МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп’ютерних наук, фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ЗАСТОСУВАННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ У ТРИГОНОМЕТРІЇ ТА ПЛАНІМЕТРІЇ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти “бакалавр”

Виконав: студентка 421 групи
Спеціальності 014 Середня освіта (математика)
Освітньо-професійної (наукової) програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (математика) галузі знань 01 Освіта / Педагогіка
кваліфікація: вчитель математики
Носаль М.

Керівник кандидатка фізико-математичних наук, доцентка Котова О.В.

Рецензент кандидатка педагогічних наук, доцентка кафедри природничо-наукової підготовки ХДМА Спичак Т.С.

Херсон – 2022

ВСТУП

Наочне зображення комплексних чисел запропонували на початку дев'ятнадцятого століття (Бессель у 1799 році та Арганд у 1806 році). Можна перерахувати чисельні застосування методу комплексних чисел.

Його застосування дає можливість подивитися на задачу з того боку та привчитися до того, що всі задачі з елементарної геометрії можна розв'язувати аналітичним методом та не прибігати до креслення. Тригонометричні формули можна виводити за допомогою формул Ейлера. Застосовувати у задачах з механічним та фізичним змістом та у фрактальній геометрії, криптографії тощо. Крім того, теорія функцій комплексної змінної є вагомою частиною математичного аналізу. Тому тема дослідження є *актуальною*.

Об'єктом дослідження є поле комплексних чисел.

Предметом дослідження є застосування комплексних чисел, зокрема при розв'язуванні тригонометричних задач, задач з елементарної геометрії на площині, при доведенні деяких основних планіметричних теорем та у фрактальній геометрії

Мета роботи: вивчити застосування комплексних чисел в планіметрії, тригонометрії та фрактальній геометрії.

Відповідно до мети визначено *завдання роботи:*

- вивчити науково-методичну літературу з теми дослідження;
- дослідити історію вивчення комплексних чисел;
- розглянути загальноприйнятий в шкільному курсі математики конструктивний метод побудови розширення числової системи;
- вивчити аксіоми комплексних чисел;
- викласти основи методу комплексних чисел у застосуванні до:
  - тригонометричних задач;
  - задач елементарної геометрії на площині;
  - задач фрактальної геометрії.

Методи дослідження. Методи алгебри і теорії чисел, лінійної алгебри, математичного аналізу, описовий метод та метод теоретичного узагальнення.

Дипломна робота складається із вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел. Обсяг роботи становить 37 сторінок.

РОЗДІЛ 1
АКСІОМАТИЧНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ ПОЛЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

1.1. Система аксіом комплексних чисел

Мінімальне поле (C, +,*,0,1, i, R), що містить поле дійсних чисел і деякий символ i, що $i^2 = -1$, називається *полем комплексних чисел*, а його елементи *комплексними числами*.

Для *C* виконуються наступні властивості:

1. *C* – поле;

2.$R \in C$;

3.$i \in C, i^2 = -1$;

4. C – мінімальне, що містить R і елемент i.

Теорема 1.1. Довільне поле *C*, що містить поле дійсних чисел R і елемент i з властивістю $i^2 = -1$, буде полем комплексних чисел тоді, і тільки тоді, коли кожен елемент x із C можна подати у вигляді

$$x = a + \mathrm{bi}, \tag{1.1}$$

де a, b – дійсні числа. Таке представлення єдине, тобто для даного елементу x із C існує лише одна пара дійсних чисел a, b (взятих в даному порядку), що задовольняють рівності (1.1).

Поле C можна побудувати строго аксіоматично [13].

Розглянемо аксіоматичне означення. Множина C елементів довільної природи називається *полем комплексних чисел*, а його елементи *комплексними числами*, якщо відносно операцій + та ·, заданих на C, виконуються наступні аксіоми:

Структурні аксіоми поля:

$A_{1.}$Комутативність додавання.

$A_{2.}$Асоціативність додавання.

$A_{3.}$Існує нуль в множині $C.(\exists 0 \in C)$

$A_{4.}$Існування для будь-якого елемента множини C йому протилежного, також в множині $C(\forall a \in C \ \ \exists -a \in C)$

Із цих чотирьох аксіом випливає, що$C(+)$ – абелева група.

$A_{5.}$Комутативність множення.

$A_{6.}$Асоціативність множення.

$A_{7.}$Існування одиниці в множині $(\exists \ \ e \in C)$

$A_{8.}$ Існування для будь-якого елемента множини C йому протилежного, також в множині $C(\forall a \neq 0 \in C \ \ \ \exists a^{-1} \in C)$.

$A_{9.}$ Дистрибутивність множення.

Із $A_{5.}$– $A_{9.}$ випливає, що $(C$-0)(·) – абелева група.

$A_{10.}$ C містить не менше трьох елементів $(0,1,i)$.

$A_{11.}$ Множина дійсних чисел R є підмножиною множини C.

$A_{12.}$ В множині C існує елемент i, для якого виконується умова $i^2 = -1$.

$A_{13.}$ C – мінімальне, що містить R та i.

Із $A_{1.}$–$A_{9.}$структурні, інші аксіоми – спеціальні.

Розглянемо основні властивості теорії комплексних чисел. Для цього доведемо наступні теореми [13, 25, 27].

Теорема 1.2. Аксіоматична теорія комплексних чисел несуперечлива , тобто існує модель даної теорії.

Теорема 1.3. Аксіоматична теорія комплексних чисел категорична, тобто будь-які їх два поля ізоморфні.

З доведенням теорем 1.2 та 1.3 можна ознайомиться в посібнику «Числові системи» [12].

1.2. Властивості комплексних чисел

Основні властивості сформульовані в аксіомах.

Розглянемо ще деякі властивості, які можна довести за допомогою аксіом.

Теорема 1.4. Довільне комплексне число єдиним способом можна подати у вигляді $a+\mathrm{bi}$, де $a, b \in R$.

Властивість виводиться через аксіому мінімальності.

Теорема 1.5. Поле комплексних чисел C не можна розташувати, а значить і впорядкувати (комплексні числа неможна порівнювати за величиною).

Доведення.

Доведення проведемо методом від супротивного.

Нехай C – розташоване поле. Тоді в ньому визначено поняття додатного елементу. Але при будь-якому розташуванні поля одиниця і i^2 додатні елементи. Сума додатних елементів є додатній елемент $1+i^2=0$. Отримали протиріччя. Отже C розташувати не можна, а значить і лінійно впорядкувати.

Теорему доведено.

Зауваження 1.1. Поле R – мінімальне повне і максимальне архімедовськи розташоване поле, тобто будь-яка фундаментальна послідовність дійсних чисел має дійсну границю. Але $R \subset C$. Отже, C не може бути архімедовськи розташованим, але може бути повним.

Оскільки поле C – не розташоване, то поняття модуля визначимо наступним чином: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}, z=a+\mathrm{bi}$.

