МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ЗАДАЧА КЕПЛЕРА ПРО НАЙЩІЛЬНІШЕ ПАКУВАННЯ КУЛЬ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти "бакалавр"

Виконала: студентка 4 курсу, 421 групи
Спеціальності 014 Середня освіта
Спеціалізація 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми
«Середня освіта (математика)»
Рибченко Олександра Андріївна

Керівник доктор фізико-математичних
наук, професор
Савченко Олександр Григорович

Рецензент старший вчитель, вчитель
вищої категорії, директор Херсонської
загальноосвітньої школи I-III ступенів
№ 44 Херсонської міської ради
Перегняк Олександр Адамович

Херсон – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Задача про найщільніше пакування куль була названа на честь математика та астронома XVII століття Йогана Кеплера, яка на той час носила практичний характер – як розмістити найкращим чином (тобто найщільніше) гарматні ядра на кораблях так, щоб, по-перше, їх вмістилось щонайбільше, і, по-друге, щоб під час руху корабля конструкція з ядер залишалася стійкою.

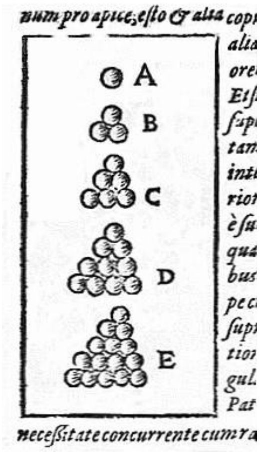

Рис 1. Одна з діаграм із Strena Seu de Nive Sexangula, яка зображує гіпотезу Кеплера

Протягом майже 400 років гіпотеза Й. Кеплера щодо найефективнішого геометричного розташування сфер, складених у стопку, залишалася однією з найскладніших та найболючіших проблем у математиці. Гіпотеза Кеплера (див. Рис. 1) – математичний вираз звичайних методів пакування – стверджує, що найефективніше (тобто найщільніше розташування з найменшим невикористаним або порожнім простором) укладання сфер однакового радіусу досягається шляхом накладання шарів сфер один на одного. Проте кожен доданий шар був зміщений, щоб дозволити новому шару сфер частково вписатися в отвори між сферами, розташованими в нижньому шарі, і, таким чином, частково заповнити. Хоча здавалось, що ця гіпотеза доведена повсякденним дослідом, математичний доказ того, що кращого способу упаковки не існує, здавалося, уникав математиків до останнього десятиліття двадцятого століття. [1, с. 73]

Актуальність цієї теми полягає у тому, що задача про найщільніше пакування куль в двох- та тривимірних просторах важлива не тільки для логістики гарматних ядер чи апельсинів, але й для кристалографії, хімії, нанотехнологій. Не дивлячись на те, що 8- та 24-вимірні простори здаються людям, які далекі від математики, непотрібною абстракцією, отримані результати для багатовимірних просторів можуть використовуватися в досить неочікуваних областях – від теорії струн в теоретичній фізиці до теорії передачі інформації (кодування з виправленням помилок). Але, перш за все, це доведення дуже важливе для багатьох сфер саме математики.

Об’єктом дослідження є комбінаторна геометрія.

Предметом дослідження є задача комбінаторної геометрії про найщільніше розміщення куль однакового радіусу.

Мета дослідження полягає у вивченні задачі Кеплера в просторах різної розмірності.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні **завдання**:

- розглянути історію формування задачі Кеплера;
- проаналізувати задачу про найщільніше пакування куль в одновимірному та двохвимірному просторах;
- дослідити задачу Кеплера в тривимірному просторі;
- опрацювати біографію вченої Марини В’язовської, яка зробила значний внесок в вирішенні задачі про найщільніше пакування куль в 8-ми та 24-вимірному просторах;
- розглянути практичне застосування задачі Кеплера для багатовимірних просторів.

РОЗДІЛ 1. ЗАДАЧА ПРО ПАКУВАННЯ КУЛЬ В ДВОХ- ТА ТРИВИМІРНИХ ПРОСТОРАХ

1.1. Історія формування задачі про найщільніше пакування куль

Задача пакування куль виникла ще в кінці 1500-х років перед англійськими моряками, які задалися наступним питанням: «Як скласти до трюму корабля найбільшу кількість гарматних ядер?». Це питання було важливо як для ефективного пересування армії, особливо на борту кораблів, так і для стратегічної оцінки здатності противника вести війну. Тому одного разу відомий англійський мандрівник сер Волтер Релі (який був не тільки мандрівником, а і блискучим царедворцем і поетом, фаворитом Єлизавети І Тюдор, а також автором книги «Відкриття Гвіани») з цим запитанням звернувся до знайомого математика Томаса Георріота. Хоча цей математик швидко зміг придумати корисний розрахунок, він шукав більш глибший математичний доказ того, що інтуїтивно зрозумілий спосіб упаковувати сферичні об’єкти, такі як гарматні ядра, дійсно був найкращим доступним методом. Тому Томас, в свою чергу, розповів про дане завдання астроному Йогану Кеплеру. З цих пір поставлена задача стала однією з найвідоміших задач в математиці, над якою міркували найкращі вчені, аж до Ісаака Ньютона. [2, с. 1065]

Рис. 1.1. Пакування гарматних ядер

Так, Йоган Кеплер припустив, що найщільніший спосіб упаковки і так уже застосовується: це інтуїтивно найзручніший спосіб, коли нижній шар ядер просто складають поруч одне з одним у вигляді шестикутника, а наступні – у поглиблення на стиках куль нижнього шару. Кеплер, маючи таку думку, не зміг цього довести, але виклав свою гіпотезу про найщільніше пакування куль однакових розмірів у тривимірному просторі при їх пірамідному впорядкуванні одна відносно одної в 1611 році в дослідженні «Про шестикутні сніжинки». [3]

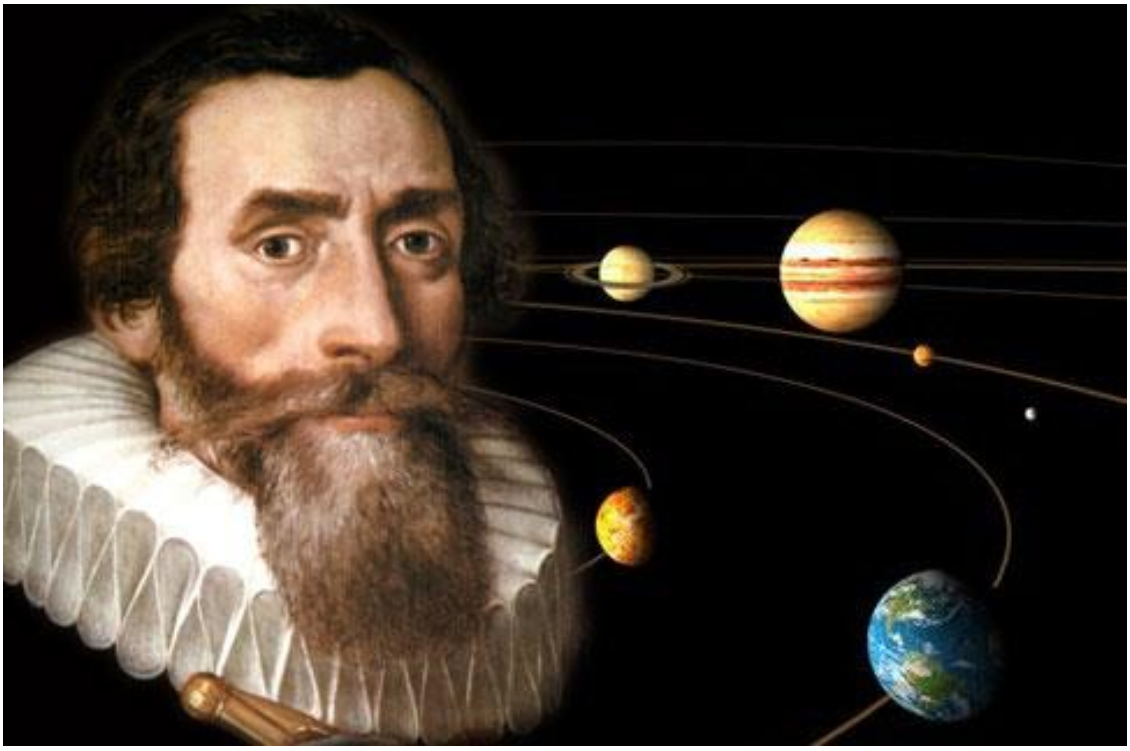

Рис 1.2. Йоган Кеплер (1571-1630)

Це дослідження було представлено в вигляді брошури, яка призначалась в подарунок, тому було швидше філософським та розважальним чтивом, ніж справжньою науковою роботою. В цій брошурці розглядались відповіді на три основних питання, серед яких було і найщільніше пакування куль.

