МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп’ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

АЛГЕБРАЇЧНІ ГРУПИ ПРАВИЛЬНИХ МНОГОГРАННИКІВ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти “бакалавр”

Виконав: студентка 421 групи
Спеціальності 014 Середня освіта (математика)
Освітньо-професійної (наукової) програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (математика) галузі знань 01 Освіта / Педагогіка
кваліфікація: вчитель математики
Фірсакова І.

Керівник кандидатка педагогічних наук,
ст. викладачка Григор’єва В.Б.

Рецензент кандидатка педагогічних наук,
доцентка кафедри природничо-наукової
підготовки ХДМА Спичак Т.С.

Херсон – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Становлення геометрії як науки відбувалося близько 6-5 ст до н.е. і пов‘язане безпосередньо з діяльністю вчених-математиків Стародавньої Греції. Саме в цей період виникає потреба узагальнення накопиченої кількості фактів, результатів, отриманих в ході розв‘язування різноманітних практичних задач геометричного характеру.

Поступово розвиваючись, геометрія набуває певного напряму, що пов‘язаний з розвитком таких розділів геометрії, як основи геометрії, проективна та неевклідова геометрія, топологія.

Топологія, яка є одним з найважливіших розділів сучасної математики, сформувалась на початку XX ст. В наш час ця наука інтенсивно розвивається, в ній розрізняють такі самостійні напрямки, як теоретико-множинна або загальна топологія, алгебраїчна, комбінаторна, диференціальна топологія та топологія многовидів. Усі ці напрямки пронизані однією ідеєю вивчення “складних” математичних об‘єктів шляхом розчленування на “елементарні” з дотриманням вимоги неперервності і, навпаки, неперервного синтезу “складних” об‘єктів з “елементарних”. Різноманітністю форм прояву неперервністі в математиці та різницею підходів до її вивчення породжуються різні напрямки в топології.

Окремі результати з топології були отримані у XVIII-XIX ст. Л. Ейлером, К. Жорданом, Г. Кантором, А. Пуанкаре та ін. В середині XIX ст. Б. Риман дав загальну ідею побудови математичних просторів. Але тільки після того, як на початку XX ст. М. Фреше та Ф. Хаусдорфом були закладені основи теорії метричних та топологічних просторів, топологія стала самостійним розділом математики.

Одним з об‘єктів дослідження в топології є геометричне тіло, прикладами якого є многогранники. Майже усі цікаві конкретні класи многогранників входять до загального класу опуклих многогранників. Основні результати, що стосуються загальної теорії опуклих многогранників, належать О.Олександрову, працями якого були в основному завершені дослідження в метричній теорії многогранників, які розпочав ще Коші. На основі цих досліджень О.Погорєлов створив основи загальної теорії опуклих многогранників. Особливий інтерес викликають так звані правильні многогранники, що відрізняються особливою однорідністю своєї структури і, отже, особливою рухомістю або симетрією.

Таким чином, ***мета*** даної роботи полягає у визначенні алгебраїчних властивостей правильних многогранників та встановленні зв‘язку між їх групами симетрій.

Предметом дослідження виступає загальна теорія опуклих многогранників та їх метричних властивостей, а ***об‘єктом*** дослідження – клас правильних многогранників.

Основні ***методи дослідження***, що використовуються у роботі, – це метод зображення скінчених груп, метод трансцендентних групових підстановок, метод факторизації.

Виходячи з мети, визначені ***завдання*** роботи:

- розгляд метричних властивостей опуклих многогранників;
- дослідження груп симетрій правильних многогранників за допомогою апарату загальної теорії груп;
- розгляд зв‘язку розв‘язних груп та груп обертань правильних многогранників.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що було дано опис груп симетрій правильних многогранників за допомогою апарату загальної теорії груп. ***Практичне значення*** дипломної роботи полягає в можливості застосування матеріалу студентами та викладачами закладів вищої освіти.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Робота складається з двох основних розділів. Перший розділ присвячено безпосередньо правильним многогранникам, встановленню факту існування п‘яти типів правильних многогранників, а також розгляду основних видів їх просторових перетворень. Другий розділ роботи розкриває алгебраїчні властивостей груп симетрій кожного з п‘яти типів правильних многогранників та містить безпосередньо зображення цих груп за допомогою визначаючих співвідношень.

РОЗДІЛ 1
ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ ПРО ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАННИКИ

Як відомо [29], серед плоских n-кутників найбільшою рухомістю володіє правильний n-кутник, у якого однакові усі сторони і – двоїсто – однакові усі кути. Правильний n-кутник може бути суміщений сам з собою при умові, що довільна його сторона (вершина) суміститься з довільною наперед заданою стороною (вершиною). Множина усіх рухів, що залишають дану фігуру на місці, утворює групу [3].

Групу обертань, що залишає n-кутник на місці, найпростіше описати, розглядаючи повороти на кути виду $\frac{2\pi}{n} \cdot k$ (наприклад, проти годинникової стрілки). Ця група G_n скінчена і комутативна; повороти на кути

$$\frac{2\pi}{n} \cdot 1,\ \frac{2\pi}{n} \cdot 2,\ ...,\ \frac{2\pi}{d} \cdot (n-1)$$

вичерпують G_n. Якщо k взаємно просте з n, то повороти на кути

$$\left(\frac{2\pi}{n} \cdot k\right) \cdot l \ \ (l = 0, \ldots, n - 1)$$

також вичерпують усі вершини через k, але утворюють зіркоподібний правильний n-кутник. Нарешті, якщо k не взаємно просте з n повороти на кути, кратні $\frac{2\pi}{n} \cdot k$, вичерпують лише $m = \frac{n}{d}$ вершин, де d = (n, k). При цьому n-кутник розпадається на d однакових m-кутників, можливо, зіркоподібних (рис. 2.1).

Перетин усіх d різних m-кутників утворює ядро, яке являє собою правильний n-кутник, подібний вихідному. Правильний n-кутник F_n має n різних осей симетрії та центр обертання порядку n (при парному n – центр симетрії).

Будь-яке самосуміщення є або поворот, або добуток симетрії та повороту [9].

