Міністерство освіти і науки України

Херсонський державний університет

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

РОЛЬ АЛГЕБРАЇЧНОГО АПАРАТУ У РОЗВИВАЛЬНИХ ІГРАХ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала: студентка 2-го курсу, 221М групи

Спеціальності: 014 Середня освіта

Спеціалізація: 014.04 Математика

Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти

Коршун Юлія Костянтинівна

Керівник доктор фізико-математичних наук, професор Савченко Олександр Григорович

Херсон – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми даної роботи полягає в тому, що алгебраїчний апарат використовується практично у всіх аспектах нашого повсякденного життя – на роботі, вдома, на відпустці, а особливо під час уроку, коли навчання проходить у формі розвивальних ігор. Які є одним із найефективніших засобів представлення складного математичного матеріалу. У процесі навчання ігри можна розв'язувати опираючись на логіку чи на досвід із власного життя, але не завжди вона даватиме справжній правильний результат. Його ми можемо досягти використовуючи алгебраїчний апарат, який є незамінним елементом як в алгебрі, геометрії так і в інших навчальних природничо-математичних дисциплінах.

У нашій роботі особлива увага приділяється ролі алгебраїчного апарату у розвивальних іграх для старшої школи. Дослідження згідно нашої теми не проводив жоден науковець.

Зв'язок роботи з науковими темами, планами, програмами.

Тема роботи пов'язана із навчальною програмою з алгебри та геометрії 10-11 класу, видана МОН, а також із напрямом наукових досліджень, що здійснюють на кафедрі алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського Державного Університету.

Нашою головною метою є дослідження методичних особливостей використання алгебраїчного апарату у розвивальних іграх та їх приклади.

Згідно мети, робота базується на вирішенні трьох поставлених **завдань**:

1. Проаналізувати теоретичні основи використання алгебраїчного апарату та методів.

2. Визначити функції, структуру та методичне забезпечення розвивальних ігор у старшій школі

3. Розглянути та проаналізувати приклади розвивальних ігор з використанням алгебраїчного апарату для 10-11 класу.

Об'єктом даної роботи виступають розвивальні ігри в математиці

Предмет: алгебраїчний апарат у розвивальних іграх.

Методи дослідження. При написанні дипломної роботи ми використовували наступні методи:

- моделювання – під час створення схем «функції розвиваючої гри», «пакування куль у вигляді гратки» та «найщільніше пакуваня куль у двовимірному просторі»;
- розрахунку – при вирішенні розвиваючих ігор шляхом обчислення;
- метод синтезу зібраного матеріалу;
- аналізу – при ослідженні теоретичних аспектів алгебраїчного апарату, підведення підсумків;
- метод формалізаці – за допомогою якого функції розвиваючої гри та розвивальні ігри представлені у вигляді схем.

Наукова новизна отриманих результатів цілком виправдана, адже основний і найважливіший елемент – алгебраїчний апарат, у розвиваючих іграх не досліджений не одним науковцем.

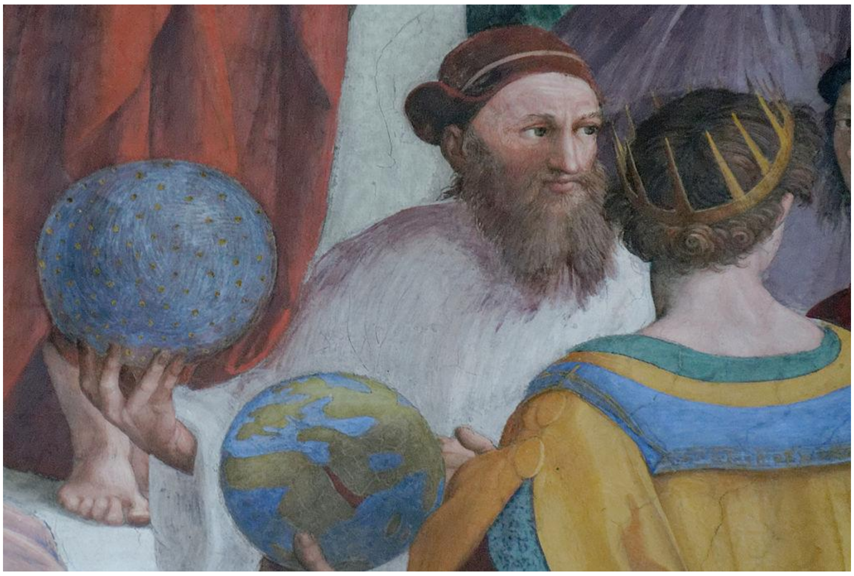
Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що вони можуть бути використані в середніх навчальних закладах у старшій школі, а саме під час вивчення курсів алгебри та геометрії.

