

УДК 004.942

Флегантов Л. О., Антоненць А. В.

Полтавська державна аграрна академія, Полтава, Україна

## КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНОГО РУХУ ТІЛА ЗАСОБАМИ MATHCAD

DOI: 10.14308/ite000622

Розглядається застосування системи комп'ютерної математики MathCAD, як засобу комп'ютерної реалізації і дослідження математичної моделі процесу механічного руху фізичного тіла, кинутого під кутом до горизонту у напрямі до визначеної цілі, та її використання для проведення навчального імітаційного, обчислювального експерименту під час навчання основ математичного моделювання. Відмічено переваги системи MathCAD, як середовища реалізації навчальних математичних моделей на другому ступені вищої освіти. Описано створення навчальної комп'ютерної імітаційної моделі, що дозволяє всебічно аналізувати процес механічного руху тіла, змінюючи вхідні параметри моделі: прискорення сили тяжіння, початкове і кінцеве положення тіла, початкову швидкість і кут, геометричні розміри тіла і цілі. Використання методики націлене на ефективне засвоєння базових знань, умінь і навичок студентів з математичного моделювання, надає можливість кращого опанування основними теоретичними положеннями математичного моделювання та споріднених дисциплін, сприяє розвитку логічного мислення студентів, їх мотивації до вивчення дисципліни, підвищує пізнавальний інтерес, зацікавленість, формує навички науково-дослідницької діяльності, чим створює умови для ефективного формування професійних компетенцій майбутніх фахівців.

**Ключові слова:** використання MathCAD; імітаційне моделювання; комп'ютерне моделювання; математична модель; математичне моделювання; методика навчання; механічний рух тіла; обчислювальний експеримент; системи комп'ютерної математики, MathCAD.

**Постановка проблеми.** В сучасному інформаційному суспільстві комп'ютерна грамотність є необхідною умовою залучення до кваліфікованої професійної діяльності, оскільки «основним предметом праці переважної більшості людей стають інформація й знання, тобто інформаційні ресурси, знаряддям праці – комп'ютерна техніка, засобами – інформаційні технології» [7;184]. Використання інформаційних комп'ютерних технологій (ІКТ) як інструментів пізнання є обов'язковою складовою ефективного навчального процесу, а навички практичного використання ІКТ вважаються невід'ємним компонентом усіх професійних компетентностей, що розуміються, як динамічне поєднання знань, розуміння, навичок, умінь і здатностей [3;8] у певній галузі людської діяльності.

Основи професійної компетентності фахівців формуються, як правило, у закладах професійної освіти або вищих навчальних закладах (ВНЗ) під час вивчення системи навчальних дисциплін і оцінюються на різних етапах навчання. Цей процес у різних формах триває протягом усього життя, адже розвиток професійних компетентностей є спільною загальною метою усіх освітніх програм. Зокрема, під час навчання основ математичного моделювання формування важливих складових професійних компетенцій майбутніх фахівців і підвищення їх рівня забезпечується за рахунок: формування первісних уявлень про математичне моделювання, усвідомлення можливостей і набуття навичок представлення і реалізації математичних моделей об'єктів, явищ, процесів у вигляді комп'ютерних імітаційних моделей; поглибленого, на відміну від традиційних задач прикладного змісту, знайомства з можливостями комп'ютерного моделювання технологічних процесів і систем;

набуття навичок практичного застосування ІКТ для аналізу залежностей, виявлення статистичних і причинно-наслідкових зв'язків, ефективного використання математичних моделей і методів оптимізації та прогнозування у процесі пошуку ефективних рішень, практичного використання ІКТ для суттєвого зменшення часу при розрахунку техніко-математичних параметрів поставлених задач; набуття здатності прогнозувати динаміку досліджуваних технологічних процесів та явищ, а також оцінювати достовірність отриманих результатів. Саме тому підготовка сучасних інженерів передбачає обов'язкове вивчення основ математичного моделювання з використанням сучасних спеціалізованих комп'ютерних засобів для реалізації і дослідження математичних моделей. Останнє, у свою чергу, потребує цілеспрямованого впровадження у навчальний процес відповідних комп'ютерно-орієнтованих засобів і програм математичного моделювання на основі науково-обґрунтованих методик, що забезпечують формування достатнього рівня інформаційних умінь і покликані вдосконалити професійну компетентність майбутніх інженерів.

Усвідомлення того, що застосування ІКТ надає можливість більш глибоко і різнобічно підійти до вирішення проблеми забезпечення якості освіти, мотивує викладачів, як суб'єктів освітнього процесу, до пошуку, застосування і вдосконалення ефективних методик використання ІКТ у навчанні.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Застосування ІКТ у навчанні було і залишається предметом праць багатьох науковців, таких, як А. Єршов, В. Долгов, М. Дивак, М. Жалдак, О. Литвиненко, С. Кузнецова, Ю. Рамський, В. Розумовський, І. Сергієнко, Ю. Триус. Зокрема, особливості використання комп'ютерно-орієнтованих засобів навчання у вищих навчальних закладах детально розглядали А. Гуржій, М. Жалдак, М. Львов, С. Раков, О. Співаковський, Ю. Триус та інші.

Методологія сучасного математичного моделювання в цілому була закладена в роботах В. Глушкова, Б. Гнеденка, А. Колмогорова, О. Самарського, А. Тихонова. Окремі важливі питання в цьому напрямку, зокрема щодо математичних методів оптимізації та штучного інтелекту для моделювання складних процесів і систем, вивчали Є. Галба, А. Куляс, Т. Лебедева, Н. Семенова, П. Стецюк, П. Бідюк, П. Касьянов, О. Кісельова, Ю. Крак, А. Шевченко та інші.

Використання дидактичних можливостей систем комп'ютерної математики (СКМ), зокрема пакету MathCAD, при вирішенні математичних задач досліджували М. Кремньова, С. Гузенко, Ю. Воскобойников, В. Очков, Д. Гурский, В. Д'яконов, І. Абраменкова, Д. Кирьянов, М. Кундрат. Питання комп'ютерного забезпечення інженерних розрахунків та, зокрема, розв'язування електромеханічних задач засобами MathCAD знайшли відображення у працях А. Лозинського, В. Мороза, Я. Паранчук, М. Петрика та Є. Макарова.