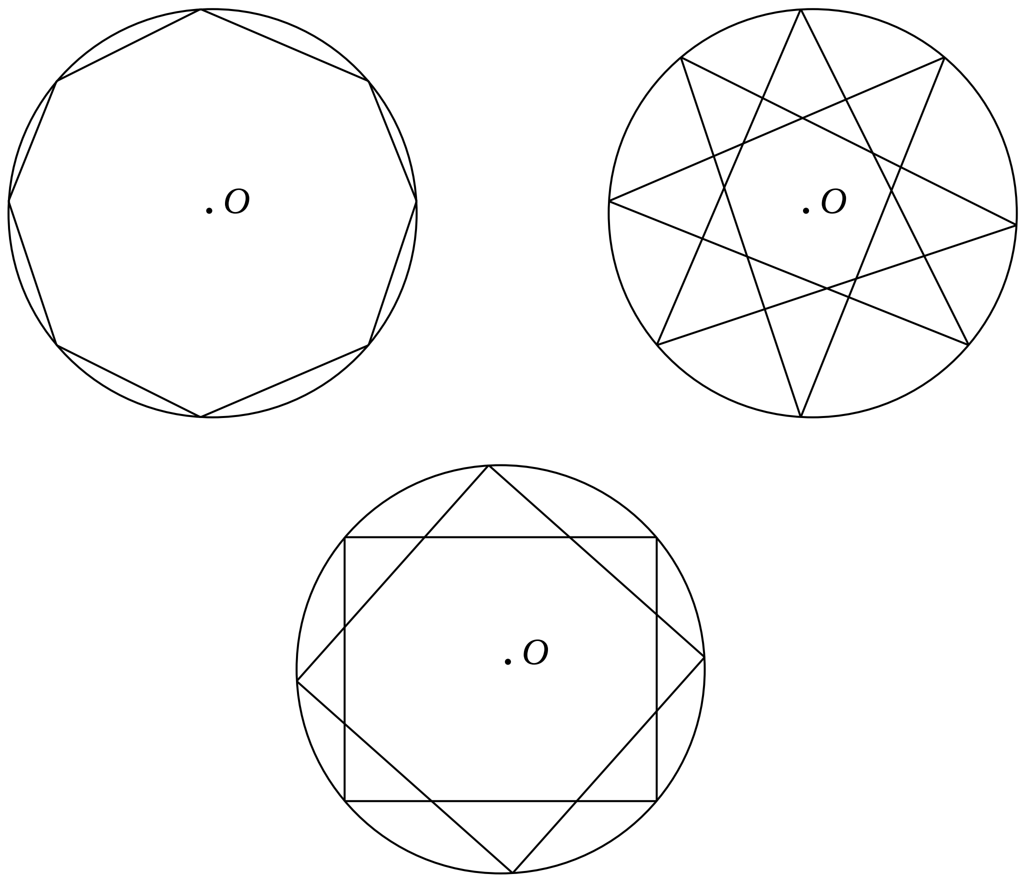

Рис. 1.1

Назвемо *правильним многогранником* такий простий многогранник, у якого усі грані – однакові правильні многокутники, а усі вершини – однакові правильні многогранні кути.

Усі кути правильного многогранника однакові і тому опуклі. Звідси випливає, що усі плоскі кути, а отже, грані опуклі. Таким чином, правильний многогранник P – завжди опуклий.

Очевидно, що два правильні многогранники, які мають ту властивість, що одна з граней першого многогранника (а отже, і кожна його грань) дорівнює одній з граней другого, і один з многогранних кутів першого дорівнює одному з многогранних кутів другого, рівні між собою.

Якщо, крім того, одна з граней першого многогранника суміщається з гранню другого і якщо обидва многогранника розміщені по одну сторону від цієї спільної грані (або, інакше кажучи, якщо один з многогранних кутів першого суміщається з многогранним кутом другого), то многогранники суміщаються.

Має місце така теорема

Теорема 1.1. Правильний многогранник допускає будь-яке переміщення, при якому одна з граней f даного многогранника переходить у грань f' того самого многогранника і внутрішня область многогранника розміщується після переміщення з тієї самої сторони від грані f', з якої вона розміщувалася до переміщення.

Доведення.

Справді, початкове положення многогранника і його нове положення після переміщення задовольнятимуть вказані вище умови. Серед переміщень, про які йде мова у формулюванні теореми, очевидно, можна знайти одне переміщення, яке переводить яку-небудь дану грань f в будь-яку дану грань f' і будь-яке дане ребро AB грані f в довільне дане ребро $A'B'$ грані f' (рис. 1.2).

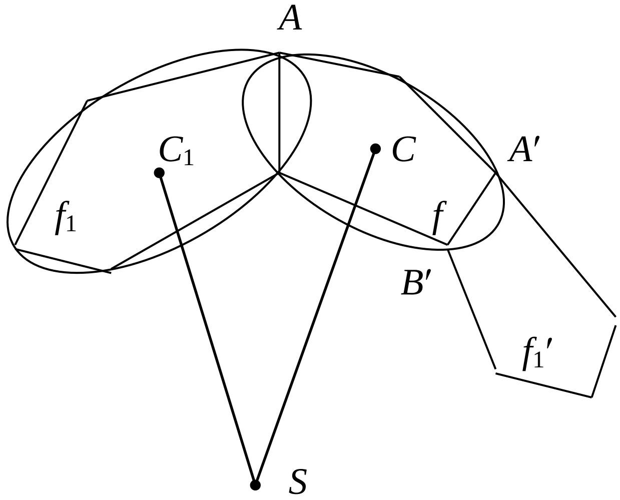

Рис. 1.2

Точніше кажучи, многогранник допускає одне і тільки одне переміщення, яке переводить ребро AB в ребро $A'B'$ так, що точка A суміщається з точкою A' і точка B – з точкою B', а також одне й тільки одне переміщення, яке переводить ребро AB в ребро так, що точка A суміщається з точкою B', а B – з точкою A'.

Справді, якщо ребро AB суміщається з ребром $A'B'$, то грані f і f_1, які прилягають до ребра AB, повинні суміщатись з гранями f' і f_1', які прилягають до ребра $A'B'$.

Суміщення цих граней може відбуватися двома різними способами (бо грань f може суміщатись або з f', або з f_1'). Спосіб, яким відбуватиметься суміщення, визначається тими напрямами, яких набудуть двогранні кути при розглядуваних ребрах, коли на цих ребрах будуть вибрані певні напрями, що повинні відповідати один одному. Якщо грань f суміститься з гранню f' або f_1', ребро AB – з ребром $A'B'$ і двогранні кути вздовж цих ребер також сумістяться між собою, то, виходячи з вище зазначеного, многогранник перетворюється сам у себе.

Обернена теорема. Якщо опуклий многогранник допускає переміщення за допомогою якого можна перетворити будь-яку дану грань f в довільно вибрану його грань f' і будь-яке дане ребро AB грані f – в довільно вибране ребро $A'B'$ грані f', то цей многогранник правильний.

Справді, усі його ребра рівні, всі його плоскі кути рівні і всі його двогранні кути рівні.

Теорема 1.2. 1. Навколо будь-якого правильного многогранника можна описати коло.

2. Многогранні кути, спільною вершиною яких є центр цієї кулі, а плоскими перерізами – грані даного многогранника, ділять поверхню кулі на рівні між собою правильні сферичні многокутники.

3. В будь-який правильний многогранник можна вписати кулю: центр цієї кулі суміщається з центром описаної

кулі.

Доведення.

Розглянемо дві грані многогранника f і f' (рис. 2.2), які прилягають одна до одної по ребру AB; кола C і C_1, описані навколо цих граней, мають дві спільні точки A і B і, отже, лежать на одній самій кулі S, центром якої є точка перетину осей цих кіл.

Грань f, а отже, і весь многогранник, допускає обертання, яке має віссю пряму CS і переводить ребро AB в деяке інше ребро грані f, а отже, і грань f – в деяку іншу грань f_1', що прилягає до грані f.

Це обертання не змінює положення кулі S, бо вісь CS є діаметром цієї кулі; отже, куля S описана також і навколо грані f_1'. Аналогічно можна довести, що куля S описана також навколо будь-якої грані многогранника, яка прилягає до f або до f_1' і т.д.

Піраміди, що мають своєю спільною вершиною точку S, а основами – грані многогранника, будуть правильними (бо точка S лежить на осі кола, описаного навколо кожної грані многогранника) і рівними (бо вони суміщаються одні з одними при різних вище згаданих переміщеннях); те саме матиме місце й для многогранних кутів при їх вершинах. Крім того, будь-яка півпряма, що виходить з точки S, лежатиме всередині одного і тільки одного з цих многогранних кутів. Отже, останні ділять поверхню кулі на правильні і рівні многокутники, причому кожна точка поверхні кулі знаходитиметься всередині одного й тільки одного многокутника.

Усі правильні піраміди, про які йде мова, мають одну й ту ж висоту, яка є радіусом кулі, що дотикається до кожної грані в її центрі.

Обернена теорема. Якщо поверхня кулі поділена на рівні між собою правильні сферичні многокутники, то вершини цих многокутників є вершинами правильного многогранника.

