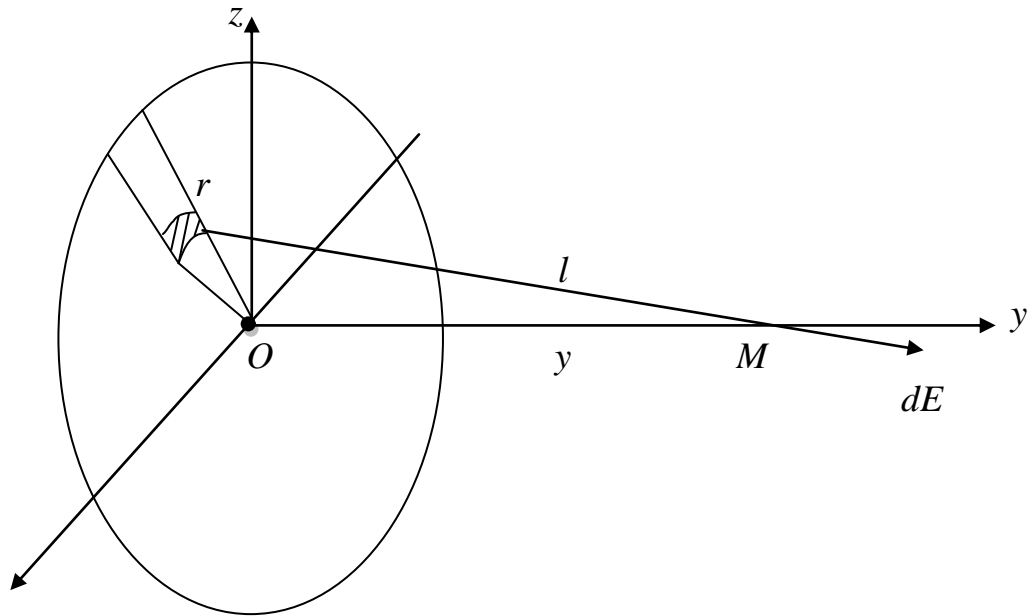


Рис. 2.3. Напруженість електричного поля елемента диска

Поле, що створюється в точці спостереження M елементом диска

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r d\varphi dr}{l} \quad (2.14)$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r d\varphi dr}{l^2} \quad (2.15)$$

де l – відстань від елемента до точки спостереження $l = \sqrt{r^2 + y^2}$, де σ – поверхнева густина заряду

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{\pi R^2} \quad (2.16)$$

Проведемо спочатку розрахунки потенціалу поля. Поле диска в моделі точкового заряду

$$\varphi_T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y} = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{\sigma R}{y/R} \quad (2.17)$$

де $y=OM$ – відстань від центру заряду до точки спостереження, y/R – відносна відстань.

Потенціал істинного поля φ_i визначається інтегруванням (2.14)

$$\varphi_i = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + y^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{r^2 + y^2} \Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + y^2} - y \right) \quad (2.18)$$

Виразимо φ_i через відносну відстань

$$\varphi_i = \frac{\sigma R}{4\epsilon_0} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{y}{R} \right)^2} - \frac{y}{R} \right) \quad (2.19)$$

Для визначення відносної похибки застосування моделі точкового заряду до розрахунку потенціалу поля рівномірно зарядженого диска визначимо поле в моделі точкового заряду і істинне поле в одиницях виміру $\frac{\sigma R}{4\epsilon_0}$, які характеризують заряд і розмір диска. Результати розрахунків потенціалу поля диска в точці спостереження в залежності від відносної відстані до центру диска приведені в таблиці 2.1. В ній також приведена абсолютна похибка застосування моделі точкового заряду $\Delta\varphi$.

$$\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_T \quad (2.20)$$

і відносна похибка $\frac{\Delta\varphi}{\varphi_i}$.

Таблиця 2.1

Залежність потенціалу поля рівномірно зарядженого диска, визначеного на основі моделі точкового заряду – φ_T , моделі неперервно розподіленого заряду – φ_i , абсолютної $\Delta\varphi$ і відносної $\frac{\Delta\varphi}{\varphi_i}$ похибок застосування моделі точкового заряду від відносної

відстані $\frac{y}{R}$ до точки спостереження на осі симетрії

Параметр	Відносна відстань y/R						
	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi_T, \frac{\sigma R}{4\epsilon_0}$	0,500	0,333	0,250	0,200	0,1667	0,1429	0,1250
$\varphi_i, \frac{\sigma R}{4\epsilon_0}$	0,472	0,324	0,246	0,198	0,1656	0,1422	0,1246
$\Delta\varphi, \frac{\sigma R}{4\epsilon_0}$	0,028	0,009	0,004	0,002	0,0011	0,0007	0,0004
$\frac{\Delta\varphi}{\varphi_i}, \%$	6,6	2,8	1,6	1,0	0,66	0,49	0,28

Залежність відносної похибки визначення потенціалу від відстані приведена на рис. 2.4.