Апробація результатів дослідження. Дане дослідження викладене в електронному альманасі «Магістерські студії» у XXIII випуску ХДУ на тему «Роль алгебраїчного апарату у розвиваючих іграх».

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИКОРИСТАННЯ АЛГЕБРАЇЧНОГО АПАРАТУ ТА АЛГЕБРАЇЧНИХ МЕТОДІВ

1.1. **Історія закладення методів і апарату в основу математичної науки**

Алгебраїчні методи та апарат в цілому зародився ще в часи коли математики не існувало. Поєднання геометричних форм та побудов з обчисленням виникло у другому столітті до нашої ери. Коли Гіппарх уперше використав алгебраїчний апарат (через систему координат, зобразив географічне розташування певних об'єктів на Землі) [1].



«Рисунок 1.1. Гіппарх зліва тримає глобус зірок (приблизно 190 - 120 роки до н.е.)»

У 14 столітті ідею Гіппарха розкрив детально Н. Орем. Він всю площину, яку мав розбив на клітинки (ідентичним є приклад розбиття зошита). Об'єкти , які були досліджені на той момент, він наніс на площину через задання положення по широті і довготі. Саме в цей момент апарат алгебри почав активно використовувався в географічних науках. Але більш конкретно ідеї були сформовані згодом іншими математиками, а взаємозв'язок апарату алгебри з геометричними фігурами став ще тіснішим [16].

«Рисунок 1.2. Ніколя Орем (близько 1323 – 1392 роки)»

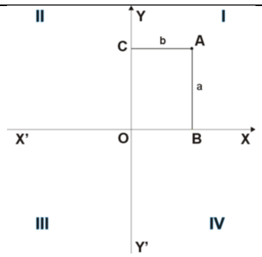
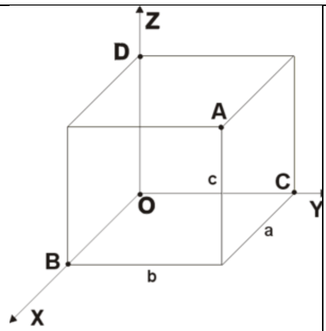
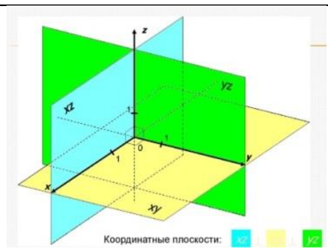
Алгебраїчні методи продовжували використовуватись в математиці в 17 столітті завдяки Рене Декарту, коли йому вдалося знайти зв'язок між системою координат та алгебраїчним апаратом. Над цією роботою працював і П'єр Ферм, та навіть видав свою роботу на рік раніше. Ці вчені змогли через систему координат довести перехід від точки до числа, від ліній до рівнянь, і найголовніше від геометричних побудов до алгебраїчних розрахунків. Слава дісталась Декарту через те, що він увів простіший метод розрахунків через буквену символіку [16].

«Рисунок 1.3. Рене Декарт (1596 – 1650)»

Таким чином, виникла альтернатива геометричної побудови та алгебраїчних дій, де останнє спрощує процес моделювання на обчислення [2]. Його координатна система має такий вигляд:

«Таблиця 1.1»

Види систем координат Декарта

		
Прямокутна система координат на площині (двовимірний простір).	Прямокутна система координат у просторі (тривимірний простір).	Прямокутна система координат у просторі (багатовимірний простір).

