УДК 004.021 **Черниш Я.М.**

ЗАДАЧА ПРО НАЙКОРОТШІ ШЛЯХИ У ОРІЄНТОВАНОМУ ГРАФІ

У статті розглядаються завдання про найкоротші шляхи у графі для виконавця з обмеженими ресурсами.

Ключові слова: завдання про найкоротші шляхи у графі, алгоритм Флойда, алгоритм Дейкстри, ресурс виконавця.

The article considers the problem of shortest paths in a graph for an executor with limited resources.

Key words: task on the shortest paths in a graph, Floyd's algorithm, Dijkstra's algorithm, resource of the executor.

Завдання щодо знаходження найкоротших шляхів в орграфі широко відоме та досліджується протягом багатьох років. Воно є складовою частиною навчання для студентів інформаційних спеціальностей у всьому світі, зокрема в курсах дискретної математики у університетах.

Для вирішення цього завдання існують різні алгоритми, такі як алгоритм Е. Дейкстри для одного варіанта задачі та алгоритм Р. Флойда (відомий як Флойда-Уоршела або Роя-Флойда) для іншого варіанта. Поряд із цими алгоритмами також розглядають окремі випадки та їх модифікації. Наприклад, алгоритм транзитивного замикання орграфа є одним з таких варіантів.

Крім того, іноді задачу про найкоротші шляхи можна інтерпретувати як задачу перемноження матриць над замкнутими півкільцями. Це відкриває можливість застосовувати ефективні алгоритми перемноження матриць для її вирішення.

Проте різні узагальнення задачі про найкоротші шляхи рідко розглядаються у дослідженнях. Мета цієї роботи полягає в тому, щоб привернути увагу науковців і викладачів до одного з природних узагальнень цієї задачі.

Наше узагальнення полягає в тому, що ми розглядаємо виконавця алгоритму (мандрівника), який має обмежені ресурси, і витрачає їх в дорозі. Ці ресурси можуть бути поповнені в деяких вершинах графа. Нашою метою є знайти найкоротший шлях, по якому виконавець може досягти цільової вершини, правильно використовуючи та поповнюючи свої ресурси.

У роботі ми розглядаємо узагальнення алгоритмів Флойда і Дейкстри для випадків обмежених ресурсів та кількох ресурсів. Нижче наведено формулювання та процедуру алгоритму Флойда для позитивних цін шляхів:

Дано орієнтований граф , , ребра якого відзначені позитивними числами , званими вартістю. Вартість представлені матрицею . Тож виходить. Якщо ребро у графі відсутнє, поставимо . Поставимо також . Вартість шляху = у графі називається сума .

Зауважимо, що, оскільки кількість ланок простого шляху не перевищує , вартість будь-якого простого шляху, у тому числі й шляху найменшої вартості (найкоротшого шляху), менше, ніж. Оскільки два ребра графа можуть бути з'єднані різними шляхами, серед таких шляхів існує шлях найменшої вартості. У варіанті завдання потрібно знайти найменші шляхи для всіх можливих пар вершин . Це завдання вирішує алгоритм Р. Флойда, наведений у процедурі Floyd. Вартість таких шляхів – суть елементи результату процедури - матриці . Зазначимо, що вся інформація про графу в присутності в матриці , а інформація про найкоротші шляхи – в матриці . Зокрема, якщо вершини графа з'єднані деяким шляхом, . Якщо ж шлях з в відсутній - .

```
Const Size = 10000;
Type
  Table = Array[1..Size, 1..Size] of Real;
Procedure Floyd(n:Integer, var C, A, D: Table);
Begin
  A:=C;
  For i:=1 to n do
    For j:=1 to n do D[i,j]:=0;
  For k:=1 to n do
    For i:=1 to n do
     For j:=1 to n do
       If A[i,k]+C[k,j]<A[i,j]Then Begin
              A[i,j]:=A[i,k]+C[k,j]; D[i,j]:=k
       End
End;
```

У матриці представлені всі найкоротші шляхи наступним чином: якщо останнє ребро найкоротшого шляху з доє , . Легко бачити, що найкоротший шлях з до може бути вилучений за лінійний час.

У [1] класичний алгоритм Флойда зводиться до алгоритму перемноження матриць у замкнутому півкільці з операцією додавання та операцією множення . У [1] показано, що, де

. [1]

У цьому формулюванні алгоритм Флойда можна представити одним циклом:

A: = C;
For i := 1 **to** n **do** A := CAC

У [1] також показано, що операція замикання, визначена в [1], за тимчасовою складністю еквівалентна операції перемноження двох матриць.

Ресурси виконавця. Наведемо приклад однієї з очевидних додатків алгоритму Флойда. Нехай граф представляє мережу автомобільних доріг деякого регіону, а вартості ребер – суть довжини автомобільних доріг, які безпосередньо з'єднують населені пункти – вершини , виражені за кілометри.

Виконавець алгоритму – автомобіль. Його основний ресурс - запас палива , виражений у кілометрах шляху. Саме автомобіль може проїхати км на своєму запасі палива. У вершинах підмножини (тобто деяких населених пунктах) обладнано заправки паливом. У цих вершинах можна повністю заправитись. На початку автопробігу автомобіль заправлений повністю незалежно від того, у якій вершині він знаходиться. У задачі потрібно знайти найкоротші шляхи в графі за умови, що відстані між послідовно розташованими вершинами підмножини на цьому шляху не перевищує .

Узагальнення: Завдання, яке аналізується у цій статті, входить до категорії задач оптимізації. В цьому контексті добре відомі такі завдання, як задача лінійного програмування або, в загальному вигляді, математичне програмування. У даній задачі є чітка система обмежень і визначений критерій оптимальності рішення. Тому виникає питання, чи можливо звести цю задачу до одного з відомих завдань оптимізації.

Аналогічні узагальнення можуть бути застосовані і до інших графових задач. При цьому схема розв'язання, яка наведена в цій статті, може бути використана і для задачі комівояжера. Очевидно, класичні алгоритми Флойда і Дейкстри відіграють важливу роль як базові алгоритми у різних формулюваннях задачі про найкоротші шляхи.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Dijkstra E. W. A note on two problems in connexion with graphs (англ.) // Numerische Mathematik / F. Brezzi — Springer Science+Business Media, 1959. — Vol. 1, Iss. 1. — P. 269—271.

2. Томас Х. Кормен, Чарльз И. Лейзерсон, Рональд Л. Ривест, Клиффорд Штайн. Алгоритмы: построение и анализ = Introduction to Algorithms. — 2-е изд. — М.: «Вильямс», 2006. — С. 1296.

3. Левитин А. В. Глава 9. Жадные методы: Алгоритм Дейкстры // Алгоритмы. Введение в разработку и анализ — М.: Вильямс, 2006. — С. 189—195. — 576 с.

Науковий керівник доктор фізико-математичних наук, професор Львов М.С.