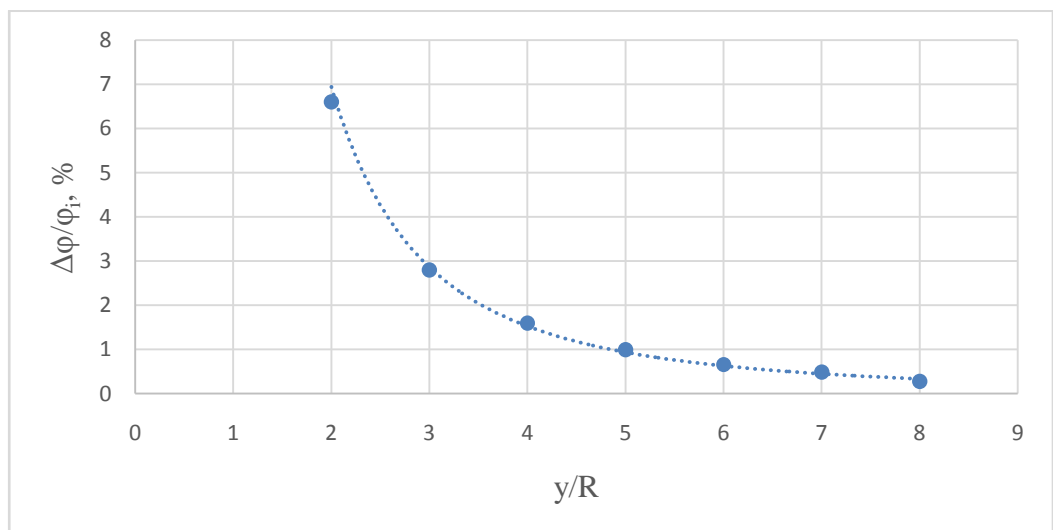


Рис. 2.4. Залежність відносної похибки застосування моделі точкового заряду на осі диска від відносної відстані до центру диску

Визначимо напруженість поля диска в т. M . Згідно моделі точкового заряду

$$E_T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0 \left(\frac{y}{R}\right)^2} \quad (2.21)$$

Вектор напруженості направлений по лінії OM , тобто по осі y .

Розрахуємо напруженість на основі моделі неперервно розподіленого заряду – напруженість істинного поля E_i .

Для цього необхідно знайти проєкції напруженості поля елемента на осі координат. Так як вісь y є віссю симетрії другого порядку, то проєкції вектора поля dE на осі x і z на відстані r від центра взаємно компенсуються.

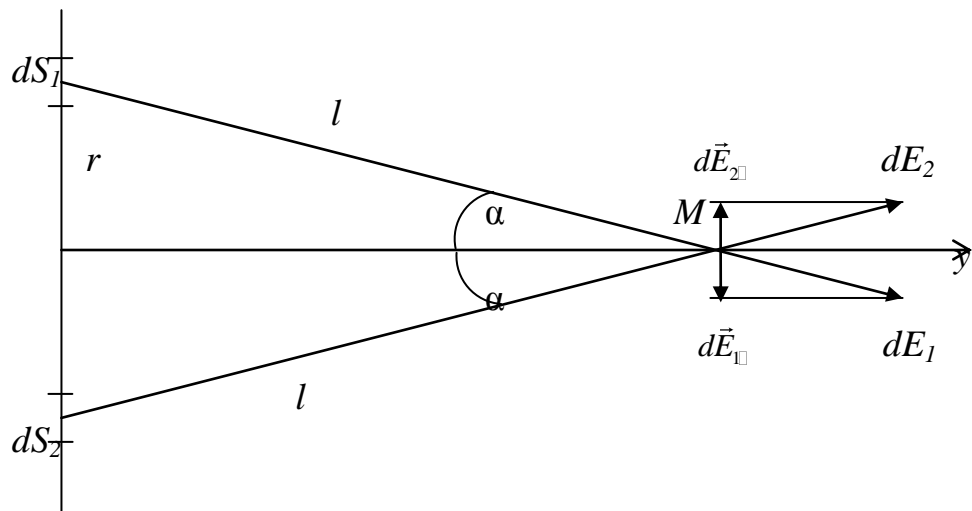


Рис. 2.5. Напруженість поля симетричних елементів диска

Заряди елементів диска однакові, тому $dE_i = dE_2$. В силу симетрії $l_1 = l_2 = l$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Вектор $d\vec{E}$ розкладемо на дві складові – dE_y і dE_1 - проєкція dE на площину диска XOZ . Для діаметрально протилежних

