УДК 371

БАРБОЛІНА А.С.

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПІРАМІДА» В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ СТЕРЕОМЕТРІЇ ПРОФІЛЬНОГО РІВНЯ

У статті розглянуто деякі аспекти методики вивчення стереометричного матеріалу курсу геометрії 11 класу профільного рівня навчання, наведено приклади розв'язання конкретних задач різних типів з теми «Піраміда».

Ключові слова: стереометричні задачі, планіметричний матеріал, багатогранник, піраміда, методика навчання стереометрії.

The article discusses some aspects of the methodology of studying stereometric material of the 11th grade geometry course of the profile level of education, examples of solving specific problems of various types on the topic "Pyramid" are given.

Key words: stereometric problems, planimetric material, polyhedron, pyramid, stereometry teaching method.

Постановка проблеми. Вивчення стереометрії здобувачами освіти відбувається у старшій школі. Протягом курсу геометрії 10 класу основна увага приділяється вивченню плоских фігур у просторі. Таким чином закладається фундамент для подальшого розгляду просторових фігур в 11 класі.

Багатогранники та тіла обертання є ключовим предметом вивчення стереометрії. Значні труднощі у багатьох учнів викликає саме матеріал, що стосується багатогранників. А серед усіх багатогранників піраміда є найскладнішим для вивчення тілом. Це викликано тим, що існує велика кількість різновидів пірамід (правильні піраміди; піраміди, у яких бічні ребра нахилені під однаковими кутами до основи; піраміди, у яких усі бічні грані нахилені під рівними кутами до основи; піраміди, у яких бічні грані нахилені під різними кутами; піраміди, у яких бічні ребра нахилені під різними кутами до основи; зрізані піраміди тощо). Тому вивченню цієї теми важливо приділити особливу увагу.

Вивченням методики навчання стереометрії, зокрема теми «Піраміда», займалися такі педагоги та методисти, як Слєпкань З.І. [6, ст. 459-468], Бевз Г.П. [1, ст. 336-337], Гориловська І.В. [2], Тарасенкова Н.А. [7], Акуменко І.А. [7], Лов'янова І.В. [7], Сердюк З.О. [7] та багато інших.

Метою даної статті є висвітлення деяких проблем, з якими стикаються вчителі математики в ході викладання теми «Піраміда» в курсі стереометрії старшої профільної школи, та методів їхнього попередження та вирішення з використанням прикладів розв'язання конкретних задач.

Виклад основного матеріалу. Під час вивчення просторових тіл важливо пояснити учням, що переважна кількість стереометричних задач зводиться до планіметричних. Зокрема, задачі на піраміди, в основному, зводяться до розгляду прямокутних трикутників. Тому пропедевтичним до вивчення цієї теми буде планіметричний матеріал, що стосується трикутника, а саме співвідношення між сторонами та кутами у прямокутному трикутнику, теорема Піфагора, теорема синусів, теорема косинусів, формули для знаходження площ трикутників. Також важливо повторити з учнями такі теми стереометрії курсу 10 класу, як «Кут між двома прямими», «Кут між прямою та площиною», «Двогранний кут та його лінійний кут», означення перпендикуляра, похилої та її проекції на площину. Важливу роль в ході розв'язання задач відіграє теорема про три перпендикуляри.

Щоб уникнути труднощів під час розв'язування задач, вчитель має домогтися чіткого усвідомлення здобувачами освіти усіх елементів піраміди (вершини, бічних ребер, бічних граней, ребер при основі, бічних ребер, основи, апофеми тощо); видів пірамід; навчити їх правильно виконувати побудову різних видів пірамід; довести до автоматизму вміння школярів зображати правильні трикутну та чотирикутну піраміди.

Задачі, що стосуються вивчення піраміди, можна поділити на такі основні типи:

- задачі на знаходження деяких елементів піраміди за відомими;
- задачі на знаходження площ поверхонь;
- задачі на знаходження об'єму піраміди;
- задачі на доведення певних властивостей піраміди;
- задачі на побудову перерізів піраміди площинами.

Розглянемо приклади розв'язання деяких типів задач, що відповідають високому рівню навчальних досягнень здобувачів освіти з підручників геометрії 11 класу профільного рівня навчання.