Однак, незважаючи на значну кількість навчальних, наукових і науково-методичних публікацій у цьому напрямку, більшість з них представляють сучасні СКМ, як зручні і потужні інструменти, покликані прискорити, оптимізувати навчальну і практичну роботу студентів і науковців, пов'язану з виконанням складних математичних та інженерних розрахунків, за рахунок автоматизації рутинних обчислень. У багатьох випадках вони ілюструють можливості (переваги, відмінності, недоліки) окремих СКМ і надають цікаві приклади їх практичного використання. Водночас, спостерігається недостатня увага до методичних аспектів використання СКМ у навчальному процесі, що надає актуальності темі нашого дослідження.

**Мета статті** полягає у розкритті особливостей комп'ютерної реалізації математичних моделей і проведення імітаційного експерименту у середовищі СКМ MathCAD під час навчання основ математичного моделювання.

**Методи дослідження.** Метою статті обумовлено вибір методів дослідження: аналіз науково-методичної літератури з теоретичних і методичних основ математичного моделювання, методики і практики використання комп'ютерної техніки і систем комп'ютерної математики у навчальному процесі, наукових дослідженнях, для

розв'язування навчальних і практичних завдань у галузі інженерії; аналіз міжпредметних зв'язків, пов'язаних з побудовою математичних моделей, математичної моделі процесу механічного руху тіла у полі сили тяжіння зокрема, та відшукуванням її теоретичного розв'язку; використання методів алгоритмізації обчислень і побудови розрахунково-обчислювальних схем; проведення імітаційного, обчислювального експерименту, аналізу та інтерпретації його результатів; узагальнення і систематизація результатів власного досвіду використання СКМ під час навчання студентів інженерних спеціальностей аграрних ВНЗ таким дисциплінам, як «Основи математичного моделювання», «Прикладна математика», «Моделювання технологічних процесів і систем», «Математичні методи оптимізації і моделювання технологічних процесів і систем».

**Результати дослідження.** Нами представлено послідовність дій з комп'ютерної реалізації математичної моделі (ММ) механічного руху фізичного тіла, кинутого під кутом до горизонту у полі сили тяжіння. Дана методика апробована під час навчання основам математичного моделювання майбутніх інженерів аграрного виробництва на першому і другому ступені вищої освіти. У якості середовища моделювання використовується СКМ MathCAD.

Однією з альтернатив СКМ MathCAD у даному випадку є електронні таблиці MS Excel. Реалізація ММ в Excel полягає, фактично, у відтворенні послідовності необхідних математичних дій засобами електронних таблиць. Це сприяє кращому розумінню студентами технічної складової математичного моделювання, забезпечує можливість самостійно діагностувати можливі помилки у розрахунках, а також створює додаткові дидактичні переваги для викладача. Зокрема, це можливість виявлення обговорення зі студентами усіх проміжних ефектів і результатів моделювання, що можуть залишатися непомітними під час використання СКМ MathCAD або MATLAB. Таким чином, використання Excel є доцільним, якщо маємо на меті зосередитися на детальному вивченні розрахунків, пов'язаних з реалізацією ММ.

Натомість, СКМ MathCAD належить до класу систем автоматизованого проектування, і, на відміну від MS Excel, орієнтована на кінцевий результат у вигляді інтерактивного документу з автоматичними обчисленнями і візуальним супроводом. Користувач MathCAD має можливість, не відволікаючись на інші функції програми, вводити формули і дані як з клавіатури, так і через спеціальні панелі інструментів. Робота з документом математичного змісту здійснюється в межах одного робочого аркушу, на якому всі математичні вирази, формули і результати обчислень відображаються у звичній вигляді, і є можливість супроводжувати їх необхідними текстовими нотатками і поясненнями. Складні обчислювальні алгоритми реалізовані в MathCAD у вигляді стандартних функцій, що виключає технічні помилки у числових розрахунках. Також MathCAD надає можливість використовувати елементи програмування, і тому може використовуватися в складних інженерних проектах, наприклад, для візуалізації результатів математичного моделювання шляхом використання і об'єднання розрізаних обчислень і традиційних мов програмування. Дана властивість може бути застосована майбутніми фахівцями, під час проектування та різноманітних техніко-технологічних випробувань, зокрема, для обґрунтування ММ виконуваного дослідження. СКМ MathCAD часто використовується у проектах, де велике значення має відповідність прийнятим стандартам, адже програма створює зручне обчислювальне середовище для найрізноманітніших математичних розрахунків і документування результатів роботи в рамках затверджених стандартів. Таким чином, СКМ MathCAD дозволяє зосередитися більшою мірою на кінцевих результатах математичного моделювання і проведенні обчислювального експерименту.

Модель, що розглядається, обрана нами у якості прикладу, оскільки її побудова і дослідження не вимагає залучення додаткових спеціальних знань поза межами чинних навчальних планів підготовки студентів перших курсів ВНЗ, вона є простою і доступною для розуміння. У даному випадку, на відміну від нашої статті [1], пропонується її реалізація засобами СКМ MathCAD, що, на відміну від MS Excel, більш доцільно використовувати на

старших курсах ВНЗ, на другому і третьому ступенях вищої освіти. Разом з тим, незважаючи на її простоту, дана модель може бути поширена на цілий клас подібних задач залежно від постановки навчальної задачі: для цього достатньо лише змінити змістову інтерпретацію вхідних параметрів моделі. Крім того, існує аналітичний розв'язок даної ММ, що дозволяє використовувати її для ілюстрації основних понять та ідеї математичного моделювання вже на першому ступені вищої освіти для розв'язування цієї та інших задач подібного типу.

