МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп’ютерних наук, фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

УЛЬТРАМЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти “бакалавр”

Виконав: студентка 421 групи
Спеціальності 014 Середня освіта (математика)
Освітньо-професійної (наукової) програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (математика) галузі знань 01 Освіта / Педагогіка
кваліфікація: вчитель математики
Поздняк Н.В.

Керівник доктор фізико-математичних наук,
професор Савченко О.Г.

Рецензент директор Херсонської
загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 44,
старший вчитель Перегняк О.А.

Херсон – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Як правило, під геометричним об’єктом розуміють деяку множину точок простору, який розглядається, що виділяється властивостями її точок. Під геометрією, зазвичай, розуміють сукупність усіх тверджень (аксіом та теорем) про властивості усіх геометричних об’єктів. Існує декілька способів опису евклідової геометрії, яку можна розглядати як деяку еталонну геометрію, оскільки інші геометрії можна отримати з евклідової шляхом її узагальнення або модифікації.

Найбільш відомі наступні три способи опису евклідової геометрії: опис на основі лінійного векторного простору, опис на основі метричного простору, аксіоматична концепція евклідової геометрії. Аксіоматична концепція евклідової геометрії – найбільш давня концепція. В ній евклідова геометрія формулюється у вигляді системи аксіом. Ці аксіоми описують однорідність та неперервність евклідового простору та властивості найважливіших геометричних об’єктів, таких, як точка, пряма та площина. Вона не містить яких-небудь числових характеристик, а тому практично не може бути модифікована або узагальнена.

Між тим реальна геометрія простору-часу однорідна лише наближено, і потрібно вміти будувати неоднорідні геометрії. Це досягається тим, що до опису евклідової геометрії вводяться деякі числові характеристики, які можна змінювати. Зазвичай, в якості такої характеристики використовується метрика. При одному завданні метрики одержується евклідова геометрія, при іншому – виникають неевклідові геометрії як результат деформації евклідового простору. Таким чином, виникає поняття так званого метричного простору, яке є базовим у математиці. Поряд з метричними просторами при цьому активно вивчаються спеціальні класи таких просторів та модифікації, які мають застосування в різноманітних галузях сучасної математики. Одним із таких класів є клас ультраметричних просторів, особливий випадок метричних просторів, в яких метрика задовольняє посиленій нерівності трикутника. А одним із важливих прикладів ультраметричного простору виступає поле p-адичних чисел.

Питанням дослідження метричних просторів та їх спеціальним класам присвячені роботи Буземена, Сабітова [22], Берже, Бураго [8] та інших. Сильна нерівність трикутника була введена Хаусдорфом [35], поняття ультраметрики було введено Краснером [28]. Роботи Боревича, Шафаревича, Вейля [10], Виноградова [11], Кобліца [17], Малера [30], Шикхофа [34, Монна [31] та інших містять питання, пов'язані з p-адичними числами.

Мета дослідження – розглянути поняття ультраметричного простору та основні властивості та приклади таких просторів.

Об'єктом дослідження виступає множина метричних просторів, а ***предметом дослідження*** – безпосередньо клас ультраметричних прсторів.

Виходячи з мети, визначені основні ***завдання*** дослідження:

- розглянути поняття ультраметрики та ультраметричного простору;
- навести основні властивості, що стосуються ультраметричних просторів;
- розглянути побудову поля p-адичних чисел як одного з прикладів ультраметричних просторів.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що були узагальнені основні відомості, що стосуються ультраметричних просторів та дано опис будови поля p-адичних чисел з точки зору ультраметричного простору. ***Практичне значення*** дипломної роботи полягає в можливості застосування матеріалу студентами та викладачами закладів вищої освіти.

Для вирішення поставлених завдань було застосовано наступні

методи: вивчення літератури з теми дослідження, порівняльний аналіз та узагальнення.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Робота складається з двох основних розділів. Перший розділ присвячено основним теоретичним відомостям, що стосуються метричних та ультраметричних просторів. В ньому, зокрема, наведено поняття ультраметрики та особливості класу ультраметричних просторів. В другому розділі розглянуто основні властивості ультраметричних просторів, а також розглянуто один з прикладів ультраметричного простору – поле p-адичних чисел.

РОЗДІЛ 1
МЕТРИЧНІ ТА УЛЬТРАМЕТРИЧНІ ПРОСТІРИ

1.1. Метричні простори

У функціональному аналізі називаючи деяку множину простором, як правило, наділяють його одним або декількома властивостями звичайних просторів, що вивчаються в елементарній геометрії. Основні властивості простору – це:

1) у просторі визначена відстань між будь-якими двома точками;

2) з будь-якої точки простору можна неперервно (не виходячи з цього простору) перейти до будь-якої іншої точки; при цьому кожну точку можна укласти в деякий як завгодно малий «окіл» цієї точки, що є підмножиною множини всіх точок цього простору;

3) у просторі визначено поняття вектору (елемента) простору та операції додавання елементів (векторів) простору та множення вектора на число [12].

Наділяючи абстрактний простір якоюсь однією, або будь-якими двома, або трьома з цих властивостей, ми одержуємо різні типи просторів, які вивчаються у функціональному аналізі. Спираючись на відомі властивості відстані між точками в тривимірному просторі, аналогічно введемо поняття відстані між двома точками в будь-якому просторі.

На множині X визначена структура метричного простору, якщо задана функція пари аргументів $\rho: X \times X \to R^1$, яка має такі властивості:

1) $\rho(x, y) \geq 0;\ \rho(x, y) = 0; \leftrightarrow x = y;$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x);$

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z);$

Функція ρ*(x, y)* називається *метрикою* або *функцією відстані* між точками *x* і *y*. Тоді пара (*X*, ρ) утворює *метричний простір*.

Множина *X*, що розглядається разом із заданою на ній метрикою ρ, називається *метричним простором*. Елементи множини *X* називаються при цьому *точками* цього метричного простору, а число ρ *(x, y)* – *відстанню* між точками *x* та *y*.

На одній і тій самій множині можна задати різні метрики, тому, щоб їх розрізняти, метричний простір позначають у вигляді пари *(X*, ρ*)*.

Розглянемо *приклади* метричних просторів.

1. Числова пряма. Нехай R – множина дійсних чисел. Метрику визначимо наступним чином: $\rho(x, y) = |x - y|$. Всі аксіоми 1)-3) виконуються. Отриманий метричний простір (R, ρ) називається *числовою прямою R.*

2. Многовимірний числовий простір. Нехай *X* – множина впорядкованих n– наборів дійсних чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Відстань між елементами $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ задамо формулою

$$\rho(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

Отриманий метричний простір (R^n, ρ) називається *n-вимірним числовим простором* або *евклідовим* простором.

3. В тій самій множині R^n можна задати метрику ρ_0 за формулою $\rho_0(x, y) = \max |x_k - y_k|$. (R^n, ρ_0) – так само n –вимірний числовий простір.

4. Дискретний метричний простір. Нехай *X* – довільна непуста множина. Вважаючи

$$\rho(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, \text{якщо } x_1 \neq x_2 \\ 0, \text{якщо } x_1 = x_2 \end{cases}$$

ми побачимо, що всі аксіоми 1)- 3) виконуються. Ця метрика називається *дискретною метрикою*, а простір (X, ρ) – *дискретним метричним простором*.

5. Простір неперервних функцій $C_{[a\ ,\ b]}$. Нехай *X* – сукупність дійсних функцій [7], визначених та неперервних на проміжку $[\,a\ ,\ b\,]$

Метрику на даній множині задаємо наступним чином:

$$\rho(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$$

Отриманий метричний простір (X, ρ) позначається $C_{[a\ ,\ b]}$ і називається *простором неперервних функцій.*

Відкритою кулею радіуса *r* з центром в точці *x* називається

$$B_r(x) = B(r,x) = \{y: \rho(x,y) < r\} \quad (1.1)$$

Замкнена куля:

$$\overline{B}(r,x) = \{y: \rho(x,y) \le r\} \quad (1.2)$$

Околом точки $x \epsilon X$ називається будь-яка відкрита множина, що містить цю точку. Позначення: *N(x)* – окіл точки *x*; $N_\varepsilon(x)$ – окіл точки *x* радіуса ε .