Алгебраїчні методи є однією із складових алгебраїчного апарату, і широко використовувались і застосовуються зараз для вирішення найскладніших завдань [26]. Але головним підґрунтям апарату стало введення, а особливо діагностика та конкретизація Декартом алгебраїчної символіки, яка користується й до наших днів, та ввійшла в основу методів [16].

Він характеризується точністю та всеосяжністю, адже дозволяє вирішити завдання чітко, конкретно та з можливістю його перевірки в інтернет – джерелах [26]. Тому що, зараз дуже активно поширюється дистанційне навчання та учні все більше розвиваються в сфері технологій, де на даний момент безперешкодно знаходять задані алгебраїчні дії. Це дає змогу більш детально вивчити процес обчислення. З геометричним моделюванням буде набагато складніше, тому що, більшість додатків та сайтів не зводять побудову до загальних алгоритмів.

1.2. Визначальна роль алгебраїчних методів в іграх

Мета методу забезпечує зведення всієї побудови до рівняння, з використанням формул. Для обчислення даних у розвивальних іграх користуються такими загальноприйнятими формулами як:

1) $x = a \pm b$;
2) $x = \frac{p}{b} a, p, q \in \mathbb{N}$;
3) $x = \frac{ab}{c}, \frac{x}{a} = \frac{b}{c}$;
4) $x = \sqrt{ab}$;
5) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$;
6) $x = \sqrt{a^2 - b^2}, a > b$.

Згідно поданих вище формул, під x розуміється довжина відрізка (об’єкту), який обчислюється, а під буквами латинського алфавіту a, b, c – l заданих фрагментів [2].

Використовуючи алгебраїчні методи слід дотримуватись основних правил наведених в таблиці 1.2 [2].

«Таблиця 1.2»

Правила використання алгебраїчних методів

№	Назва	Характеристика
1.	Чітке визначення	Починаючи розв’язання

«Продовження табл. 1.2»

	невідомих змінних	розвиваючої гри, намагайтесь з точністю сформулювати дано (дані умови гри), щоб зрозуміти, що треба
		знайти те що ви вже маєте. Після формулювання умови, треба перевірити її правильність, щоб не допустити алгебраїчних помилок.
2.	Використання рівнянь та системи рівнянь	Якщо у розв'язку гри існує кілька невідомих, зазвичай, можливе використання системи рівнянь, адже практика показує, що таким способом можна досягти достовірніших і найточніших результатів.
3.	Ознаки операції	Тут треба бути особливо обережним, адже в розрахунках наявні помилки через некоректне тлумачення знаків. Треба перевіряти кожну дію, щоб отримати правильну відповідь, та скоротити час, що може бути використаним на розрахунок з помилками.
4.	Використання алгоритмів	Щоб скоротити час на розв'язок гри, треба ретельніше підібрати певний алгоритм. В алгебраїчній системі подана велика їх кількість, що дозволяє з точність знайти правильне рішення. Найцікавішим є те, що алгоритмами

«Продовження табл. 1.2»

		користувались ще у VII столітті. Дослідники і науковці в цій сфері стверджують, що алгоритми зародилися в мусульманському суспільстві. А саме слово «алгоритм» вивівся із ім’я відомого араба-математика Аль-Джаба-аль-мукабалла і в цьому є одна із його заслуг.
5.	Перевірка	Після розв’язку гри слід детально перевірити правильність обчислення, щоб підвищити точність дій.
6.	Послідовність дій	Багато хто намагається все прорахувати відразу та перейти до розв’язку, але доречнішим буде поступове вирішення умови. Можливе розбиття дій на етапи - це не допустить прорахунків.

Отже, у нашій роботі цей метод використовується в геометричних розвивальних іграх, під час розв’язку яких ми основну увагу приділяємо не процесам побудови моделі, а з діями, рівняннями, формулами складеними на основі алгебраїчного апарату. Таким чином, процес розрахунків зводить до мінімуму час роботи, кількість розв’язків гри, а найголовніше цей матеріал сприймається всіма учасниками навчального процесу.

1.3. Сутність алгебраїчного апарату у розвивальних іграх

У нашій роботі під алгебраїчним апаратом розуміється комплекс алгебраїчних понять і методів, які можна використати у розвивальних іграх для досягнення мети гри [19].