Далі використовується постановка навчальної задачі у наступному формулюванні: *на основі математичної моделі руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, за допомогою обчислювального експерименту визначити початкові параметри руху м'яча, при яких він має гарантовано влучити до баскетбольного кошика [1].*

Сформульована задача суттєво відрізняється від відомої класичної задачі про рух тіла кинутого під кутом до горизонту [4], зокрема тим, що у реальній ситуації ні тіло (м'яч), ні ціль (баскетбольний кошик) не можна вважати матеріальними точками, оскільки їх розміри вирішальним чином впливають на результат моделювання. Урахування цих факторів дещо ускладнює її порівняно з класичною постановкою, і водночас надає їй практичного змісту. Подібні задачі в різних аспектах неодноразово розглядалися у різних навчальних, методичних і наукових публікаціях. Зауважимо, що існує методика комп'ютерної реалізації даної ММ у середовищі електронних таблиць MS Excel [1], розроблена для навчання основам математичного моделювання студентів молодших курсів. Разом з тим, беручи до уваги те, що використання MS Excel для інженерних розрахунків піддається обґрунтованій критиці [8], однією з доступних альтернатив під час навчання математичному моделюванню студентів старших курсів, а також на другому ступені вищої освіти, є використання СКМ MathCAD у якості середовища комп'ютерної реалізації математичних моделей. Незважаючи на те, що дана СКМ, в основному, орієнтована на студентів і користувачів-непрограмістів, її також широко використовують у складних інженерних проектах, зокрема й для візуалізації результатів математичного моделювання шляхом використання і об'єднання розрізнених обчислень і традиційних мов програмування [6, 11].

До початку роботи в СКМ MathCAD, формалізуємо поставлену вище задачу, використовуючи наступні позначення:

$g$  – прискорення сили тяжіння, м/с<sup>2</sup>;

$x_0, y_0$  – вихідне положення м'яча (початкові координати тіла у момент  $t_0$ ), м;

$x_k, y_k$  – цільова точка (координати центру кошика), м;

$d$  – діаметр м'яча, м;

$D$  – діаметр кошика, м;

$v_0$  – початкова швидкість руху м'яча, м/с;

$\alpha_0$  – початковий кут, під яким кинуте м'яч, градуси;

$v_{0x}, v_{0y}$  – горизонтальна і вертикальна проекції початкової швидкості м'яча на вісі координат, м/с;

$v_x = v_x(t), v_y = v_y(t)$  – горизонтальна і вертикальна проекції швидкості руху м'яча на вісі координат у довільний момент часу  $t$ , м/с;

$v = v(t)$  – швидкість руху м'яча у довільний момент часу  $t$ , м/с;

$\alpha = \alpha(t)$  – кут нахилу швидкості тілі до горизонту у довільний момент часу  $t$ , градуси.

Згідно [1], дану ММ представимо у вигляді задачі Коші [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad \frac{dv_y}{dt} = -g \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad v_x(0) = v_{0x}, \quad v_y(0) = v_{0y} \end{aligned} \quad (1)$$

де  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0, v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0$ .

Як відомо, аналітичний розв'язок моделі (1) має вид [1]:

$$v_x = v_{0x}, v_y = v_{0y} - gt \quad x = x_0 + v_{0x} \cdot t, y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad (2)$$

З (2) безпосередньо одержується:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{і} \quad \alpha = \arctg \frac{v_y}{v_x} \quad (3)$$

На малюнку (рис. 1) представлено чотири позиції м'яча у завершальній фазі його польоту, що демонструють: 1 – недаліт; 2 – переліт; 3 – потрапляння м'яча до кошика на мінімальній відстані від його ближнього краю; 4 – потрапляння м'яча до кошика на мінімальній відстані від його дальнього краю. Варіант потрапляння м'яча до кошика після відбиття його від стінки не враховується, але обговорюється зі студентами, як можливий напрям подальшого удосконалення даної ММ.

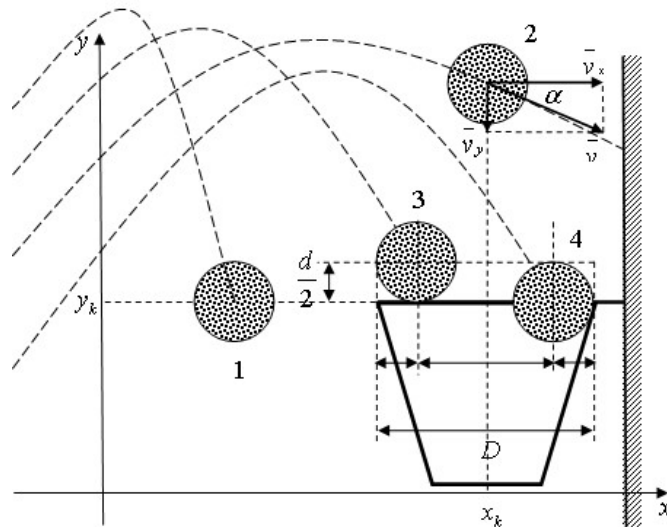


Рис. 1. Варіанти розташування м'яча у завершальній фазі польоту.

Аналіз розташування тіла у позиціях 1-4 (рис. 1) дозволяє сформулювати математичні критерії визначення початкових параметрів  $v_0$  і  $\alpha_0$ , що забезпечують потрапляння м'яча до вказаної цілі при заданих значеннях вхідних параметрів моделі  $g$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $d$  і  $D$ , а саме: момент часу  $t_k$ , коли м'яч потрапляє до баскетбольного кошика, має задовольняти наступні умови [1]:

$$y(t_k) > y_k, v_y(t_k) < 0, |x(t_k) - x_k| \leq \frac{D-d}{2}, |y(t_k) - y_k| \leq \frac{d}{2} \quad (4)$$

Відповідно до (2) розрахункова схема чисельної реалізації ММ (1) набуває виду:

$$v_{xi} = v_{0x}, v_{yi} = v_{0y} - gt_i, x_i = x_0 + v_{0x}t_i, y_i = y_0 + v_{0y}t_i - \frac{gt_i^2}{2} \quad (5)$$

де  $i$  – номери точок фіксації положення тіла (моментів спостереження);

$t_i = i \cdot \Delta t$  – точки фіксації положення тіла (моменти спостереження);

$\Delta t = \frac{t_M}{n}$  – відстань між точками спостереження (проміжки часу між моментами

спостереження);  $t_M$  – час моделювання (час, протягом якого моделюється рух тіла);  $n$  – кількість точок фіксації положення тіла;

$x_i = x(t_i)$ ,  $y_i = y(t_i)$  – координати центру тіла в момент часу  $t_i$ ;

$v_{xi} = v_x(t_i)$ ,  $v_{yi} = v_y(t_i)$  – проекції вектора швидкості тіла на осі координат в момент часу  $t_i$ ;

$v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$ ,  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0$  – проекції вектора початкової швидкості тіла на осі координат.

