УДК 372

ГОШКОВИЧ С.В.

ЧИСЛА МЕРСЕННА ТА ЧИСЛА ФЕРМА

У статті розглядаються властивості простих чисел, що задовольняють певним співвідношенням, зокрема, простих чисел Ферма та Мерсенна.

Ключові слова: прості числа, числа Мерсенна, числа Ферма.

The article considers the properties of prime numbers that satisfy a certain ratio, in particular, Fermat and Mersenne prime numbers.

Keywords: prime numbers, Mersenne numbers, Fermat numbers.

Багато тверджень в області теорії чисел, як і в математиці взагалі, відносяться не до окремих об'єктів, а до цілого класу об'єктів, які мають якусь спільну властивість. Особливо важливу роль в теорії чисел відіграє клас простих чисел, які виступають «цеглинками» в розкладі чисел на множники. Серед математиків інтерес до чисел не послаблювався ніколи. Свій внесок до розвитку загальної теорії чисел внесли такі видатні вчені свого часу, як Евклід, Діофант, Ферма, Ейлер, Діріхле та інші [2].

Першу спробу розв'язати питання про виділення простих чисел з множини натуральних здійснив Ератосфен [1]. Після Ератосфена аж до XIX ст. не було знайдено досконалішого способу складання таблиці простих чисел. Вдосконалення методу Ератосфена мало-помалу привели до того, що на сьогодні складені досить надійні таблиці простих чисел приблизно до 10000000. Вони надають у наше розпорядження широкий емпіричний матеріал, який дозволяє судити про розподіл та властивості простих чисел.

Спираючись на ці таблиці, можна висловити ряд гіпотез, що стосуються простих чисел. Питанням знаходження формули простого числа займалися в свій час такі видатні математики, як П. Ферма, Л. Ейлер, Лежандр [3], проте їх пошуки елементарних формул, що давали б тільки прості числа, виявилися марними.

В роботі розглядаються основні теоретичні відомості з теорії простих чисел, а також питання про прості числа, що задовольняють певним співвідношенням, зокрема, про числа Ферма та Мерсенна.

Французький математик П. Ферма був упевнений, що всі числа виду $F_k = 2^{2^k} + 1$ прості (числа F_k називають *числами Ферма*) [3]. Перші 6 чисел справді виявилися простими. Проте, гіпотеза Ферма, взагалі кажучи, була помилковою.

Цікаво, що прості числа Ферма F_k відіграють важливу роль у задачі про можливість побудови правильного n–кутника за допомогою циркуля та лінійки. У 1801 р. німецький математик К.Ф. Гаусс довів [1], що правильний n–кутник можна побудувати за допомогою циркуля та лінійки тільки тоді, коли число його сторін n дорівнює

$$2^{\langle}\oplus p_1 \oplus \ldots \oplus p_s \ (\langle \varepsilon\ 0,\ s\ \varepsilon\ 1)$$

де всі прості числа p_i є простими числами Ферма.

Відкриття Гаусса загострило інтерес до пошуку простих чисел Ферма. Багато математиків шукали серед чисел Ферма прості. Але жодного нового числа Ферма навіть за допомогою ЕОМ так і не було знайдено.

Цікаву формулу запропонував і французький математик Лежандр [2]: $f(n) = 2n^2 + 29$. Вона дає прості числа для значень n від 0 до 28. Проте праці видатних математиків так і не дали позитивної відповіді на запитання про формулу довільного простого числа.

Властивості чисел Ферма можна дослідити за допомогою важливого твердження, а саме наступної теореми.

Теорема 1. Якщо число F_n є, то число $3^{2^{2^n-1}} + 1$ ділиться на F_n.

Прості числа виду $M_p = 2^p - 1$, де p – також просте число, називають *простими числами Мерсенна* на честь французького математика і філософа Мерсенна, який у 1644 р. склав список таких чисел до 10^{79} (без помилок лише до 10^{18}) [2].

Зауважимо, що коли n – непарне складене число, то $2^n - 1$ буде також складеним числом. Крім того, при будь-якому парному n є 4 числа виду

$$2^n - 1 = \left(2^{\frac{n}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{n}{2}} + 1\right)$$

складені. Таким чином, якщо p не є простим числом, то серед чисел Мерсенна немає простих.

Числа Мерсенна відіграють важливу роль у зв'язку з однією проблемою теорії чисел. Ще Евклід знав, що коли $2^p - 1$ є простим числом, то $2^{p-1}(2^p - 1)$ є так званим *досконалим числом*, тобто дорівнює сумі двох своїх власних дільників [1]. Чи існує хоч одне непарне досконале число? Ця проблема не розв'язана до цього часу. Відомо лише, що коли число й існує, то воно не менше ніж 10^{100} [2].

Загальний спосіб перевірки чисел Мерсенна на простоту полягає у безпосередньому підставленні значень p, але чим більше p, тим важче таку перевірку здійснити. Проте у 1750 р. Л. Ейлеру вдалося довести [3], що M_{31} – просте число. До нього 8 простих чисел Мерсенна, які відповідають значенням

$$p = 2, 3, 5, 7, 13, 19, 31,$$

було вже знайдено.

Більш ста років ніхто не міг знайти простого числа Мерсенна, яке б перевищувало число Ейлера M_{31}. Але у 1876 р. було доведено [2], що число

$$2^{127} - 1 = 170141183460469231731687303715884105727$$

є простим. Воно має 39 цифр.

Прості числа Мерсенна, які не перевищують M_{127}, відповідають значенням p = 61, 89, 107. Після цього 75 років ніхто не міг знайти нового простого числа Мерсенна. Нові прості числа Мерсенна було відкрито за допомогою ЕОМ.

Якщо число M_n, де $n > 1$, просте, то і число n повинно бути простим, але не обов'язково навпаки. Доведено, що якщо p – просте число, то кожен натуральний дільник числа M_p повинен бути виду $2kp + 1$, де k – ціле число ≥ 0. Доведено, що якщо q є просте число виду $8k + 7$, то $q \mid M_{\frac{q-1}{2}}$. Це дозволило показати, що серед чисел M_p, де p – просте число, багато є складеними. Висунуто припущення, що таких складених чисел існує нескінченно багато [3].

Прості числа не розташовуються у строгій закономірності, проте спостерігається певна циклічність чередування чисел. І на даний час формула Мерсенна є унікальною та підходить для пошуку великих простих чисел.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Бородін О. І. Теорія чисел. Вид. 3-те, перероб. доп.: Підручник для фіз.-мат. факультетів пед. ін.-тів УРСР. – К.: Вища школа, 1970. – 274 с.
2. Клесов О.І., Поляковська О.В. Числа П'єра Ферма/ О.І. Клесов // У світі математики. – 15, № 2.– 2009. – С 28-37..
3. Math World. Mersenne Prime. Электронный ресурс: http://mathworld.wolfram.com/MersennePrime.html.

Рекомендує до друку науковий керівник професор Савченко О.Г.