Мета алгебраїчного апарату у розвивальних іграх зводиться до того, щоб обчислення відомих даних гри полегшувало геометричні дії. Цей процес характеризується заміною геометричного моделювання на алгебраїчний розрахунок, при якому не виконується побудова всіх фрагментів, а зображується лише одна чи кілька фігур.

Розв’язок гри із вмістом алгебраїчного апарату є тоді, і лише тоді, коли обчислені кінцеві і остаточні дані, які надалі забезпечать добудову всієї моделі гри. В особливих випадках, коли учнями важко засвоюється матеріал, можлива кінцева добудова всієї фігури для розвинення зорової, рухової, моторної пам’яті [23].

Щоб виконати мету розвиваючої гри треба слідувати наступним її етапам:

1) Запис величин умови гри;
2) Початкове часткове моделювання розвиваючої гри у двовимірному просторі (навіть при наявності реальної моделі гри, цей процес буде актуальним для наступних етапів);
3) Відображення даних на малюнку-схемі (зробленого на першому етапі);
4) Добудова на схемі фрагментів, котрих буде достатньо для обчислення повної моделі;
5) Підбір формул для обчислення;
6) Складання із отриманих даних рівняння, чи цілої системи;
7) Розв’язування системи чи рівняння;
8) Дослід отриманих результатів;
9) Виконання мети гри на реальній моделі чи малюнку – схемі;

10) Повна схематизація гри (цей процес є доречним для детальнішого дослідження гри для дітей, котрим важче дається матеріал) [23].

На основі дослідженої літератури (інформації про розвиваючі ігри та методики навчання через алгебраїчний апарат) можна подати таблицю методики навчання дітей розвиваючим іграм з використанням алгебраїчного апарату (таблиця 2) [23].

«Таблиця 1.3»

Реалізація алгебраїчного апарату у розвивальних іграх

Етапи	Методика навчання учнів
1. Налаштування	Для початку, знайомимо учнів із поняттями «гра», «алгебраїчний апарат» (тут треба бути особливо обережним, адже алгебраїчний апарат має досить глобальні визначення. Нам треба ознайомитись лише з тими поняттями, що будуть використовуватись в подальших запропонованих іграх вчителем).
2. Знайомство	Знайомимо, безпосередньо, із різноманітними розвиваючими іграми та визначаємо ступінь обізнаності учнями даної теми.
3. Формування умінь і навичок	Формуємо уміння аналізувати умову гри, знаходити способи

«Продовження табл. 1.3»

	розв'язку, логічного розв'язання гри, варіативність. Проводимо моделювання гри у двовимірному просторі, зазначаємо відомі дані, користуємось етапами здобуття мети гри (зазначені вище у нашій роботі).

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ РОЗВИВАЛЬНИМИ ІГРАМИ НАВЧАЛЬНОЇ ПРОГРАМИ З МАТЕМАТИКИ СТАРШОЇ ШКОЛИ

Дослідники стверджують, що гра – це базис соціальної взаємодії, особливо цінною вона є в процесі формування майбутнього юнацтва, покоління. Розвиваючі ігри є ключем у вихованні молоді, де під час процесу реалізації використовуються активні методи учіння.