Нехай $Y \subset X$, тоді точка $x \epsilon X$ називається *граничною точкою* множини Y, якщо кожен окіл точки *x* містить щонайменше одну точку y: $y \epsilon Y, y \neq x$. Точка $y \epsilon Y$ називається *ізольованою точкою* множини Y, якщо існує окіл точки *y*, який не містить жодної точки з Y, окрім самої точки *y*. Точка $y \epsilon Y \subset X$ називається *внутрішньою*, якщо вона міститься в *Y* разом з деяким своїм околом.

Множина у метричному просторі називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої граничні точки. Множина у метричному просторі називається *відкритою*, якщо всі її точки внутрішні.

Замикання множини *Y* (позначення: $\overline{Y}$) – перетин усіх замкнених множин, що містять *Y*, тобто замикання – це найменша з усіх замкнених множин, яка містить Y.

Нехай (X, ρ) – метричний простір, на множині *Y*, що належить метричному простору *X*, визначена та ж сама метрика ρ, (тому *Y* також буде метричним простором), тоді пара (Y, ρ) називається *підпростором* (X, ρ).

Множина $A \subset X$ називається *обмеженою*, якщо існує такий елемент $x_0 \in X$, і стала c > 0, що $\rho(x, x_0) < c \ \forall\, x \in X$.

Множина X називається *зв'язною*, якщо її не можна подати у вигляді суми двох непустих замкнених (або двох непустих відкритих) підмножин, які не перетинаються.

Нехай A і B –дві множини в метричному просторі X. A називається щільною у множині B, якщо$\mathrm{B} \subset \overline{\mathrm{A}}$ і скрізь щільною в просторі X, якщо $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{X}$.

Простір, у якому існують зчисленні, всюди щільні множини, називається *сепарабельним*.

Послідовність $\{X_n\}$ точок метричного простору X називається *збіжною* до точки $x \in X$, якщо будь-який окіл точки x: $N_\varepsilon(x)$ містить усі точки цієї послідовності, починаючи з деякого номера (за винятком скінченого їх числа), тобто $\rho(x_n, x) \to 0, n \to \infty$.

Послідовність $\{X_n\}$ елементів метричного простору називається *фундаментальною*, якщо для неї виконується умова Коші [14]:

$$\rho(x_n, x_m) \to 0, при\ \ n, m \to \infty. \qquad (1.3)$$

Відображення g одного метричного простору $R = (X, \rho)$ в інший $R_0 = (Y, \rho_0)$: називається *неперервним* в точці x, якщо для будь-якого околу точки $g(x)$ - $N(g(x))$ знайдеться такий окіл точки x - $N(x)$, що буде виконано: $g(N(\mathrm{x})) \subset N\big(g(\mathrm{x})\big)$. Якщо відображення g неперервне в кожній точці простору R= (X, ρ) , воно називається *неперервним* на R.

Метричний простір (X, ρ) називається *повним*, якщо в ньому будь-яка фундаментальна послідовність збігається до елемента даного простору.

Зауваження. Не кожен метричний простір є повним.

Зауваження. Дві метрики на множині елементів простору X називаються *еквівалентними*, якщо збіжність елементів по одній із них означає збіжність і за іншою.

Відображення g: $(X, \rho) \to (X, \rho)$ називається *стискаючим відображенням* або *стисненням*, якщо існує таке число $a \in (0,1)$, що

$\rho\big(g(x), g(y)\big) < a\rho(x, y)$ де x, у ∈ X.

Теорема (принцип стискаючих відображень): Будь-яке стискаюче відображення повного метричного простору *(X,* ρ) самого в себе має одну і тільки одну нерухому точку, тобто таку точку $x \in X$: $g(x) = x$.

1.2. Лінійні простори

Під час розгляду багатьох конкретних множин ми бачимо, що до елементів цих множин (функцій, чисел тощо) можна застосовувати дві алгебраїчні операції: можна складати елементи один з одним і множити елементи множини на числа, отримуючи при цьому елементи тієї ж множини [22].

Множина E елементів x, y, z… називається *лінійним простором*, якщо в ній визначені дві операції:

1. $\forall x, y \in E$ поставлений у відповідність елемент $x + y \in E$, який називається *сумою* елементів;

2. $\forall x \in E$ та $\forall \lambda \in R$ поставлений у відповідність елемент $\lambda x \in R$, який називається *добутком* елемента і числа. Для елементів лінійного простору виконані такі аксіоми:

1. $x + y = y + x$.

2. $x + (y + z) = (x + y) + z$.

3. Існує нульовий елемент 0 такий, що $x + 0 = x$.

4. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, де $\lambda, \mu \epsilon R$.

5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

6. Існує протилежний елемент – x такий, що $x+(-x) = 0$.

Нехай X – лінійний простір і $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ елементи простору X. Будь-яка сума виду $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i$, де $a_i -$ дійсні числа, називається *лінійною комбінацією* елементів $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Елементи $x_1, x_2, \dots, x_m$ називаються *лінійно незалежними*, якщо

$\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = 0$, до того ж не всі a_i= 0. Якщо рівність $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = 0$ можлива тільки при a_i = *0, i* = 1,..., *m,* то елементи $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_m$ називаються *лінійно незалежними*.

Лінійний простір називається m*-вимірним*, якщо в ньому існують m лінійно незалежних елементів, а всі $(m+1)$ елементів лінійно залежні.

Подання будь-якого елемента $x = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i$ називається розкладом елемента x за базисом $\{e_i\}$. Набір будь-яких m лінійно незалежних елементів називається *базисом* у лінійному просторі X. Числа a_i називаються *координатами* елемента в базисі $\{e_i\}$.

Лінійний простір називається *нескінченновимірним*, якщо $\forall\, n \in N$ у цьому просторі існує *n* лінійно незалежних елементів.

У деяких лінійних просторах вдається ввести метрику, задаючи норму елемента, при цьому поняття норми еквівалентне поняттю довжини вектора в скінченновимірному просторі [16]. У просторах із нормою метрика $\rho(x, y)$ буде інваріантна щодо зсуву, тобто

$$\rho(x, y) = \rho(x + z, y + z) \forall x, y, z \in X, \qquad (1.4)$$

а сам простір *X* буде лінійним метричним простором.

Лінійний простір *X* називається *нормованим* простором, якщо будь-якому $x \in X$ поставлено у відповідність ‖*x*‖ так, що для ‖*x*‖ виконані наступні аксіоми:

1) $\|x\| > 0;\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Зауваження. У нормованому просторі можна ввести поняття відстані між елементами наступним чином: $\rho(x, y) = \|x - y\|$ і, отже, метричний простір можна вважати узагальненням нормованого.

Множина $M \subset X$ називається *обмеженою*, якщо її можна помістити в деяку кулю, тобто якщо $\exists\, c > 0$: $\forall x \in \mathrm{M}\ \|x\| < c = const$.

Приклади нормованих просторів:

1) Простір R^n. У ньому можна ввести норму наступним чином:

а) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$;

б) $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$;

в) $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$.

2) Простір обмежених послідовностей m чи l_∞. Це множина нескінченних послідовностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n,\dots})$, для яких $\sup_i |x_i| < \infty$. Норму в цьому просторі можна ввести як: $\|x\| = \sup_i |x_i|$.

Нехай X – лінійний простір і в X введено дві норми: $\|x\|_1, \|x\|_2$. Норми $\|x\|_1, \|x\|_2$ називаються *еквівалентними*, якщо $\exists \alpha, \beta > 0\colon \forall x \in X \quad \alpha\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta\|x\|_1$.