Назвемо абстрактний многогранник *П*, що відповідає *Р* – *топологічно правильним*, а сам многогранник *Р* – *метрично правильним*.

Теорема 1.3. Існує 5 неізоморфних топологічно правильних многогранників *Р*.

Доведення.

Введемо звичайні позначення В, Г і Р. Нехай n – число сторін довільної грані, а m – число ребер довільної вершини. З умов

$$2Р = nГ,\ \ 2Р = mВ \text{ та } В + Г = Р + 2$$

отримаємо рівняння в цілих числах для невідомих n, m та Р:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{P}.$$

Якщо враховувати нерівності $n \geq 3$, $m \geq 3$ та Р ≥ 6, отримаємо умови $m < 6$ та $n < 6$. Таким чином, допустимі значення n та m дорівнюють 3, 4 та 5, причому неможливі сумісна нерівності $n > 3$ та $m > 3$. Залишаються можливими сполучення (n, m): (3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3). Безпосередньою перевіркою переконуємося, що усі відповідні схеми *П* реалізуються. Опис топологічно правильних многогранників наведено у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

n	m	В	Г	Р	Назва
3	3	4	4	6	Тетраедр
3	4	6	8	12	Октаедр
4	3	8	6	12	Куб (гексаедр)
3	5	12	20	30	Ікосаедр
5	3	20	12	30	Додекаедр

Серед вказаних схем є двоїсті, а саме: тетраедр – тетраедр, октаедр – куб, ікосаедр – додекаедр; тому можна було б обмежитися перевіркою поєднань

$$(n, m) = (3, 3), (3, 4), (3, 5).$$

Наслідок. Існує не більше п‘яти метрично правильних многогранників.

Теорема 1.4. Існує п‘ять не ізоморфних метрично правильних многогранників.

Визначимо *зірку грані* як множину точок, що містить дану грань та усі суміжні з нею (легко перевірити, що у простого многогранника усі грані зірки, крім вихідної, утворюють ланцюг). Легко побудувати зірку однієї грані для тетраедра, куба та додекаедра (рис. 1.3). Для цього з усіх вершин вихідної грані слід провести похилі однієї довжини, що утворюють з двома суміжними ребрами відомі кути (60°, 90° та 108°).

Для тетраедра побудову тим самим завершено; у куба залишається шоста грань, яка, очевидно, дорівнює вихідним; у додекаедра утворюється плоский замкнений 10-кутник, що містить крайні ребра п‘яти граней зірки. Легко перевірити, що він має площину симетрії, яка проходить через середини усіх 10 ребер. Тому перша зірка граней може бути перетворена у другу в результаті симетрії відносно вказаної площини та повороту на 36°, який суміщає основні грані цих зірок.

Побудовані многогранники мають необхідні грані. Оскільки тригранні кути повністю визначаються плоскими, ці фігури мають також многогранні кути потрібної форми. Октаедр та ікосаедр можуть бути отримані за допомогою двоїстого переходу: наприклад, можна вибрати їх вершини в центрах граней куба та додекаедра.

У кожного правильного многогранника може бути побудований центр O – точка, рівновіддалена від усіх вершин (достатньо і для двох суміжних граней). Ця сама точка рівновіддалена від усіх граней та усіх ребер. Вона служить спільним центром трьох сфер – описаної, вписаної та квазівписаної, тобто такої, що дотикається усіх ребер.

Усі переміщення, які допускає правильний многогранник, будуть обертаннями, бо вони залишають нерухомим центр описаної кулі [12]. Ці обертання можуть бути трьох різних видів:

1) обертання, які допускає яка-небудь певна рань;
2) обертання, які допускає многогранник кут при якій-небудь певній вершині;
3) транспозиції відносно прямих, що сполучають центр з серединами ребер.

Усі ці три види обертань перетворюють многогранник самого в себе. Навпаки, будь-яке обертання, яке допускає даний многогранник, належить до однієї з цих категорій. Справді, точка I, в якій ось обертання перетинає поверхню тіла, лежатиме або всередині грані, яка повинна лишатися на місці (бо в противному разі вона б перетворювалася в іншу грань, і ця нова грань мала б з даною гранню спільну точку I, що неможливо), або у вершині, яка лишатиметься на місці при обертанні, або на ребрі, яке допускає це обертання, і, отже, перпендикулярне до осі обертання.

Будь-який правильний многогранник P має також площини симетрії. Він суміщається з многогранником P', симетричним йому:

1) відносно кожної площини, яка перпендикулярна до ребра і проходить через його середину;
2) відносно бісекторної площини двогранного кута при кожному його ребрі.

Справді, всі грані і всі двогранні кути такого симетричного многогранника P' дорівнюватимуть граням і двогранним кутам многогранника P; через те, що P і P' мають, крім того, одну спільну грань і розміщені по одну сторону від цієї грані, то многогранник P' повинен суміщатися з многогранником P.

Можна й іншим способом довести існування площин симетрії у тому випадку, коли многогранник має центр симетрії, який повинен, очевидно, збігатися з центром описаної кулі S, тобто коли многогранник P суміщається з симетричним йому відносно точки S многогранником

P''. Відомо [19], що многогранник P має осі симетрії другого порядку і що всі осі парного порядку також можна розглядати як осі другого порядку. Але многогранник P', який дістаємо з многогранника P'' за допомогою транспозиції відносно осі A другого порядку, буде симетричний з многогранником P відносно деякої площини (а саме відносно площини, як проходить через точку S і перпендикулярна до осі A).

Навпаки (при тій самій умові, що S – центр симетрії), таким способом можна дістати всі площини симетрії даного многогранника: справді, площина симетрії неодмінно повинна проходити через S і, отже, досить повторити в зворотному напрямку міркування, які тільки що було проведено, щоб переконатися, що перпендикуляр до цієї площини, який проходить через точку S, повинен бути або віссю другого порядку, або віссю, яку можна розглядати як вісь другого порядку, тобто віссю парного порядку.

Крім того, можна також переконатися, що кожна площина симетрії належить до однієї з двох тільки що перелічених категорій. Справді, симетрія відносно площини, яка має з одним ребром многогранника (а не з його продовженням) спільні точки, відмінні від вершини, повинна переводити це ребро в себе. Це може мати місце тільки в тому випадку, якщо площина, про яку йде мова, або проходить через це ребро, або до нього перпендикулярна.

РОЗДІЛ 2
АЛГЕБРАЇЧНІ ГРУПИ ПРАВИЛЬНИХ МНОГОГРАННИКІВ

2.1. Групи симетрій правильних многогранників

Нехай F – довільна фігура. Множина D_F усіх рухів простору, що переводять фігуру F у себе, є групою (підгрупа групи D рухів простору) [13]. Якщо група D_F містить більше одного елемента, то вона називається *групою симетрій* фігури F, а елементи цієї групи називаються *перетвореннями симетрії* або просто *симетріями* фігури F. Якщо ж D_F складається тільки з тотожного перетворення, то будемо говорити, що фігура F не має симетрій.

Важливу роль у вивченні властивостей фігури F відіграють елементи симетрії цієї фігури. Розглянемо їх означення.

Точка O називається *центром симетрії* фігури F, якщо ця фігура переходить у себе при центральній симетрії відносно точки O. Площина σ називається *площиною симетрії* фігури F, якщо ця фігура переходить у себе при симетрії відносно площини σ. Пряма d називається *віссю симетрії порядку* n фігури F, якщо фігура F переходить у себе при повороті навколо прямої d на кут $\frac{2\pi}{n}$, де n – натуральне число і $n \geq 2$. Пряма d називається *дзеркально-поворотною віссю порядку 2n* фігури F, якщо ця фігура переходить у себе при поворотному відображенні з віссю d і найменшим за абсолютним значенням кутом $\frac{\pi}{n} = \frac{2\pi}{2n}$, де n – натуральне число і $n \geq 2$. *Елементами симетрії* фігури F називають її центри симетрій, площини симетрій, осі симетрій та дзеркально-поворотні осі.