елементів складові в напрямку осі y додаються, а складові dE_i взаємно компенсуються, тому поле в точці M на осі y

$$E = E_y = \int dE_y \quad (2.22)$$

Проекція вектору $d\vec{E}$ довільного елемента диска на вісь y

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r d\varphi dr}{l^2} \cos \alpha \quad (2.23)$$

де α – кут між векторами $d\vec{E}$ і віссю y .

$$\cos \alpha = \frac{y}{\sqrt{y^2 + r^2}} \quad (2.24)$$

Підставивши (2.24) в (2.23) отримаємо

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma y r d\varphi dr}{(y^2 + r^2)^{3/2}} \quad (2.25)$$

$$E_i = E_y = \frac{\sigma y}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r dr}{(y^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma y}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{y^2 + R^2}} \right) \quad (2.26)$$

Визначимо напруженість через відносну відстань $\frac{y}{R}$

$$E_i = E_y = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2 \frac{y}{R} \left(\frac{1}{\frac{y}{R}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{y}{R}\right)^2 + 1}} \right) \quad (2.27)$$

Для визначення відносної похибки застосування моделі точкового заряду до розрахунку напруженості поля однорідно зарядженого диска визначимо напруженість істинного поля E_i і поля в моделі точкового заряду в одиницях виміру $\frac{\sigma}{4\epsilon_0}$. Результати розрахунків напруженості поля диска на осі симетрії y в залежності від відносної відстані до центра диску приведені в таблиці 2.2. В ній також приведені абсолютна і відносна похибки застосування моделі точкового заряду

$$\Delta E = E_i - E_T$$

$$\frac{\Delta E}{E_i}, \% \quad (2.28)$$

Таблиця 2.2

Залежність напруженості поля рівномірно зарядженого диска, визначеної на основі моделі точкового заряду E_T і моделі неперервно розподіленого заряду E_i , абсолютної ΔE і відносної $\frac{\Delta E}{E_i}$ похибок застосування моделі точкового заряду від відносної відстані $\frac{y}{R}$ до точки спостереження на осі симетрії

Параметр	Відносна відстань $\frac{y}{R}$				
	2	3	4	5	6
$E_T, \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$	0,2500	0,1111	0,0625	0,0400	0,0278
$E_i, \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$	0,2111	0,1024	0,0597	0,0388	0,0276
$\Delta E, \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$	0,0389	0,0087	0,0028	0,0002	0,0002
$\frac{\Delta E}{E_i}, \%$	18,5	8,5	4,7	0,5	0,2

Залежність відносної похибки визначення напруженості поля диска приведена на рисунку 2.6

Аналіз результатів розрахунків, приведений в таблицях 2.1 і 2.2 і на рисунках 2.4 і 2.6 показує, що відносна похибка визначення поля на осі диска зменшується із збільшенням відносної відстані від центра до точки спостереження. Похибка розрахунку напруженості зменшується більш стрімко, що пояснюється тим, що напруженість поля пропорційна $\frac{1}{r^2}$, а потенціал $\frac{1}{r}$ і, відповідно, потенціал із відстанню зменшується більш повільно.