Дві норми $\|x\|_1, \|x\|_2 \in X$. Норма $\|x\|_1$ називається *підпорядкованою* нормі $\|x\|_2$, якщо $\exists \beta > 0,$ то $\forall x \in X$ $\|x\|_1 \le \beta\|x\|_2$

Зауваження. Якщо кожна із норм підпорядкована іншій, то норми еквівалентні.

1.3. Ультраметричні простори

Поняття метричного простору використовується в багатьох застосуваннях для опису відстані між об'єктами.

Нехай X – деяка множина. Функцію $\rho\colon X$ x $X -> R_+$ (R+ – множина додатних дійсних чисел) називають *метрикою*, якщо вона має такі властивості:

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (невиродженість);

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симетричність);

3) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (нерівність трикутника).

Як було зазначено вище, пара (X, ρ) називається метричним простором. Абстрактні метричні простори були введені як узагальнення евклідового простору $R^n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\colon x_j \in R\}$ зі стандартною метрикою

$$\rho_E(z,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2} \qquad (1.5)$$

Проте в деяких застосуваннях структура множини X та властивості метрики ρ можуть суттєво відрізнятися від евклідового випадку.

Ультраметричний простір є метричним простором, де виконана сильна нерівність трикутника [5].

Ультраметричний простір *X* є множиною з ультраметрикою *d(x,y)* (де *d(x,y)* називається відстанню між точками *x* та *y* з *X*), де вона є функцією двох змінних, що задовольняє властивостям додатності та невиродженості:

$$d(x,y)\geq 0, \quad d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y\ \forall x,y;$$

симетричності:

$$d(x,y)=d(y,x)\ \forall\ x,y;$$

та сильній нерівності трикутника:

$$d(x,y)\leq \max\bigl(d(x,z),d(y,z)\bigr) \quad \forall x,y,z.$$

Нас цікавить наступний клас метричних просторів *(X, ρ).* Кожна точка *x* має нескінченну кількість координат

$$x=(a_1,\ldots,a_n,\ldots). \qquad (1.6)$$

Кожна координата набуває скінченої кількості значень

$$\alpha\in A_m=\{0,\ldots,m-1\}, \qquad (1.7)$$

де $m>1$ – натуральне число, основа алфавіту A_m. У наших моделях метрика ρ є так званою *ультраметричною*, тобто задовольняє посиленій нерівності трикутника:

$$\rho(x,y)\leq \max[\rho(x,z),\rho(z,y)], \quad x,y,z\in X. \qquad (1.8)$$

Посилена нерівність трикутника має наступний геометричний зміст: довжина кожної сторони трикутника не перевищує найбільшої з двох інших. Це автоматично тягне за собою, що всі трикутники є рівнобедреними. Зауважимо, що з підсиленої нерівності трикутника випливає звичайна нерівність трикутника.

Позначимо простір послідовностей (1.7) символом Z_m . Стандартна ультраметрика вводиться на цій множині наступним чином. Фіксуємо дійсне число $0 < q < 1$. Нехай

$$x = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots), y = (\beta_0 \beta_1 \beta_2, \dots, \beta_n, \dots) \in Z_m.$$

Покладемо

$$\rho_m(x, y) = q^k, \text{якщо } \alpha_j = \beta_j, j = 0,1, \dots, k-1, \text{та } \alpha_k \neq \beta_k$$

Ця функція є метрикою та навіть ультраметрикою. Для того, щоб знайти відстань $p_m(x, y)$ між двома послідовностями цифр x та y, ми повинні знайти першу позицію k таку, що послідовності мають різні цифри на цій позиції. Вибір константи q не відіграє жодної ролі. Геометрії (топології), що відповідають різним $0 < q < 1$, еквівалентні [11]. Стандартний вибір: $q = 1/ra$. Таким чином,

$$\rho_m(x, y) = \frac{1}{m^k} \tag{1.9}$$

Нехай $m = 2$. Нехай $x = (0, 1, 0,...)$ та $y = (0, 1, 1,...)$. Тут $k = 2$ і, отже, $\rho_2(x, y) = 1/4$.

Приклад 1.1. Нехай $A = (\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1})$ – алфавіт з m букв. Множину всіх (нескінченно довгих) текстів у цьому алфавіті можна ототожнити з Z_m. Кожен текст x може бути описаний послідовністю:

$$x = (\alpha_0, \dots, a_k, \dots), \quad a_j \in A. \tag{1.10}$$

Ми використовуємо літеру α_0 для позначення пропуску. У такому алфавіті скінчений текст може бути ототожнений з послідовністю x, в якій $\alpha_j = a_0$ для всіх $j \geq k, k = k(x)$.

Нехай A – алфавіт, що включає прогалину a_0, точку і всі граматичні розділові знаки. Розглянемо тексти:

x = (Я повинен ходити до університету),

y = (Я ходжу до університету),

z = (Я ходжу до магазину).

Тоді

$$\rho_m(x, y) = \rho(x, z) = 1/m^2$$

(загальний початковий відрізок довжини 2);

$$\rho_m(y,z) = 1/m^9$$

(загальний початковий відрізок довжини 9). Зокрема,

$$\frac{1}{m^2} = \rho_m(x,y) \leq \max[\rho_m(x,z), \rho_m(z,y)] = \frac{1}{m^2}$$

Тепер розглянемо текст *w* = (Він має ходити до університету). Тоді

$$\rho_m(x,w) = \rho_m(y,w) = \rho_m(z,w) = 1.$$

Цей приклад показує важливу властивість нашої моделі: вибір перших бітів тексту грає вирішальну роль (ментальні точки, що починаються з «Я», строго відокремлені від точок, що починаються з «Він» або «Вона»).

Нехай *(X, ρ)* – довільний ультраметричний простір. Для $r \in R_+$, $\alpha \ \in X$, покладемо

$$U_r(a) = \{x \in X: \rho(x,a) \leq r\}, \quad U_r^-(a) = \{x \in X: \rho(x,a) \leq r\}.$$

Це *кулі* радіуса *r* із центром у точці a. Кулі мають насупні властивості.

1. Припустимо, що U та V – дві кулі в *X*. Тоді існують лише дві можливості:

а) кулі впорядковані щодо включення (тобто $U \subset V$ або $V \subset U$);

б) кулі не перетинаються.

2. Кожна точка кулі є її центром.

3. Куля може мати нескінчену множину радіусів.

4. Кожна куля в *X* як відкрита, так і замкнена.

Множини, відкриті і замкнені одночасно [3], відіграватимуть величезну роль в наших подальших дослідженнях. Для таких множин будемо використовувати слово «відкрито-замкнена».

Символ $S_r(a)$ означає *сферу*

$$S_r(a) = \{x \in X: \rho(x,a) = r\}$$

радіуса $r \in R_+$ з центром у точці a. Зауважимо, що будь-яка сфера є відкрито-замкненою. Зауважимо, що сфера не є межею кулі.

РОЗДІЛ 2
ВЛАСТИВОСТІ ТА ПРИКЛАДИ УЛЬТРАМЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

2.1. Основні властивості ультраметричних просторів

Ультраметричні простори мають наступні властивості:

1) Всі трикутники (трійки точок) в ультраметричному просторі рівнобедрені, причому довжини двох рівних сторін більше або дорівнюють довжині третьої сторони.

Ця властивість є характеристичною, тобто метричний простір, де всі трикутники мають таку властивість, є ультраметричним.

2) Будь-які дві кулі в ультраметричному просторі або не перетинаються, або одна містить іншу.

3) Будь-яка точка кулі в ультраметричному просторі є її центром. Діаметр кулі дорівнює її радіусу.

Діаметром кулі називається точна верхня грань для відстаней між точками цієї кулі.

Ультраметричні простори можуть виникати як деякі підмножини у дійсних просторах [17].

Приклад 2.1. Прикладом ультраметричного простору є множина з трьох точок евклідової площини, що є вершинами рівнобедреного трикутника, для якого довжини двох рівних сторін більші або рівні довжині третьої сторони. Ультраметрика тут виникає як обмеження евклідової метрики на площині на множину з трьох точок.