Розглянемо деякі властивості симетрій правильних многогранників.

Нехай F – правильний многогранник. Довільна симетрія цього многогранника кожну його вершину переводить в деяку вершину, кожне ребро – в деяке ребро, кожну грань – в деяку грань.

Твердження 2.1. Центр правильного многогранника є інваріантною точкою довільної симетрії цього многогранника.

З цієї властивості випливає, що група D_F правильного многогранника F не містить рухів, які не мають інваріантних точок. Елементами групи D_F можуть бути тільки повороти, центральні симетрії, симетрії відносно площини і поворотні відображення.

Твердження 2.2. Група D_F правильного многогранника F або не містить центральних симетрій, або містить одну центральну симетрію відносно центра многогранника.

Твердження 2.3. Усі вісі симетрії, дзеркально-поворотні вісі і площини симетрії правильного многогранника F проходять через його центр O.

Лема 2.1. Нехай A, B, C – послідовні вершини однієї грані, а A', B', C' – послідовні вершини тієї ж або іншої грані правильного многогранника F. Тоді існує одне і тільки одне перетворення симетрії многогранника F, яке переводить вершини A, B, C відповідно у вершини A', B', C'.

Теорема 2.1. Число елементів групи D_F симетрій правильного многогранника F дорівнює подвоєному числу плоских кутів усіх його граней.

Доведення.

Нехай $\angle ABC$ та $\angle A'B'C'$ – плоскі кути правильного многогранника F. За доведеною лемою існує єдине перетворення симетрії f_1, яке точки A, B, C переводить у точки A', B', C', і інше єдине перетворення симетрії f_2, яке точки A, B, C переводить відповідно у точки C', B', A'. Тому, якщо

f – перетворення симетрії многогранника F, яке $\angle ABC$ переводить у $\angle A'B'C'$, то f співпадає або з f_1, або з f_2. Звідси випливає, що число елементів групи D_F дорівнює $2k$, де k – число плоских кутів усіх граней многогранника F.

2.2. Група симетрій тетраедра T_d

Розглянемо групу симетрій тетраедра. Правильний тетраедр $ABCD$ переходить сам в себе при таких нетотожних поворотах:

а) при поворотах навколо кожної з осей типу AP (рис. 2.1), які з‘єднують вершини тетраедра з центром протилежної грані, на кути $\frac{2\pi}{3}$ і $\frac{4\pi}{3}$. Всього таких обертань буде $4 \cdot 2 = 8$;

б) при поворотах на кут π навколо кожної з трьох прямих типу MN, що з‘єднують середини протилежних ребер (рис. 2.2). Оскільки

$$MN \perp BC,\ MN \perp AD,\ BM = MC,\ AN = ND,$$

то при повороті навколо прямої MN на кут π точка B переходить в C, C – в B, A – в D, а D – в A.

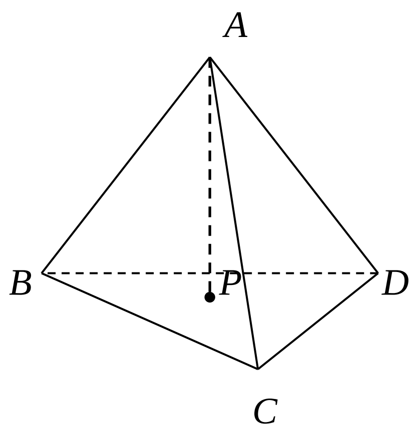

Рис. 2.1

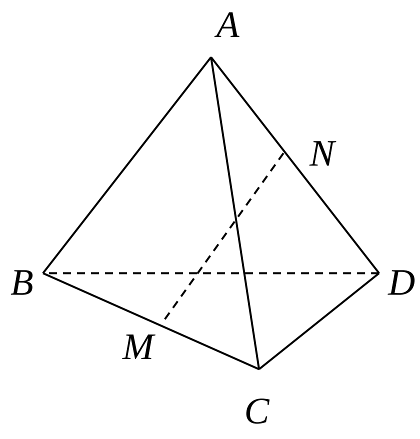

Рис. 2.2

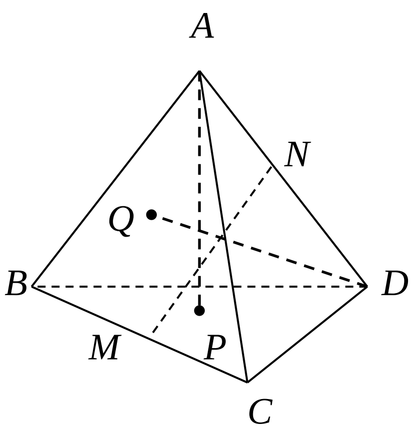

Рис. 2.3

Всього, разом з тотожнім перетворенням, маємо 1 + 8 + 3 = 12 поворотів, при яких тетраедр перетворюється у себе. Їм відповідають такі підстановки вершин:

$$e=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix},\ a_1=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & D & B \end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & B & C \end{pmatrix},$$

$$a_3=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & D & A \end{pmatrix},\ a_4=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & A & C \end{pmatrix},\ a_5=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & C & A \end{pmatrix},$$

$$a_6=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & C & B \end{pmatrix},\ a_7=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & A & D \end{pmatrix},\ a_8=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & A & B & D \end{pmatrix},$$

$$a_9=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix},\ a_{10}=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix},$$

$$a_{11}=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}.$$

Групу T можна подати наступною таблицею Келі:

	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
a_1	a_1	a_2	e	a_{10}	a_6	a_7	a_{11}	a_9	a_3	a_5	a_8	a_4
a_2	a_2	e	a_1	a_8	a_{11}	a_7	a_4	a_9	a_{10}	a_5	a_3	a_6
a_3	a_3	a_{11}	a_5	a_4	e	a_{10}	a_8	a_1	a_9	a_6	a_2	a_7
a_4	a_4	a_7	a_{10}	e	a_3	a_2	a_9	a_{11}	a_6	a_8	a_5	a_1
a_5	a_5	a_3	a_{11}	a_9	a_7	a_6	e	a_{10}	a_2	a_1	a_4	a_8
a_6	a_6	a_9	a_8	a_1	a_{10}	e	a_5	a_4	a_{11}	a_3	a_7	a_2

a_7	a_7	a_{10}	a_4	a_5	a_9	a_{11}	a_1	a_8	e	a_2	a_6	a_3
a_8	a_8	a_6	a_9	a_2	a_{11}	a_3	a_{10}	e	a_7	a_4	a_1	a_5
a_9	a_9	a_8	a_6	a_7	a_5	a_4	a_2	a_3	a_1	e	a_{11}	a_{10}
a_{10}	a_{10}	a_4	a_7	a_6	a_1	a_8	a_3	a_2	a_5	a_{11}	e	a_9
a_{11}	a_{11}	a_5	a_3	a_2	a_8	a_1	a_7	a_6	a_4	a_{10}	a_9	e

Легко перевірити, що всі підстановки – парні. Отже, відповідні до них обертання утворюють групу T (групу обертань тетраедра), яка ізоморфна знакозмінній групі A_4 симетричної групи S_4 [6].

Якщо дана конфігурація переходить в себе при повороті навколо осі l на кут $\frac{2\pi}{3}$, причому $\frac{2\pi}{k}$ – найменший ненульовий кут, то вісь l називають віссю симетрії k–го порядку. Цей поворот навколо осі на кут $\frac{2\pi}{k}$ позначимо символом C_k, а поворот на $\frac{2\pi}{k}\cdot 2$ – через C_{k^2} і т.д.