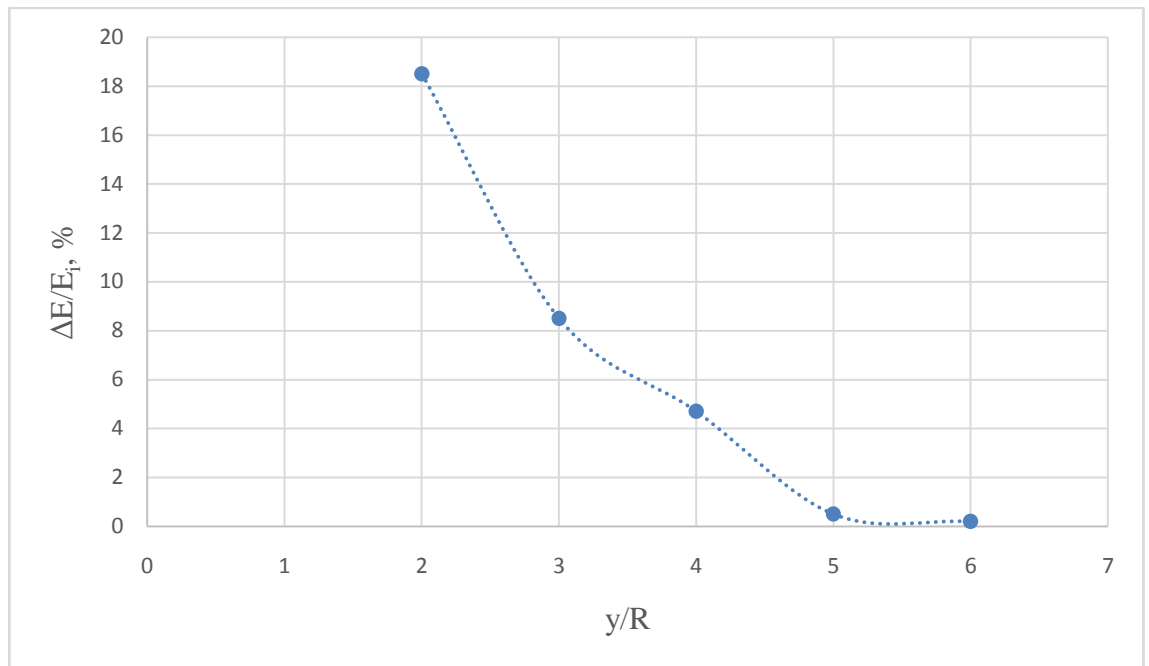


Рис. 2.6. Залежність відносної похибки застосування моделі точкового заряду до розрахунку напруженості електричного поля на осі диска від відносної відстані до його центра

При проведенні практичних розрахунків вважається, що похибка 0,5% і менше є допустимою. Отже, при розрахунку напруженості поля на осі диска можна застосовувати модель точкового заряду при відносній відстані більше 5, а при розрахунку потенціалу поля – при відносній відстані більше 7.

2.3. Похибка застосування моделі точкового заряду до визначення електричного поля на осі стрижня

Визначимо напруженість і потенціал поля рівномірно зарядженого стрижня (нитки) на його осі симетрії на основі моделі точкового і неперервно розподіленого заряду і порівняємо результати. Оскільки похибка застосування моделі точкового заряду залежить як від відстані точки спостереження від стрижня, так і від розмірів

(довжини) стрижня, результати розрахунків розглянемо в залежності від відносної відстані $\frac{x}{L}$, де L – довжина стрижня, x – відстань від центра стрижня до точки спостереження. Лінійна густина заряду стрижня постійна $\tau = \frac{q}{L}$.

Визначимо потенціал поля стрижня. На основі моделі точкового заряду

$$\varphi_T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x} \quad (2.29)$$

де x – відстань від точки спостереження M до центра стрижня (заряду) – точки O (рис. 2.7).

Через відносну відстань вираз матиме вигляд

$$\varphi_T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{\frac{x}{L}} \quad (2.30)$$

Ми врахували, що $q = \tau L$.

Розрахуємо потенціал поля стрижня на основі моделі неперервно розподіленого заряду. Для цього визначимо потенціал поля довільного елемента стрижня $dL = dy$

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dy}{l} \quad (2.31)$$

де l – відстань від елемента dL до точки спостереження

$$l = \sqrt{y^2 + x^2}$$

Потенціал поля стрижня знайдемо інтегруванням (2.31) по всій довжині стрижня

$$\varphi_i = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} 2 \int_0^{L/2} \frac{dy}{\sqrt{y^2 + x^2}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{L/2 + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x^2}}{x} \quad (2.32)$$

Виразимо потенціал істинного поля через відносну відстань $\frac{x}{L}$

$$\varphi_i = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{x}{L}\right)^2}}{\frac{x}{L}} \quad (2.33)$$

Для визначення відносної похибки застосування моделі точкового заряду до розрахунку потенціалу поля на осі стрижня виразимо потенціали поля точкового заряду і істинного поля в одиницях $\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0}$. Результати розрахунків потенціалу поля стрижня на осі його симетрії в залежності від відносної відстані до центра стрижня приведено в таблиці 2.3. в ній також приведені абсолютна і відносна похибки визначення потенціалу поля на основі моделі точкового заряду.