Рис 1.3. Дослідження Кеплера
«Про шестикутні сніжинки» (малюнок з брошури)

Так, не дивлячись на формальну простоту рішення, розв’язати задачу не вдавалось аж до XXI століття.

Слід відмітити, що даний вчений залишив свій вагомий внесок і в інших сферах. Так, в астрономії Кеплер навів остаточний порядок з уявленнями про рух планет Сонячної системи, який розглядається у його працях «Нова астрономія» (1609) та «Гармонія Світу» (1618), де було сформовано три закони небесної кінематики.

Й. Кеплер усе життя намагався зв’язати орбіти планет із формою ідеальних твердих тіл. Вчений був переконаний, що правильна модель Всесвіту складається з щільно упакованих ідеальних тіл, розташованих всередині сфер, що мають спільний центр, розташований на Сонці. Пристрасть Кеплера знайти найефективніший спосіб розташування цих сфер змусила його вивчати інші укладання та кристалічні аранжування в льоду чи сніжинках в роботі, яку було описано вище.

Саме математика була основним інструментом у працях Кеплера. В своєї книзі «Нова стереометрія винних бочок» (1615) він показує способи знаходження обсягу для тіл обертання, складає основи математичного аналізу і інтегрального числення. Серед математичних знахідок вченого є таблиця логарифмів, нові поняття – «середнє арифметичне» і «нескінченно віддалена точка».

Повертаючись до гіпотези Кеплера про найщільніше пакування куль, слід відмітити, що дискусію щодо цієї задачі продовжили Девід Грегорі та Ісаак Ньютон в 1694 році в Кембриджі. Так, Грегорі вважав, що існує таке пакування куль, коли кожна з них може дотикатись 13-ти інших, тоді як Ньютон вважав, що не 13-ти, а 12-ти.

Гіпотеза Кеплера залишалася недоведеною протягом декількох століть і потратила до списку з двадцяти трьох невирішених математичних задач, який був складений у 1900 році Давидом Гільбертом. І тільки в 1998 році було математично доведено дану гіпотезу про те, що найщільнішим способом упакування рівних куль в просторі є знайоме пірамідальне нагромадження апельсинів, яке можна зустріти в продуктових магазинах, завдяки потужним комп’ютерним обчисленням Томасом Хейлзом – розв’язання є дуже складним, викладеним на 300 сторінках тексту. Даний розв’язок базувався на простому переборі всіх можливих варіантів за допомогою комп’ютера, що не є математично обґрунтованим. Тим не менш, слід вказати, що дана робота містила обмеження: при обробці даних комп’ютери оперують тільки цілими числами, тому потрібно ще підтвердження того, що подібне наближення може використовуватися на практиці. Експертиза тривала до 2005 року. За її підсумками дослідники повідомили, що доказ Хейлза, мабуть, вірний, але перевірити окремі випадки самостійно неможливо. [4, с. 442]

Хоча експертиза не завершилась, 2006 року статтю з доказом було опубліковано в журналі Discreate&Computational Geometry. Потім, щоб зробити викладки повними та формальними, математик об’єднався з групою колег. Протягом наступних років вони в рамках проекту Flyspeck (акронім від Formal Proof of the Kepler conjecture – «формальний доказ гіпотези Кеплера») за допомогою комп’ютерних методів продовжили роботу і в серпні 2014 року оголосили про її закінчення. Тільки перевірка розрахунків зайняла у команди близько п’яти тисяч годин. 2015 року вчений опублікував препринт нової статті.

Остаточне рецензування робота пройшла за два з половиною роки 29 травня. Алгоритм, який використовували дослідники, розміщено у відкритому доступі на GitHub. Зазначається, що формальний доказ гіпотези виявився найскладнішим та найбільшим з усіх коли-небудь отриманих за допомогою комп’ютерних методів.

Слід уточнити, що особливе значення під час інформаційної революції мало те, як Томас Хейлз оголосив та аргументував своє доведення гіпотези Кеплера. Хоча згодом він публікувався у відомих журналах, спочатку виклав свої докази в мережі Інтернет. Це був радикальний відхід від традиційних методів подання доказів для перевірки математичній спільноті.

Доказ теорії впливав також на такі різноманітні області як пошук нафти (наприклад, за допомогою петрологічного аналізу ємності пласта) і пошуки формування теорій щодо природи. Фізики прагнуть використовувати методології Кеплера, щоб вивчити, як дірки або порожнечі зміщуються в просторі відповідно положень сфер; і як дірки або порожнечі зміщуються один відносно одного.

Узагальнюючи приведені вище факти, сформулюємо поставлену задачу Кеплера. Задача про пакування куль – це задача комбінаторної геометрії про розміщення однакових куль в евклідовому просторі без їх взаємного перетину. Типова постановка задачі наступна: знайти таких спосіб розташування куль в просторі, при якому кулі займають найбільшу частину цього простору.

1.2. Пакування кіл на площині

Задача Кеплера була поставлена для трьохвимірного простору, але слід зауважити, що дана задача може розглядатися і в одномірному чи двохмірному просторах.

Так, в одновимірному просторі кулями є прямолінійні відрізки одиничної довжини з центами в цілих точках. Вони покривають 100% прямої, і кожен з них дотикається двох інших. Очевидно, що це є найщільніше пакування (Z^1) (див. Рис. 1.5).

Рис 1.4. Зображення пакування куль в одновимірному просторі підручними засобами (за допомогою сірників)

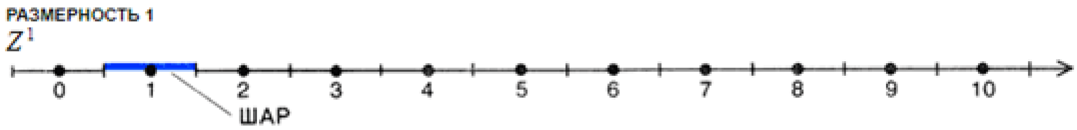

Рис 1.5. Схематичне зображення пакування куль в одновимірному просторі

А як розмістити кола на площині? Теж зрозуміло: кладемо кола по одній лінії, скажімо горизонтально, потім вище і нижче кладемо кола в паралельну ліній, але зрушуючи їх там, що ця лінія була можлива ближче до початкової, і так далі. Здається, що щільніше не можна. А як це довести? Доказ був отриманий тільки в середині XX століття (Ласло Фейеш Тот, 1940), до того ж він був дуже непростим.

Для розгляду розміщення кіл (саме коло в двохвимірному просторі, тобто на площині, є проекцією кулі) введемо декілька понять.

Контактне число – число найближчих куль, дотичних з розглянутою кулею. Контактне число теорії найщільнішого пакування є аналогом координаційного числа.

Основною характеристикою пакування із рівновеликих куль (колів) є коефіцієнт заповнення (щільність пакування), який визначається як відношення займаного кулями (колами) об’єму (площі) по відношенню до об’єму (площі) комірки упакування:

$$f_p = \frac{Z \cdot V_i}{V_{\text{ком}}} \text{ чи } f_p = \frac{Z \cdot S_i}{S_{\text{ком}}},$$

де Z – число куль (колів), що припадають на комірку; V_i (S_i) – об’єм (площа), що займають кулі (кола); $V_{\text{ком}}$ $(S_{\text{ком}})$ – об’єм (площа) комірки.

Спочатку розглянемо можливе заповнення площини колами. Шар кіл можна виложити двома способами – щільне (контактне число 4) та найщільніше (у кожного кола в шарі шість сусідів). Простір між кулями називають лункою (див. Рис. 1.6).