Кожна з осей симетрії третього порядку може бути перетворена в іншу вісь третього порядку при повороті навколо однієї з осей другого порядку. Так, при повороті навколо осі MN (рис. 2.3) точка A переходить в точку D, B – в C, C – в B, а D – в A. Площина BCD переходить в площину BCA, центр P грані BCD – в центр Q грані BCA і вісь AP – в вісь BQ. Таким чином, всі осі третього порядку (типу AP) еквівалентні між собою, і усі повороти навколо них на кут $\frac{2\pi}{3}$ спряжені між собою.

Елемент B *спряжений* з A в групі G, якщо знайдеться таке $C \in G$, що $B = C^{-1}AC$ ($A = CBC^{-1}$). Число таких поворотів дорівнює 4, а тому відповідний клас спряжених елементів позначається через $\{4C_3\}$. Так само спряжені між собою і чотири повороти навколо тих самих осей на кут $\frac{4\pi}{3}$, відповідний клас $\{4C_{3^2}\}$. Але повороти C_3 і C_{3^2} не спряжені між собою, тому що це повороти на різні кути. Кожна з осей другого порядку (типу MN) переходить в іншу при одному з поворотів навколо осей третього порядку, тому всі осі другого порядку між собою еквівалентні, і три повороти навколо цих осей на кут між собою спряжені. Позначимо цей клас через $\{3C_2\}$. Враховуючи, що тотожне перетворення складає окремий клас, отримуємо, що в групі T чотири класи спряжених елементів, які складаються з одного $\{1\}$, чотирьох $\{4C_3\}$, чотирьох $\{4C_3^2\}$ та трьох елементів $\{3C_2\}$.

Крім семи осей симетрії правильний тетраедр має шість площин симетрії. До 12 обертань, при яких тетраедр переходить у себе (та які відповідають парним підстановкам його вершин), добавимо одну з симетрій, наприклад, симетрію відносно площини ADM (рис. 2.4) – їй відповідає непарна підстановка

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & B & D \end{pmatrix}$$

вершин тетраедра. Якщо помножити цю симетрію на кожен з 12 поворотів, при яких тетраедр переходить в себе, отримаємо ще 12 перетворень, які відповідають непарним підстановкам вершин.

Серед них – шість “чистих” симетрій та шість добутків обертання та симетрії.

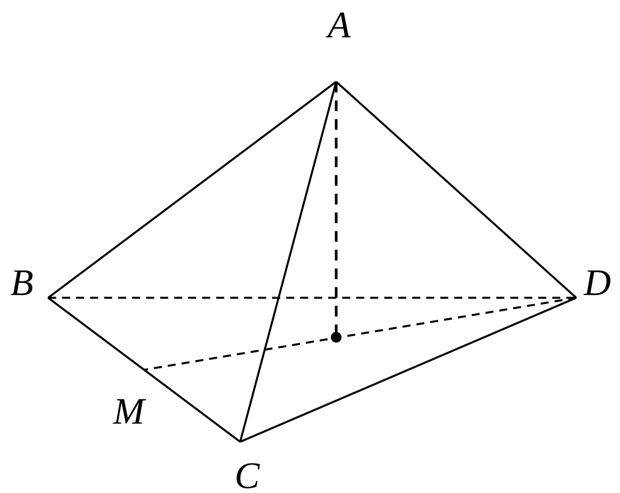

Рис. 2.4

Крім цих 24 перетворень, не існує ніяких ортогональних перетворень, при яких тетраедр переходить в себе, оскільки кожне таке перетворення відповідає певній перестановці його вершин та, отже, співпадає з одним вже визначеним перетворенням. Таким чином, група симетрій тетраедра T_d ізоморфна симетричній групі S_4. Тому ця група складається з п‘яти класів спряжених елементів, що містять 1, 6, 3, 8 та 6 елементів.

У групі T_d клас з трьох елементів утворюють повороти навколо осей другого порядку $\{3C_2\}$. Клас з восьми елементів складається з усіх поворотів навколо осей третього порядку: $\{4C_3\}$, $\{4C_3^2\}$, повороти навколо осей третього порядку на кути $\frac{2\pi}{3}$ і $\frac{4\pi}{3}$ є спряженими, так як якщо s – симетрія, наприклад, відносно площини AMD, а r – поворот відносно осі AP, що лежить в цій площині, на кут α, то srs – це поворот навколо тієї ж осі AP на кут α. Це випливає з рівності

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & B & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & D & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & B & C \end{pmatrix}.$$

А, отже, $srs = r^{-1}$.

Шість симетрій відносно площин виду ADM спряжені між собою і утворюють окремий клас, що позначається через $\{6\sigma\}$. Останні шість перетворень – добутки повороту та симетрії – також утворюють окремий клас $\{6\sigma'\}$.

Для визначення усіх самосуміщень тетраедра $A_0A_1A_2A_3$ (рис. 2.5) розглянемо вершину, наприклад, A_0, яку залишимо нерухомою, де під *самосуміщенням* даної фігури F розуміють переміщення фігури F у просторі, яке F переводить у себе [21]. Такі суміщення суміщають і трикутник $A_1A_2A_3$ з самим собою, повертаючи його навколо його центру B_0 на один з кутів 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$. Звідси маємо, що самосуміщень тетраедра $A_0A_1A_2A_3$, що залишають вершину A_0 на місці, існує тільки три: тотожне суміщення a_0, що залишає на місці усі елементи тетраедра, і два повороти a_1 і a_2 навколо осі A_0B_0 відповідно на кути $\frac{2\pi}{3}$ і $\frac{4\pi}{3}$.

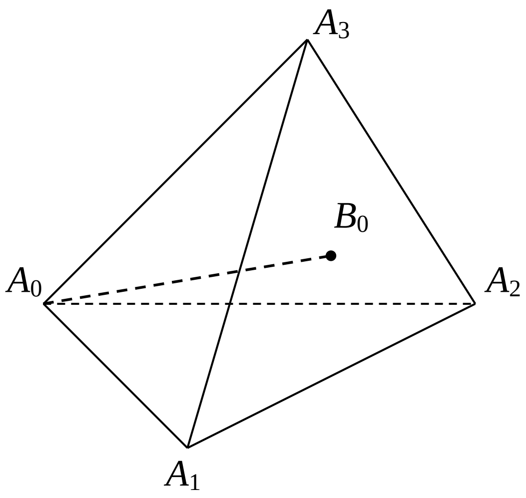

Рис. 2.5

Якщо позначити через x_i будь-яке з визначених самосуміщень тетраедра, що переводить вершину A_0 у вершину A_i, i = 1, 2, 3, через x_0 позначити тотожне суміщення, тоді будь-яке суміщення b тетраедра записується у вигляді $b = a_i\, x_k$, де i = 0, 1, 2 і k = 0, 1, 2, 3. З цієї рівності отримуємо, що тетраедр має рівно 12 самосуміщень.

Назвемо *медіаною грані* тетраедра пряму, що проходить через будь-яку вершину A_i тетраедра та через B_i грані, протилежної до цієї вершини. *Реберною медіаною* назвемо пряму, яка проходить через середини двох яких-небудь взаємно протилежних ребер тетраедра.