Таблиця 2.3

Залежність потенціалу поля зарядженого стрижня, визначеного за допомогою моделі точкового заряду φ_T і моделі неперервно розподіленого заряду φ_i , абсолютної $\Delta\varphi$ і відносної $\frac{\Delta\varphi}{\varphi_i}$ похибок застосування моделі точкового заряду від відносної відстані $\frac{x}{L}$ до точки спостереження

Параметр	Відносна відстань $\frac{x}{L}$				
	0,5	1	2	3	4
$\varphi_T, \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0}$	2,000	1,000	0,5000	0,3333	0,2500
$\varphi_i, \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0}$	1,761	0,9613	0,4944	0,3314	0,2491
$\Delta\varphi, \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0}$	0,239	0,0387	0,0056	0,0019	0,0009
$\frac{\Delta\varphi}{\varphi_i}, \%$	13,6	4,0	1,13	0,57	0,36

Залежність відносної похибки від відстані приведена на рис. 2.7.

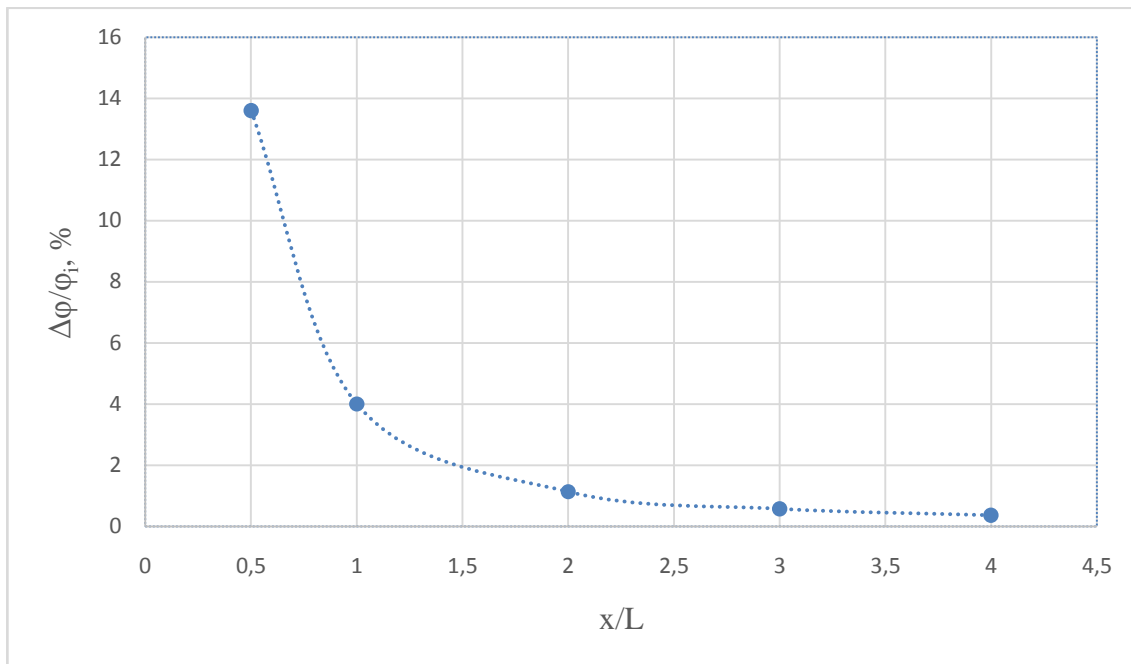


Рис. 2.7 . Залежність відносної похибки застосування моделі точкового заряду до визначення потенціалу поля на осі зарядженого стрижня від відносної відстані до точки спостереження