Теорема 1.6. Якщо поле комплексних чисел пронумерувати по модулю комплексного числа, то воно буде повним.

Теорема 1.7. Комплексні числа мають наступні представлення $\forall \ z \in C$:

1. $z=(a, b), a, b \in R-$ векторна форма
2. $z=a+\mathrm{bi}, a, b \in R-$ алгебраїчна форма
3. $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)-$ (1.2)

тригонометрична форма, де $\cos\alpha=\frac{a}{r}, \sin\alpha=\frac{b}{r}; r=\sqrt{a^2+b^2}$.

$\alpha=\beta+2k\pi$, то $r(\cos\alpha+i\sin\alpha) r(\cos\beta+i\sin\beta)$.

4. $z=r\cdot e^{i\alpha}, -$ (1.3)

показникова форма, де $\cos\alpha = \frac{a}{r}$,$\sin\alpha = \frac{b}{r}$; $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5.$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ – матрична форма.

Теорема 1.8. Нехай z – комплексне число, n– натуральне число. В полі комплексних чисел $\sqrt[n]{z}$ має при z=0 єдине значення 0, при $z \neq 0$ має n значень. Якщо $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, то ці значення можна знайти за формулою

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right), k = \overline{0, n-1} \qquad (1.4)$$

З доведенням наведених можна ознайомиться в посібнику «Числові системи» [29].

1.2. Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Застосування в шкільному курсі планіметрії

Комплексному числу $z = x+iy$ можна взаємно однозначно поставити у відповідність точку M (x, y) (або радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$) :$z = x + \mathrm{i}y \Leftrightarrow M(\mathrm{x,y}) \Leftrightarrow M(z)$.

Нехай a та b – комплексні координати точок A та B, тоді $c=a+b$ є координатою точки C, таке, що $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Комплексному числу $d=a-b$ відповідає така точка D, що

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}.$$

Відстань між точками A та B дорівнює $\overrightarrow{\mathrm{BA} \vee = \mathrm{OD} \vee = a - b \vee}$:

$$|AB| = |a-b|. \qquad (2.1.)$$

Оскільки $|z|^2 = z\bar{z}$, то

$$|AB|^2 = (a-b)(\bar{a} - \bar{b}). \qquad (2.2.)$$

Рівняння $z\bar{z} = r^2$ визначає коло з центром O та радіусом r. Відношення $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \lambda, (\lambda \neq -1)$, в якому точка C ділить даний відрізок AB, виражається наступним чином: $\lambda = \frac{c-a}{b-c}, \lambda = \bar{\lambda}$, звідки отримуємо

$$c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}. \qquad (2.3.)$$

Якщо покласти $\frac{1}{1+\lambda} = \alpha$ і $\frac{\lambda}{1+\lambda} = \beta$, то

$$c = \alpha a + \beta b, \alpha + \beta = 1, \alpha = \bar{\alpha}, \beta = \bar{\beta}. \qquad (2.4.)$$

Умови (2.4.) необхідні та достатні щоб точки *A*, *B*, *C* були колінеарні. При $\lambda = 1$ точка *C* є серединою відрізка *AB*, і навпаки. Тоді:

$$c = \frac{1}{2}(a + b). \qquad (2.5.)$$

Центр паралелограма *ABCD* має комплексну координату $\frac{1}{2}(a + c) = \frac{1}{2}(b + d)$, де точки *A, B, C, D* мають відповідно комплексні координати a, b, c, d. Якщо не виключати випадок виродження, то рівність

$$a+c = b+d \qquad (2.6.)$$

є необхідною і достатньою умовою того, щоб *ABCD* був паралелограмом.

Окремо можна розглянути критерій колінеарності точок. Теорему Монжа. Теорему Ньютона про колінеарність середин діагоналей описаного навколо кола чотирикутника. Теорему Гауса про колінеарність при перетині сторін трикутника прямою.Теорему Паскаля про перетин протилежних сторін шестикутника прямими.

Їх ми розглянемо на прикладах в наступному пункті.

2.2. Застосування комплексних чисел в прикладах і задачах з планіметрії

Задача 1. Точки *M* та *N* – середини діагоналей *AC* і *BD* чотирикутника *ABCD* (рис. 1.1). Довести, що

$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2 = |AC|^2+|BD|^2+4|MN|^2$ [7].

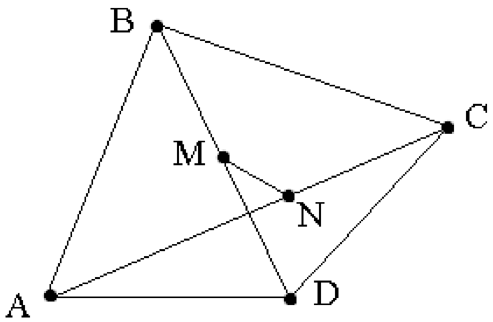

Рис. 2.1.

Розв'язання. Нехай точкам *A, B, C, D, M, N* відповідають комплексні числа а, *b, c, d, m, n.* Оскільки $m = \frac{1}{2}(a + c)$ і $n = \frac{1}{2}(b + d)$, то

$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2 =$ (a-b)$(\bar{a}-\bar{b})$ + (b-c)$(\bar{b}-\bar{c})$ + (c-d)$(\bar{c}-\bar{d})$ + (d-a)$(\bar{d}-\bar{a}) =$

$2(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}+d\bar{d})$ - $(a\bar{b}+\bar{a}b+b\bar{c}+\bar{b}c+c\bar{d}+\bar{c}d+d\bar{a}+\bar{d}a)$,

$|AC|^2+|BD|^2+4|MN|^2$ (a-c)$(\bar{a}-\bar{c})$ + (b-d)$(\bar{b}-\bar{d})$ + 4(m-n)$(\bar{m}-\bar{n}) =$

$(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}+d\bar{d})-(a\bar{c}+\bar{a}c+b\bar{d}+\bar{b}d)+(a+$c-b-d)$(\bar{a}+\bar{c}-\bar{b}-\bar{d}) = 2(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}+d\bar{d})-(a\bar{b}+\bar{a}b+b\bar{c}+\bar{b}c)+(c\bar{d}+\bar{c}d+d\bar{a}+\bar{d}a)$.

Задача 2. Довести, що якщо в площині паралелограма *ABCD* існує така точка *M,* що $|MA|^2+|MC|^2=|MB|^2+|MD|^2$, то *ABCD* - прямокутник (рис. 1.2.) [7].

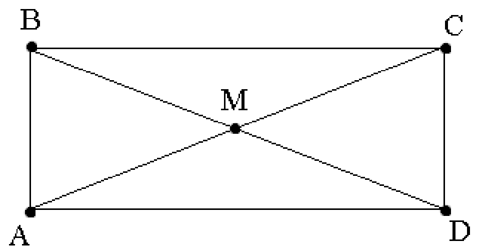

Рис. 2.2.