Задача 1. «Сторона основи правильної чотирикутної піраміди MABCD дорівнює 8 см, а висота піраміди – 12 см.

1. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через середини бічних ребер MA і MD паралельно висоті піраміди.
2. Знайдіть площу перерізу [5, ст. 31]».

Розв'язання

1. Побудуємо переріз піраміди заданою площиною.

1) Позначимо середини бічних ребер MA і MD через K і F відповідно.

2) Розглянемо діагональний переріз MBD піраміди $MABCD$.

3) Через точку F у площині цього діагонального перерізу проведемо пряму, паралельну до висоти MO піраміди.

4) Точку перетину проведеної прямої із площиною $ABCD$ позначимо, як F'. Точка F' буде належати прямій BD , тому що ця точка належить і площині діагонального перерізу, і площині основи піраміди, а отже, належить лінії їхнього перетину.

5) Точка F' є серединою відрізка OD (за теоремою Фалеса, оскільки прямі MO і FF' паралельні і відтинають рівні відрізки на стороні MD кута MDO , то і на іншій стороні OD вони також відтинають рівні відрізки, тому $OF' = F'D$).

6) Аналогічно розглянемо діагональний переріз MAC піраміди $MABCD$ і знайдемо точку K', яка буде серединою відрізка AO .

7) Через точки F' і K' проведемо пряму a .

8) Точки перетину прямої a із ребрами при основі AB і DC позначимо як L та P відповідно.

9) З'єднаємо точки L , K , F , P послідовно відрізками.

10) Площина перерізу $LKFP$ паралельна висоті MO , тому що вона містить прямі FF' та KK', паралельні висоті (за ознакою паралельності прямої та площини: якщо пряма, яка не належить даній площині, паралельна якій-небудь прямій, що лежить у цій площині, то дана пряма паралельна самій площині[4, ст. 49]).

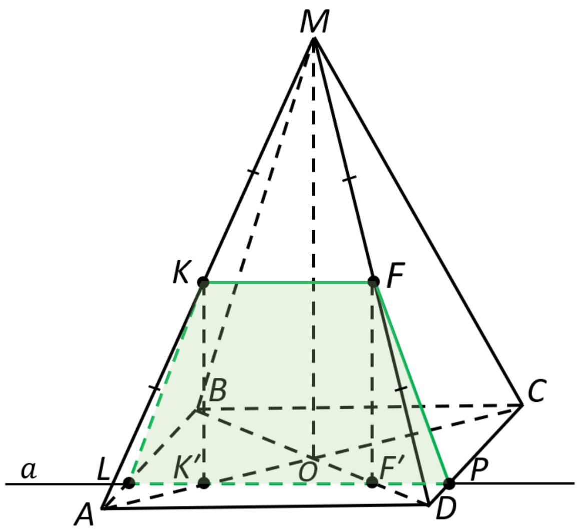

Рис. 1

11) Чотирикутник $LKFP$ – шуканий переріз піраміди заданою площиною (Рис. 1).

2. Знайдемо площу побудованого перерізу.

Чотирикутник $LKFP$ є трапецією.

1) Відрізок KF паралельний відрізку AD (за властивістю середньої лінії трикутника AMD). Отже, $KF = \frac{AD}{2} = \frac{8}{2} = 4$ (см).

2) Відрізок $K'F'$ паралельний відрізку AD (як середня лінія трикутника AOD . Отже, відрізки KF і LP паралельні.

3) $LP = AD = 8$ см.

4) FF' - середня лінія трикутника MDO . Тому $FF' = \frac{MO}{2} = \frac{12}{2} = 6$ (см).

5) $S_{KFPL} = \frac{KF + LP}{2} \cdot FF` = \frac{4+8}{2} \cdot 6 = 36\ (\text{см}^2)$.

Задача 2. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 11 см, а сторона основи піраміди менша за бічне ребро на 1 см. Знайдіть об’єм піраміди [3, ст. 197].

Розв’язання

1) Нехай $SABC$ – задана піраміда. Трикутник ABC – правильний. Точка O – центр основи трикутної піраміди. SO – висота піраміди – 11 см. Ребро при основі піраміди на 1 см менше від бічного ребра.