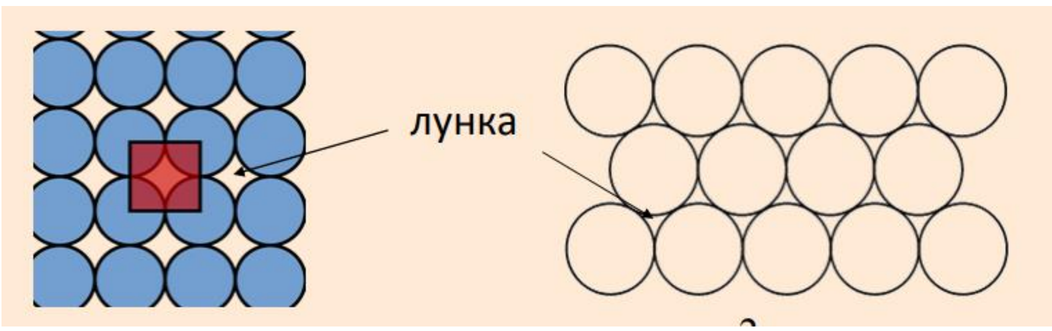

Рис 1.6. Схематичне зображення пакування куль на площині

На Рис. 1.7 показано зображення двох варіантів пакування куль на площині в прямокутній системі координат. Бачимо, що в упаковці Z^2 центри кіл розташовані у всіх точках із цілими координатами; в упаковці D_2 центри розташовані в тих самих точках через одну в шаховому порядку.

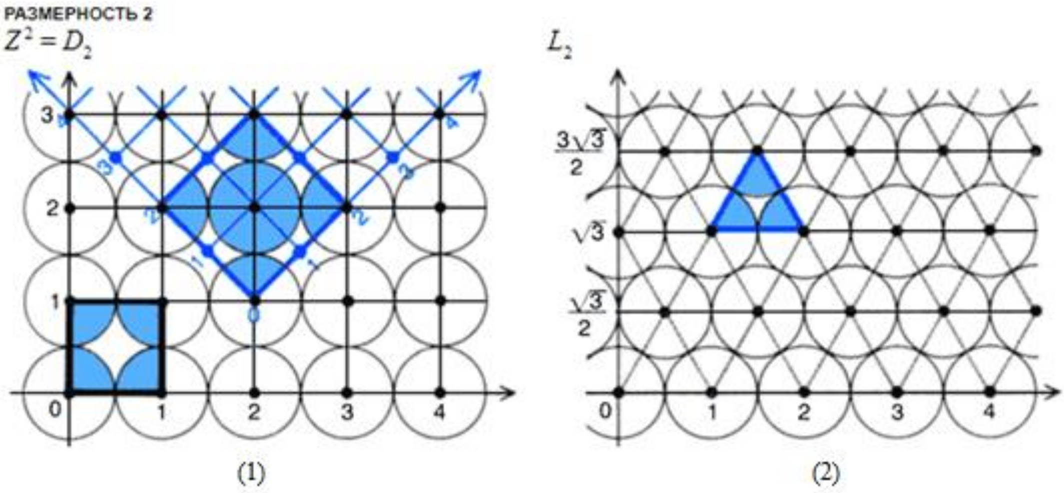

Рис 1.7. Розгляд двох варіантів упакування куль в просторі

Якщо змінити масштаб на координатних осях і повернути їх на 45°, упаковка Z^2 перейде в D_2, отже, ці упаковки еквівалентні. Щоб знайти їх щільність, потрібно обчислити, яку частку площі квадрата покривають круги або їх частини (тобто порахувати площу зафарбованої частини квадрата):

$$f_p = \frac{1 \cdot \pi \cdot R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4} \cong 0{,}7854.$$

Найщільнішим упакуванням кіл на площині є упаковка L^2. Кругові сектори у цій упаковці покривають $\pi \frac{\sqrt{3}}{6}$ кожного рівностороннього трикутника; отже, щільність цієї упаковки дорівнює:

$$f_p = \frac{\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2}{4R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\pi}{6} \cdot \sqrt{3} \cong 0{,}9069.$$

Тобто в 1940 році було доведено, що у двовимірному евклідовому просторі найкращим заповненням є розміщення центрів кіл в вершинах паркету, утвореного правильними шестикутниками, в якому кожне коло оточене шістьма іншими. [5, с. 49]

Рис 1.8. Зображення пакування куль на площині підручними засобами (за допомогою монет)

Яскравим прикладом пакування куль на площині є приготування вареників (див. Рис. 1.9). Задачу пакування кіл у двовимірному просторі робили й ми – чи принаймні, бачили, як це робить мама чи бабуся.

Рис 1.9. Приклад намагання досягти найщільнішого пакування куль при приготуванні вареників

Наприклад, коли мама ліпить вареники, точніше вирізає з тіста кола за допомогою склянки. Тоді задача полягає в тому, щоб залишилось якнайменше тіста. Тобто ви обираєте оптимальне розміщення кіл на площині – це розташування ще називають «бджолині стільники». Сфери, вписані у «бджолині стільники» і є оптимальним пакуванням у двовимірному просторі – це єдиний варіант.

Рис 1.10. Бджолині стільники як приклад найщільнішого пакування куль

До речі, оптимальне розміщення кіл на площині недарма ще називають «бджолиними стільники», оскільки американський математик Томас Хейлз створив математичний доказ, який показує, що з усіх можливих структур стільники використовують найменшу кількість воску. Також стільники є найточнішими фігурами в природі – їх стіни зустрічаються під точним кутом в 120 градусів, що становить ідеальний шестикутник.

1.3. Пакування куль у тривимірному просторі

У тривимірному просторі (наприклад, у коробці) все складніше. Існує нескінченна кількість варіантів пакувань. Найскладніше тут – визначити кількість сфер, які торкаються до однієї сфери у цьому просторі, їх ще називають kissing number – число поцілунків (або контактне число як було вказано в пункті 1.2).

В пункт 1.1 детально описано історія виникнення задачі пакування саме в тривимірному просторі.

Так, виходить, що в тривимірному просторі рішень, як пакувати кулі найщільнішим способом більше, ніж одне. Одна з найпростіших: так викладають апельсини в магазині – піраміди.

Але ефективність упаковки в тривимірному просторі важлива не тільки в побуті, а й в областях фізики та хімії, де вчені намагаються зрозуміти та передбачити поведінку атомів та молекул. Оскільки природа прагне до найнижчого ентропійного стану (жива природа прагне зменшувати або ж нівелювати вплив дії принципу термодинамічної рівноваги і хаосу), існує прагнення до ефективності упаковки. Розуміння математики, пов’язаної з упаковкою сфер, дозволяє фізикам та хімікам вивчати такі області, як структура металу та дисперсія молекул газу.

Рис 1.11. Приклад найщільнішого пакування куль в тривимірному просторі

Задача Кеплера пробудила також на розгляд декількох цікавих задач. Наприклад, задача про кількість дотиків куль, яка полягає в наступному: скільки однакових куль можна розташувати навколо однієї такої ж центральної кулі, щоб всі вони торкалися її? У 1694 році ця задача (у випадку тривимірного простору) стала предметом диспуту між Ісааком Ньютоном і шотландським астрономом Джеймсом Грегорі. Причому цей диспут отримав широку популярність.

Так, Ньютон стверджував, що число дотиків дорівнює 12, і це дійсно так для гранецентрованої кубічної упаковки (див. Рис. 1.12). Грегорі не погоджувався, наполягаючи на тому, що можна «втиснути» ще одну додаткову кулю, хоча він й не міг цього довести.

Рис 1.12. Гранецентрована кубічна упаковка

Грегорі, швидше за все, уявив, що 12 куль можна так пересунути по центральній кулі, щоб усі просвіти між ними скупчилися в одному місці і туди увійшла б ще одна куля. І справді, як легко показати, тілесний кут, під яким одну з цих куль видно з центру центральної кулі, становить менше $\frac{1}{13}$ повного тілесного кута, і таким чином, якщо судити тільки за обсягом, навколо центральної кулі справді могли б вміститись 13 куль. Однак частину повного тілесного кута з неминучістю займають просвіти між кулями, які дотикаються до центральної кулі. Питання кількості дотиків було вирішено лише 1874 року: як показав Р. Хоппе, мав рацію Ньютон.