Розв'язання. За початкову точку приймемо точку M, тоді при $c= -a$, $d= -b$, і $a\bar{a}=b\bar{b}$, що означає рівність діагоналей, тобто він прямокутник.

Задача 3. Довести, що $AC^2+BD^2=2(MN^2+PQ^2)$., де *ABCD* чотирикутник, *MN, PQ,* з'єднують середини протилежних сторін.

Розв'язання. Ліву частину подамо в комплексній формі: $(a-c)(\bar{a}-\bar{c})+(b-d)(\bar{b}-\bar{d})$. Знаходимо комплексну рівність правої частини. Безпосереднім підрахунком можна показати їх рівність.

Задача 4.

Нехай *AB* і *CD* січні одиничного кола $z\bar{z}$=l. Знайти координати точки їх перетину, якщо точки *A, B, C, D* лежать колі.

Розв'язання. Нехай відповідні комплексні координати *a*, *b*, *c*, *d*.

Складаємо систему

{z + ab \{$\bar{z}|a+b$ з якої знаходимо: $\bar{z}=\frac{(a+b)-(c+d)}{\mathrm{ab}-\mathrm{cd}}$

Якщо хорди *AB* і *CD* перпендикулярні, то $ab=-cd$ і $\bar{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$, звідки $z=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

При цьому точка перетину визначається *A*, *B*, *C,* оскільки $d=-\frac{\mathrm{ab}}{c}$, і, отже, $z=\frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{\mathrm{ab}}{c}\right)$.

Задача 5. Задано одиничне коло $z\bar{z}$=l. Знайти координати точки перетину дотичних у точках *A*(*a*) і *B*(*b*)

Розв'язання. Складаємо систему $\{\bar{a}z+a\bar{z}=2,$

з якої знаходимо $z=\dfrac{2(a-b)}{a\bar{b}-\bar{a}b}$. Оскільки $\bar{a}=\frac{1}{a}, \bar{b}=\frac{1}{b}$, то$z=\frac{2\mathrm{ab}}{a+b}$,або

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Використовуючи результати попередніх задач, пропонуємо розв'язати наступні.

Задача 6. В колі проведено три паралельні хорди $\mathrm{AA}_1, \mathrm{BB}_1, \mathrm{CC}_1$.Довести, що для довільної точки *M* кола прямі $\mathrm{MA}_1, \mathrm{MB}_1, \mathrm{MC}_1$утворюють рівні кути відповідно із прямими *BP, CA, AB* [30].

Задача 7. Довести, що трикутник$A_1B_1C_1$, сторони якого належать дотичним у вершинах трикутника *ABC* до його описаного кола, гомотетичний трикутнику з вершинами в основах A_2, B_2, C_2,висот трикутника *ABC* [12].

Задача 8. Два рівні однаково орієнтовані трикутники *ABC* і $A_1B_1C_1$ вписані в одне коло. Довести, що трикутник з вершинами в точках перетину прямих *BP* іB_1C_1, *CA* іC_1A_1, *AB* і A_1B_1подібний даним трикутникам [12].

Задача 9. Довести, що сума квадратів медіан *BM, AN, CP* трикутника *ABC* рівна $\frac{3}{4}$ суми квадратів його сторін [9].

Задача 10. Довести, що відстань від вершини *Із* трикутника *ABC* до точки *D,* симетричної центру описаного кола відносно прямої *AB,* обчислюється за формулою $|CD|^2=R^2+|AC|^2+|BC|^2-|AB|^2$, де *R* - радіус описаного кола

РОЗДІЛ 2
КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРІЇЇ ТА ТРИГОНОМЕРІЇ

2.1. Побудова правильних многокутників

Побудова правильних трикутників, чотирикутників, п’ятикутників, шестикутників з допомогою циркуля і лінійки було відомо грецьким геометрам ще в IV ст. до н.е. Архімед (III ст. до н.е.) намагався знайти спосіб побудови тими ж інструментами правильного семикутника, однак йому це не удалося. Такої побудови не зуміли знайти геометри і протягом двох тисячоріч після Архімеда, хоча ніхто не сумнівався в існуванні способу розв’язання цієї за дачі. Питання про побудову правильного семикутника був вирішений у 1796 р. німецьким математиком Гаусом. Більш того Гаус одержав теорему, що дозволяє для кожного натурального числа n сказати, чи можна циркулем і лінійкою побудувати правильний n-кутник чи така побудова неможлива. Проблему побудови правильних многокутників Гаус зумів вирішити завдяки застосуванню комплексних чисел [17]. Будемо вважати, що n – просте число. Зрозуміло, що побудова правильного n-кутника рівносильна поділу кола на n рівних дуг. Ми можемо взяти будь-яке коло ω, вважаючи довжину його радіуса рівним одиниці, розглянути декартову систему координат з початком у центрі O обраного нами кола. Тоді кожна точка на площині здобуває визначену комплексну координату. Зокрема, точка Z_0 перетину кола з додатною віссю осі абсцис буде мати координату $z_0=1$. Правильний n-кутник, що має Z_0 однією зі своїх вершин, буде мати іншими своїми вершинами точки Z_k, з комплексними координатами $z_k = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}k\right)$, де $k=1,2,...,n-1$. Усі ці числа – відмінні від одиниці корені рівняння $z^n - 1 = 0$ тобто корені рівняння

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1 = 0 \qquad (2.7.)$$

Задача поділу кола полягає в тому, щоб побудувати точки з комплексними координатами z_k (k=1, 2, 3, n-1), тобто в тому, щоб побудувати корені рівняння (2.7.). Тому рівняння (2.7.) називають рівнянням поділу кола. Помітимо, що при простому n для побудови усіх вершин правильного n-кутника, вписаного в коло, досить побудувати одну із цих вершин [15]. Якщо n – просте число, то послідовно підносячи в натуральні степені будь-якій, не рівний одиниці, корінь рівняння $z^n = 0$, можна знайти всі корені n-го степеня з одиниці. Геометрично це означає, що якщо крім вершини Z_0 побудована на колі яка-небудь одна вершина Z_k, то, відкладаючи послідовно по колу n–2 рази дугу Z_0Z_k. одержимо всі інші вершини правильного n-кутника. Таким чином (при простому n) питання про можливість побудови за допомогою циркуля і лінійки правильного n-кутника зводиться до питання про можливість за допомогою цих інструментів побудувати на комплексній площині який-небудь корінь рівняння (2.7) поділу кола.

Розглянемо три частинні випадки.