Крім того, відповідно до (3),

$$v_i = \sqrt{v_{xi}^2 + v_{yi}^2} \text{ – швидкість тіла у момент часу } t_i;$$

$$\alpha_i = \arctg \frac{v_{yi}}{v_{xi}} \text{ кут нахилу швидкості } v_i \text{ до горизонту у момент часу } t_i.$$

Наступний етап обчислювального експерименту полягає у виконанні розрахунків за формулами (5). Далі ці результати використовуються для перевірки виконання умов критеріїв (4) для всіх значень  $t_i \in [0; t_M]$ . За результатами цієї перевірки формулюється змістовий висновок щодо підсумків обчислювального експерименту (у даному випадку: «влучив / не влучив»).

Пропонована послідовність дій з комп'ютерної реалізації даної ММ у середовищі СКМ MathCAD складається з наступних кроків:

1. Підготовчий етап:
  - 1.1. Введення вхідних параметрів моделі;
  - 1.2. Виконання допоміжних розрахунків, перетворень тощо;
  - 1.3. Розрахунок часу моделювання.
2. Основний етап:
  - 2.1. Розрахунок точок моделювання (моментів спостереження);
  - 2.2. Розрахунок проекцій швидкості тіла на осі координат згідно (2);
  - 2.3. Визначення швидкості тіла і кута нахилу вектору швидкості тіла до горизонту згідно (3);
  - 2.4. Розрахунок координат центру м'яча згідно (2);
3. Візуалізація результатів моделювання:
  - 3.1. Побудова графіку траєкторії руху тіла;
  - 3.2. Моделювання розташування фізичної цілі (кошика);
  - 3.3. Візуалізація розташування цілі (кошика).
4. Заключний етап:
  - 4.1. Перевірка виконання критеріїв (4) в усіх точках моделювання;
  - 4.2. Перевірка одночасного виконання критеріїв (4) в області розташування цілі (кошика).

Етапи 1, 2, 4 даного алгоритму є обов'язковими з точки зору функціональності моделі. У той же час, етап 3 є надзвичайно важливим з точки зору ефективності навчання, оскільки він забезпечує умови для кращого сприйняття і розуміння студентами суті математичного моделювання, підсилення їх пізнавального інтересу, мотивації до навчання, розвитку уяви і творчої активності. Візуалізація результатів моделювання конкретизує абстрактні результати моделювання, а також надає процесу навчання ігрової форми, тим самим полегшує засвоєння студентами складних понять і категорій математичного моделювання.

Розглянемо, як наведений вище алгоритм реалізується у середовищі СКМ MathCAD. Слід зауважити, що при введенні вихідних даних необхідно дотримуватися системи вимірювання фізичних величин СИ, при цьому кути зручно вводити у градусах з їх наступним перетворенням у радіани. Також окремо зазначаємо, що вхідні дані моделі вводяться на початку робочого аркушу – до того, як вони будуть використані у наступних розрахунках. Це правило є загальним для правильного користування СКМ MathCAD, і його слід дотримуватися в усіх наступних розрахунках.

На малюнку (рис. 2) представлено вхідні параметри ММ (2) (виділені кольором) і формули, за якими автоматично виконуються необхідні *допоміжні розрахунки*, а саме:

- значення кута  $\alpha_0$  перетворюється у радіани;
- виконується розрахунок проєкцій початкової швидкості тіла  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$  на осі координат;
- визначаються відстані до ближнього та дальнього краю кошика, позначені на малюнку як «bkk» і «dkk» відповідно;
- обчислюється час моделювання  $t_M$ , який потім заокруглюється з надлишком до першого знака після коми.

На тому ж малюнку (рис. 2) представлені результати виконання вказаних допоміжних розрахунків при заданих значеннях вхідних параметрів. Слід наголосити, що виведення результатів проміжних розрахунків не є обов'язковим з точки зору функціональності моделі. Але воно надає можливість контролювати хід обчислень на різних етапах, швидко виявляти і виправляти допущені помилки. Після остаточного відлагодження комп'ютерної моделі, вивід проміжних розрахунків на робочий аркуш MathCAD можна видалити. Такий підхід є загальноприйнятим у традиційному програмуванні.

$$\begin{array}{l}
 g := 9.81 \quad x_0 := 0 \quad y_0 := 1.75 \quad x_k := 6.25 \quad y_k := 3.05 \quad d := 0.24 \quad D := 0.45 \\
 v_0 := 8.8 \quad \alpha_0 := 45 \quad \alpha_D := \alpha_0 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \alpha_D = 0.785 \\
 v_{0x} := v_0 \cdot \cos(\alpha_D) \quad v_{0x} = 6.223 \quad b_{kk} := x_k - \frac{D}{2} \quad b_{kk} = 6.025 \\
 v_{0y} := v_0 \cdot \sin(\alpha_D) \quad v_{0y} = 6.223 \quad d_{kk} := x_k + \frac{D}{2} \quad d_{kk} = 6.475 \\
 t_M := \frac{d_{kk}}{v_{0x}} \quad t_M = 1.041 \quad t_M := \frac{\text{ceil}(t_M \cdot 10)}{10} \quad t_M = 1.1
 \end{array}$$

Рис. 2. Вихідні параметри і допоміжні розрахунки моделі.