Ще однією важливою задачею, пов’язаною з пакуванням куль, є так звана задача про рідкісне покриття: як найбільш економно розташувати одинакові кулі в просторі, щоб кожна точка простору виявилася в серединi або на кордонi хоча б одного з них? На вiдмiну вiд задачi про щiльну упаковку, в якiй йшлося про кулi, якi не перекриваються, в цiй же задачi кулi обов'язково перекриваються. Можливий наступний спосiб покриття простору кулями: розглянемо якусь упаковку куль i потiм «роздмухуємо» кожну кулю так, щоб заповнити всi порожнечi вихiдної упаковки. Однак виявилося, що в загальному випадку «роздуття» куль найщiльнiшої упаковки не приводить до оптимального вирiшення цiєї задачi. Так, наприклад, у тривимiрному просторi найкращим прийнято вважати покриття кулями з центрами у вузлах так званої об'ємноцентральної решiтки (див. Рис. 1.13). Але якщо розташувати в цих же вузлах центри однакових куль, що не перекриваються, то вийде упаковка, яка вже не буде настiльки щiльною, як iншi вiдомi упаковки куль, наприклад розглянута гранецентрована кубiчна. Правда, i сама гiпотеза про те, що об'ємноцентральна кубiчна решiтка дає вирiшення задачi про покриття, теж не доведено. [6, с. 19-20]

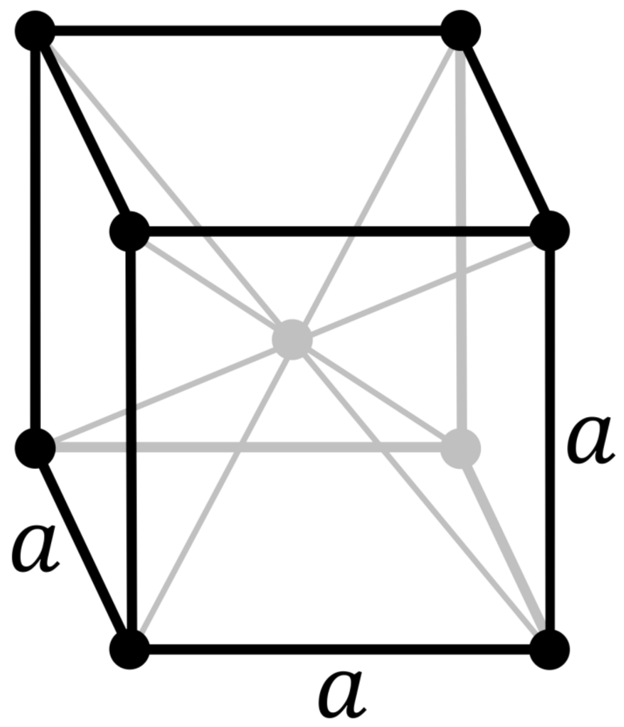

Рис. 1.13. Об'ємноцентральна кубiчна ґратка

Для того, щоб просунутися у вказаних вище задач, математики підкріплюють свою геометричну інтерпретацію аналітичним уявленням куль у прямокутній системі координат. Добре відомо, що будь-яку точку на площині можна задати двома координатами: x по горизонтальній прямій та y – по вертикальній. Зазвичай точка площини записується як упорядкована пара $(x; y)$. Так, наприклад, $(8; 7)$ – це точка на площині, що знаходиться на вісім одиниць правіше від початку координат уздовж осі Ox та на сім одиниць вище уздовж осі Oy.

Відстань між цією точкою $(8; 7)$ та будь-якою іншою точкою $(x; y)$ можна порахувати за теоремою Піфагора: квадрат шуканої відстані дорівнює сумі квадратів відстаней вздовж осі Ox і вздовж осі Oy, тобто $(x-8)^2+(y-7)^2$. Оскільки коло, за визначенням, – це безліч всіх точок на площині, рівновідаленних від деякого центру, скажімо $(a; b)$, то будь-яка точка $(x; y)$ кола має задовольняти рівняння $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, де R – радіус цього кола. Якщо радіус дорівнює 1, а центр кола знаходиться на початку координат – точці $(0; 0)$, то рівняння спрощується і набуває вигляду: $x^2+y^2=1$.

Подібним чином будь-яка точка тривимірного простору задається трьома координатами x, y, z; у більш симетричному вигляді їх можна записати так: x_1, x_2, x_3. Поверхня кулі радіусу 1 з центром на початку координат складається з точок виду $(x_1;x_2;x_3)$, що задовольняють рівняння ${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2=1$, яке, як і в двовимірному просторі, можна отримати з геометричного визначення кулі, застосовуючи теорему Піфагора (на цей раз двічі).

Побудова шарової решітчастої упаковки L^3, яка еквівалентна гранецентрованій кубічній упаковці D^3, здійснюється накладанням один на одного шарів, в яких центри куль розташовані відповідно до гексагональної решітчастої упаковки L^2. Якщо пакувати кулі таким чином, що кулі третього шару будуть точно над кулями першого, то вийде упаковка, яка називається гексагональною щільною. Ця упаковка є настільки щільною, що і L^3, проте центри куль у цій упаковці не утворюють решітку (див. Рис. 1.14).

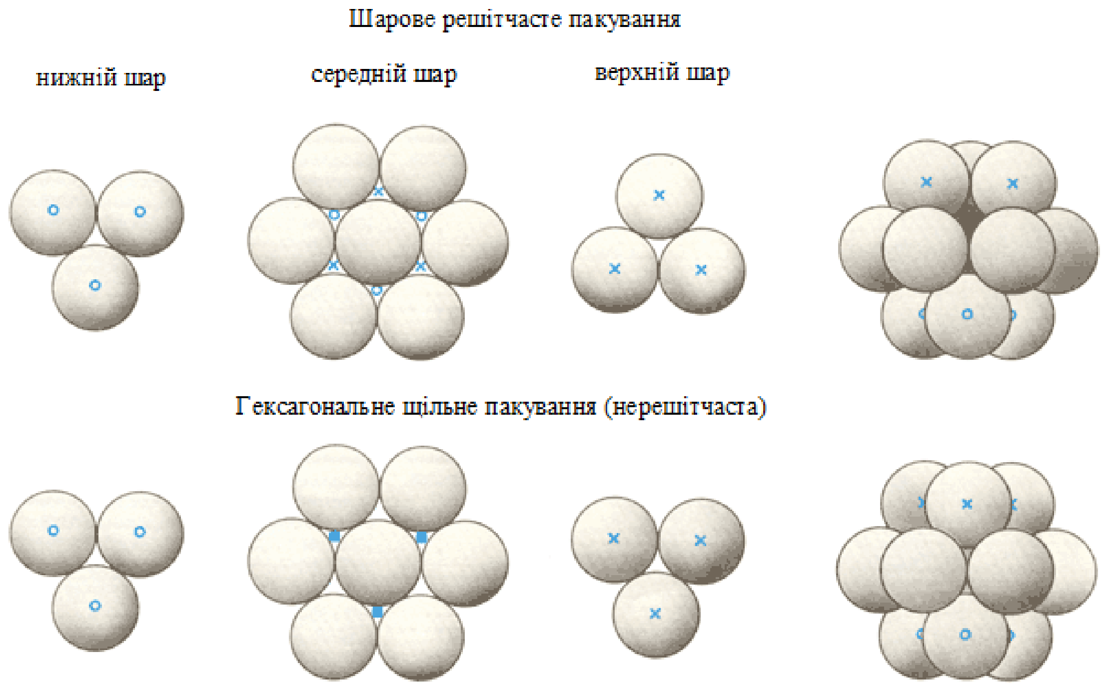

Рис 1.14. Два види упаковки
які забезпечують найщільніше пакування куль
в тривимірному просторі

Щільне пакування рівних сфер – таке розташування однакових сфер, які не перетинаються у просторі, при якому зайнята внутрішніми областями цих сфер частка простору (щільність пакування) максимальна, а також задача комбінаторної геометрії про пошук цього пакування.

Карл Фрідріх Ґаусс, в свою чергу, довів, що найвища щільність пакування, яка може бути досягнута простим регулярним пакуванням (ґраткою), дорівнює:

$$\frac{V_{spheres}}{V_{space}} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0{,}74048,$$

де $V_{spheres}$ – сумарний об'єм куль, V_{space}– об'єм простору, займаний кулями.

Ця щільність досягається в пакуваннях у ГЦК і ГЩ ґратці. Гіпотеза Кеплера стверджує, що це пакування має найвищу щільність серед усіх можливих пакувань сфер, регулярних та нерегулярних. Цю гіпотезу довів Т. К. Хейлз після багаторічної праці з програмування обчислень, необхідних для доказу.