1) Нехай n=5

Тоді рівняння поділу кола має вид:

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \tag{2.8.}$$

Покладемо

$$z = \exp\left(i\frac{2\pi}{5}\right) \tag{2.9.}$$

$$v = z + \frac{1}{z} \tag{2.10.}$$

$$v = 2\cos\frac{2p}{5} \tag{2.11}$$

Тому що число z задовольняє рівнянню (2.8.), те воно задовольняє і рівнянню

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \tag{2.12.}$$

В силу (2.10.) маємо $z^2 + \frac{1}{z^2} = v^2 - 2$ і рівняння (2.12.) приймає вигляд $v^2 + v - 1 = 0.$ Із (2.11.) видно, що нас цікавлять додатні корені цього рівняння $v = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Відрізок такої довжини легко побудувати циркулем і лінійкою. Після цього можна побудувати і точку z, що задається формулою (2.9.). Тим самим не тільки встановлена можливість побудови правильного п’ятикутника, але і знайдений визначений спосіб для фактичного виконання цієї побудови.

2) Нехай n=7.

Рівняння поділу кола на 7 рівних частин має вигляд:

$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$ або $z^3+z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}=0$.

Нехай z– будь-який його корінь. Покладемо $v=z+\frac{1}{z}$ тоді легко знайти, що $z^2+\frac{1}{z^2}=v^2-2$, $z^3+\frac{1}{z^3}=v^3-3v$ і ми приводимо рівняння до виду:

$$v^3+v^2-2v-1=0 \qquad (2.13.)$$

Це рівняння не має раціональних коренів. Жоден з коренів рівняння (2.13) не може бути побудований циркулем і лінійкою. Отже, не існує способу, що дозволяє побудувати правильний семикутник за допомогою циркуля і лінійки.

3) Нехай n=17. У цьому випадку задача зводиться до побудови відрізка $v=z+\frac{1}{z}=z+z^{16}=2\cos\frac{2\pi}{17}$. До побудови цієї величини можна підійти поступово, виходячи зі співвідношення:

$$z+z^2+z^3+\ldots+z^{16}=-1 \qquad (2.14.)$$

Позначимо $(z+z^{16})+\left(z^2+z^{15}\right)+(z^4+z^{13})+(z^8+z^9)=\gamma_1$,

$$(z^3+z^{14})+(z^5+z^{12})+(z^6+z^{11})+(z^7+z^{10})=\gamma_2.$$

$\gamma_1+\gamma_2=-1$. З іншого боку, виходячи з того, що $z^{17}=1$, неважко встановити, що $\gamma_1\cdot\gamma_2=-4$. Отже γ_1 та γ_2 – корені квадратного рівняння $\gamma^2+\gamma-4=0$, так що $\gamma_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. Ці корені можна легко побудувати (по абсолютній величині). Зазначимо, що $\gamma_2=2\left(\cos\frac{6}{17}\pi-\cos\frac{7}{17}\pi-\cos\frac{5}{17}\pi-\cos\frac{3}{17}\pi\right)$. Це число – від’ємне, так що $\gamma_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2},\gamma_2=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ Маючи величини γ_1 і γ_2, можна побудувати величини:

$\beta_1=z+z^4+z^{13}+z^{16}$, $\beta_2=z^2+z^8+z^9+z^{15}$,

$\beta_3=z^3+z^5+z^{12}+z^{14}$ та $\beta_4=z^6+z^7+z^{10}+z^{11}$.

Дійсно, $\beta_1+\beta_2=\gamma_1$, $\beta_1\cdot\beta_2=-1$, так що β_1 і β_2 – корені рівняння $\beta^2-\gamma_1\beta_1-1=0$. Оскільки $\beta_1=2\left(\cos\frac{2}{17}\pi+\cos\frac{8}{17}\pi\right)>0,$ то $\beta_1=\frac{\gamma_1+\sqrt{\gamma_1^2+4}}{2}$, $\beta_2=\frac{\gamma_1-\sqrt{\gamma_1^2+4}}{2}$. Аналогічно можна показати, що $\beta_3 = \frac{\gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2 + 4}}{2}$, $\beta_4 = \frac{\gamma_2 - \sqrt{\gamma_2^2 + 4}}{2}$. Позначимо $z + z^{16} = \alpha_1$, $z^4 + z^{13} = \alpha_2$. Тоді $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1$, $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \beta_3$, тому величини α_1 і α_2 є коренями рівняння $\alpha^2 - \beta_1\alpha + \beta_3 = 0$, тобто $\alpha_{1,2} = \frac{\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_3}}{2}$. Оскільки $\alpha_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17}$, $\alpha_2 = 2\cos\frac{8\pi}{17}$, то $\alpha_1 > \alpha_2$ і відповідно $\alpha_1 = \frac{\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_3}}{2}$.

Вважаючи, що β_1 і β_2 вже побудовано, відмітимо, що циркуль і лінійка дозволяють тепер побудувати відрізок довжини $\alpha_1 = v$. Проводячи аналогічні міркування, Гаус у 1796 р. довів теорему: побудова правильного n-кутника за допомогою циркуля та лінійки можлива в тому, і тільки в тому випадку, коли число n може бути представлене у виді $2^m p_1 p_2 \ldots p_s$ де $p_1, p_2, \ldots, p_s$ попарно різні прості числа виду $2^{2^k} + 1$, а число m – ціле від'ємне. Зокрема, якщо n – просте число, то для побудови правильного n-кутника за допомогою циркуля і лінійки необхідно і достатньо, щоб число n мало вид $2^{2^k} + 1$.

2.2. Основні теоретичні відомості для застосування комплексних чисел в тригонометрії.

Наступні властивості можна легко довести за допомогую формул елементарної математики:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $(a^m)^n = a^{\mathrm{mn}}$.

Але вони мають важливу роль у даному розділі [25]

$$e^{i\phi} \cdot e^{i\phi_1} = e^{i(\phi+\phi_1)}, \quad (1.65.)$$

$$e^{-i\phi} = \frac{1}{e^{i\phi}} \quad (1.66.)$$

$$\left(e^{i\phi}\right)^n = e^{(n\phi)i} \quad (1.67.)$$

Інакше їх можна довести наступним чином

$e^{i\phi} \cdot e^{i\phi_1} = (\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) = (\cos\phi\cos\phi_1 - \sin\phi\sin\phi_1) + +i(\sin\phi\cos\phi_1 + \cos\phi\sin\phi_1) = \cos(\phi$

Оскільки, формула (1.65) виконується для довільних ϕ і ϕ_1. Підставивши в (1.65) $\phi_1 = -\phi$, отримаємо: $e^{i\phi}e^{i(-\phi)} = e^{i\cdot 0} = 1$,

і, що $e^{-i\phi} = \frac{1}{e^{i\phi}}$, тобто формула (1.66.).

Для доведення формули (1.67) використаємо метод математичної індукції. При $n = 1$ формула (1.67.) є очевидною. Нехай вона має місце для $n = k$, тобто . Покажемо, що формула (1.67) справедлива для $n = k + 1$:

.

Отже, формула (1.67.) справедлива для довільного натурального n. Нехай $n = -m$, де m – натуральне число.

$$\left(e^{i\phi}\right)^n = \left(e^{i\phi}\right)^{-m} = \frac{1}{(e^{i\phi})^m} = e^{i(-m\phi)} = e^{i(n\phi)}$$

Отже формула (1.67) справедлива для довільного $n \in Z$.