Кожній медіані грані відповідають два нетотожні самосуміщення тетраедра, а саме: повороти навколо цієї медіани на кути $\frac{2\pi}{3}$ і $\frac{4\pi}{3}$. Всього отримуємо вісім поворотів, які у вигляді підстановок записуються як a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8. Навколо кожної реберної медіани здійснимо один нетотожний поворот на кут π, отримаємо ще три повороти (так як реберних медіан три), які записуються у вигляді a_9, a_{10}, a_{11}. Ці 11 поворотів разом з тотожним самосуміщенням (тотожним поворотом) e і дають усі 12 самосуміщень тетраедра, які утворюють групу поворотів тетраедра.

2.3. Група симетрій куба O_h

Розглянемо тепер групу симетрій куба O_h. Куб переходить в себе при таких нетотожних перетвореннях:

а) при трьох поворотах на кути $\frac{\pi}{2}$, π та $\frac{3\pi}{2}$ навколо кожної з трьох прямих типу MN (рис. 3.6), що з‘єднують центри протилежних граней. Всього таких поворотів існує 3 · 3 = 9;

б) при двох поворотах навколо кожної з чотирьох діагоналей на кути $\frac{2\pi}{3}$ і $\frac{4\pi}{3}$ (рис. 2.7). Правильний трикутник ACD при цьому переходить в себе. Всього таких обертань 2 · 4 = 8;

в) при шести обертаннях на кут π навколо трьох прямих типу PQ (рис. 2.8), що з‘єднують середини протилежних ребер.

Всього, разом з тотожним перетворенням, знайшли 1 + 9 + 8 + 6 = 24 повороти, при яких куб переходить в себе. Отже, маємо, що повороти куба навколо його осей симетрії вичерпують усі його перетворення.

Покажемо, що це – обертання, при яких куб переходить в себе.

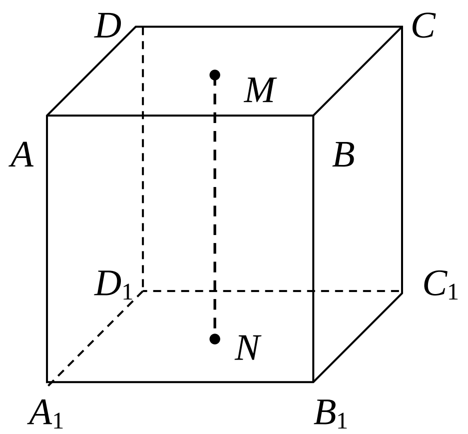

Рис. 2.6

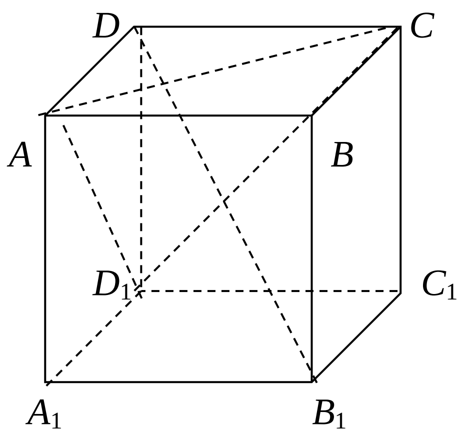

Рис. 2.7

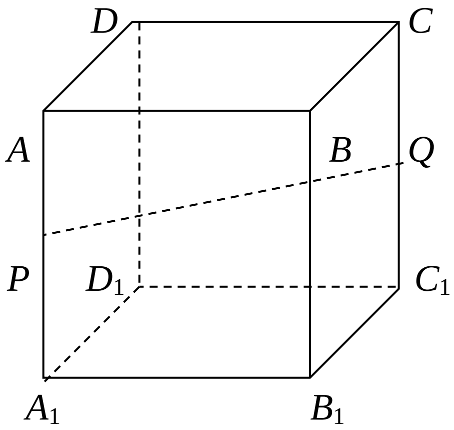

Рис. 2.8

Теорема 2.3. Група O обертань куба ізоморфна симетричній групі S_4, та порядок цієї групи дорівнює 24.

Доведення.

При кожному повороті, який переводить куб у себе, кожна його діагональ переходить в одну з діагоналей. У куба чотири діагоналі, тому кожному обертанню куба відповідає певна підстановка його діагоналей, а добутку обертань – добуток відповідних підстановок.

Залишається довести, що різним обертанням куба відповідають різні підстановки діагоналей. Дійсно, якщо два різні обертання α та β куба призводять до однієї й тієї ж підстановки діагоналей, то при нетотожному повороті $\alpha\beta^{-1}$ кожна діагональ куба переходить в себе (хоча можуть мінятися місцями кінці діагоналей). Покажемо, що таке обертання, при якому кожна діагональ переходить в себе, є тотожним.

Нехай при деякому повороті γ всі діагоналі куба перейшли в себе. Зокрема, перейдуть в себе діагоналі DB' та BD' (рис. 2.9), а тоді перейде у себе і площина, яка їх містить, тобто $DBB'D'$. Отже, ось обертання або лежить в площині $DBB'D'$, причому це поворот на кут π, або до неї перпендикулярна. Але у першому випадку переходять у себе тільки прямі, спрямовані по вісі обертання, та прямі, перпендикулярні до осі. Однак прямокутник $DBB'D'$ не є квадратом, отже, його діагоналі не перпендикулярні одна до одної. В іншому випадку, тобто якщо ось обертання перпендикулярна до площини $DBB'D'$, вона співпадає з прямою PQ, а тоді не переходять в себе (не переставляються) діагоналі AC' та $A'C$.

Отже, група обертань куба ізоморфна симетричній групі S_4.

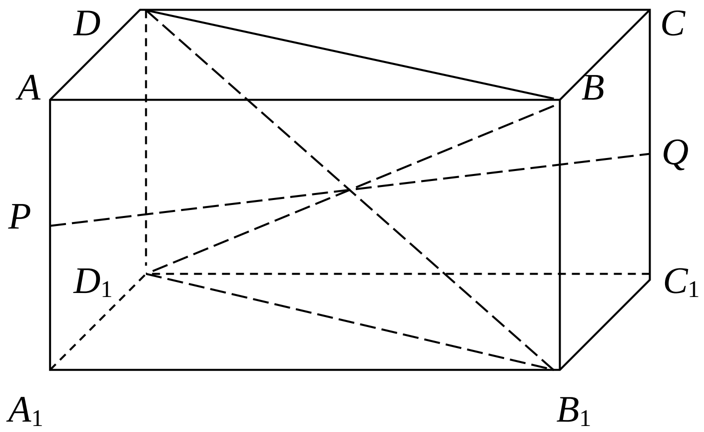

Рис. 2.9

Розглянемо тепер, як елементи групи O розбиваються на класи спряжених елементів.

Три осі симетрії четвертого порядку еквівалентні, тобто повороти навколо них на кут $\frac{\pi}{2}$ спряжені між собою. Ці осі є двобічними (перевертаються при поворотах на кут π навколо інших осей четвертого порядку), тобто повороти навколо них на кут $\frac{3\pi}{2}$ теж спряжені не тільки між собою, але й з поворотами на кут $\frac{\pi}{2}$. Поворот на кут $\frac{\pi}{2}$ позначимо через C_4, поворот на кут $\frac{3\pi}{2}$ – через C_4^3. Знайшли клас, який складається з шести елементів, який позначимо символом $\{3C_4,\ 3C_4^3\}$ або символом $\{6C_4\}$.

Усі повороти навколо тих самих осей четвертого порядку на кут $\frac{\pi}{2}\cdot 2=\pi$ спряжені між собою (і тільки між собою). Число таких поворотів дорівнює 3, відповідний клас позначимо через $\{3C_4^2\}$. Усі осі третього порядку (діагоналі) між собою еквівалентні (переходять одна в іншу, наприклад, при поворотах навколо осей четвертого порядку). При цьому кожна діагональ є двобічною віссю (перевертаються при поворотах навколо перпендикулярних до неї осей другого порядку). Отже, всі вісім поворотів навколо діагоналей на кути $\frac{2\pi}{3}$ і $\frac{4\pi}{3}$ спряжені між собою. Відповідний клас позначимо через $\{4C_3,\ 4C_3^2\}$ або через $\{8C_3\}$.