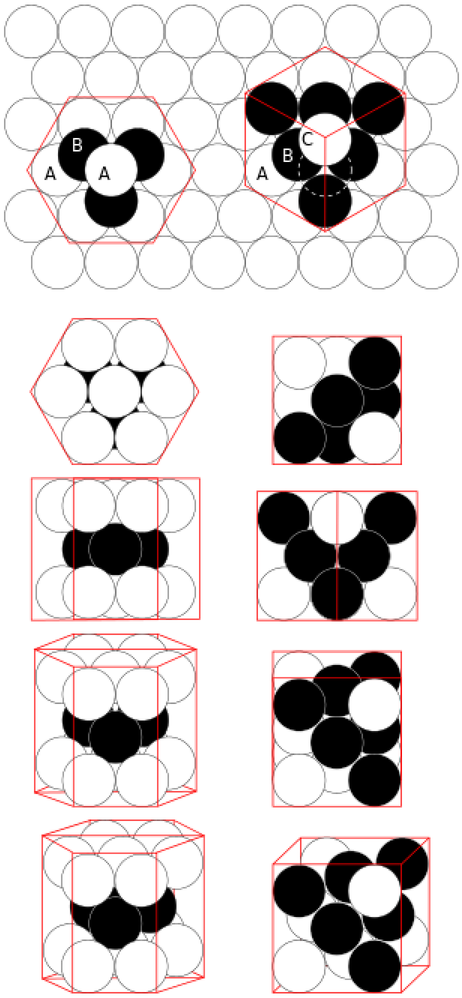

Рис 1.15. Ілюстрація щільного пакування рівних сфер
у ґратці ГЩ (ліворуч) і ГЦК (праворуч)

Існує дві прості регулярні ґратки, на яких досягається максимальна середня щільність. Вони називаються гранецентрована кубічна (ГЦК) (або кубічне щільне пакування) та шестикутне щільне пакування (ГЩ або ГЩУ – гексагональна щільноупакована комірка або ґратка), в залежності від симетрій ґратки. Обидві ґратки ґрунтуються на шарах сфер з центрами у вершинах трикутної мозаїки. Обидві ґратки можна представити як стіс однакових листів, усередині яких сфери покладені в трикутну ґратку (щільно упакованих шарів); ГЦК і ГЩ відрізняються положенням цих листів відносно один одного.

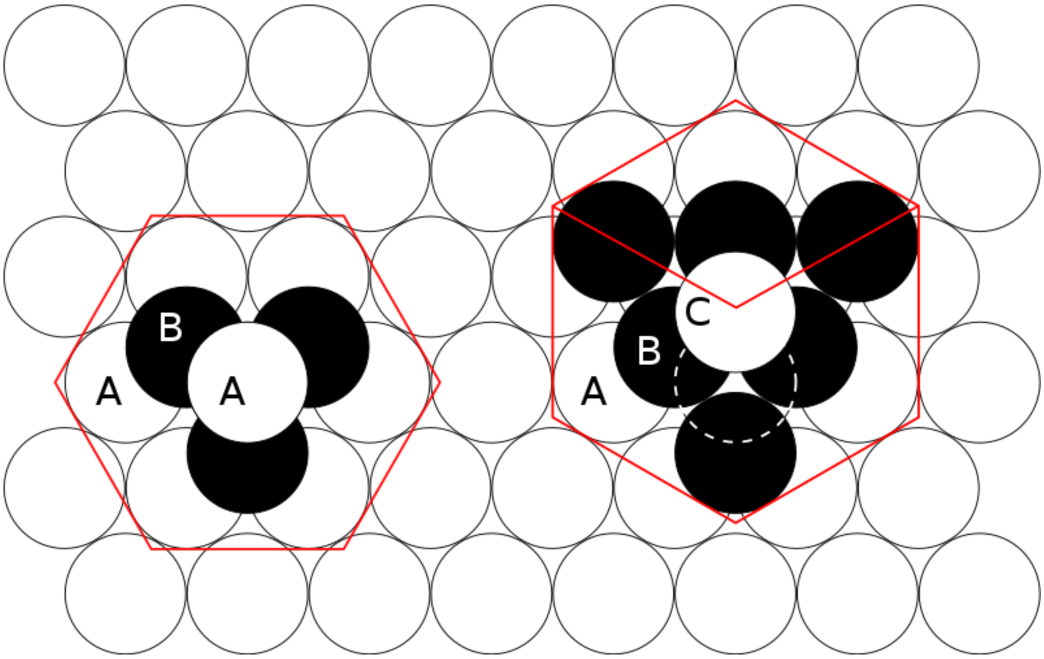

Рис 1.16. Порівняння щільного пакування рівних сфер у ґратці ГЩ (ліворуч) і ГЦК (праворуч)

ГЩ пакування (ліворуч) і ГЦК пакування (праворуч). Букви показують, які шари у пакуванні збігаються (не зсуву відносно один одного в горизонтальній площині): так, у ГЩ пакуванні над шаром А розташований шар В, а над ним – знову шар А, в якому сфери лежать на тих же позиціях, що й на інших шарах А. У ГЦК пакуванні показано три шари, й усі вони різні: над шаром А розташований В, над В – С, і лише над С знову буде А. Зауважимо, що ГЦК пакування можна перевести в ГЩ пакування шляхом зсуву шарів, як показано пунктирною лінією. [10]

РОЗДІЛ 2. ПРАКТИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ ЗАДАЧІ КЕПЛЕРА

2.1. Біографія української науковиці Марини Вязовської

Марина Сергіївна Вязовська – молода українська та німецька математикиня, кандидатка фізико-математичних наук, докторантка Берлінської математичної школи та Берлінського університету Гумбольдта.

Рис. 2.1 Марина Сергіївна В’язовська

Народилася 2 листопада 1984 року в Києві (Україна). Інтерес до математики виник у Марини ще з дитинства.

Марина навчалась в місті Київ, спочатку в ліцеї №145, а потім на механіко-математичному факультеті Київського національного університету ім. Т.Г. Шевченка.

З юності подобалося брати участь в олімпіадах з точних предметів, тим більше вони були пов’язані з поїздками за кордон – в ті роки вона побувала в таких країнах: Польща, Румунія, Македонія, Болгарія.

Потім Марина В'язовська поїхала на навчання до Німеччини за програмою обміну студентами з університетом Кайзерслаутерна, де отримала по завершенню навчання диплом в 2007 році.

Потім Марина, залишившись жити в Німеччині, почала працювати в Берлінській математичній школі і університеті Гумбольдта.

У 2010 році захистила кандидатську дисертацію в Інституті математики НАН України на тему «Нерівності для полімерів та раціональних функцій та квадратурних формул у польових умовах».

В 2013 році отримала ступінь доктора природничих наук в Боннському університеті, захистивши дисертацію «Модульні функції та спеціальні цикли».

За відкриття у 2016 році, про яке буде йти мова в пункті 2.2, отримала одну з найпрестижніших математичних нагород світу, аналог Нобелівської премії для математиків – «Премію Салема».

В 2017 році Математичним інститутом Клея Марині В'язовській присуджено Дослідницьку нагороду.

Інші її премії з уточненням року отримання вказані в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1. Нагороди Марини В'язовської

Рік отримання	**Назва нагороди**
2016	Премія Салема
2017	Clay Research Award
2017	Премія SASTRA Рамануджана
2018	Премія «Нові горизонти» в області математики
2019	Премія Саттера

З травня 2017 року працює у Федеральній політехнічній школі Лозанни, а у 2018 році – отримала професорську посаду.

2.2. Практичне застосування пакування в багатовимірних просторах

У 2016 році українська математикиня Марина Вязовська вирішила дві багатовимірні версії багатовікової проблеми «пакування куль», опублікувавши свої статті на просторах Інтернету. У 8-ми та 24-ти вимірних просторах (останній вимір у співпраці з іншими дослідниками) вчена довела, що два дуже симетричних механізми упаковують сфери разом найщільнішим способом.

Зміст її відкриття дошкільникам, мабуть, не пояснить. Простіше з тими, хто вивчав геометрію в школі та знає, що таке декартові координати. Для того, щоб описати точку на прямій, нам потрібно одне число, щоб вказати координати точки на площині – два числа, а у просторі – три. Але можна вказати не три числа, а чотири, вісім і більше. Наприклад, двадцять чотири числа встановлять координати точки в 24-вимірному просторі.

Це не просто математична гра. Проблема пакування куль в 24-вимірних просторах використовується для зв’язку з космічними кораблями в далекій Сонячній системі.

Виявляється, що можна уявити, що надсилання сигналів по каналу зв’язку з шумами є аналогом пакування куль: щоб надіслати якомога більше інформації, необхідно мати багато каналів одночасно, але так, щоб вони не накладались, оскільки це може призвести до двозначності та помилок.

Якщо уявити кожен сигнал як кулю, то проблема упакування куль вкаже, скільки каналів можуть бути без перекриття.

«Якщо б Ви когось схопили на вулиці і сказали «Гей, а Ви знали, що математики вивчають кулі в багатовимірних просторах?», вони подивилися б на Вас як на божевільного», - каже Кон – співавтор роботи М. В’язовської для 24-вимірного простору. «Але якщо ви сказали б їм, що математики вивчають, як покращити роботу Вашого мобільного телефону, це звучить набагато розумніше».