Таким чином, ми вклали ультраметричний простір з трьох точок у дійсну евклідову площину. Аналогічно, ультраметричний простір з $n + 1$ точок може бути вкладено в n– вимірний дійсний простір (а також у простір більшої розмірності).

Таким чином, підмножини у нескінченновимірних дійсних просторах можуть нести структуру ультраметричного простору. У певному сенсі це властивість загального випадку для дискретних підмножин у нескінченновимірних просторах [10].

А саме, якщо ми розглянемо в кулі високої розмірності три випадкові точки *A, B, C* (рівнорозподілені по кулі та обрані незалежно), то ці три точки майже напевно будуть знаходитися біля поверхні кулі (оскільки із зростанням розмірності одиничної кулі частка міри, що припадає на кулю даної товщини біля поверхні, прямує до одиниці). Розглядаючи тепер вектори, проведені з початку координат до точок *A, B, C,* ми з аналогічних міркувань можемо зробити висновок, що ці вектори у разі загального становища близькі до ортогональних. Отже, у разі загального розміщення точки *A, B, C* утворюють майже рівнобічний трикутник.

Покажемо, що ультраметричний простір ізометрично вкладається у простір функцій [4]. Та наведемо два простих доведення вкладення в гільбертовий простір [17].

Якщо *(X, d)* – довільний метричний простір, то куля радіуса $r \geq 0$ з центром $a \in X$ визначається рівністю

$$U_a^r = \{x | \; x \in X, d(x,a) \leq r\}. \tag{2.1}$$

Для ультраметричного простору *(X, d)* кулі U_a^r, U_b^r збігаються при $d(a,b) \leq r$ і не перетинаються при $d(a,b) > r$, це випливає з (2.1). Покладемо

$$\operatorname{diam} X = \sup\{\mathrm{d(x,y)} | \; x, y \in X\}. \tag{2.2}$$

Розглянемо приклад ультраметричних просторів, які складаються з функцій.

1) Візьмемо довільну множину *A*, що містить більше одного елемента, і обмежену числову множину $\mathrm{E} \subset (0, \infty)$. Через $\mathrm{A^E}$ позначимо множину всіх відображень ξ: $\mathrm{E} \rightarrow \mathrm{A}$. Введемо в $\mathrm{A^E}$ метрику δ за формулами

$\delta\ (\xi_1, \xi_2)$ = $\sup\{t |\ \xi_1(t)\ \neq\ \xi_2(t)\}$ при $\xi_1 \neq \xi_2$, $\delta\ (\xi_1, \xi_2)\ = 0$. (2.3)

Отримаємо ультраметричний простір (A^{E}, δ).

2) Візьмемо таку ж множину A і необмежену зверху множину $\mathrm{E} \subset (0, \infty)$. Зафіксуємо відображення $\eta : E \to A$. Позначимо через $\mathrm{A}_\eta^{\mathrm{E}}$ множину всіх відображень ξ: $E \to A$ таких, що $\xi\ (t)\ =\ \eta\ (t)$ для достатньо великих $t \in \mathrm{E}$. Введемо метрику δ так само, як і вище. Отримаємо ультраметричний простір ($\mathrm{A}_\eta^{\mathrm{E}}$, δ).

Наступні твердження демонструють якість «універсальності» побудованих просторів.

Твердження 2.1. Будь-який ультраметричний простір *(X, d),* діаметр якого є скінченим, ізометрично вкладається в деякий $(\mathrm{A}^{\mathrm{E}}, \delta)$. Якщо простір *X* скінчений, то множини *A, E* також можна обрати скінченими.

Доведення.

Нехай E – множина всіх невід'ємних значень, що приймаються метрикою d. Через A позначимо множину всіх куль простору *X*. Розглянемо простір $(\mathrm{A}^{\mathrm{E}}, \delta)$. Кожній точці $x \in X$ поставимо у відповідність функцію $\xi_x\ \in\ \mathrm{A}^{\mathrm{E}}$ виду

$$\xi_x\ (t)\ =\ U_x^t, t\ \in\ \mathrm{E}.$$

Покажемо, що отримане відображення $x \to\ \xi_x,\ x\ \in\ X$, ізометричне. Для цього візьмемо точки $x, y \in X$, $x \neq y$. Нехай $r = d(x, y)$. Якщо $t \in E,\ t < r$, то

$$U_x^t \cap U_y^t \neq \emptyset;$$

якщо $t \geq r$, то

$$U_x^t = U_y^t.$$

Отже,

$$\delta(\xi_x, \xi_y) =\ sup\{t\ |\ \xi_x\ \neq\ \xi_y(t)\ =\ r\ =\ d(x, y),$$

що й потрібно.

Твердження 2.2. Будь-який ультраметричний простір нескінченного діаметра ізометрично вкладається в деякий *(*$\mathrm{A}_\eta^{\mathrm{E}}$, δ*).*

Доводиться аналогічно.

У роботі [5] показано, що будь-який скінчений ультраметричний простір ізометрично вкладається в поле формальних статичних рядів. Інша конструкція запропонована у роботі Вестфріда [6].

Ізометричні вкладення в інші простори, необов'язково ультраметричні, розглянуті в [7].

Відомо і легко доводиться, що метричний простір допускає ізометричне вкладення в дійсний гільбертовий простір, якщо цю властивість має будь-який його скінчений підпростір. Тому ми обмежимося скінченими просторами.

Отже, нехай (*X, d*) – скінчений ультраметричний простір, $c_0 > c_1 > \cdots > c_m = 0$ – множина усіх значень метрики *d*. Наша мета – ізометричне вкласти (*X, d*) в дійсний гільбертовий простір.

Доведення.

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що для будь-якої точки $x \in X$ кулі $U_x^{c_k}$, $1 \le k \le m$, попарно різні, бо згідно з твердженням 2.1 будь-який *X* вкладається у простір із цією властивістю. Позначимо через *H*(*X*) дійсний гільбертовий простір, ортонормованим базисом якого служить набір всіх куль простору (*X, d*), відмінних від *X*. Кожна така куля має вигляд $U_x^{c_k}$, $a \in X, 1 \le k \le m$. Визначимо відображення $\varphi\colon \mathrm{X} \to \mathrm{H(X)}$ формулою

$$x \to \varphi(x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k U_x^{c_k}, \qquad \lambda_k = \sqrt{\frac{c_{k-1}^2 - c_k^2}{2}}. \tag{2.4}$$

Твердження 2.3. Відображення $\varphi\colon \mathrm{X} \to \mathrm{H(X)}$, задане формулою (2.4), ізометричне.

Доведення.

Візьмемо точки $x, y \in X$, $x \neq y$. Тоді $d(x, y) = c_p$, де $0 \le p < m$, та

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k U_x^{c_k}, \qquad \varphi(y) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j U_x^{c_j}.$$

Кулі $U_x^{c_k}$ та $U_x^{c_j}$ співпадають тоді і тільки тоді, коли $k-j, d(x,y) \leq c_k$; остання нерівність рівносильне нерівності $k \leq p$. Отже, $(U_x^{c_k}, U_x^{c_j}) = 1$ при $k \leq p$, $(U_x^{c_k}, U_x^{c_j}) = 0$ при $k \neq j$ и $p < k = j$. Тому

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|^2 = |\varphi(x)|^2 + |\varphi(y)|^2 - 2\big(\varphi(x),\varphi(y)\big) = 2\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^2 - 2\sum_{k=1}^{p}\lambda_k^2$$

$$= 2\sum_{k=p+1}^{m}\lambda_k^2 = \sum_{k=p+1}^{m}(c_{k-1}^2 - c_k^2) = c_p^2 = d^2(x,y).$$

Отже,

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| = d(x,y).$$

Цим доведено твердження 2.3.

Твердження 2.4. Метричний простір *(X, d)* допускає ізометричне вкладення в гільбертовий простір в тому і тільки тому випадку, якщо форма $[f,f]$ невід'ємно визначена на підпросторі

$$L_0 = \left\{ f \mid f \in L, \sum_{x\in X} f(x) = 0 \right\},$$

тобто $[f,f] \geq 0$ при $f \in L_0$.