Після введення вхідних даних і організації допоміжних розрахунків виконується обчислення проєкцій швидкості тіла на осі координат і координат його центру у послідовні моменти часу  $t_i$  з кроком  $\Delta t$ . Послідовність цих розрахунків представлена на малюнку (рис. 3):

- у першому рядку вводиться момент початку відліку часу моделювання  $t_0$  і значення  $n$ , після цього тут же визначаються  $\Delta t$  і  $t_i$ ;
- у наступному рядку на робочому аркуші MathCAD розміщені основні і допоміжні формули розрахункової схеми (5).

$$\begin{array}{l}
 t_0 := 0 \quad n := 100 \quad \Delta t := \frac{t_M}{n} \quad t_i := t_0, t_0 + \Delta t .. t_M \\
 v_x(t_i) := v_{0x} \\
 v_y(t_i) := v_{0y} - g \cdot t_i \quad \alpha(t_i) := \text{atan}\left(\frac{v_y(t_i)}{v_x(t_i)}\right) \cdot \frac{180}{\pi} \quad v(t_i) := \sqrt{v_x(t_i)^2 + v_y(t_i)^2} \\
 x(t_i) := x_0 + v_{0x} \cdot t_i \\
 y(t_i) := y_0 + v_{0y} \cdot t_i - \frac{g \cdot t_i^2}{2}
 \end{array}$$

Рис. 3. Основні розрахункові формули моделі.

На наступному малюнку (рис. 4) представлено фрагмент результатів розрахунків на робочому аркуші MathCAD, виконаних за основними формулами моделі (рис. 3), при заданих вище значеннях вхідних параметрів моделі (рис. 2).

$t_i =$	$v_x(t_i) =$	$v_y(t_i) =$	$v(t_i) =$	$\alpha(t_i) =$	$x(t_i) =$	$y(t_i) =$
0	6.223	6.223	8.8	45	0	1.75
0.011	6.223	6.115	8.724	44.499	0.068	1.818
0.022	6.223	6.007	8.649	43.989	0.137	1.885
0.033	6.223	5.899	8.574	43.47	0.205	1.95
0.044	6.223	5.791	8.5	42.942	0.274	2.014
0.055	6.223	5.683	8.427	42.405	0.342	2.077
0.066	6.223	5.575	8.355	41.859	0.411	2.139
0.077	6.223	5.467	8.283	41.303	0.479	2.2
0.088	6.223	5.359	8.212	40.737	0.548	2.26
0.099	6.223	5.251	8.142	40.162	0.616	2.318
0.11	6.223	5.143	8.073	39.577	0.684	2.375
0.121	6.223	5.036	8.005	38.981	0.753	2.431
0.132	6.223	4.928	7.937	38.376	0.821	2.486
0.143	6.223	4.82	7.871	37.76	0.89	2.54
0.154	6.223	4.712	7.805	37.134	0.958	2.592
0.165	6.223	4.604	7.741	36.497	1.027	2.643

Рис. 4. Фрагмент результатів розрахунку згідно (5).

Для визначення результатів обчислювального експерименту (рис. 4) необхідно організувати перевірку виконання критеріїв (4). Дана перевірка виконується з використанням логічних функцій MathCAD (рис. 5): наприклад, якщо вимоги критерію K1 задовольняються у момент часу  $t_i$ , то функція  $K1(t_i)$  повертає значення «1», в іншому випадку одержуємо значення «0». Критерії K2–K4 перевіряються аналогічно.

Функція  $Result(t_i)$  перевіряє спільне виконання критеріїв K1–K4: значення  $Result(t_i)=1$  означає, що всі чотири критерії (4) виконуються одночасно, тобто при даних вхідних параметрах моделі м'яч потрапляє до кошика в момент часу  $t_i$ .

Функція  $RESULT(t_i)$  виконує роль своєрідного «індикатора успіху»: вона додає всі значення  $Result(t_i)$  і повертає значення «1», якщо у момент часу  $t_i = t_k$  має місце принаймні один позитивний результат експерименту.

$$K1(t_i) := \text{if}(y(t_i) > y_k, 1, 0)$$

$$K2(t_i) := \text{if}(v_y(t_i) < 0, 1, 0)$$

$$K3(t_i) := \text{if}\left(|x(t_i) - x_k| < \frac{D-d}{2}, 1, 0\right)$$

$$K4(t_i) := \text{if}\left(|y(t_i) - y_k| < \frac{d}{2}, 1, 0\right)$$

$$Result(t_i) := \text{if}(K1(t_i) \wedge K2(t_i) \wedge K3(t_i) \wedge K4(t_i), 1, 0)$$

$$RESULT := \text{if}\left(\sum_{t_i} Result(t_i) > 0, 1, 0\right)$$

Рис. 5. Формули для розрахунку значень критеріїв (4).

На малюнку (рис. 6) наведено результати розрахунку значень критеріїв K1-K4, результат перевірки їх спільного виконання у різні моменти часу  $t_i$  (змінна  $Result$ ), а також підсумковий результат моделювання  $RESULT$ . Значення «1» і «0» для K1-K4 і  $Result$  означають відповідно виконання і невиконання критеріїв (4) у момент часу  $t_i$ . Значення  $RESULT=1$  означає, що при даних значеннях вхідних параметрів моделі м'яч влучно потрапляє до кошика. Фактично,  $RESULT$  – єдиний елемент виводу, що є обов'язковим для



визначення підсумкового результату моделювання. Всі інші елементи, з точки зору функціональності моделі, мають допоміжне (контрольне) значення, і можуть бути видалені без шкоди для функціонування моделі. Водночас, вони є важливими з методичної точки зору для обговорення та інтерпретації результатів моделювання.

