УДК 372

ПОСПИЛЬКО С.О.

ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

У статті розглядається питання вивчення обернених тригонометричних функцій в шкільному курсі алгебри та застосування їх властивостей та основних тотожностей, що містять аркфункції, до розв'язування задач, пов'язаних з тригонометричними функціями.

Ключові слова: обернена функція, обернені тригонометричні функції, аркфункції.

The article examines the issue of studying inverse trigonometric functions in a school algebra course and applying their properties and basic identities containing arc functions to solving problems related to trigonometric functions.

Keywords: inverse function, inverse trigonometric functions, arc functions.

В курсі алгебри старшої школи обернені тригонометричні функції вважаються доволі складною темою. Задачі з оберненими тригонометричними функціями викликають у здобувачів значні складнощі як у логічному, так і у технічному плані. Це пояснюється тим, що дана тема містить не дуже прості формули, які пов'язують ці функції; вона передбачає виконання громіздких тотожних перетворень виразів, які містять ці функції; вона вимагає гарного знання формул тригонометрії та добре розвинутих геометричних умінь, пов'язаних з побудовою графіків функцій [3].

В роботі розглянуто загальний підхід до означення оберненої тригонометричної функції та побудови її графіків, на цій основі викладені теоретичні основи обернених тригонометричних функцій. Робота містить значну кількість розв'язаних задач, які містять тригонометричні функції, що ілюструють застосування теоретичних знань при розв'язування практичних прикладів.

Нехай задана функція *y = f(x),* з областю визначення *D(f)* та множиною значень *E(f)*. Відомо [1], що для кожного значення з області визначення функції можна знайти відповідне значення ; називають *образом* при відображенні *f* , а – *прообразом* при цьому відображенні.

Нерідко доводиться розв'язувати обернену задачу – за даним значенням функції знаходити відповідне значення аргументу . Якщо кожному значенню функції відповідає одне певне значення аргументу, можна висловити обернену залежність значень аргументу від значень функції. У такому разі таку функцію називають *оборотною*.

Якщо для функції *y = f(x)* для кожного значення аргументу з області визначення *D(f)* відповідає одне певне значення функції з множини значень функції *E(f)*, а для кожного значення функції з множини значень функції *E(f)* відповідає одне певне значення аргументу з області визначення функції $D(f)$, то функцію $y = f(x)$ ще називають *взаємно однозначною* (або ще ін'єктивною функцією, або ін'єкцією). Підкреслимо ще раз, що якщо функція $y = f(x)$ приймає кожне своє значення y тільки при одному значенню x, то цю функцію називають *оборотною*.

Нехай $y = f(x)$ – оборотна функція, тобто з рівності $y = f(x)$ можна однозначно виразити x через y. Тоді кожному y з множини значень функції відповідає одне певне значення x з області її визначення, таке, що $y = f(x)$.

Ця відповідність визначає функцію x від y, яку позначимо $x = g(y)$. У зв'язку з тим, що аргумент функції прийнято позначати через x, поміняємо місцями x та y. Отримаємо: $y = g(x)$. Функцію $y = g(x)$ називають *оберненою* до функції $y=f(x)$.

Функція $y = sinx$ не монотонна (вона кусково монотонна [2]). Якщо до цієї функції на всій області визначення ($D(sin) = (-\infty; +\infty)$) визначити обернену функцію, то остання буде багатозначною. Цю багатозначну функцію позначають $y = arcsin\ x$.

Якщо до функції $y = cosx$ на всій області визначення ($D(\cos)=(-\infty; +\infty)$) визначити обернену функцію, то остання буде багатозначною. Цю багатозначну функцію позначають $y = arccosx$

На всій області визначення функції $y = tg\ x$ ($D(\text{tg}) = (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n$, де $n \in Z$)) не монотонна (вона кусково монотонна). Якщо до цієї функції на всій області визначення визначити обернену, то остання буде багатозначною. Цю багатозначну функцію позначають $y = \text{arctg}\ x$.

Обернені тригонометричні функції застосовуються в різноманітних задачах на доведення тотожностей, при розв'язуванні тригонометричних рівнянь та нерівностей. Крім того, властивості обернених тригонометричних функцій можна використовувати при знаходженні області визначення, області значень, найбільшого та найменшого значення функцій, які містять аркфункції. Наведемо декілька прикладів застосування обернених тригонометричних функцій.

Завдання 1. Розв'язати нерівність

$$log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \frac{\sin \sin 9\pi}{2} + \arccos arccos\left(x^2 + y^2\right) \le 0.$$

Розв'язання.

Оскільки $\frac{\sin \sin 9\pi}{2} = 1$, нерівність перепишемо наступним чином:

$$log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \arccos arccos\left(x^2 + y^2\right) \le -1.$$

$t \in [-1; 1]$

За означенням $\arccos arccost \ge 0$ для будь-якого . Тому з останньої нерівності випливає нерівність $log_{\frac{1}{2}}(x+1) \le -1.$ Розв'язуючи її, отримаємо $x \ge 1.$ З умов ОДЗ вихідної нерівності отримаємо

$-1 \le x^2 + y^2 \le 1,$ тобто

Звідси $y = 0$ та $x = 1$. Отже, розв'язком вихідної нерівності може бути хіба що пара (1;0). Підстановкою переконуємось, що вона дійсно є розв'язком.

Відповідь: $x = 1, y = 0.$

Завдання 2. Чи вірно, що $1 + 2 + 3 = \pi$?

Розв'язання.

Оскільки , то рівність, що перевіряється, справедлива тоді і тільки тоді,

$2+3=$ $\frac{3\pi}{4}=-1.$

коли вірна рівність . Очевидно, Обчислимо тангенс лівої частини рівності, що перевіряється:

$$(2+3)=\frac{2+3}{1-23}=\frac{2+3}{1-6}=-1$$

.

Таким чином, (*). Якщо, за означенням арктангенса,

$$2+3<\pi, 2>\frac{\pi}{4}, 3>\frac{\pi}{4},$$

отримуємо $\frac{\pi}{2}<2+3<\pi$. Помітивши, що $\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{4}<\pi$ і на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right)$ функція

$2+3=$

$y=tgx$ взаємно однозначна, визначаємо, що з рівності (*) випливає рівність .

Відповідь: так.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Жерновникова О. А. Дидактична підготовка майбутніх учителів математики до проектування навчальної діяльності старшокласників: теоретичний та методичний аспекти : монографія. Х. : Видавець Іванченко І.С. – 2015, 404 с.
2. Житарюк І. В. Методичні особливості викладання теми "тригонометричні функції" у старшій школі / І. В. Житарюк // Наука і освіта. - 2014. - № 1. - С. 127-131.
3. Теоретичні основи і практичні розробки спрощених методів обчислення тригонометричних виразів з оберненими тригонометричними функціями: навч. посіб. / П.М. Щербаков, Л.І. Шелест, К.Ю. Шелест. – Д.: Національний гірничий університет, 2012. – 66 с.

Рекомендує до друку науковий керівник ст. викладач Григор'єва В.Б.