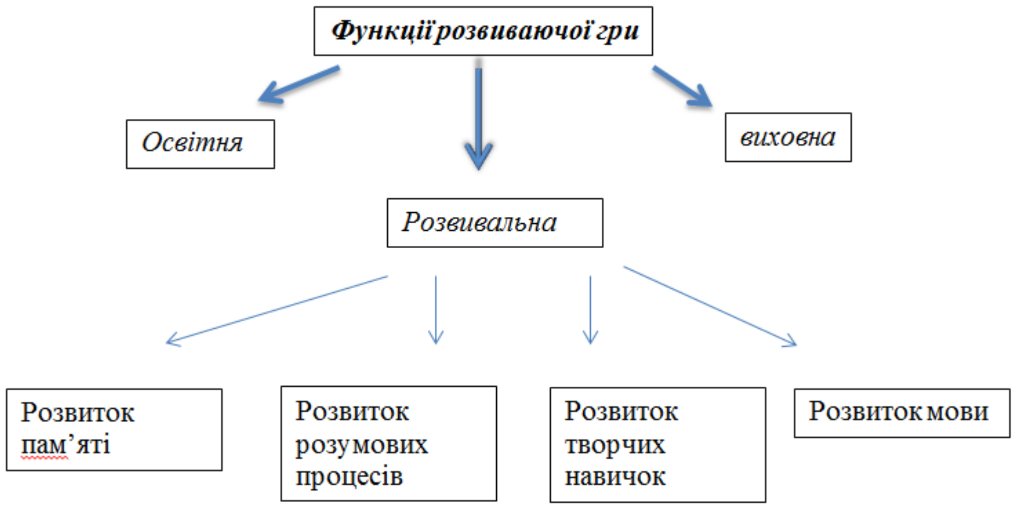
На сьогодні, середні освітні навчальні заклади не мають в своїх методиках викладання матеріалів, які б розвивали індивідуальні здібності, кожного окремо взятого, учня. Не вистачає інновацій, гуманного підходу, особливо у старших класах [24].

У методиках пропонованих МОН, не вистачає ігрових форм навчання. Спостерігається лише поступове перевантаження швидко прохідним матеріалом, де основну увагу приділяють кількості пройденого матеріалу, а не процесу його засвоєння. Це, в свою чергу, не стимулює учнів до навчання, а лише погіршує його якість. Тому перед педагогами постає завдання самостійно впроваджувати в систему викладу матеріалу ігрових форм навчання, задля підвищення цікавості до певної теми уроку, та найлегшого засвоєння знань.

Як говорив В.О. Сухомлинський навчати треба граючись. Адже гра стимулює до пізнання, заохочує до цікавості, активності, під час процесу мозок розвивається, вирішує питання самостійно, а не просто сприймає суху інформацію, чи намагається дати відповідь завченими, незрозумілими для себе, визначеннями, формулами.

Під час гейміфікації учні, як студенти на практиці, засвоюють матеріал відразу на місті в певний момент часу. Самостійний пошук відповіді, розв’язання гри – це шлях до активізації роботи мозку індивіда. Цей процес веде до найкращого розуміння теми уроку та залишить свій слід надовго у пам’яті. Якщо вчителю вдасться зацікавити своїх учнів грою, то незабаром їх цікавитиме матеріал уроку (тематика, мета). Ця форма навчання привертає до себе увагу швидше і якісніше, ніж інші [12].

Гра як і будь-яка інша форма навчання в процесі освітньої діяльності виконує такі функції:



«Рисунок 2.1. Функції розвиваючої гри» [25].

Якщо матеріал гри надається безпосередньо у школі, чи будь-якому іншому середньому освітньому закладі, тоді старання дитини дещо обмежуються зусиллями однокласників, адже є умова контролю та розрахунку наперед своїх дій. Можуть виникати проблеми у тих, кому для зрозуміння потребується дещо більше часу, а так як є інші гравці, то розв’язання може випереджати власні зусилля або ж навпаки. Якщо навчання здійснюється безпосередньо дистанційно, тоді можна гру подати на розв’язання кожному окремо, що підвищить розумову активність у всіх дітей.

Розвивальні ігри підпорядковуються своїм правилам, саме це наштовхує учнів на свідоме мислення. Цей процес аналогічний роботі дорослої людини та відрізняється своєю результативністю. Кожна гра має свою структуру [29]. Представимо її для розвивальних ігор у вигляді таблиці:

«Таблиця 2.1»

Структура розвивальної гри

№	Структурний компонент	Характеристика
1.	Ігровий задум	Це ігрова ситуація, якій підпорядковується учень, вважає її реальною.
2.	Ігрові дії	Дії, котрі пропонуються учням задля реалізації мети гри (уроку).
3.	Ігрові завдання	Завдання, які визначають та впливають на пункт №2 (ігрові дії).
4.	Ігровий матеріал	Матеріал, що має дуже важливе значення та спонукає учнів до дії, забезпечує здійснення задуму гри.
5.	Ігрові правила	Правила, що встановлюються її автором, це можуть бути правила дій та спілкування та інше.