Шість осей другого порядку переходять одна в одну, наприклад, при поворотах навколо осей четвертого порядку, і, отже, усі шість поворотів навколо них на кут π спряжені між собою. Цей клас позначимо через $\{6C_2\}$.

Враховуючи окремий клас, що утворюється тотожним перетворенням, отримуємо всього п‘ять класів спряжених елементів, які складаються з одного $\{e\}$, шести $\{6C_4\}$, трьох $\{3C_4^2\}$, восьми $\{8C_3\}$ і шести $\{6C_2\}$ елементів.

Але крім 13 осей симетрії, куб має ще 9 площин симетрії (та центр симетрії): три площини симетрії – такі, як *PQMN* (рис. 2.10) та шість діагональних площин – таких, як *DBB′D′* (рис. 2.11).

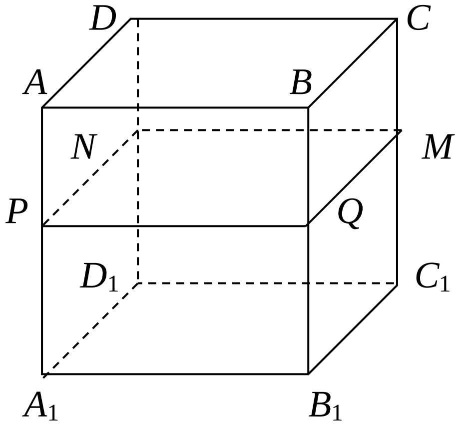

Рис. 2.10

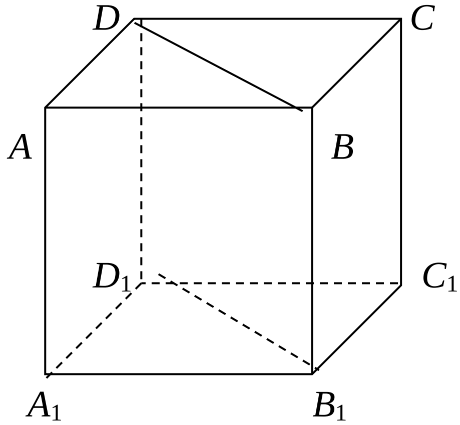

Рис. 2.11

2.4. Група симетрій октаедра

Розглянемо тепер групу симетрій октаедра.

Відомо, що куб та октаедр у певному розумінні двоїсті або взаємні один з одним, отже, вони мають однакові групи симетрій. Перш за все, назвемо два елементи (вершина, ребро, грань) будь-якого многогранника *інцидентними*, якщо один з цих двох елементів належить іншому (як його елемент). Таким чином, вершина та грань, яка має цю вершину серед своїх вершин, а також грань та ребро цієї грані, нарешті, вершина та ребро, одним з кінців якого є ця вершина, – пари інцидентних елементів.

Два многогранники називаються *взаємними*, якщо елементи одного з них можуть бути таким чином поставлені у взаємнооднозначну відповідність з елементами іншого, що при цьому пари інцидентних елементів одного многогранника відповідають парам інцидентних елементів іншого, та при цьому: вершини першого многогранника відповідають граням другого, ребра першого многогранника відповідають ребрам другого, грані першого – вершинам другого.

У цьому розумінні куб та октаедр взаємні. Отже, група поворотів правильного октаедра ізоморфна групі поворотів куба. Зокрема, ця група теж містить 24 елемента.

Октаедр переходить у себе у випадках таких нетотожних обертань:

а) при трьох поворотах на кути $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ навколо прямої, яка проходить через вершини A та P (рис. 3.13);

б) при двох поворотах на кут π навколо кожної з діагоналей CE та BD. Всього таких поворотів $2 \cdot 2 = 4$;

в) при трьох поворотах на кути $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ навколо кожної з прямих *MN* та *FL*, які з‘єднують центри протилежних ребер квадрата *BCDE* ($A \to A$, $K \to K$). Всього таких поворотів $2 \cdot 3 = 6$;

г) при повороті на кут π навколо тих самих прямих *MN* та *FL* ($A \to K$, $K \to A$). Існує два такі повороти;

д) при трьох поворотах на кут $\frac{2\pi}{3}$ навколо прямої, яка з‘єднує центри протилежних граней, наприклад, пряма *PQ* з‘єднує центри граней *ABC* та *DKE*.

Отже, разом з тотожним перетворенням знайшли:

$$1 + 3 + 4 + 6 + 3 + 2 = 19$$

поворотів, при яких октаедр переходить у себе. Крім перелічених осей симетрії існують ще площини симетрії такі, як *BADK*, *PAEK*, *BPDE*, *AMKN*, *AFKL*.

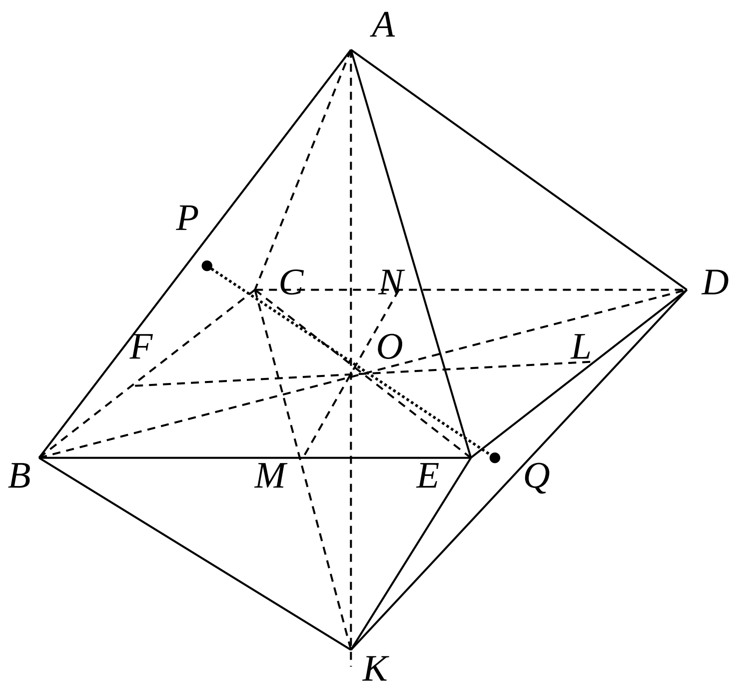

Рис. 2.13

2.5. Групи симетрій ікосаедра та додекаедра

Нарешті, розглянемо, що являють собою групи симетрій двох останніх фігур – ікосаедра та додекаедра.

Ікосаедра та додекаедр взаємні один з одним. Отже, групи їх обертань ізоморфні. Для того, щоб це встановити, достатньо вписати ікосаедр в додекаедр, або додекаедр в ікосаедр [11]. Тому достатньо ознайомитися з групою обертань ікосаедра.

Розглянемо спочатку ті перетворення, які переводять ікосаедр в себе та залишають нерухомою одну з його вершин. Таких перетворень п‘ять, а саме: п‘ять поворотів навколо осі, яка з‘єднує дану вершину з протилежною їй. Оскільки всього вершин 12, то число перетворень, які переводять ікосаедр в себе $5 \cdot 12 = 60$. Всі ці перетворення – повороти навколо його осей симетрії. Дійсно, маємо наступні осі симетрії ікосаедра:

а) шість осей, що з‘єднують протилежні вершини: навколо кожної з них існує чотири нетотожні повороти (на кути $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{8\pi}{5}$), які переводять ікосаедр в себе. Отже, всього одержуємо $4 \cdot 6 = 24$ повороти.