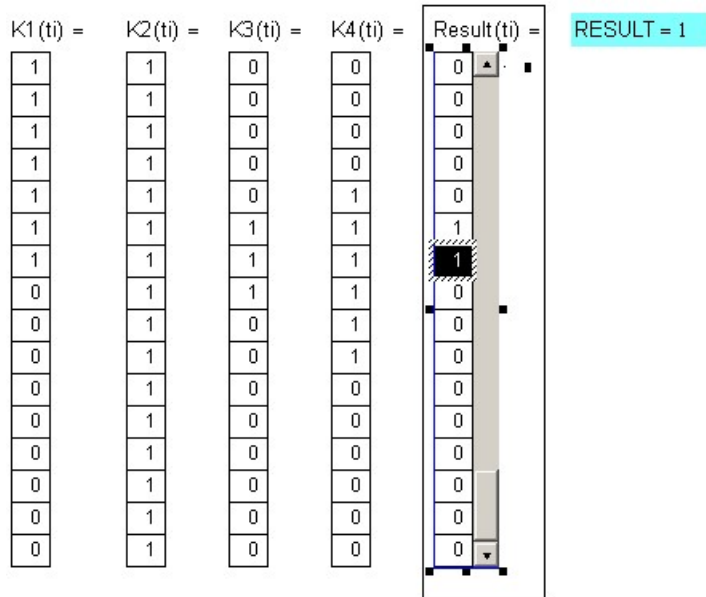


Рис. 5. Перевірка результатів моделювання за критеріями K1-K4.

Реалізована таким чином розрахункова схема (5), дозволяє виконати поставлене навчальне завдання: експериментально визначити значення початкових параметрів  $v_0$  і  $\alpha_0$ , при яких м'яч гарантовано потрапляє у кошик за різних початкових умов (тобто при різних значеннях параметрів  $g$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $d$  і  $D$ ).

На малюнку (рис. 6) представлено графіки траєкторії руху м'яча, а також схематичне зображення баскетбольного кошика, побудоване двома різними способами. Дані зображення є динамічними, оскільки пов'язані з результатами розрахунків (рис. 4). Тобто вони автоматично оновлюються із зміною вхідних параметрів моделі, і таким чином забезпечують можливість візуально оцінювати результати окремих віртуальних дослідів.

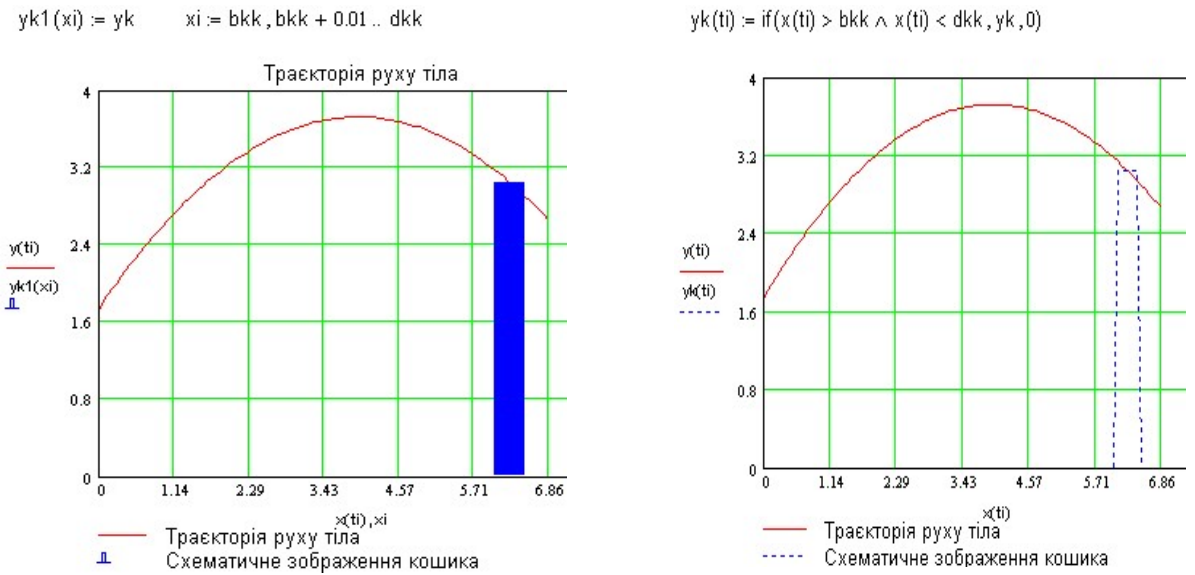


Рис. 6. Графіки траєкторії руху тіла і схематичне зображення кошика.

Також, корисними для аналізу результатів моделювання і формулювання змістових висновків є графіки, представлені на малюнках нижче (рис. 7, 8).

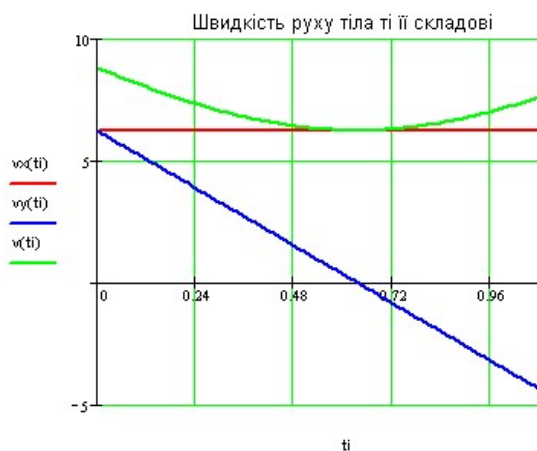


Рис. 7. Швидкість руху тіла та її складові



Рис. 8. Кут нахилу швидкості тіла до горизонту

На підставі побудованої комп'ютерної реалізації ММ у середовищі MathCAD виконується навчальний імітаційний експеримент, що полягає у наступному. Зафіксувавши  $\alpha_0$  та інші параметри моделі (рис. 2), слід систематично і послідовно змінювати вхідне значення  $v_0$ , імітуючи таким чином натурний експеримент. Після кожної окремої спроби візуально перевіряється й аналізується одержаний результат, і відповідним чином корегується вхідне значення  $v_0$  для наступної спроби. Для візуальної перевірки і аналізу використовується графічне представлення (рис. 6), що дозволяє швидко оцінювати значення  $v_0$ , що вірогідно забезпечує «влучний» результат. Точні висновки щодо результатів окремих віртуальних дослідів визначаються за допомогою критеріїв (4) (рис. 5). У такий спосіб, діапазон значень  $v_0$ , що забезпечують бажаний результат моделювання, визначається в обмежені терміни за допомогою скінченної кількості віртуальних дослідів. При цьому, процес проведення експерименту набуває цікавої ігрової форми. Аналогічним чином визначається діапазон «влучних» значень початкового кута  $\alpha_0$  при фіксованому значенні  $v_0$ .