Ми отримали *формулу Муавра*. Інша форма запису:

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi.$$

З формули Ейлера виражають $\cos\phi$ і $\sin\phi$:

$$e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi. \quad (2.68.)$$

Додаючи відповідні формули отримаємо:

$$2\cos\phi = e^{i\phi} + e^{-i\phi}; 2i\sin\phi = e^{i\phi} - e^{-i\phi},$$

які рівносильні формулам: $\cos\phi = \frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}$, $\sin\phi = \frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}$.

2.3. Застосування комплексних чисел в прикладах і задачах з тригонометрії

Задача 1. Обчислити суму: $A + B$, де

$$A = \cos\alpha + \cos3\alpha + \cos5\alpha + \dots + \cos99\alpha, \quad B = \sin\alpha + \sin3\alpha + \sin5\alpha + \dots + \sin99\alpha.$$

Розв'язання.

$$S = A + \mathrm{B}i = (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos3\alpha + i\sin3\alpha) + (\cos5\alpha + i\sin5\alpha) + +\dots + (\cos99\alpha + i\sin99\alpha).$$

За формулами Ейлера та Муавра :

$$S = A + \mathrm{B}i = e^{i\alpha} +$$

Отримали суму геометричної прогресії:

$$S =.$$

Значення A відповідає дійсній частині, B – уявній частині.

$$S = \frac{(e^{50i\alpha} - e^{-50i\alpha})e^{i\alpha}e^{50i\alpha}}{e^{i\alpha}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})} = \frac{e^{50i\alpha}2i\sin50\alpha}{2i\sin\alpha} = \frac{\sin50\alpha}{\sin\alpha}(\cos50\alpha + i\sin50\alpha).$$

Отже, $A = \frac{\sin50\alpha\cos50\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin100\alpha}{2\sin\alpha}$, $B = \frac{\sin^2 50\alpha}{\sin\alpha}$.

Для самостійного розв'язування пропонуємо n=100.

Задача 2. Подати у вигляді многочлена першого степеня від тригонометричних функцій кутів, кратних x $\cos^2 x$.

Розв'язання.

Розглянемо комплексне число $z = \cos x + i\sin x$.

$\cos^2 x = 1/4\ (z^2 + 2z\ \ z^{-1} + z^{-2}) =$
$= 1/4\ ((z^2 + z^{-2}) + 2) = 1/2\cos 2x + 1/2.$
Для самостійного розв'язування пропонуємо n=3.

Задача 3. Обчислити суму $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha$.

Розв'язання.

Позначимо через

$$A = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha,$$

$$B = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha.$$

Тоді $A + Bi = (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \dots + (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$;

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = a.$$

$$A + Bi = a + a^2 + \dots + a^n =$$

$$= \frac{a^n * a - a}{a - 1} = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1} = \frac{(a^{n+1} - a)(\bar{a} - 1)}{a^2 - 2a + 1} = \frac{a(a^n - a)(\bar{a} - 1)}{a(a - 2 + a^{-1})} =$$

$$= \frac{a^{n+1} - a^2 - a^n + a}{(\bar{a} + a^{-1}) - 2} = S.$$

Обчислимо знаменник:

$$a + a^{-1} - 2 = cos\ x + isin\ x + cos\ x - isin\ x - 2 =$$

$$= 2cos\ x - 2 = -2(1 - cos\ x) = -4sin^2\frac{x}{2};$$

$$S = \frac{cos\ (n+1)x + isin\ (n+1)x - cos\ nx - isin\ nx - cos\ x - isin\ x + 1}{-4sin^2\frac{x}{2}}$$

$$S = \frac{cos\ (n+1)x - cos\ nx - cos\ x + 1}{-4sin^2\frac{x}{2}} + i\frac{sin\ (n+1)x - sin\ nx - sin\ x}{-4sin^2\frac{x}{2}};$$

Отже,

$$S = \frac{(cos\ (n+1)x - cos\ nx) - cos\ x + 1}{-4sin^2\frac{x}{2}} = \frac{-2sin\frac{(n+1)x + nx}{2} \cdot sin\frac{(n+1)x - nx}{2} + 2sin^2\frac{x}{2}}{-4sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{-2sin\frac{2(n+1)x}{2} \cdot sin\frac{x}{2} + 2sin^2\frac{x}{2}}{-4sin^2\frac{x}{2}} = \frac{sin\frac{(n+1)x}{2} \cdot cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{2sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{sin\left(\frac{(n+1)x}{2} - \frac{x}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}}{sin\frac{x}{2}} = \frac{sin\frac{nx}{2}\, cos\frac{(n+1)x}{2}}{sin\frac{x}{2}};$$

$$A = \frac{sin\frac{nx}{2}\ cos\frac{(n+1)x}{2}}{sin\frac{x}{2}}.$$

РОЗДІЛ 3
КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА У ФРАКТАЛЬНІЙ ГЕОМЕТРІЇ

3.1. Фрактальна розмірність

В нелінійних системах може бути складна поведінка траєкторій, що з часом прагнуть до руху на деяких множинах складної будови (так званих дивних атракторах). Слово «атрактор» походить від англійського attract (притягати), а «дивний» – через складну побудову такої множини. Для характеризации складності побудови подібних множин була вигадана множина характеристик і критеріїв. Серед них особливе місце займає так звана фрактальна розмірність, що спочатку була введена у топології, потім була широко застосовувана в теорії динамічних систем і в практичних дослідженнях (Мандельброт, Хаусдорф). Поняття фрактальної розмірності було введено для того, щоб одержати кількісну міру розрізуваності геометричних об’єктів. Так як для «гарних» геометричних об’єктів ця міра приймає цілі значення, що збігаються зі звичайною розмірністю, то вона одержала назву розмірності. Назва фрактальна (fractual– дробовий) з’явилася через те, що для порізаних об’єктів вона приймає дробові значення. На малюнках внизу показані два геометричних об’єкти. Праворуч приведена пряма лінія, для якої відомо, що її розмірність дорівнює одиниці. Ліворуч внизу умовно зображена складна (заплутана) лінія, що, взагалі кажучи, може заповнювати намальований прямокутник всюди щільним чином. Виникає питання, яку розмірність приписати цій лінії з урахуванням того, що вона багато в чому близька прямокутника, тобто геометричному об’єкту розмірності два. Формально лінійна розмірність dim L = 1.

dim ? dim L = 1

Рис.2.1. Складна та проста лінії на площині.

Проведемо ілюстрацію введення фрактальної розмірності на двох найпростіших прикладах: кривих Кох і канторівській множині.