Доведення.

Нехай, як і раніше, *X* скінчена, n – число його елементів. Нехай $[f,f] \geq 0$ при $f \in L_0$. Покладемо

$$L_{00} = \{ f \mid f \in L_0, [f,f] = 0 \}.$$

Тоді L_{00} – лінійний підпростір в L_0 і в фактор-просторі H = L_0/L_{00} виникає додатний скалярний добуток $\frac{1}{2}[f_1, f_2]$. Образ елемента $f \in L_0$ при природному відображенні $L_0 \to H$ позначимо через f. Для будь-якої точки $a \in X$ введемо функцію δ_a виду

$$\delta_a(x) = 0 \text{ при } x \neq a,\ \delta_a(a) = 1.$$

Візьмемо також функцію $f^0(x) = 1, x \in X$. Зауважимо, що $\delta_a - \frac{1}{n}f^0 \in L_0$, тим самим визначено відображення ψ: X →H формулою

$$\psi\text{ (a)} = \overline{\delta_a - \frac{1}{n} f^0}.$$

Для будь-яких точок $x, y \in X$ маємо

$$|\,\psi(x) - \psi(y)|^2 = \frac{1}{2}\left[\delta_x - \delta_y, \delta_x - \delta_y\right] = d^2(x, y).$$

Отже, відображення: ψ: X →H ізометричне.

Ми довели, що умови $[f, f] \geq 0,\ f \in L_0$, достатньо для вкладеності простору (X, d) в гільбертовий простір. Необхідність цієї умови очевидна. Твердження 2.4 доведено.

Звернемося до ультраметричного простору (X, d). Нехай він скінчений та $c_0 \cdots > c_m = 0$ – множина усіх значень, що приймаються метрикою d. Для будь-якого $k = 0,1, \dots, m$ простір X є об'єднанням l_k куль радіусу c_k, які попарно не перетинаються. Позначимо ці кулі через $U(k, i), 1 \leq i \leq l_k$. Зауважимо, що $l_0 = 1, l_m = |X|$. Введемо квадратичні форми

$$S_k(f) = \sum_{i=1}^{l_k} \left| \sum_{x \in U(k,i)} f(x) \right|^2, f \in L, 0 \leq k \leq m.$$

Зокрема,

$$S_0(f) = \left| \sum_{x \in X} f(x) \right|^2, S_m(f) = \left| \sum_{x \in X} f(x) \right|^2.$$

Твердження 2.5. Справедлива рівність:

$$\begin{aligned} -\sum_{x,y \in X} d^2(x, y) f(x) f(y) &= -c_0^2\, S_0(f) \\ + \sum_{k=1}^{m} (c_{k-1}^2 - c_k^2)\, S_k(f), &\qquad f \in L. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Доведення.

Попередньо для будь-якого $k = 0,1, \dots, m$ підрахуємо суму

$$\sum_{d(x,y) \leq c_k} f(x) f(y).$$

Нерівність $d(x, y) \leq c_k$ рівнозначна тому, що точки x, y лежать у одній із куль $U(k,i)$. Звідси

$$\sum_{d(x,y)\le c_k} f(x)f(y) = \sum_{i=1}^{l_k}\sum_{x,y\in U(k,i)} f(x)f(y) = \sum_{i=1}^{l_k}\left|\sum_{x\in U(k,i)} f(x)\right|^2 = S_k\,(f).$$

Отже,

$$-\sum_{x,y\in X} d^2(x,y)f(x)f(y) = -\sum_{k=0}^{m-1} c_k^2 \sum_{d(x,y)=c_k} f(x)f(y)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} c_k^2\left(\sum_{d(x,y)\le c_k} f(x)f(y) - \sum_{d(x,y)\le c_{k+1}} f(x)f(y)\right)$$

$$= -\sum_{k=0}^{m-1} c_k^2\left(S_k(f) - S_{k+1}(f)\right)$$

$$= -c_0^2 S_0\,(f) + \sum_{k=1}^{m}(c_{k-1}^2 - c_k^2)S_k(f).$$

Твердження 2.5 доведено.

З (2.5) випливає, що

$$-\sum_{x,y\in X} d^2\,(x,y)f(x)f(y) \ge c_{m-1}^2\sum_{x\in X}|f(x)|^2, \qquad f\in L_0.$$

Звідси отримуємо, використовуючи твердження 2.4, що (X,d) вкладаємо в простір Гільберта.

2.2. Поле p-адичних чисел як приклад ультраметричного простору

Найважливішим прикладом ультраметричного простору є поле p-адичних чисел Q_p. Поле p-адичних чисел Q_p є доповненням поля раціональних чисел Q по p-адичній нормі на Q [10]. Ця норма визначається в такий спосіб. Довільне раціональне число x може бути записано у вигляді $x = p^{\gamma}\frac{m}{n}$, де цілі m і n не діляться на p. p-адична норма не рівного нулю раціонального числа $x = p^{\gamma}\frac{m}{n}$ вводиться як $|x|_p = p^{-\gamma}$. Сильна нерівність трикутника для p-адичних чисел набуває вигляду

$$|x + y|_p \leq max(|x|_p, |y|_p).$$

p-адична норма узгоджена з добутком:

$$|xy|_p = |x|_p|y|_p.$$

p-адичні норми ненульового раціонального числа x задовольняють формулі добутку:

$$\prod_p |x|_p = 1, \qquad (2.6)$$

де добуток йде по різних простих p та $p = \infty$ (відповідна норма є дійсним модулем). Цей нескінченний добуток збігається, оскільки лише скінчене число норм у ньому відмінне від 1.

Таким чином, добуток усіх p-адичних норм додатного раціонального числа x є $1/x$.

Топологічний простір називається *цілком незв'язним*, якщо він не має зв'язних підмножин, за винятком тих, що складаються з однієї точки.

Зрозуміло, цілком незв'язним буде будь-який дискретний простір [19], але є багато менш тривіальних прикладів. Наприклад, цілком незв'язним, але недискретним, буде множина Q раціональних чисел (з топологією, індукованою з R): дійсно, вона не містить жодного інтервалу.

Наведемо приклад того, що грає важливу роль у багатьох питаннях, а саме приклад недискретного, цілком незв'язного компактного хаусдорфового простору.

Зафіксуємо раз і назавжди просте число p. При записі натуральних чисел у p-ічній системі числення кожне число подається у вигляді скінченої послідовності p-ічних цифр (цілих чисел від нуля до $p - 1$). Дозволимо цим послідовностям бути нескінченними.

Цілим p-адичним числом називається нескінченна послідовність $\{a_0, a_1, \dots\}$, в якій усі a_i – p-ічні цифри. Множина цілих p-адичних чисел позначається Z_p.

Уявлятимемо собі послідовності цифр, про які йдеться у цьому визначенні, записаними у вигляді «нескінченної вліво» послідовності: a_0, ліворуч від нього – a_1, ще лівіше – a_2, і т. д. Тоді кожне натуральне число можна теж розглядати як ціле p-адичне, якщо записати його в p-ічній системі числення, а потім доповнити зліва нескінченним «хвостом» з нулів. Тим самим визначається вкладення N в Z_p. Наприклад, число 39 як елемент Z_5 запишеться так: ...000124.

Над цілими p-адичними числами можна робити ті ж алгебраїчні операції, що і над цілими числами.

Сумою (відповідно різницею, добутком) цілих p-адичних чисел $(a_0, a_1, ...)$ та $(b_0, b_1, ...)$ називається ціле p-адичне число, що одержується з них за правилами додавання (відповідно віднімання, множення) «в стовпчик» в p-ічній системі числення, якщо записати два числа одне під одним (b_0 під a_0, b_1 під a_1, і т. д.).

Зазначимо, що віднімання завжди можна здійснити, оскільки зважаючи на «нескінченність вліво» наших p-адичних записів завжди можна «зайняти одиницю» в наступному розряді; множення завжди можна здійснити, тому що для знаходження кожної цифри необхідне лише скінчене число додавань [25].