Практичність відкриття Марини Вязовської та її колег полягає в тому, що упаковка куль у багатовимірних просторах використовуються для покращення передачі сигналу.

Наприклад, код, пов'язаний з 24-вимірним пакуванням, використовує космічний корабель «Вояджер». Сигнал, який він посилає, щоб повідомити про космічні відкриття, звичайно, спотворений. Він розбивається на 24 частини – скажімо, 24 біти. Припустимо, один із них змінюється. Як розшифрувати сигнал? Завдяки тому, що кульки в упаковці знаходяться далеко одна від одної, можна зрозуміти, який сигнал неправильний, і виправити це.

Рис 2.2. Зонд «Вояджер»

Так як у просторі гіпотеза Кеплера уже була доведена, розглядалась ця задача в багатовимірних просторах. Хоча таку упаковку важко зобразити, але вона є надзвичайно практичною: щільне пакування тісно пов'язано з кодами виправлення помилок, що використовуються мобільними телефонами, космічними зондами та Інтернетом для відправлення сигналів через шумні канали. Багатовимірну кулю легко визначити – це просто набір точок у багатовимірному просторі, які знаходяться на фіксованій відстані від заданої центральної точки.

Знайти найщільнішу упаковку рівних куль у багатовимірному просторі ще складніше, ніж вирішити трьохвимірний випадок Хейлза, оскільки кожен доданий вимір означає більшу кількість можливих упаковок для розгляду. Проте математики давно знають, що два виміри особливі, а саме у 8-ми та 24-ти вимірах існують сліпучі симетричні кулі пакування під назвою E_8 і решітка Ліча, які упаковують кулі краще, ніж інші кандидати, відомі математикам в інших вимірах.

«Якимось чином все ідеально поєднується, і це свого роду диво» - сказав Генрі Кон, математик з Microsoft Research New England в Кембриджі, штат Массачусетс. «У мене немає простого пояснення того, про що йдеться».

З причин, які математики не до кінця розуміють, E_8 і решітка Ліча мають зв'язки з широким колом математичних предметів, включаючи теорію чисел, комбінаторику, гіперболічну геометрію та навіть в область фізики – теорія струн. Вони утворюють «зв'язок, де багато різних областей математики збираються разом», сказав Кон. «Відбувається щось чудове, і я хотів би зрозуміти, що це таке».

Математики накопичили переконливі числові докази того, що E_8 і решітка Ліча є найкращими пакуваннями куль у відповідних просторах. Але до 2016 року не було достатньо доказів, щоб це обґрунтувати. Дослідники знали, що в доказах не вистачає такого інгредієнта як «допоміжна» функція, яка зможе обчислити найбільшу допустиму щільність куль, але вони не змогли знайти потрібну функцію.

Тоді як в статті, опублікованій 14 березня 2016 року, Марина В'язовська, вчені ступені якої описано в пункті 2.1, придумала цю відсутню функцію у 8-вимірному просторі. В її роботі використовуються теорія модульних форм, потужні математичні функції, які, коли їх можна застосувати до проблеми, здається, відкривають величезні обсяги інформації. У цьому випадку пошук правильної модульної форми дозволив вченій лише на 23 сторінках довести, що E_8 – найкраща восьмивимірна упаковка, яка забезпечує $\frac{\pi^4}{385}$ або 25% щільності. Такий відсоток щільності пояснюється тенденцією до зниження показників щільності зі збільшенням розмірності простору, який розглядається.

Протягом тижня В'язовська разом з Коном і трьома іншими математиками успішно розширила свій метод, щоб також охопити і решітку Ліча.

Рис. 2.3. П'ятеро вчених, які займалися вивченням задачі Кеплера для 24-вимірного простору: Генрі Кон, Абхинав Кумар, Марина В'язовська, Стівен Міллер та Данило Радченко

Тобто було доведено, що можна побудувати аналог пірамідального апельсинового пакування в кожному вимірі, але в міру збільшення розмірів розриви між апельсинами великого розміру збільшуються. У восьмивимірному просторі ці зазори достатньо великі, щоб утримувати нові апельсини, і лише в цьому вимірі додані апельсини щільно фіксуються на місці. Отримана восьмивимірна упаковка куль, відома як E_8, має набагато більш однорідну структуру, ніж може припустити її двоступенева конструкція. «Частиною таємниці є те, що цей об’єкт виявляється набагато красивішим та асиметричнішим, ніж здається», – сказав Кон.

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно була побудована і решітка Ліча шляхом додавання куль до менш щільної упаковки, і вона була відкрита майже відразу після E_8. У 1960-х роках британський математик Джон Ліч вивчав 24-вимірну упаковку, яку можна сконструювати з коду «Голай», коду для виправлення помилок, який пізніше використовується для передачі історичних фотографій Юпітера і Сатурна, зроблених зондами «Вояджер». Незабаром після того, як стаття Ліча про цю упаковку була опублікована, він помітив, що є місце для розміщення додаткових куль в отвори упаковки, і що це подвоїть щільність упаковки.

В отриманій решітці Ліча кожна куля оточена 196 560 іншими кулями в такому унікальному положенні, що математик Джон Конвей з Прістонського університету відкрив три абсолютно нові типи симетрії, досліджуючи структуру решітки. Решітка Ліча – «одна з небагатьох найцікавіших математичних об’єктів», – сказав Гіл Калай, математик з Європейського університету в Єрусалимі.

У 2003 році Кон і Ноам Елкіс з Гарвардського університету розробили спосіб оцінити, наскільки добре E_8 та решітка Ліча працюють порівняно з іншими упаковками куль у відповідних вимірах. Кон і Елкіс показали, що в кожному вимірі існує нескінченна послідовність «допоміжних» функцій, які можна використовувати для обчислення верхніх меж того, наскільки щільні упаковки куль можуть бути в цьому вимірі.

У більшості конструкцій упаковки куль, які досліджувались до 2016 року, навіть не вдавалося наблизитися до межі щільності, створеної цим методом. Але Кон і Елкіс виявили, що в вимірах 8-му та 24-му найкращі ущільнювачі – E_8 та решітка Ліча. Коли ці вчені провели численні розрахунки послідовностей «допоміжних» функцій, вони виявили, що найкращі можливі упаковки куль у розглянутих вимірах можуть становити щонайменше 0,0000000000000000000000000001% щільніше, ніж E_8 та решітка Ліча.

Докторська дисертація В'язовської у 2013 році була присвячена модульним формам – це функції, які мають особливі симетрії. Ці функції володіють вражаючою силою для висвітлення різних областей математики – наприклад, вони зіграли важливу роль у доказі великої теореми Ферма в 1994 році. І хоча модульні форми вивчалися століттями, математики все ще розкривають глибокі таємниці, приховані всередині їхніх коефіцієнтів.

Крім модульних форм, Марина також має досвід дискретної оптимізації, однієї з галузей, які є центральними в проблемі упакування куль. Тому, коли в 2013 році Андрій Бондаренко з Норвезького університету науки та техніки в Тронхеймі запропонував їм попрацювати разом над проблемою восьмивимірного пакування куль, Марина погодилась.

Двоє друзів постійно працювали над проблемою разом з Данилом Радченком з Інституту математики Макса Планка в Німеччині. Згодом

Бондаренко і Радченко перейшли до інших проблем, але В’язовська залишилась вирішувати поставлену проблему. «Я відчувала, що це моя проблема», – сказала вона.

Після двох років інтенсивної праці їй вдалося придумати правильну «допоміжну» функцію для E_8 та решітка Ліча, і довести, що вона правильна. За її словами, важко пояснити, як вона знала, яку модульну форму використовувати. «За цим стоїть ціла нова математична історія» – сказала вона, описуючи свою «філософську причину» пошуку цієї форми там, де вона це робила.

Після опублікованої статті 14 березня Марина була вражена сплеском цікавості, яку вона викликала серед дослідників, що упаковують кулі. «Я думала, що люди будуть зацікавлені, але я не знала, що буде так багато уваги», – сказала вона.

Тієї ж ночі Кон надіслав листа на електронну пошту, щоб привітати Марину, коли вони обмінялися електронними листами, він запитав, чи можна поширити її метод на решітку Ліча. В’язовська відчувала, що уже втомилася і потребувала відпочинку, але все одно намагалася бути корисною.

Вони разом з Коном об’єдналися із Кумаром, Радченком та Стівеном з Ратгерського університету, і, скориставшись попередніми роботами Марини, швидко знайшли спосіб побудувати правильну «допоміжну» функцію для решітки Ліча. Команда опублікувала свою 12-сторінкову роботу на просторах Інтернету через тиждень після того, як В’язовська опублікувала свою першу роботу.