Крива Кох *множина Кантора*

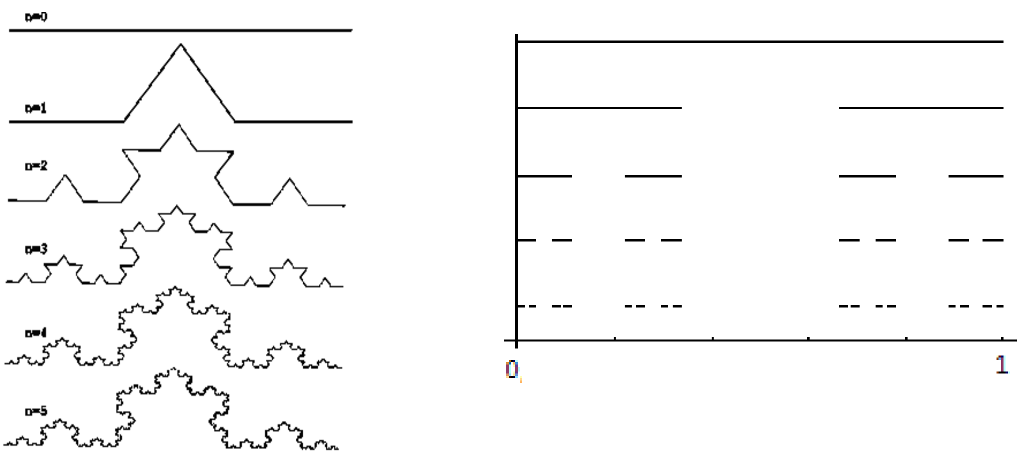

Рис.2.2. Схематичне уявлення про
криву Кох та про множину Кантора

Праворуч угорі приведені етапи побудови канторівської множини. Візьмемо відрізок довжини одиниця. На першому кроці видалимо з нього центральну третину (без крайніх точок). В результаті одержуємо два відрізки довжиною одна третя. На другому кроці видаляємо з кожного з цих відрізків центральну третину. Далі процес повторюється, приводячи на нескінченності до канторівської множини на прямій.

Ліворуч угорі зображена крива Кох. Спочатку береться відрізок одиничної довжини і видаляється з нього центральна третина, на місце якої приставляються два відрізки, що перетинаються під кутом 90 градусів і виходять з кінцевих точок викинутого відрізка. В результаті на першому кроці виходить крива, що складається з трьох відрізків, що примикають. На наступному кроці викидаються центральні третини цих трьох відрізків і на їхнє місце приставляються по два відрізка. Далі ця операція повторюється на кожному кроці, приводячи на нескінченності до кривої Кох. Наведемо тепер ілюстрацію введення фрактальної розмірності на прикладі кривої на площині. Нехай для простоти крива укладена в зображеному на малюнку квадраті. Покриємо квадрат системою менших квадратів з довжиною сторони, що дорівнює ε.

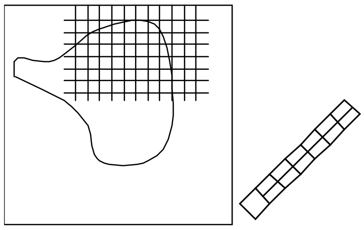

Рис.2.3. Покриття квадратами кривої на площині зі стороною ε.

Очевидно, що N - кількість покриваючих квадратів ~ $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Якщо крива в квадраті - (Рис.2.3 праворуч) плоска пряма, то кількість покриваючих її квадратів буде обернено пропорційною довжині сторони маленького квадрата (що очевидно з малюнка). Відмітимо, що в просторі (якби крива розташовувався в кубі) ми розглядали б розбивки на кубики і покриття кривої кубиками. Тепер вводимо числову характеристику, яку назвемо фрактальною розмірністю по наступній формулі:

$$\left(d_c = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1\varepsilon)}\right)$$

де $N(\varepsilon)$ - кількість лінійних об'єктів, необхідних для покриття кривої в даній розмірності, а в знаменнику число лінійних об'єктів зі стороною ε, необхідних для покриття лінійного об'єкта зі стороною одиничної довжини.

Множина фрактальна, якщо вона має нецілу фрактальну розмірність. Розглянемо декілька прикладів.

Для прямої на площині $N(\varepsilon) = 1\varepsilon$, $d_c = 1 = \dim L$. Для кривої Кох було підраховано, що $\text{Кох}_{d_c} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26185$, тобто це фрактальна крива. (Число відрізків $N_n = 4^n$. Довжина відрізка $\varepsilon_n = (1/3)^n$. Беремо куб на кількість кубів як N_n). Для канторівської множини $d_c = 0.63092$. Зауважимо, що розмірність точки на прямій $\dim x = 0$.

Зазначимо, що в даний час фрактальна розмірність і схожі величини знаходять усе більш широке застосування в задачах класифікації і розпізнавання образів. При цьому з'явилося безліч інших розмірностей: кореляційна, інформаційна, спектральна, ентропійна.

Фрактальні криві з'являються у дослідженні нелінійних відображень в якості границі областей тяжіння. Так, на малюнку внизу ліворуч приведена типова картина областей притяжіння стаціонарних точок у випадку простих рухів. Однак звичайно у випадку хаотичних рухів області притяжіння мають складну порізану форму і їх границями є фрактальні криві (як схематично зображено на малюнку внизу праворуч).

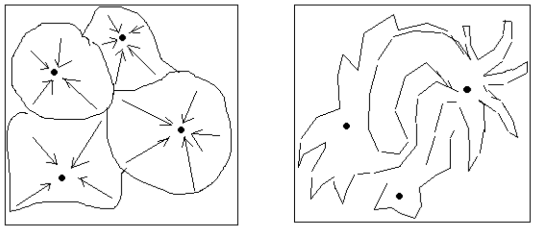

Рис.2.4. Схематичне зображення простих та складних границь областей тяжіння.

Приведемо також значення фрактальної розмірності дивних аттракторів у деяких стандартних відображеннях.

Відображення Енона: фрактальна розмірність дорівнює 1.26 (при значеннях параметрів $a = 1.4,\ b = 0.3$). Логістичне відображення: при значенні параметра $\alpha = 3.5699456$ значення фрактальної розмірності атрактора на відрізку є 0.538.

Відображення Лоренца має значення фрактальної розмірності 2.06 при значеннях параметрів $\sigma = 10,\ b = 8/3,\ R = 28.0.$

3.2. Множини Жюліа

Розглянемо комплексне відображення fc: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $fc(z) = z^2 + c$.

Усі квадратичні відображення є топологічно спряженими, причому ця спряженість досягається за допомогою афінного гомеоморфізму. Тому ми не зменшуємо загальності у вивченні динамічної поведінки квадратичного відображення, якщо вибираємо відображення $fc(z) = z^2 + c$.

Більше того, дуже багато чого зберігається і для раціональних відображень. У тих випадках, коли твердження мають місце для довільних поліноміальних комплексних відображень, будемо опускати індекс c у відображення f.

Множина Жюліа функції f, позначуване $J(f)$, визначається як гранична множина $J(f) = \partial\{z \mid f^n(z) \to \infty$ при $n \to \infty\}$.