Щоб підготуватись до проведення ігрових матеріалів слід врахувати певні вимоги, такі як:

1) Тематика гри співставна з НП;
2) Матеріал гри має відповідати віковим характеристикам учнів з врахуванням індивідуальних особливостей кожного;
3) Важливість та актуальність гри для учасників та виконавця;
4) «Золота серединка» між легкість і складністю матералу;
5) Урізноманітнення розвивальних ігор;
6) Безпосередній вплив на ситуативність і сюжетність гри;
7) Розрахунок точності у наданні правил;
8) Залучення та надання матеріалу всім учням даного класу;
9) Контроль за якісним самостійним виконанням завдань гри;
10) Розумні та справедливі критерії оцінювання;
11) Представлення та оголошення оцінок, які стануть ще більшим стимулом для подальший навчально-ігрових уроках [25].

Кожний процес організацій розвивальних ігор ставить перед вчителем певні проблеми, тому, щоб звести їх до мінімуму необхідно для початку дати відповіді на такі питання:

«Таблиця 2.2»

Питання для підготовки до організації розвивальних ігор

№	Питання
1.	Яка мета?
2.	Які навички та вміння потрібні для оволодіння тематики уроку?
	Чи володіють учні певним набором знань для проведення гри?
	Скільки учнів прийматимуть участь?

«Продовження табл. 2.2»

	Якими матеріалами користуватись?
	Як представити у найкоротший термін правила гри?
	Скільки часу займатиме гра на уроці?
	Як залучити весь колектив до гри?
	Як запобігти конфліктним ситуаціям?
	Які зміни внести в методику викладу?
	Якими мають бути висновки?

Як правомірно стверджував Б.П.Нікітін розвиваючі ігри, це не просто забава, форма навчання, щоб гра мала свій сенс педагогам слід дотримуватись «золотих» правил:

1) Гра повинна давати емоції, почуття щастя і радості;

2) В процесі ігрових дій треба зацікавити, але не перенапружувати.

3) «Тримайте себе в руках», всі мають право помилятися, не виражайте негативні емоції, не знищуйте емоції учнів;

4) Гра – це творчість, дайте можливість учням самостійно виразити свої думки, діти висновку;

5) Перед тим як інтерпретувати заняття, пройдіть його самостійно, зафіксуйте час пройденого матеріалу, внесіть (якщо треба) зміни в складність чи легкість елементів гри;

6) Намагайтесь зробити роздатковий матеріал, чи створіть його разом з учнями так, щоб хоча б на кожній парті був присутній весь комплект гри;

7) Якщо цього вимагають правила гри, доречнішим буде створити змагання на швидкість виконання завдань, що ще більше зацікавить дітей [12].

Розвивальні ігри – це мікроклімат уроку, вони дарують яскраві відчуття та захоплення, розвивають увагу, всі види пам’яті, уяву, вміння систематизації та класифікації матеріалу, вміння комбінувати алгоритми розв’язку гри, відчуття, наштовхують на аналіз помилок та їх активне виправлення. саме за ними криються можливості активного засвоєння матеріалу. Це чудова форма засвоєння геометричного матеріалу через алгебраїчний апарат. Гра розкриває індивідуальні здібності кожного учня, де кожен учень спроможний виконати, вирішити її, адже в тут немає тих, хто програв є лише переможці, де кожен вклав свою частинку знань, умінь, навичок. Це, в першу чергу, не лише розвиток, а й виховання колективізму, поваги, відповідальності. Через цю форму викладання ми надаємо можливість учням розвивати творчі, професійні, соціальні здібності і вміння, що вкрай необхідні у майбутньому.