Дана методика комп'ютерної реалізації ММ була апробована нами у 2015 календарному році під час навчання основам математичного моделювання студентів інженерно-технологічного факультету Полтавської державної аграрної академії на першому і другому ступені вищої освіти. За результатами зимової екзаменаційної сесії 2015-2016 н.р. вона показала високу ефективність, що підтверджується об'єктивними показниками успішності навчання. Свідченням підвищення мотивації до вивчення дисципліни є не тільки покращення результатів навчання порівняно з попередніми періодами, а також результати анонімного опитування 75 студентів 3-го курсу (дисципліна «Основи математичного моделювання»), 40 студентів 5-го курсу (дисципліна «Моделювання технологічних процесів і систем») та 22 магістрантів (дисципліна «Математичні методи оптимізації і моделювання технологічних процесів і систем»), серед яких у поточному навчальному році 100% обрали пункт «Мені подобається дисципліна». У даному випадку ріст мотивації до вивчення дисциплін, пов'язаних із математичним моделюванням, ґрунтується на створенні «ситуації успіху» для кожного студента, що забезпечує запропонована нами методика, коли кожен студент гарантовано у відведений навчальний час самостійно за допомогою викладача

одержує результат, що підтверджується його повсякденним досвідом, і може бути перевірений ним безпосередньо.

#### **Висновки та перспективи подальших досліджень.**

1. Навчання основ математичного моделювання є важливою складовою в системі сучасної інженерної освіти, його результати знаходять широке застосування у фаховій діяльності, зокрема, при вивченні інженерно-технологічних об'єктів, явищ і процесів та управління ними.

2. Використання ІКТ під час навчання основам математичного моделювання забезпечує швидке формування первісних уявлень щодо сутності математичного моделювання, створює підґрунтя для набуття комплексу базових вмінь та навичок з дисципліни, опанування відповідними теоретичними знаннями, формування окремих компетенцій, що є важливими складовими професійної компетентності сучасних фахівців.

3. Запропонована методика комп'ютерної реалізації ММ є ефективною для забезпечення засвоєння основних понять математичного моделювання, поглибленого знайомства з можливостями комп'ютерного моделювання технологічних процесів і систем, набуття практичних навичок представлення і реалізації ММ об'єктів, явищ, процесів у вигляді комп'ютерних імітаційних моделей; сприяє формуванню навичок використання ММ і методів оптимізації та прогнозування у процесі пошуку ефективних рішень; забезпечує набуття здатності аналізувати і прогнозувати динаміку досліджуваних технологічних процесів та явищ, а також оцінювати достовірність отриманих результатів.

4. Використання середовища СКМ MathCAD для побудови ММ є доцільним під час навчання основам математичного моделювання студентів інженерних напрямків підготовки на першому і другому ступенях вищої освіти (студенти старших курсів і магістри). Побудова і використання комп'ютерних імітаційних моделей у середовищі MathCAD сприяє кращому засвоєнню основних теоретичних положень, розвитку у студентів логічного мислення, мотивації до вивчення дисципліни, формуванню навичок дослідницької діяльності.

5. Побудована ММ дозволяє на лабораторно-практичних заняттях проводити різноманітні експериментальні дослідження, змінюючи вихідні параметри моделі, такі як: початкове положення тіла, розташування цілі, геометричні розміри тіла та цілі, початкова швидкість і кут, а також прискорення вільного падіння; аналізувати механічний рух тіла, кинутого під кутом до горизонту; на основі створеної комп'ютерної імітаційної моделі розв'язувати складні задачі практичного змісту; досліджувати механічний рух у гіпотетичних умовах, які складно реалізувати на практиці.

6. Комп'ютерна модель процесу механічного руху тіла у полі сили тяжіння, розглянута у даній статті, може служити змістовим прикладом для вступу у вивчення основ математичного моделювання, оскільки вона поєднує у собі елементи математичного моделювання, комп'ютерного моделювання, імітаційного моделювання та обчислювального експерименту, що дозволяє наочно проілюструвати ці поняття, спирається на необхідний мінімальний рівень підготовки з дисциплін «Вища математика», «Фізика», «Комп'ютерна техніка».

7. Комп'ютерна реалізація ММ, представленої у даній статті, не враховує ефекти, пов'язані із рухом тіла у щільному середовищі, що суттєво впливають на результати випробування, тому дана ММ потребує подальшого дослідження, удосконалення та розробки відповідної методики її вивчення.

#### **СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Горда І. М. Комп'ютерне моделювання процесу механічного руху тіла засобами MS Excel / І. М. Горда, Л. О. Флегантов // Інформаційні технології і засоби навчання: електронне фахове видання [Електронний ресурс] / Ін-т інформ. технологій і засобів навчання НАПН України, Ун-т менеджменту освіти НАПН України; гол. ред.: В.Ю. Биков. – 2015. – № 3 (47). – Режим доступу <http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/1245>. – Заголовок з екрану.