Таким чином, множина Жюліа функції f є границя множини точок, що прямують до нескінченності при ітегрувані f. Множина названа на честь французького математика Г. Жюліа (1893 – 1978), який одночасно з П. Фатові (1878 – 1929) в 1917 написав основні статті поро інтегрування функцій комплексного змінного.

Найпростіша множина Жюліа відповідає випадку $f(z) = z^2$. При кожній ітерації обчислюється точний квадрат числа: $z_0 \to z_0^2 \to z_0^4 \to z_0^8 \to \ldots$.

Для цієї послідовності залежно від x_0 є три можливості:

1) числа отримуються все меншими й меншими по модулю, їх послідовність прямує до нуля. Нуль є аттрактором для процесу $z \to z^2$. Усі точки, що перебувають на відстані менше 1 від цього аттрактора, рухаються до нього;

2) числа стають усе більшими й більшими по модулю, прагнучи до аттрактора – нескінченності. Усі точки, що лежать на відстані більше 1 від нуля, рухаються до нескінченності;

3) точки перебувають і продовжують залишатися на відстані 1 від нуля. Їхні послідовності лежать на границі двох областей тяжіння, у цьому випадку на колі одиничного радіуса із центром в нулі.

Площина ділиться на дві зони впливу, а границею між ними є коло. Хоча ця множина Жюліа $J(f_0)$ – не фрактал, проте функція $f(z) = z^2$ хаотична на своїй множині Жюліа.

При $c \neq 0$, наприклад $c = -0{,}12375+0{,}56508\, i$ (рис.2.5.).

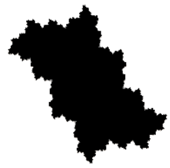

Рис.2.5. (Множина Жюліа,c =–0,12375+0,56508 i)

В даному випадку для послідовності $z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow ...$
також є три з перерахованих вище можливостей, але внутрішній аттрактор вже не є нулем, а границя вже не є гладкою – вона є фракталом.

Теорема 2.1. Припустимо, що |c| < 2. Нехай $z \in$ **C** і нехай

$$zn = f_c^n(z) \text{ для } n = 1,2,3, \ldots .$$

Якщо існує таке n_0, що $|z_{n_0}| \geq 2$, то має місце $\lim_{n \to \infty} z_n = \infty$,
тобто орбіта $\{f^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$прямує до нескінченності і z не належить множині Жюліа $J(fc)$.

Якщо вибрати нове значення c, c = –0,12 + 0,74 i, то одержимо

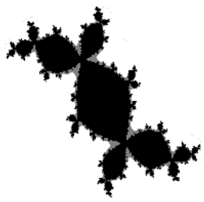

Рис.2.6. (Множина Жюліа, c = –0,12 + 0,74 i

В даному випадку множина Жюліа вже являє собою не єдине деформоване коло, а складається з нескінченного числа деформованих кіл, що утворюють зв'язну множину. Внутрішні точки цієї множини притягаються не однією нерухомою точкою, а циклом із трьох точок.

На рис. 2.7. зображена множина Жюліа при $c = i$, названа дендритом. Дендрит являє собою границю єдиної області тяжіння й містить ті точки, які не прямують у нескінченність.

На рис.2.8. зображено випадок, коли множина Жюліа не є зв'язною, вона називається *пил Фату* і є канторівською множиною на площині.

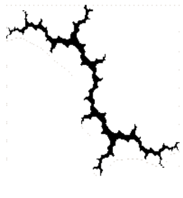

Рис.2.7. (Дендрит)

Теорема 2.2. Квадратична функція $fc(z) = z^2 + c$ хаотична на своїй множині Жюліа $J(fc)$ для всіх $c \in \mathbf{C}$.

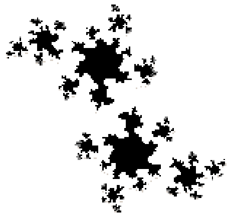

Рис.2.8. (Пил Фату)

3.3. Множина Мандельброта

Виділяють два типи множин Жюліа. Кожна множина Жюліа функції $fc(z) = z^2 + c$ або зв'язна, або цілком незв'язна. Звичайно, вони можуть виглядати зовсім по різному, навіть належачи до одного типу. Деякі зв'язні множини Жюліа виглядають як прості замкнені криві, які є фракталами, як це має місце у випадку $0 < |c| < 1/4$. Існують також зв'язні множини Жюліа, які не є простими замкненими кривими, як, наприклад, у випадку $c = –0,12 + 0,74i$.

З іншого боку, усі цілком незв'язні множини Жюліа мають ту властивість, що вони представляють «пил Фату» – канторівські множини. Визначальним фактором того, чи є множина зв'язною або незв'язною, є величина параметра c. Відповідна конструкція повинна бути комплексним аналогом біфуркаційної діаграми. На перший погляд, це важка задача – накреслити кожну можливу множину Жюліа а потім перевірити його на зв'язність. Але, досить вивчити поведінка тільки однієї точки на комплексній площині. Якщо множина Жюліа зв'язна, то вона зв'язна для будь-якої початкової точки, зокрема й для 0. Якщо орбіта 0 не прямує до нескінченності, то вона або лежить на границі, або блукає всередині множини. Якщо орбіта лежить на границі, то множина Жюліа є дендритом. Якщо ж орбіта блукає всередині множини, то множина топологічно еквівалентна колу, і отже, є зв'язною. Цей факт був відкритий американопольським математиком Бенуа Б. Мандельбротом в 1980 році, і в його честь множина всіх значень параметра c, при яких множини Жюлиа зв'язні, називається *множиною Мандельброта*.

Множина Мандельброта $\boldsymbol{M}$ для полінома $fc(z) = z^2 + c$ визначається як множина всіх $c \in \mathbf{C}$, для яких орбіта точки 0 обмежена, тобто

$$\boldsymbol{M} = \{c \in \mathbf{C} \mid \{f_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty} \text{ обмежена}\}.$$

Рівносильно $\boldsymbol{M} = \{c \in \mathbf{C} \mid f_c^n(0)$ не прямує до ∞ при $n \to \infty\}$.

Теорема 2.3. Якщо |c| > 2 і |z| ≥ |c|, то орбіта z спрямовується до ∞. Зокрема, із цього випливає, що точка c не належить множині $\boldsymbol{M}$.

Отже, перевіряти потрібно тільки точки |c| ≤ 2.

Причому у випадку |c| < 2, якщо орбіта досягає стани, коли її величина перевершує 2, це означає, що вона прямує до нескінченності а, отже точка, що перевіряється, не належить M. Точка $c = -2$ – єдина точка кола |c| = 2, яка належить множині Мандельброта.