2) Виконаємо малюнок до задачі (Рис. 2).

3) Об’єм піраміди слід шукати за формулою $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$.

4) Площу основи шукатимемо за формулою $S_{\text{осн.}} = \frac{AC^2\sqrt{3}}{4}$. Отже, для знаходження об’єму піраміди слід знайти сторону трикутника ABC .

5) Нехай $AC = x$, тоді $AS = x + 1$.

6) Оскільки AK є медіаною і бісектрисою правильного трикутника, то $\angle CAK = \frac{60°}{2} = 30°$, а $AM = \frac{x}{2}$. Оскільки медіана BM є висотою, то $\angle AMB$ дорівнює 90°.

7) Розглянемо трикутник AMO . За співвідношенням між сторонами та кутами в прямокутному трикутнику $AO = \frac{AM}{\cos cos 30°} = \frac{x}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

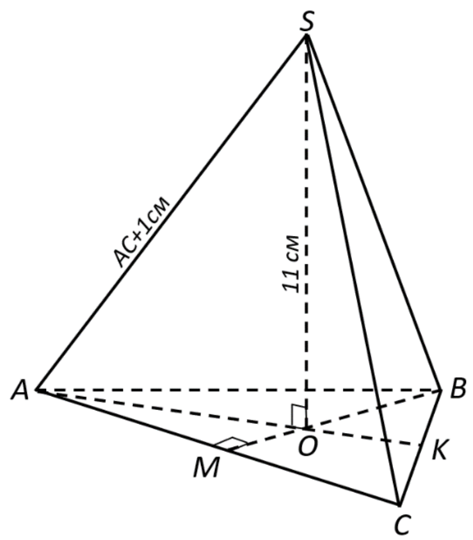

Рис. 2

8) Розглянемо трикутник AOS . Кут AOS дорівнює 90°, оскільки висота SO є перпендикуляром до площини основи піраміди, а отже, перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини.

9) Складемо рівняння за теоремою Піфагора: $(x+1)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 11^2$. Це рівняння зводиться до квадратного $x^2 + 3x - 180 = 0$. За теоремою Вієта коренями цього рівняння є числа -15 та 12. Довжина не може бути від’ємною величиною, отже, $AC = 12$ см .

10) Тож, знайдемо об’єм піраміди: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \cdot 11 = 132\sqrt{3}\ (\text{см}^3)$.

Висновки. На прикладі даних двох задач ми можемо побачити, що для розв’язання було використано планіметричний матеріал та матеріал з курсу алгебри. Перед розв’язанням таких стереометричних задач доречним для вчителя буде організувати актуалізацію опорного матеріалу. Розв'язання задач доцільно здійснювати шляхом використання елементів евристичного (частково-пошукового) методу, при якому виконанню учнями кожного кроку передує навідне запитання вчителя. Велике значення під час розв'язання стереометричних задач має глибокий аналіз учнями умови задачі та малюнку, ретельний пошук математичних тверджень, які лежать в основі кожної дії.

Дуже важливо, щоб учні відчували себе суб'єктом вивчення стереометрії, тобто чітко усвідомлювали мету розв'язання стереометричних задач, структуру побудови відповідного розділу геометрії, зв'язок між планіметричним та стереометричним матеріалами, розуміли користь процесу вивчення стереометрії безпосередньо для власного розвитку та майбутньої професійної діяльності.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник. – 3-тє вид., перероб. і допов. К.: Вища школа, 1989. 367 с.
2. Гориловська І.В. Формування в учнів професійно-технічних навчальних закладів умінь роз'язувати стереометричні задачі на побудову. Ч. 2013. 20 с.
3. Істер О.С., Єргіна О.В. Геометрія : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2019. 288 с.
4. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2018. 240 с.
5. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2019. 204 с.
6. Слєпкань З.І. Методика навчання математики : підруч. 2-ге вид. доп. і переробл. Київ : Вища школа, 2006. 582 с.
7. Тарасенкова Н. А., Акуменко І.А., Лов'янова І., Сердюк З. Організація навчання математики у профільній школі: монографія. Черкаси : ФОП Гордієнко, 2017. С. 10-61.

Рекомендує до друку науковий керівник доцент Таточенко В.І.