2. Дубовик В. П. Вища математика : [навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл.] / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – 4-те вид. – К. : Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
3. Захарченко В. М. Розроблення освітніх програм. Методичні рекомендації / В. М. Захарченко, В. І. Луговий, Ю. М. Рашкевич, Ж. В. Таланова / За ред. В. Г. Кременя. – К.: ДП «НВЦ «Пріоритети», 2014. – 120 с.
4. Калапуша Л. Р. Комп'ютерне моделювання фізичних явищ і процесів: [навч. посіб.] / Л. Р. Калапуша, В. П. Муляр, А. А. Федонюк ; Волинськ. нац. ун-т ім. Л. Українки. – Луцьк : Вежа, 2007. – 190 с.
5. Клочко В. І. Вища математика. Звичайні диференціальні рівняння (з комп'ютерною підтримкою) : [навчальний посібник] / В. І. Клочко, З. В. Бондаренко. – Вінниця, 2013. – 248 с.
6. Кундрат А. М. Науково-технічні обчислення засобами MathCAD та MS Excel : [навч. посібник] / А. М. Кундрат, М. М. Кундрат. – Рівне : НУВГП, 2014. – 252 с.
7. Липкан В. А. Інформаційна безпека України в умовах євроінтеграції : [навч. посібник] / В. А. Липкан, Ю. Є. Максименко, В. М. Желіховський. – К.: КНТ, 2006. – 280 с.
8. Орвис В. EXCEL для ученых, инженеров и студентов : [пер. с англ.] / Вильям Орвис. – К. : Юниор, 1999. – 528 с.
9. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : [монографія] / С. А. Раков. – Х. : Факт, 2005. – 360 с.
10. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики : [монографія] / Ю. В. Триус. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 400 с.
11. Ясев О. Г. Моделювання динаміки технічних систем з використанням пакета програм MathCAD : [навч. посібник (рос. мовою)] / О. Г. Ясев, В. Г. Расчубкін. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2011. – 76 с.

#### **REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)**

1. Gorda, I. M., & Flegantov, L. O. (2015). Komp'juterne modeljuvannja procesu mehanichnogo ruhu tila zasobami MS Excel. Informacijni tehnologii i zasobi navchannja: elektronne fahove vidannja.
2. Dubovik, V. P., & Jurik, I. I. (2013). Vishha matematika. Kiiv: Ignateks-Ukraina.
3. Zaharchenko, V. M., Lugovij, V. I., Rashkevich, Ju. M., & Talanova, Zh. V. (2014). Rozroblennja osvitnih program. Metodichni rekomendacii. Kiiv: DP «NVC «Prioriteti».
4. Kalapusha, L. R., Muljar, V. P., & Fedonjuk, A. A. (2007). Komp'juterne modeljuvannja fizichnih javishh i procesiv. Luc'k: Vezha.
5. Klochko, V. I., & Bondarenko, Z. V. (2013). Vishha matematika. Zvichajni diferencjal'ni rivnjannja (z komp'juternoju pidtrimkoju). Vinnicja.
6. Kundrat, A. M., & Kundrat, M. M. (2014). Naukovo-tehnichni obchislennja zasobami MathCAD ta MS Excel. Rivne: NUVGP.
7. Lipkan, V. A., Maksimenko, Ju. E., & Zhelihovs'kij, V. M. (2006). Informacijna bezpeka Ukraini v umovah evrointegracii. Kiiv: KNT.
8. Orvis, V. (1999). EXCEL dlja uchenyh, inzhenerov i studentov. Kiiv: Junior.
9. Rakov, S. A. (2005). Matematichna osvita: kompetentnisnij pidhid z vikoristannjam IKT : [monografija]. Harkiv: Fakt.
10. Trius, Ju. V. (2005). Komp'juterno-orientovani metodichni sistemi navchannja matematiki : [monografija]. Cherkasi: Brama-Ukraina.
11. Jasev, O. G., & Raschubkin, V. G. (2011). Modeljuvannja dinamiki tehnicnih sistem z vikoristannjam paketa program MathCAD : [navch. posibnik (ros. movoju)]. Dnipropetrovs'k: NMetAU.

Стаття надійшла до редакції 15.12.16

**Leonid Flehantov, Anatolii Antonets**

**Poltava State Agrarian Academy, Poltava, Ukraine**

#### **COMPUTER SIMULATION THE MECHANICAL MOVEMENT BODY BY MEANS OF MATHCAD**

Here considered the technique of using computer mathematics system MathCAD for computer implementation of mathematical model of the mechanical motion of the physical body

thrown at an angle to the horizon, and its use for educational computer simulation experiment in teaching the fundamentals of mathematical modeling. The advantages of MathCAD as environment of implementation mathematical models in the second stage of higher education are noted. It describes the creation the computer simulation model that allows you to comprehensively analyze the process of mechanical movement of the body, changing the input parameters of the model: the acceleration of gravity, the initial and final position of the body, the initial velocity and angle, the geometric dimensions of the body and goals. The technique aimed at the effective assimilation of basic knowledge and skills of students on the basics of mathematical modeling, it provides an opportunity to better master the basic theoretical principles of mathematical modeling and related disciplines, promotes logical thinking development of students, their motivation to learn discipline, improves cognitive interest, forms skills research activities than creating conditions for the effective formation of professional competence of future specialists.

**Keywords:** using MathCAD; computer simulation; computer modeling; mathematical model; math modeling; methods of teaching; the mechanical movement of the body; computer experiment; systems of computer mathematics; MathCAD

**Флегантов Л. А., Антоненц А. В.**

**Полтавская государственная аграрная академия, Полтава, Украина**

### **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА СРЕДСТВАМИ MATHCAD**

Рассматривается применение системы компьютерной математики MathCAD для компьютерной реализации математической модели процесса механического движения физического тела, брошенного под углом к горизонту, и ее использование для проведения учебного имитационного вычислительного эксперимента при обучении основам математического моделирования. Отмечены преимущества системы MathCAD, как среды реализации учебных математических моделей на второй ступени высшего образования. Описано создание учебной компьютерной имитационной модели, которая позволяет всесторонне анализировать процесс механического движения тела, меняя входные параметры модели: ускорение силы тяжести, начальное и конечное положение тела, начальную скорость и угол, геометрические размеры тела и цели. Использование методики нацелено на эффективное усвоение базовых знаний, умений и навыков студентов по основам математического моделирования, предоставляет возможности лучшего овладения основными теоретическими положениями математического моделирования и родственных дисциплин, способствует развитию логического мышления студентов, их мотивации к изучению дисциплины, повышает познавательный интерес, заинтересованность, формирует навыки научно-исследовательской деятельности, чем создает условия для эффективного формирования профессиональных компетенций будущих специалистов.

**Ключевые слова:** использование MathCAD; имитационное моделирование; компьютерное моделирование; математическая модель; математическое моделирование; методика обучения; механическое движение тела; вычислительный эксперимент, системы компьютерной математики, MathCAD.