Покажемо, що додавання, віднімання та множення цілих p-адичних чисел має ті ж властивості (комутативність, асоціативність, дистрибутивність ...), що і у звичайних цілих чисел. Дійсно, якщо m – натуральне число і $a \in \mathbb{Z}_p$, то позначимо через $(a)_m \in \mathbb{Z}$ ціле число, що записується в p-ічній системі у вигляді $\overline{a_{m-1} \dots a_1 a_0}$ (тобто утворене m молодшими розрядами). Тоді з визначення дій над p-адичними числами відразу випливає, що m молодших розрядів у $(a+b)_m$ та $(ab)_m$ такі ж, як m молодших розрядів у $(a)_m \pm (b)_m$ та $(a)_m(b)_m$ відповідно. Тому, наприклад, $(a+b)c = ac + bc$, тому що для будь-якого m у лівої та правої частин співпадають m молодших розрядів (оскільки множення звичайних цілі чисел дистрибутивно). Оскільки це міркування показує, що віднімання p-адических чисел обернено додаванню, отримуємо, що цілі p-адичні числа утворюють кільце [5].

Оскільки натуральні числа вкладаються в Z_p, а цілі p-адичні числа можна віднімати, цілі числа (тобто різниця натуральних) також вкладаються в Z_p як підкільце; наприклад, число -1 як елемент Z_5 записується у вигляді ...4444.

Зазначимо ще, що множення на p зводиться до приписування нуля справа, отже ціле p-адичне число ділиться на p тоді й тільки тоді, коли його «остання» (тобто крайня права) цифра є нуль.

Тепер введемо на Z_p структуру метричного простору.

Якщо $a \in Z_p$ відмінне від нуля, то його *p-адичною нормою* називається число

$$|a|_p = p^{-n},$$

де n – найбільше натуральне n, для якого a ділиться на p^n. Якщо $a = 0$, то вважають, що $|a|_p = 0$.

p-адичною відстанню між числами $a, b \in Z_p$ називається число $|a - b|_p$.

Множина Z_p, з p-адичною відстанню, є метричним простором. Дійсно, умови (1) та (2) метричного протору за означенням виконуються з очевидністю; оскільки

$$|x - z|_p = |(x - y) + (y - z)|_p,$$

то для перевірки нерівності трикутника досить переконатися у правдивості нерівності

$$|a + b|_p \leq |a|_p + |b|_p.$$

Правильне навіть сильніше твердження.

Твердження 2.6. Для будь-яких $a, b \in Z_p$ виконується нерівність

$$|a+b|_p \leq max(|a|_p, |b|_p). \tag{2.7}$$

Доведення.

Якщо число a закінчується на s нулів, а число b – на t нулів, то число $a+b$ закінчується щонайменше ніж $\min(s,t)$ нулів, оскільки

$$|a+b|_p \leq p^{-\min(s,t)}.$$

Нерівність (2.7) називається *ультраметричною нерівністю*.

Неформально кажучи, в p-адичній метриці число тим «менше» (ближче до нуля), чим на більшу степінь p воно ділиться. Зокрема,

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{p}^{\mathrm{n}} = 0.$$

Зауважимо, що оскільки відстані між точками в Z_p можуть приймати тільки значення p^{-n}, де n – ціле невід'ємне число, всі відкриті кулі в цьому метричному просторі суть кулі радіуса p^{-n}. Звідси випливає, що будь-яка відкрита куля є і замкненою кулею: дійсно, відкрита куля радіусу p^{-n} співпадає із замкненою кулею з тим самим центром і радіусом p^{-n-1}. Нарешті, оскільки будь-яка відкрита куля замкнена, замикання відкритої кулі радіуса p^{-n} співпадає із замкненою кулею радіусу p^{-n-1}, і це не співпадає із замкненою кулею радіуса p^{-n} [17].

Далі, відкрита куля з центром a і радіусом p^{-n} є не що інше, як множина чисел, у яких n молодших розрядів такі ж, як у числа a, тобто «клас лишків за модулем p^n»: множина чисел $b \in Z_p$, для яких $b-a$ ділиться на p^n. Зокрема, будь-яка відкрита куля має потужність континуум, звідки випливає, що в Z_p немає ізольованих точок.

Твердження 2.7. Простір Z_p компактний.

Доведення.

Оскільки Z_p – метричний простір, досить показати, що з будь-якої послідовності можна вибрати підпослідовність, що збігається. Нехай $\{x_n\}$ – послідовність елементів Z_p. Оскільки молодший розряд чисел x_n може набувати не більше p значень, якась із p-ічних цифр (позначимо її a_0) є молодшим розрядом нескінченної кількості членів послідовності;

позначимо через y_0 перший із членів послідовності, що володіє цією властивістю, і видалимо з послідовності усі члени, молодший розряд яких відмінний від a_0. Далі, серед членів послідовності, що залишилися, є нескінченно багато таких, у яких друга справа цифра одна і та ж (позначимо її a_1); позначимо через y_1 якийсь член послідовності, що володіє цією властивістю і йде пізніше, ніж y_0, і видалимо з послідовності всі ті члени, у яких друга справа цифра відмінна від a_1. Продовжуючи по індукції, отримаємо підпослідовність $y_0, y_1, \dots$ та p-адичне число $a = \overline{\dots a_2, a_1, a_0}$. Оскільки за побудовою

$$|y_n - a|_p \le p^{-n-1},$$

то маємо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Твердження доведено.

Оскільки метричний простір Z_p компактний, він є повним [4]. Насправді в Z_p вірний сильніший критерій збіжності, ніж критерій Коші.

Твердження 2.8. Послідовність $\{x_n\}$ в Z_p збігається тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Доведення.

Частина «тільки тоді» очевидна: якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то і $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x$, звідки

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Для доведення частини «тоді» зазначимо, що Z_p повна, тому достатньо показати, що будь-яка послідовність $\{x_n\}$, що задовольняє умову прикладу, є фундаментальною. Дійсно, з ультраметричної нерівності (2.7), яка очевидно поширюється на будь-яку кількість доданків, випливає, що

$$|x_m - x_n|_p = |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)|_p \le$$
$$\le \max\left(|x_m - x_{m-1}|_p, \dots, |x_{n+1} - x_n|_p\right),$$

причому з умови випливає, що права частина прямує до нуля при

$m, n \to \infty$.

Цей приклад має інше переформулювання.

Наслідок 2.1. Ряд з p-адичних чисел збігається тоді і тільки тоді, коли його спільний член прямує до нуля.

Твердження 2.9. Замикання підмножини $Z \subset Z_p$ співпадає з усією Z_p.

Доведення.

Нехай $x \in Z_p$; позначимо через x_n ціле число, чий p-ічний запис співпадає з n «останніми» (або, якщо завгодно, n першими, починаючи справа) цифрами запису числа x. Тоді $x - x_n$ ділиться на p^n, тобто

$$| x - x_n|_p \leq p^{-n},$$

звідки $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

З доведеного прикладу випливає, що Z_p є доповненням відносно p-адичної метрики.

Покажемо, нарешті, що Z_p цілком незв'язний. Для цього, очевидно, достатньо встановити, що якщо $a \neq b$ – два елемента Z_p, то існують такі відкриті підмножини $U, V \subset Z_p$, які не перетинаються, що

$$U \ni a, V \ni b \text{ і } V = Z_p.$$

Дійсно, якщо молодші n розрядів у p-адичного числа a не такі ж, як у b, то в якості U можна взяти клас лишків числа a за модулем p^n, а в якості V – об'єднання класів лишків за модулем p^n всіх p-адичних чисел, що не входять в U.

Легко побачити, що кільце Z_p не має дільників нуля [26] (розглянемо першу справа ненульову цифру в двох співмножниках; це перше місце, де застосовується простота числа p). Покажемо ще, що будь-яке ціле p-адичне число, яке не ділиться на p (тобто не закінчується нулем), є оберненим в кільці Z_p.