Нові результати не мають практичного значення для кодів, що виправляють помилки, оскільки знання про те, що E_8 та решітка Ліча близькі до досконалості, вже було достатньо для всіх реальних доказів. Але ці два докази дають математикам як відчуття замкнутості, так і потужний новий інструмент. Наступне закономірне питання, сказав Кон, полягає в тому, чи можна адаптувати ці методи, щоб показати, що E_8 та решітка Ліча мають «універсальну оптимальність». Це означало б, що вони забезпечують не тільки найщільніше пакування куль, але й найнижчі за енергією, якщо, наприклад, розглядати центри куль як електрони, що відштовхуються один від одного.

А оскільки E_8 та решітка Ліча пов’язані з такою кількістю областей математики та фізики, новий підхід В’язовської може в кінцевому випадку призвести до багатьох нових відкриттів, сказав Акшай Венкатеш із Стенфордського університету. "Мені здається набагато більш ймовірним, ніж ні, що ця функція також є частиною якоїсь багатої історії. [20]

Досить цікавим є розгляд упакування куль в несподіваних сферах життя. Наприклад, найщільніше пакування куль було розглянуто для опису філософії техніки бігу.

Уявімо собі, що потрібно вкласти якнайбільше куль у велику коробку, попередньо врахувавши всі вище розглянути пункти. Викладемо вздовж стінки один ряд, у лунки цього ряду укладемо ще один ряд куль, заповнюючи перший шар. Потім у лунки першого шару укладаємо другий шар, у лунки другого – третій і т.д. Далі є два варіанти: третій шар можна покласти над першим, і тоді така упаковка називатиметься двошаровою, а можна змістити її щодо першого, і щодо другого шару. Така упаковка називається тришаровою. Обидва варіанти заповнюють 74% простору. Якщо робити все акуратно, отримаємо упаковку куль з мінімальною потенціальною енергією – кулі упаковані так, що далі їм нікуди падати.

Але можна піти іншим шляхом: кидаємо кулі абияк і починаємо трясти. Якщо трясти досить довго, то отримаємо один із двох найщільніших варіантів та заповнимо відповідно 74% простору. Люди, побачивши цей фокус, можуть довго сперечатися про переваги двох- чи тришарових упаковок, але у нас на той час уже буде коробка, у яку влізла максимально можлива кількість куль.

Кожна людина має свою анатомію: наприклад, довжина правої ноги може відрізнятися від лівої; носок розгорнутий назовні або всередину і т.д. Тому не існує одної універсальної ідеальної техніки бігу.

Тому треба пам'ятати, що міцна упаковка – це про енергію. Коли всі кульки на своєму місці, енергія системи мінімальна. Якщо трясти досить довго, система приходить до конфігурації з мінімальною енергією. Ось тут і лежить доріжка до індивідуальної ідеальної техніки. Тому необхідно експериментувати та прислухатися до свого організму: якоїсь миті Ви відчуєте, як одна з кульок потрапила в лунку, рух став більш природним. Тобто задача полягає не в тому, щоб змусити бігати себе правильно, а знайти точки, в яких тіло не працює неправильно.

Також цікавим є використання найщільнішого пакування кіл в математичних головоломках.

Головоломка полягає в наступному: як багато однакових маленьких кульок можна помістити у великий контейнер?

На прямокутному полі, обмеженому невисокою рамкою, розташовані впритул один до одного 40 шайб, їх центри утворюють квадратну решітку. Виявляється, що можна перекласти шайби таким чином, щоб усередині рамки вмістилися ще одна шайба.

До речі, цю головоломку можна легко виготовити своїми руками. Шайби можна вирізати з картону, а можна використати уже готові варіанти – монети, ґудзики, шашки тощо. Поле та рамку можна виготовити з фанери, листа пластику, навіть із щільного картону. Спочатку треба визначити розміри поля, що відповідає каре із кружечків 5х8, а потім наклеїти прямокутне обрамлення, рамку.

Поле 5х8 – найменше прямокутне, в якому можна провести «ущільнення», розмістивши ще один кружечок. При цьому повний ряд повинен йти вздовж короткої сторони (з «повним» поруч уздовж більшої сторони – не спрацює).

На Рис 2.4 зображено вирішення приведеної головоломки за допомогою найщільнішого пакування куль.

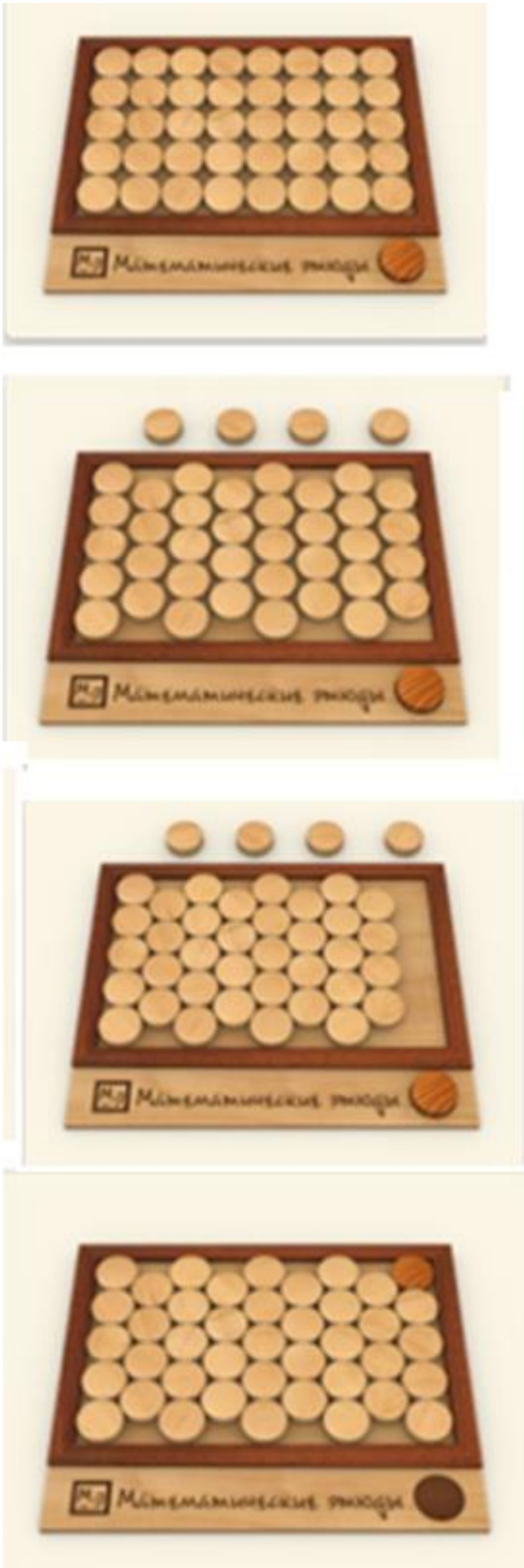

Рис 2.4. Наглядне вирішення математичної головоломки

ВИСНОВКИ

Виходячи з мети кваліфікаційної роботи поставлені завдання були виконані.

Підсумовуючи результати проведеного дослідження можна зробити наступні висновки.

Знайомі всім купки складений акуратно апельсинів у супермаркеті – це практичне рішення проблеми, яка виникла ще в кінці 1500-х років.

Коли персонал складає апельсини, нижній шар складається з рядів, які розташовані в шахматному порядку на половину апельсина. Розміщення апельсинів у западинах, утворених трьома сусідніми апельсинами в першому шарі, утворює другий шар, і так далі. Таке розташування відоме як гранецентрована кубічна упаковка.

Не дивлячись на те, що гіпотеза Кеплера розповсюджувалась лише для тривимірного простору, математики почали цікавитися про найщільніше пакування і для багатовимірних просторів.

Математики накопичили переконливі числові докази того, що E8 і решітка Ліча є найкращими пакуваннями куль у 8- та 24-вимірних просторах. Але до 2016 року не було достатньо доказів, щоб це обґрунтувати. Дослідники знали, що в доказах не вистачає такого інгредієнта як «допоміжна» функція, яка зможе обчислити найбільшу допустиму щільність куль, але вони не змогли знайти потрібну функцію. Саме цю функцію відкрила Марина Вязовська.

Практичність відкриття Марини Вязовської найщільнішого пакування для восьмивимірного простору та її колег для 24-вимірного простору полягає в тому, що упаковка куль у багатовимірних просторах використовуються для покращення передачі сигналу.