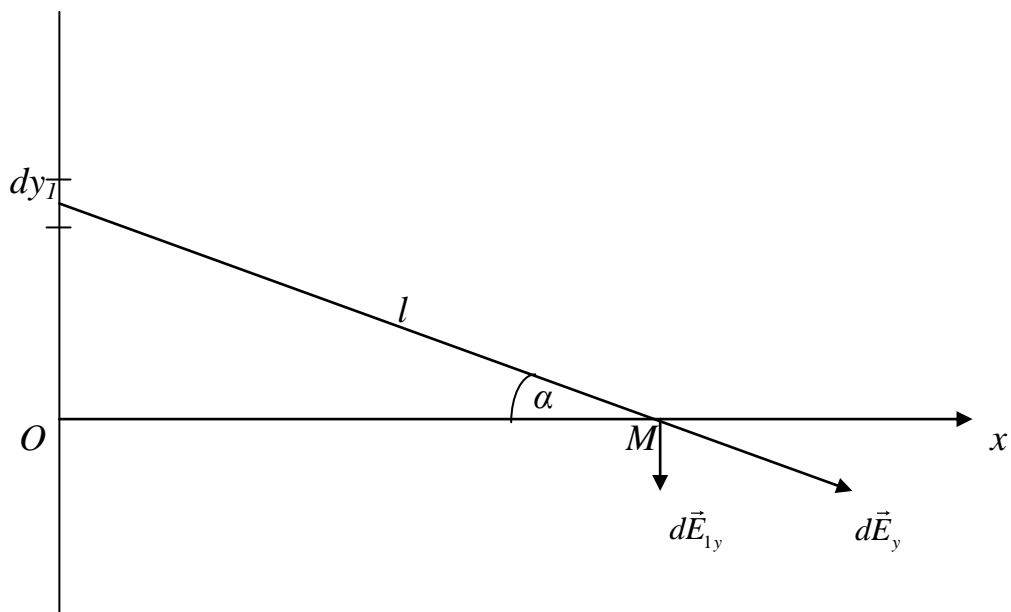


Рис. 2.7. Напруженість поля елемента стрижня

Визначимо напруженість поля стрижня в точках, які лежать на осі x . На основі моделі точкового заряду

$$E_T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2} \quad (2.34)$$

Через відносну відстань напруженість має вигляд

$$E_T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{L\left(\frac{x}{L}\right)^2} \quad (2.35)$$

Вектор \vec{E}_T направлений вздовж OM , тобто в напрямку осі x .

Визначимо напруженість істинного електричного поля стрижня на основі моделі неперервно розподіленого заряду. Напруженість поля елемента dy_1 в т. M

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dy}{l^2} \quad (2.36)$$

де l – відстань від елемента до точки спостереження, $l = \sqrt{y^2 + x^2}$, де $x = OM$.

В силу симетрії завжди знайдеться симетричний і рівний елемент dy_2 , поле якого $dE_2 = dE_1$. Складові цих векторів в напрямку осі x додаються, а в напрямку осі y компенсуються, тому

$$\int_L dE_y = 0$$

$$E = E_x = \int_L dE_x \quad (3.37)$$

Проекція dE_x рівна

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dy}{l^2} \cos \alpha = \frac{\tau x dy}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + x^2)^{3/2}} \quad (3.38)$$

врахували, що $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}}$

Напруженість поля стрижня на основі принципу суперпозиції

$$E_i = E_x = \frac{\tau x}{4\pi\epsilon_0} 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dy}{(y^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{x \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x^2}} \quad (3.39)$$

Залежність напруженості поля від відносної відстані

$$E_i = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 L \cdot \frac{x}{L} \sqrt{0,5^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^2}} \quad (2.40)$$

Визначимо напруженість істинного поля стрижня згідно (2.40), поля точкового заряду згідно (2.35) і абсолютну похибку в одиницях $\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 L}$. Результати розрахунків приведені в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4

Залежність напруженості поля зарядженого стрижня на його осі симетрії x , визначеної на основі моделі точкового заряду E_T і моделі неперервно розподіленого заряду E_i , абсолютної ΔE і відносної $\frac{\Delta E}{E_i}$ похибок застосування моделі точкового заряду від відносної відстані $\frac{x}{L}$ до точки спостереження

Параметр	Відносна відстань $\frac{x}{L}$				
	1	2	3	4	5
$E_T, \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 L}$	1,000	0,2500	0,1111	0,0625	0,0480
$E_i, \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 L}$	0,8944	0,2425	0,1096	0,0620	0,0398
$\Delta E, \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 L}$	0,1056	0,0075	0,0015	0,0005	0,0002
$\frac{\Delta E}{E_i}, \%$	11,8	3,1	1,4	0,8	0,5

Залежність відносної похибки визначення E від відстані приведена на рис. 2.8.