б) десять осей, які з‘єднують центри протилежних граней; навколо кожної з цих осей існує два нетотожні повороти (на кути $\frac{2\pi}{3}$ та $\frac{4\pi}{3}$). А всього 20 поворотів.

в) п‘ятнадцять осей, які з‘єднують середини протилежних ребер, кожна з яких дає по одному нетотожному повороту (на 180°).

Отже, маємо $24 + 20 + 15$ нетотожних поворотів і 1 тотожний – всього 60 поворотів.

З цих міркувань випливає, що ікосаедр має 31 ось симетрії. Взагалі, група симетрій ікосаедра складається зі 120 елементів.

Група симетрій додекаедра містить 120 елементів та складається з:

- 15 відображень від площин, які ділять навпіл двогранні кути;
- 15 відображень від прямих, що з‘єднують середини протилежних ребер;
- 12 поворотних відображень на кут $\frac{\pi}{5}$;
- 12 поворотних відображень на кут $\frac{2\pi}{5}$;
- 12 поворотних відображень на кут $\frac{3\pi}{5}$;
- 12 поворотів на $\frac{4\pi}{5}$ в обидві сторони навколо прямих, що з‘єднують центри протилежних граней;
- 20 поворотних відображень на кут $\frac{\pi}{3}$;
- 20 поворотів на $\frac{2\pi}{3}$ в обидві сторони навколо прямих, що з‘єднують протилежні вершини;
- одне відображення від центру;
- одне тотожне перетворення.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було розглянуто метричні властивості опуклих многогранників; досліджено групи симетрій правильних многогранників за допомогою апарату загальної теорії груп; розглянуто зв‘язок розв‘язних груп та груп обертання правильних многогранників. Одержано такі основні висновки, що стосуються властивостей алгебраїчних груп правильних многогранників.

Правильні многогранники становлять конкретний клас в множині усіх опуклих многогранників. Існує лише п‘ять типів правильних многогранників: тетраедр, куб, октаедр, додекаедр та ікосаедр. Основні співвідношення між елементами цих геометричних тіл визначаються за допомогою теореми Ейлера.

Правильні многогранники мають певні елементи симетрії – центри симетрії, площини симетрії, осі симетрії та дзеркально-поворотні осі – і відіграють важливу роль при вивченні властивостей цих тіл.

Для кожного з п‘яти визначених типів правильних многогранників існують певні типи рухів простору, що залишають їх на місці, причому кількість таких перетворень може бути легко підрахована.

Що стосується груп симетрій правильних многогранників, то стосовно них можна зробити наступні висновки:

1) група обертань тетраедра ізоморфна знакозмінній групі A_4 симетричної групи S_4. Тетраедр допускає 24 перетворення, які переводять його в себе, має дві невласні групи обертань, при цьому група поворотів тетраедра не комутативна;

2) група обертань куба ізоморфна симетричній групі S_4 і порядок цієї групи дорівнює 24;

3) куб та октаедр двоїсті один з одним і тому мають однакові групи симетрій. Група поворотів октаедра ізоморфна групі поворотів

куба і містить 24 елементи. Існує 19 поворотів, при яких октаедр переходить в себе;

4) ікосаедр та додекаедр взаємні один до одного, отже, їх групи симетрій ізоморфні. Ікосаедр має 31 ось симетрії та допускає 60 обертань, при яких переходить сам в себе. Групи симетрій ікосаедра та додекаедра складаються зі 120 елементів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Стереометрия. – М.: Наука, 1968. – 368 с.
2. Александров А.Д, Нецветаев Н.Ю. Геометрия. – М.: Наука, 1990. – 212 с.
3. Александров П.С. Введение в теорию групп. – М.: Наука, 1980. – 180 с.
4. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. – М.: Высшая школа, 1979. – 336 с.
5. Баханский А.Г. Геометрия многогранников. – М.: Просвещение, 1991. – 270 с.
6. Бремстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников / Под ред. Л.И.Кашина. – М.: Мир, 1988. – 410 с.
7. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1968. – 272 с.
8. Вейль Г. Симметрия. – М.: Наука, 1968. – 165 с.
9. Дороговцев А.Я., Конфорович А.Г., Лященко М.Я., Ядренко М.Й. У світі математики. – К.: Радянська школа, 1968. – 184 с.
10. Дубовин Б.А, Новиков С.П., Фомин А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. – М.: Наука, 1979. – 704 с.
11. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. – М.-Л.: ГОНТИ, 1968. – 400 с.
12. Ефимов Н.В., Розендрон Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. – М.: Наука, 1970. – 184 с.
13. Каргополов М.И., Мерзляков С.С. Основы теории групп. – М.: Наука, 1989. – 314 с.
14. Келли Дж. Общая топология. – М.: Наука, 1981. – 432 с.
15. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и ее преподавание. – М.: Наука, 1985. – 368 с.

16. Курош А.Г. Теория групп. – 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 468 с.
17. Луи де Бройль. По тропам науки. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. – 326 с.
18. Люстерник Л.А. Выпуклые тела. – М.-Л.: Гостехиздат, 1967. – 246 с.
19. Леонтьева Л.К. Симметрии правильных многогранников и тел вращения. – М.: Просвещение, 199. – 168 с.
20. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 234 с.
21. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Геометрические преобразования. – М.: Наука, 1968. – 256 с.
22. Мурач М.М. Геометричні перетворення і симетрія: Природа симетрії і симетрія природи. – К.: Радянська школа, 1987. – 286 с.
23. Перепелкин Д.И. Курс элементарной геометрии. – М.-Л.: Гостехиздат, 1969. – 346 с.
24. Пинтовский А.Г. Многогранники. – К.: Выща школа, 1992. – 216 с.
25. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. – М.: Наука, 1973. – 517 с.
26. Пясковський Б.В. Математика і навколишній світ. – К.: Знания, 1973. – 168 с.
27. Семенович О.Ф. Геометрія групи перетворень. – К.: Освіта, 1971. – 138 с.
28. Скорняков Л.А. Элементы алгебры. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 240 с.
29. Судзуки М. Строение группы и строение структуры ее подгрупп. – М.: ИЛ, 1960. – 212 с.
30. Тарков М.И. Стереометрия. – М.: Наука, 1989. – 318 с.
31. Трегуб Л.С. Элементы современного введения в математику. – Ташкент: Фан, 1973. – 218 с.
32. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства: Пер. с анлг. – М.: Мир, 1964. – 126 с.

33. Яглом И.М, Болтянский В.Г. Выпуклые фигуры. – М.-Л.: Гостехиздат, 1975. – 300 с.
34. Ядренко М.Й. У світі математики: Збірник науково-популярних статей. – К.: Радянська школа, 1973. – Вип. 4.
35. Ядренко М.Й. У світі математики. – К.: Радянська школа, 1975. – 264 с.

ДОДАТОК А

КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Я, Фірсакова Інна Анатоліївна, учасниця освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:

– дотримуватися:

- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:

- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;

– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;

– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;

– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традицій університету, формуванню його позитивного іміджу;

– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;

– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;

– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні й політичні переконання;

– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;

– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;

– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;

– не брати участі в будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

– не підроблювати документи;

– не поширювати неправдиву та компрометуючу інформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;

– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг або здійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;

– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальні домагання;

– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базі університету та особистій власності інших студентів та/або працівників;

– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністю університету;

– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;

– не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальностей до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

27.04.2022 Фірсакова Інна Анатоліївна