Твердження 2.10. Нехай елемент $u \in Z_p$, не ділиться на p. Тоді існує таке $v \in Z_p$, що $uv = 1$.

Доведення.

Доведемо індукцією по n, що існує послідовність цілих чисел $\{x_n\}_n \geq 0$ з наступними властивостями:

$$ux_n \equiv\ 1\ (mod\ p^{n+1}),\ x_{n+1} \equiv\ x_n\ (mod\ p^{n+1}).$$

Дійсно, нехай $a_0\ -$ остання цифра в p-ічному записі числа u. Ця остання цифра не ділиться на p, так як u не ділиться на p; тому існує таке $x_0\ \in\ N$, що

$$a_0x_0 \equiv\ 1(mod\ p),$$

звідки і $ux_n = 1(mod\ p)$(використовується те, що p просте). Далі, нехай число x_n побудовано; будемо шукати x_{n+1} в вигляді $x_n + p^{n+1}x$, де $x \in\ Z$. Нехай $y -$ ціле число, для якого $u \equiv y\ (mod\ p^{n+2})$ (наприклад, в якості y можна взяти ціле число в p-ічній системі, що отримане n+*1* останніми цифрами числа u). За припущенням індукції маємо

$$yx_n = 1 + p^{n+1}z, \text{де } z \in\ Z_p,$$

а шукана відповідність

$$ux_{n+1} \equiv\ 1\ (mod\ p^{n+2})$$

рівносильна відповідності

$$y(x_n + +p^{n+1}x) \equiv 1(mod\ p^{n+2}).$$

Нам потрібно, щоб виконувалася відповідність

$$y(x_n + p^{n+1}x) - 1 \equiv p^{n+1}z - p^{n+1}xy \equiv 0\ \ (mod\ p^{n+2})$$

або, що рівносильно,

$$z - xy \equiv 0\ \ (mod\ p).$$

Оскільки $y \equiv u(mod\ p^{n+2})$ і u не ділиться на p, ця відповідність має розв'язок; отже, шукана послідовність $\{x_n\}$ побудована. Так як

$$||ux_n - 1||_p \leq 1/p^{n+1},$$

маємо $\lim\limits_{n\to\infty} ux_n = 1$; з іншого боку, в силу твердження 2.7 існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = u \in\ Z_p$, так що

$$uv = u * \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} ux_n = 1$$

і все доведено. (На останньому кроці мі користувалися тим, що для p-

адичних чисел має місце «арифметика границь» [22]).

Дріб виду α/p^k, $\alpha \in O_p$, $k \geq 0$ визначає дробове p-адичне число або просто p-адичне число. Два дроби α/p^k і β/p^m визначають одне й теж саме p-адичне число, якщо

$$\alpha p^m = \beta p^k \text{ в } O_p.$$

Сукупність всіх p-адичних чисел буде позначатися через R_p.

Ціле p-адичне число визначає елемент з R_p. Очевидно, що $\alpha/1 = \alpha/p_0$ відмінні цілі p-адичні числа визначають різні елементи з R_p. Зважаючи на це, ми будемо вважати O_p підмножиною множини R_p.

Дії в R_p визначаються правилами:

$$\frac{\alpha}{p^k} + \frac{\beta}{p^m} = \frac{\alpha p^m + \beta p^k}{p^{m+k}}$$
$$\frac{\alpha}{p^k} * \frac{\beta}{p^m} = \frac{\alpha\beta}{p^{m+k}} \tag{2.8}$$

Очевидна перевірка показує, що результат дій не залежить від вибору тих дробів, які визначають елементи з R_p, і що відносно цих дій R_p утворює поле – поле всіх p-адичних чисел. Очевидно, що поле R_p має характеристику нуль і, відповідно, містить поле раціональних чисел [7].

Теорема 2.1. Будь-яке p-адичне число $\xi \neq 0$ єдиним чином подається як

$$\xi = p^n \varepsilon, \tag{2.9}$$

де n – ціле число, а ε – одиниця з O_p.

Доведення.

Нехай $\xi = \frac{a}{p^k}$, $a \epsilon O_p$. З [12] α можна подати у вигляді

$$\alpha = p^1\varepsilon, l \geq 0,$$

де ε – одиниця кільця $\mathrm{O_p}$. Ми отримуємо, що

$$\xi = p^m\varepsilon, \text{ де } m = lk.$$

Єдиний варіант подання (2.9) випливає з відповідного твердження для цілих p-адичних чисел.

Прослідковується аналогія між цілими p-адичними і дійсними числами: й ті, й ті визначаються деякими послідовностями раціональних чисел.

Так як кожне дійсне число є, як відомо, границею тієї послідовності раціональних чисел, яка його визначає, то очевидно, що аналогічний факт повинен мати місце і для p-адичних чисел, якщо тільки правильно визначити для них поняття збіжності. При визначенні границі дійсних чисел ми спираємося, по суті, на поняття близькості: два дійсних або раціональних числа вважаються близькими, якщо абсолютна величина їх різниці достатньо мала. Для визначення збіжності в полі p-адичних чисел нам треба усвідомити, за якої умови два p-адичних числа повинні розглядатися як близькі.

Послідовність $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ p-адичних чисел називається *збіжною* до p-адичного числа ξ (у позначенні $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$ або $\{\xi_n\} \to \xi$), якщо

$$\lim_{n\to\infty} v_p(\xi_n - \xi) = \infty$$

Істотною особливістю цього означення (що відрізняється від його звичайного означення збіжності для дійсних чисел) є те, що в ньому збіжність $\{\xi_n\} \to \xi$ пов'язується з послідовністю цілих раціональних чисел $v_p(\xi_n - \xi)$, яка повинна прямувати до нескінченості.

Можна надати

$$\varphi_p(\xi) = \begin{cases} p^{v}p^{(\xi)}, \ldots \text{при } \xi \neq 0, \\ 0, \ldots\ldots\ldots \text{при } \xi = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

цьому означенню більш звичний вигляд, замість показника v_p на поле R_p розглянути іншу функцію з дійсними невід'ємними значеннями, яка прямує до нуля, коли показник прямує до нескінченості. А саме, обрав деяке дійсне число p, що задовольняє умові $0 < p < 1$, наприклад.

Функція $\varphi_p(\xi)$, $\xi \epsilon R_p$ визначена умовами (2.10), буде p-адичною метрикою. Значення $\varphi_p(\xi)$ називається *величиною* p-адичного числа ξ в цій метриці. Як і у випадку показника, ми будемо інколи функцію φ_p називати просто метрикою і позначати через φ .

Із зазначеного вище очевидним чином випливають наступні властивості метрики:

$$\varphi(\xi\eta) = \varphi(\xi)\varphi(\eta),$$

$$\varphi(\xi + \eta) \leq max(\varphi(\xi), \varphi(\eta)).$$

З останньої нерівності отримуємо також, що

$$\varphi(\xi + \eta) \leq \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$$

Ці властивості (а також властивість: $\varphi(\xi) > 0$, при $\xi \neq 0$) вказують на те, що введене поняття метрики для p-адичних чисел є аналогом поняття абсолютної величини в полі дійсних чисел (або модуля в полі всіх комплексних чисел [8]).

В термінах метрики φ_p визначення збіжності в полі R_p приймає наступний вигляд: послідовність $\{ \xi_n\}$, $\xi_n \in R_p$ збіжна до p-адичного числа ξ, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_p(\xi_n - \xi) = 0.$$

Для поля R_p легко можна сформулювати й довести звичайні теореми про границі послідовностей, добре відомі з математичного аналізу.

Теорема 2.2. Якщо ціле p-адичне число визначається послідовністю цілих чисел $\{x_n\}$, то ця послідовність збіжна до α. Довільне p-адичне число ξ є границею послідовності раціональних чисел.

Доведення.