Якщо розглянути множину Мандельброта (рис.2.9.), то перше, на що звертаємо увагу, – це область, обмежена великою *кардіоїдою* з вістрям у точці 0,25 і закругленою вершиною в точці –0,75. Потім – дотичне до кардіоїди коло з радіусом 0,25 із центром у точці 1 і, нарешті, незліченна множина менших областей, які також дотикаються до кардіоїди, а за формою нагадують коло. Більшість із них украй малі.

До кожної такої області у свою чергу прикріплене нескінченне число менших, а до кожної з менших знову ж приєднаний нескінченний набір ще менших областей і т.д. Якщо, вийшовши з великої кардіоїди і рухаючись вліво, потрапити в коло, потім (знову вліво) – у наступну область і продовжити рух вліво далі, то при цьому будемо увесь час наближатися до так званої *точки Мирберга-Фейгенбаума*, яка має координату –1,401... Відрізок від цієї точки до –2 також належить множині Мандельброта. І на ньому є маленька, що нагадує кардіоїду, область із загостреною вершиною в точці –1,75 (її центр –1,754877666...). До цієї маленької кардіоїди прикріплюється точно таке ж сімейство областей, як і до великої (рис.2.9.).

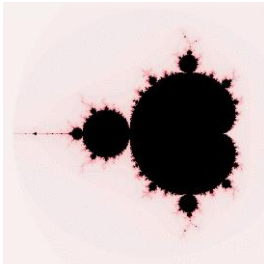

Рис.2.9. (Множина Мандельброта)

Виявляється, що число таких «кардіоїдних» компонент нескінченне. Крім того, вони зустрічаються не тільки на дійсній осі. Але всі вони настільки малі, що їх важко розрізнити.

Усі схожі на кардіоїду компоненти пов'язані з головною кардіоїдою за допомогою «ниток», насичених малими областями типу кардіоїд, кожна з яких супроводжується звичайним набором областей. Ці нитки розгалужуються, утворюючи дуже складні візерунки. Завдяки цим ниткам множина Мандельброта виявляється зв'язною.

Теорема 2.4. Нехай $\boldsymbol{M}$ – множина Мандельброта.

1. Для кожної точки $c \in$ M відповідна їй множина Жюліа $J(fc)$ зв'язна.

2. Для кожної точки $c \notin$ M відповідна їй множина Жюліа $J(fc)$ цілком не зв'язна і є канторівською множиною.

На рис.2.10. множина Мандельброта зображена разом з деякими асоційованими множинами Жюліа із вказівкою приблизної локалізації в просторі параметрів.

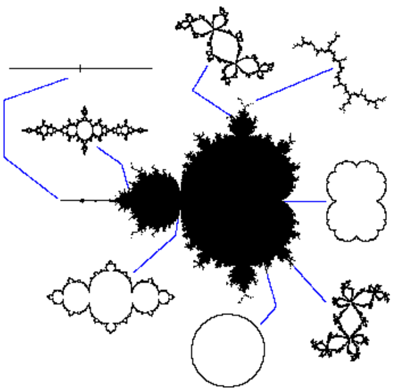

Рис.2.10. (Зв'язок множини Мандельброта
і множин Жюліа)

Границя множини Мандельброта викликає винятковий інтерес. Уявимо собі деякий шлях в с-*площині*, що починається всередині множини, і закінчується поза ним. Якщо міняти *c*, рухаючись уздовж цього шляху, то якісні зміни відбуваються з відповідними множинами Жюліа тоді, коли *c* перетинає границю множини Мандельброта: вони, начебто вибухнувши, перетворюються в хмару з нескінченного числа точок. У цьому розумінні границя множини Мандельброта визначає момент *математичного фазового переходу* для множин Жюліа.

Крім того, різним частинам множини Мандельброта відповідають деякі твердження про множину Жюліа, що мають місце для значення *c* із цих частин. Наприклад, кардіоїда, що окреслює головне тіло, містить усі значення *c*, при яких множина Жюліа буде деформованим колом, що охоплює область тяжіння деякої нерухливої точки. Як видно на зображеннях, множина Мандельброта оточена голкоподібними, розгалуженими й вигнутими антенами. Якщо ми помістимо *c* на самий кінець однієї з таких антен, то одержимо множину Жюліа подібної форми – дендрит.

ВИСНОВКИ

В роботі викладено основи методу комплексних чисел у застосуванні до планіметричних та тригонометричних задач та при доведенні деяких основних планіметричних теорем.

Використовуючи комплексні числа, доведено: критерій колінеарності точок; критерій належності чотирьох точок колу; теореми Ньютона, Гауса, Паскаля , Монжа тощо.

Вивчено питання фрактальної розмірності. Розглянуто властивості множин Жюліа (J) та множини Мандельброта (M). Досліджено зв'язок між множинами J та M. А саме:

- Якщо існує таке n_0, що $|z_{n_0}| \geq 2$ ($|c| < 2$, $z \in C$, $z_n = f_c^n(z)$ для $n = 1,2,...$), то $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, тобто орбіта $\{f^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ прямує до нескінченності і z не належить множині Жюліа $J(fc)$.
- Квадратична функція $fc(z) = z^2 + c$ хаотична на своїй множині Жюліа $J(fc)$ для всіх $c \in \mathbf{C}$.
- Якщо $|c| > 2$ і $|z| \geq |c|$, то орбіта z спрямовується до ∞.
- Для кожної точки $c \in M$ відповідна їй множина Жюліа $J(fc)$ зв'язна.
- Для кожної точки $c \notin M$ відповідна їй множина Жюліа $J(fc)$ цілком не зв'язна і є канторівською множиною.

Отже, метод комплексних чисел у застосуванні до розв'язування задач з елементарній геометрії можна давати не тільки студентам вищих навчальних закладів, але й школярам на факультативних заняттях. Оскільки цей метод простий у застосуванні, дає можливість подивитися на геометричні задачі з іншого боку, засвоїти, що всі задачі можна розв'язувати аналітичним методом, взагалі не прибігаючи до креслення.

Формули Ейлера і Муавра дозволяють ефективно розв'язувати різні задачі, яки пов'язані з тригонометричними функціями. Їх можна використовувати при обчисленні різних тригонометричних сум, з якими доводиться зустрічатися в різних прикладних дисциплінах. Загальний принцип обчислення таких сум полягає в тому, що дану дійсну суму замінюють деякою комплексною сумою, яку обчислюють за допомогою використання формул суми членів геометричної прогресії.

ДОДАТОК А

КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Я, Носаль Марина Олександрівна, учасниця освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:
– дотримуватися:

- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:

- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;

– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;

– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;

– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традицій університету, формуванню його позитивного іміджу;

– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;

– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;

– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні й політичні переконання;

– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;

– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;

– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;

– не брати участі в будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

– не підроблювати документи;

– не поширювати неправдиву та компрометуючу інформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;

– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг або здійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;

– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальні домагання;

– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базі університету та особистій власності інших студентів та/або працівників;

– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністю університету;

– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;

– не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальностей до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

27.04.2022 Носаль Марина Олександрівна