РОЗДІЛ 3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РОЗВИВАЛЬНИХ ІГОР З ВИКОРИСТАННЯМ АЛГЕБРАЇЧНОГО АПАРАТУ

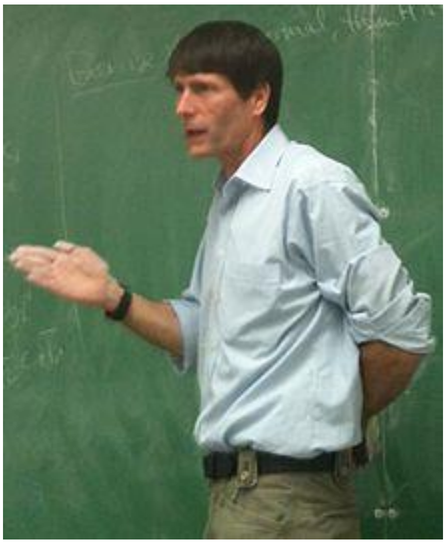
Наведемо приклади та аналіз ролі алгебраїчного апарату у розвивальних іграх. Розвивальні ігри такі як «найщільніше пакування куль у двовимірному просторі» та «парадокс Керрі» можна використовувати у 10-11 класах на уроках алгебри та геометрії лише враховуючи тематику навчальних програм. Решта ігор таких як гра чисел «від 1 до 20», «вгадай моє День народження», «зачароване число 1089», «знайди суму за 1 хвилину», «живий комп'ютер», «сума чисел Фібоначчі», «закреслена цифра», «задумане число», «дата Дня народження», «чисто з таблиці» та гра з кістками, їх можна реалізовувати на уроках математики не зважаючи на тематику. Адже вони добре розвивають логіку, підвищують інтерес до предмету.

1. **Найщільніше пакування куль у двовимірному просторі.**

Пакуванням куль займалися люди ще в часи, коли математика не була наукою, адже цей принцип має місце в повсякденному житті (торговий ринок, домашня кухня) і базується на логіці. Задачі такого типу існують у формі одновимірного простору, двовимірного, тривимірного, восьми та двадцяти чотирьох вимірних просторах. Так, як наша робота орієнтована на учнів старшої школи, згідно вимог проведення ігор пакування у двовимірному просторі є тою, «золотою серединкою», яку ми можемо надати дітям.

Серед науковців, що займалися питанням пакування куль були Йоганн Кеплер (у першій половині 17 століття – заклав основу в теорію пакування куль), Ісаак Ньютон, Карл Гаусс (1831 – доведення гіпотез регулярних граток), Давид Гільберт, Томас Гейлс (у кінці 20 століття – підтвердив та довів кеплеровські гіпотези та припущення), Марина Вязовська (початок 21 століття (2016 рік) – дала розв’язок задач восьми та двадцяти чотирьох вимірних просторах) та інші [40].

«Рисунок 3.1. Йоган Кеплер (27 грудня 1571 року – 15 листопада 1630 року)»



«Рисунок 3.2. Томас Каллістер Хейлз (народився 4 червня 1958 року)»

Задачу із пакування куль у двовимірному просторі доцільно використовувати в закладах освіти починаючи із середньої ланки, адже після початкової школи підлітки повторюють геометричні фігури на площині: трикутник, квадрат, прямокутник, коло і здатні вміло оперувати знаннями. Наприклад, це вивчають на уроці математики п’ятого класу автора Істер у першому розділі, починаючи з 17 по 24 параграф, від відрізка до квадрата. Для старшої школи ця задача – гра може бути використана на уроках геометрії в 10 як у профільному, так і у звичайних класах (авторів: Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С.) у 10 та 17-му параграфах де розглядається куля і сфера, її взаємне розміщення з площиною та площа [24].

«Рисунок 3.3. Марина Сергіївна Вязовська (народилася 2 грудня 1984 року)»