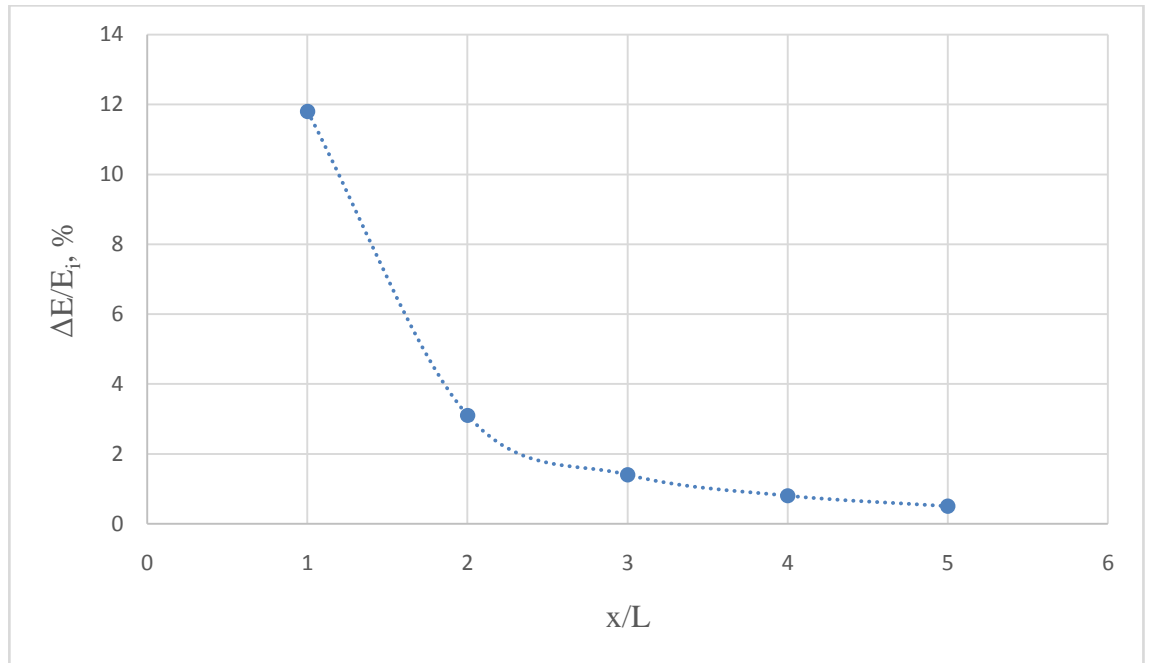


Рис. 2.8. Залежність відносної похибки застосування моделі точкового заряду до визначення напруженості поля на осі зарядженого стрижня від відносної відстані до точки спостереження

Висновки до II розділу

1. Проведено розрахунки потенціалу і напруженості електричного поля однорідно зарядженого диску і стрижня на їх осях симетрії, перпендикулярних тілам, на основі моделей точкового і неперервно розподіленого зарядів.

2. Розраховані абсолютна і відносна похибки застосування моделі точкового заряду в залежності від відносної відстані до точки спостереження.

3. Дослідження показали, що відносна похибка розрахунку поля, яка задовольняє практичним розрахункам, коли похибка стає меншою 0,5% досягається за умови, коли відносна відстань до точки спостереження лежить в інтервалі від декількох до десятка одиниць в залежності від форми тіла.

4. Знання залежності похибки застосування моделі точкового заряду до розрахунку електричного поля заряджених тіл відкриває можливість практичного застосування цієї моделі.

ВИСНОВКИ

1. Заряджені тіла описують за допомогою двох моделей – точкового і неперервно розподіленого заряду.

2. Розрахунок характеристик поля за допомогою моделі точкового заряду виконують набагато простіше, ніж на основі моделі неперервно розподіленого заряду.

3. Використання наближеної моделі точкового заряду в реальних умовах пов'язане з виникненням похибки, величина якої залежить від відстані до точки спостереження. Величина цієї похибки в залежності від відстані до точки спостереження для тіл різної форми в науково-методичній літературі не приводиться.

4. Проведено розрахунки потенціалу і напруженості електричного поля однорідно зарядженого диску і стрижня на їх осях симетрії, перпендикулярних тілам, на основі моделей точкового і неперервно розподіленого зарядів.

5. Розраховані абсолютна і відносна похибки застосування моделі точкового заряду в залежності від відносної відстані до точки спостереження.

6. Дослідження показали, що відносна похибка розрахунку поля, яка задовольняє практичним розрахункам, коли похибка стає меншою 0,5% досягається за умови, коли відносна відстань до точки спостереження лежить в інтервалі від декількох до десятка одиниць в залежності від форми тіла.