Хоча таку упаковку важко зобразити, але вона є надзвичайно практичною: щільне пакування тісно пов’язано з кодами виправлення помилок, що використовуються мобільними телефонами, космічними зондами та Інтернетом для відправлення сигналів через шумні канали.

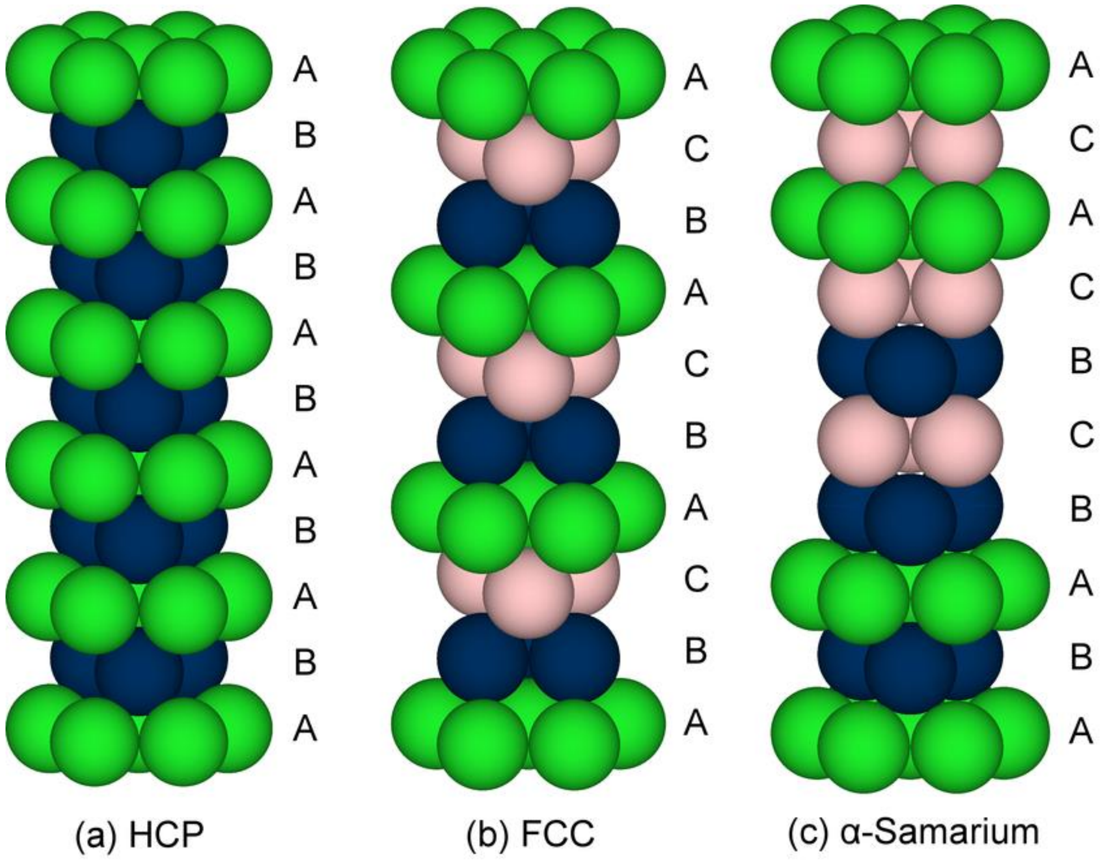

Рис 2. Упаковка атомів Барію

Задача про найщільніше пакування куль в тривимірному просторах важлива не тільки для логістики гарматних ядер чи апельсинів, але й для кристалографії, хімії, нанотехнологій. Не дивлячись на те, що 8- та 24-вимірні простори здається людям, які далекі від математики, непотрібною абстракцією, отримані результати для багатовимірних просторів можуть використовуватися в досить неочікуваних областях – від теорії струн в теоретичній фізиці до теорії передачі інформації (кодування з виправленням помилок). Але, перш за все, це доведення дуже важливе для багатьох сфер саме математики.

Також ми знайшли їх практичне застосування на уроках та позакласних заходах з математики у 7-9 класах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Слоэн Н. Дж. А. Упаковка шаров // В мире науки. – 1984. – № 3. – С. 72-82.
2. Хейлз Т. К. Доказательство гипотезы Кеплера // Annals of Mathematics, Second Series. – 2005. – 162 (3) – С. 1065-1185.
3. Кеплер Й. Strena seu de nive sexangula (Шестигранная снежинка), краткое содержание. – 1611.
4. Хейлз Т. К. Пушечные ядра и соты // Уведомления Американского математического общества. – 2000. – 47 (4) – С. 440-449.
5. Хейлз Т. К. Статус гипотезы Кеплера // The Mathematical Intelligencer. – 1994. – 16 (3) – С. 47-58.
6. Хейлз Т. К. Исторический обзор гипотезы Кеплера // Дискретная и вычислительная геометрия. – 2006. – 36 (1) – С. 5-20.
7. Хейлз Т. К., Фергюсон С. П. Формулировка гипотезы Кеплера // Дискретная и вычислительная геометрия – 2006. – 36 (1) – С. 21-69.
8. Хейлз Т. К., Фергюсон С. П. Гипотеза Кеплера: Доказательство Хейлза-Фергюсона, Нью-Йорк. – 2011.
9. Хейлз Т. К. Плотные сферические упаковки: план формальных доказательств // Серия лекций Лондонского математического общества, Cambridge University Press, 400. – 2012.
10. Сян Ву-И О проблеме упаковки сфер и доказательстве гипотезы Кеплера // International Journal of Mathematics. – 1993. – 4 (5) – С. 739-831.
11. Сян Ву-И Реплика на статью Т. К. Хейлза: Статус гипотезы Кеплера // The Mathematical Intelligencer. – 1995. – 17 (1) – С. 35-42.
12. Kevin Knudson Stacking Cannonballs In 8 Dimensions // Forbes. – 2016. – 3.

13. Lisa Grossman New maths proof shows how to stack oranges in 24 dimensions // New Scientist. – 2016. – 3.

14. Erica Klarreich Sphere Packing Solved in Higher Dimensions // Quanta: Magazine. – 2016. – 3.

15. Сян Ву-И Принцип наименьшего действия при формировании кристаллов плотной упаковки и гипотеза Кеплера // Nankai Tracts in Mathematics, 3, River Edge.

16. Хейлз Т. К., МакЛафин Ш. Додекаэдрическая гипотеза // Журнал Американского математического общества. – 2010. – 23 (2) – С. 299-344.

17. Маршал К. Исследование гипотезы Кеплера: проблема наиболее плотной упаковки // Mathematische Zeitschrift. – 2011. – С. 3-4.

18. Роджерс К. Упаковка равных сфер // Труды Лондонского математического общества, третья серия. – 1958. – 8 (4) – С. 609-620.

19. Andriy Bondarenko, Danylo Radchenko, Maryna Viazovska. Optimal asymptotic bounds for spherical designs // Annals of Mathematics. Second Series. – 2013. – Vol. 178, № 2. – P. 443-452.

20. Maryna Viazovska. The sphere packing problem in dimension 8. – 2016.

21. Henry Cohn, Abhinav Kumar, Stephen D. Miller, Danylo Radchenko, Maryna Viazovska. The sphere packing problem in dimension 24. – 2016.

22. Gruber, P.M. and C.G. Lekkerkerker. Geometry of Numbers. 2nd ed. Amsterdam: North-Holland, 1987.

23. Hales, T.C. The Status of the Kepler Conjecture, The Mathematical Intelligencer, 16 (1994): 47-58.

24. A. Donev, I. Cisse, D. Sachs, E. Variano, F. H. Stillinger, R. Connelly, S. Tarquato and P.M. Chikin, Improving the density of jammed disordered packings using ellipsoids, Science, 303 (2004), 990-993.

ДОДАТОК А

**КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ
ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

Я, ________________________Рибченко Олександра Андріївна___ ____________________________, учасник(ця) освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:

– дотримуватися:

- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:

- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;

– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;

– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;

– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традицій університету, формуванню його позитивного іміджу;

– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;

– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;

– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні й політичні переконання;

– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;

– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;

– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;

– не брати участі в будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

– не підроблювати документи;

– не поширювати неправдиву та компрометуючу інформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;

– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг або здійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;

– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальні домагання;

– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базі університету та особистій власності інших студентів та/або працівників;

– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністю університету;

– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;

– не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальності й до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

____10.09.2019_____	Олександра РИБЧЕНКО
(дата)	(ім'я, прізвище)