З теореми 2.1 випливає, що

$$v_p(x_n - \alpha) \geq n + 1.$$

Отже,

$$v\ \ (x_n - \alpha) \to \infty \text{ при } n \to \infty,$$

а це і означає, що $\{x_n\}$ прямує до α. Розглянемо тепер дробове p-адичне число

$$\xi = \alpha/p^k.$$

Так як

$$v\left(\frac{x_n}{p^k} - \xi\right) = v\left(\frac{x_n - \alpha}{p^k}\right) = v(x_n - \alpha) - k \to \infty$$

при $n \to \infty$, то ξ є границею раціональної послідовності.

Теорему доведено.

З будь-якої обмеженої послідовності дійсних чисел завжди можна виділити, як відомо, збіжну послідовність. Аналогічна властивість має місце і для p-адичних чисел.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було розглянуто поняття ультраметрики та ультраметричного простору; наведено основні властивості, що стосуються ультраметричних просторів; розглянуто побудову поля p-адичних чисел як одного з прикладів ультраметричних просторів. Підсумовуючи результати виконаного дослідження, можна відмітити наступні положення.

Ультраметричний простір є метричним простором, де виконана сильна нерівність трикутника. Ультраметричний простір X є множиною з ультраметрикою $d(x,y)$, де вона є функцією двох змінних, що задовольняє властивостям додатності та невиродженості:

$$d(x,y) \geq 0, \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \; \forall x, y;$$

симетричності:

$$d(x,y) = d(y,x) \; \forall \; x, y;$$

та сильній нерівності трикутника:

$$d(x,y) \leq \max\big(d(x,z), d(y,z)\big) \quad \forall x, y, z.$$

Посилена нерівність трикутника має наступний геометричний зміст: довжина кожної сторони трикутника не перевищує найбільшої з двох інших. Це автоматично тягне за собою, що всі трикутники є рівнобедреними. Зауважимо, що з підсиленої нерівності трикутника випливає звичайна нерівність трикутника.

Ультраметричні простори мають наступні властивості:

1) Всі трикутники (трійки точок) в ультраметричному просторі рівнобедрені, причому довжини двох рівних сторін більше або дорівнюють довжині третьої сторони. Ця властивість є характеристичною, тобто метричний простір, де всі трикутники мають таку властивість, є ультраметричним.

2) Будь-які дві кулі в ультраметричному просторі або не перетинаються, або одна містить іншу.

3) Будь-яка точка кулі в ультраметричному просторі є її центром. Діаметр кулі дорівнює її радіусу.

Найважливішим прикладом ультраметричного простору є поле p-адичних чисел Q_p. Поле p-адичних чисел Q_p є доповненням поля раціональних чисел Q по p-адичній нормі на Q. Ця норма визначається в такий спосіб. Довільне раціональне число x може бути записано у вигляді $x = p^\gamma \frac{m}{n}$, де цілі m і n не діляться на p. p-адична норма не рівного нулю раціонального числа $x = p^\gamma \frac{m}{n}$ вводиться як $|x|_p = p^{-\gamma}$. Сильна нерівність трикутника для p-адичних чисел набуває вигляду

$$|x + y|_p \leq max\left(|x|_p, |y|_p\right).$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айерлэнд К. Классическое введение в современную теорию чисел / К. Айерлэнд, М. Роузен – М.: Мир, 1997. – 212 с.
2. Андронов И.К. Арифметика рациональных чисел / И.К. Андронов, А.К. Окунев – М.: Просвещение, 1991. – 400 с.
3. Банах С. П. Курс функціонального аналізу / С. П. Банах. – К. : Рад. шк., 1978. – 216 с.
4. Березанский Ю.М. Функциональный анализ / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель. – К. : Вища шк., 1990. – 600 с.
5. Богачев В. И. Действительный и функциональный анализ / В. И. Богачев, О. Г. Смолянов. – М. : РХД, 2009. – 146 с.
6. Богачев В. И. Действительный и функциональный анализ: университетский курс / В. И. Богачев, О. Г. Смолянов. – НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 724 с.
7. Бородін О.І. Теорія чисел / О.І. Бородін О. – К.: Вища шк., 1990. – 275 с.
8. Бураго Д.Ю. Курс метрической геометрии / Д.Ю. Бураго, Ю.Д. Бураго, С.В. Иванов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. – 512 с.
9. Бухштаб А.А. Теория чисел / А.А. Бухштаб. – М.: Просвещение, 1986. – 384 с.
10. Вейль Г. Алгебраическая теория чисел / Г. Вейль. – М.: Гос. изд. иностр. литературы, 2004. – 226 с.
11. Виноградов И.М. Основы теории чисел: учебное пособие / И.М. Виноградов. – М.: Лань, 2009. – 176 с.
12. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ / Б.З. Вулих. – М. : Гос. изд-во физмат. лит., 1988. – 234 с.

13. Дьедонне Ж. Современный анализ / Ж. Дьедонне. – М. : Мир, 1964. – 314 с.

14. Егоров, Д.Ф. Элементы теории чисел / Д.Ф. Егоров. – М.: Наука, 1998. – 358 с.

15. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М. : Мир, 1967. – 348 с.

16. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1984. – 412 с.

17. Коблиц Н. p-Адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. / Н. Коблиц. – М.: Мир, 1982. – 164 с.

18. Лебедев В. И. Функциональный анализ и вычислительная математика / В. И. Лебедев. – М. : Физматлит, 2000. – 216 с.

19. Михелович Ш.Х. Теория чисел / Ш.Х. Михелович. – М.: Высшая школа, 1996. – 260 с.

20. О возникновении и развитии функционального анализа. Сб. статей. // Историко-математические исследования. – М. : Наука, 1973. – № 18. – С. 13-103.

21. Пугачев В. С. Лекции по функциональному анализу / В. С. Пугачев. – М. : Изд-во МАИ, 1996. – 744 с.

22. Сабитов И.Х. Московское математическое общество и метрическая геометрия: от Петерсона до современных исследований / И.Х. Сабитов // Труды Московского математического общества. – 2016. Том 77. – Вып. 2. – С. 185−218.

23. Сидоров А. М. Функциональный анализ / А. М. Сидоров. – Казань: Казанский университет, 2010. – 140 с.

24. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу / А. Я. Хелемский. – М. : МЦНМО, 2009. – 304 с.

25. Conway, J. B. A course in Functional Analysis. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1985.

26. Gouvea F.Q. p-Adic Numbers, Springer, Berlin, 2003.

27. Kuz′mych, V. I., Savchenko A. G. Geometric Relations in an Arbitrary Metric Space. Matematychni Studii. 2019. № 1(52). С. 86−95.

28. Krasner M. “Nombres semi-reels et espaces ultrametriques”, C. R. Acad. Sci. Paris, 219 (1944), 433–435.

29. Lamb E. Goldbach Variations [Text]/ E.Lamb Scientific American blogs – May 15, 2013.

30. Mahler K. p-Adic numbers and their functions, Cambrige tracts in mathematics, **76**, Cambridge Univ. Press, London, 1980.

31. Monna A. Analyse non-Archimedienne, Springer-Verlag, New York, 1970.

32. Robert A.M. A course in p-adic analysis, Springer-Verlag, New York, 2000.

33. Savchenko A., Zarichnyi M. Metrization of Free Groups on Ultrametric Spaces. Topol. and Appl. 2010. № 4(157). С. 724–729.

34. Schikhoff W.H. Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.

35. Hausdorff F. “Erweiterung einer Homeomorphie”, Fund. Math., 16 (1930), 353–360.

ДОДАТОК А

КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Я, Поздняк Надія Володимирівна, учасниця освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:

– дотримуватися:

- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:

- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;

– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;

– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;

– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традицій університету, формуванню його позитивного іміджу;

– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;

– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;

– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні й політичні переконання;

– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;

– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;

– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;

– не брати участі в будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

– не підроблювати документи;

– не поширювати неправдиву та компрометуючу інформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;

– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг або здійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;

– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальні домагання;

– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базі університету та особистій власності інших студентів та/або працівників;

– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністю університету;

– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;

– не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальностій до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

27.04.2022 Поздняк Надія Володимирівна