7. Знання залежності похибки застосування моделі точкового заряду до розрахунку електричного поля заряджених тіл відкриває можливість практичного застосування цієї моделі.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бар'яхтар В.Г., Довгий С.О., Божинова Ф.Я. Фізика 10 клас (рівень стандарту). – Харків: «Ранок», 2018. – 275 с.
2. Батыгин В.В. Сборник задач по электродинамике/ В.В.Батыгин, И.Н.Топтыгин. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 467 с.
3. Бредов М.М.. Классическая электродинамика/ М.М. Бредов и др. – М.: Наука, 1986. – 398 с.
4. Бушок Г.Ф., Венгер Є.Ф. Курс фізики. Електрика і магнетизм. – К.: Вища школа, 2002. – 278 с.
5. Вівчарюк О. Комп'ютерне моделювання при вивченні фізики./ О.Вівчарюк // Пошук молодих. Збірник матеріалів Всеукраїнської студентської науково-практичної конференції «Актуальні питання методики навчання природничо-математичних дисциплін». Укладач: Шарко В.Д. – Херсон ПП Вишемирський В.С., - 2007. . – № 6. – С. 142 - 144.
6. Говорков В.А. Сборник задач по электродинамике. – М.: ГОСТЕХИЗДАТ, 1960. – 234 с.
7. Головка М.В.; Мельник Ю.С.; Непорожня Л.В.; Сіпій В.В. Підручник Фізика і астрономія 11 клас (рівень стандарту). – К.: Педагогічна думка, 2019. – 288 с.
8. Гречко Л.Г. Сборник задач по теоретической физике/ Л.Г.Гречко, В.И.Сугаков, О.Ф.Томасевич, А.М.Федорченко. – М.: Высшая шк., 1972. – 332 с.
9. Жирнов Н.И. Задачник-практикум по электродинамике. - М.: Просвещение, 1970. – 347 с.
10. Засекіна Т.М., Засекін Д.О. Підручник Фізика 11 клас (профільний рівень). – К.: Оріон, 2019. – 304 с.
11. Засекіна Т.М., Засекін Д.О. Фізика і астрономія 11 клас (рівень стандарту). – К.: Оріон, 2019. – 272 с.

12. Иродов И.Е. Электродинамика. – 5-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 320 с.
13. Калапуша Л.Р. Зв'язок генезису методу моделювання з розвитком фізичної науки та освіти / Л.Р. Калапуша // Педагогічний пошук . – 2010. – №5. – С.6-10.
14. Калапуша Л.Р. Моделі в науці та навчальному процесі з фізики Ч. I, II//Фізика та астрономія в школі.- 2007.-№1.-с.10-13, - 2007.-№ 3, -С.13-17.
15. Калашников С.Г. Электричество. –М.: Физматлит, 2003.
16. Кучерук І.М. Загальна фізика: Електрика і магнетизм/ І.М.Кучерук, У.Т.Горбачук. – К.: Вища школа. – 1992. – 258с.
17. Кучерук І.Н., Горбачук І.Г. Загальна фізика. Електрика і магнетизм. – К.: Вища школа, 1990. – 368 с.
18. Матвеев А.Н.. Электричество и магнетизм. - М.: Высшая шк., 1983. - 463 с.
19. Миролубов Н.Н., Костенко М.В. и др. Методы расчета электростатических полей. – М.: Высшая шк., 1963 - 324 с.
20. Мултановский В.В. Курс теоретической физики. Классическая электродинамика/ В.В.Мултановский, А.С. Василевский. - М.: Просвещение, 1990. – 270 с.
21. Савельев И.В. Курс общей физики, т. 2. Электричество и магнетизм. – М.: Высшая школа, 1986. – 364с.
22. Садовий А.І. Основи фізики з задачами і прикладами їх розв'язування/ А.І.Садовий, Ю.Г.Лего – Київ: Кондор, 2003. – 384с.
23. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учеб. пособие: в 5 т. – Т. 3: Электричество. – М.: Наука, 1983. – 688 с.
24. Сиротюк В.Д., Мірошніченко Ю.Б. Фізика і астрономія 11 клас (рівень стандарту). – К.: Генеза, 2019. – 368 с.
25. Тамм И. Е. Основы теории электричества. - М.: Наука, 1976. – 614 с.

26. Телеснин Р.В. Курс физики. Электричество/ Р.В.Телеснин, В.Ф.Яковлев. – М.: Просвещение, 1970.
27. Федорченко А.М. Теоретична фізика. - Т.1: Класична механіка і електродинаміка. – К.: Вища шк., 1992. – 534 с.