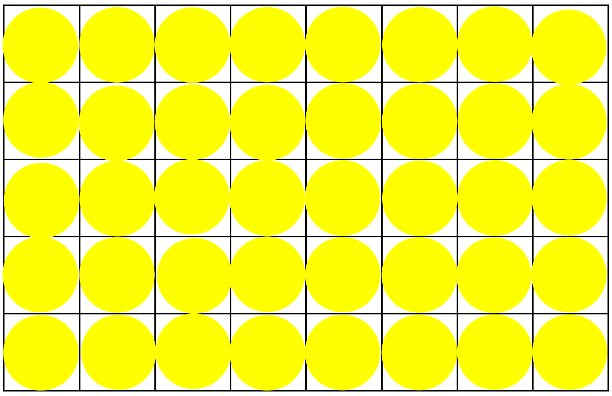
Отже, розберемо розвиваючу гру про пакування куль: ми маємо коробку з розмірами $5 \times 4 \times 1$ сантиметрів. У нас є незліченна кількість кульок радіусом 0,5 см. Скільки кульок ми можемо помістити в коробку? Кожна освічена людина відповість – 20, адже результат оперувався знаннями множення кількості куль по довжині на кількість по висоті. Тепер перед нами дві такі ідентичні коробки, ми їх з'єднаємо та отримаємо математичний фокус при якому зможемо докласти ще кульку. Питання задачі: яким чином треба поєднати ці коробки, щоб отримати місце для заповнення ще одного ідентичного матеріалу?

Розглянемо два логічно-можливі варіанти:

1) Розміщення коробок так, щоб утворена коробка була розмірами $5 \times 8 \times 1$.

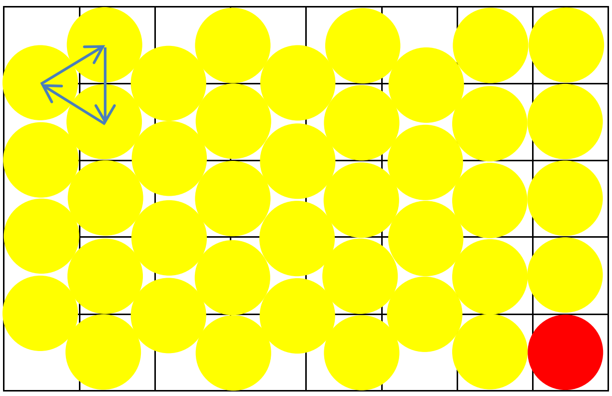
2) Розміщення коробок так, щоб утворена коробка була розмірами $10 \times 4 \times 1$.

Згідно першого варіанту у прямокутник розміром $5 \times 8 \times 1$ сантиметрів помістили 40 куль радіусом 0,5 см кожна. Нашим завданням є упакувати кулі найщільнішим способом так, щоб можна було додати ще одну ідентичну фігуру.



«Рисунок 3.4. Схема «Пакування куль у вигляді гратки» (авторська розробка)»

Загальновідомо, що найщільніше пакування куль у двовимірному просторі матиме вигляд бджолиних стільників. У нашому випадку, щоб створити такі умови необхідно спочатку вилучити «зайві» кульки. Для цього ми почнемо виймати з 1-го, 3-го, 4-го поперечних рядків. Вставляємо 4 вийняті та ще одну кульки в отриманий простір, та маємо коробку $5 \times 8 \times 1$ загальною сумою 41 кулька.



«Рисунок 3.5. Схема «Найщільніше пакування куль у двовимірному просторі» (авторська розробка)»

Ми розв'язали дану задачу використовуючи логіку, тому доведемо все алгебраїчним методом. Для початку, з'єднаємо центри кіл між собою, як наслідок, утворилися рівносторонні трикутники (рисунок 3.2). Вирахуємо довжину найщільніше упакованих фігур через висоти отриманих трикутників:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{см.}$$

$$l_{\text{кіл}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4 \times \sqrt{3} + 1 = 7{,}9282 \text{ см.}$$

$$L - l_{\text{кіл}} = 8 - 7{,}9282 = 0{,}0718 \text{ см.}$$

Отже, з отриманих розрахунків маємо 9 рядків кульок замість стандартних 8 і навіть залишилось 0,0718 сантиметрів незаповненого простору.

Розглянемо другий варіант розміщення коробок так, щоб розміри утвореної складали: 10×4×1.

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{см.}$$

Так, як по довжині 10 рядків, при пакуванні куль кількість повинна збільшитись, тому візьмемо найменший збільшений варіант – 11 рядків.

$$l_{\text{кіл}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 11 = 10.5262 \text{ см.}$$

Отже, у результаті отримаємо довжину більшу за 10,5 сантиметрів, що в нашому випадку неприпустимо для даної коробки. Тому перший варіант $5 \times 8 \times 1$ нас цілком задовольняє.

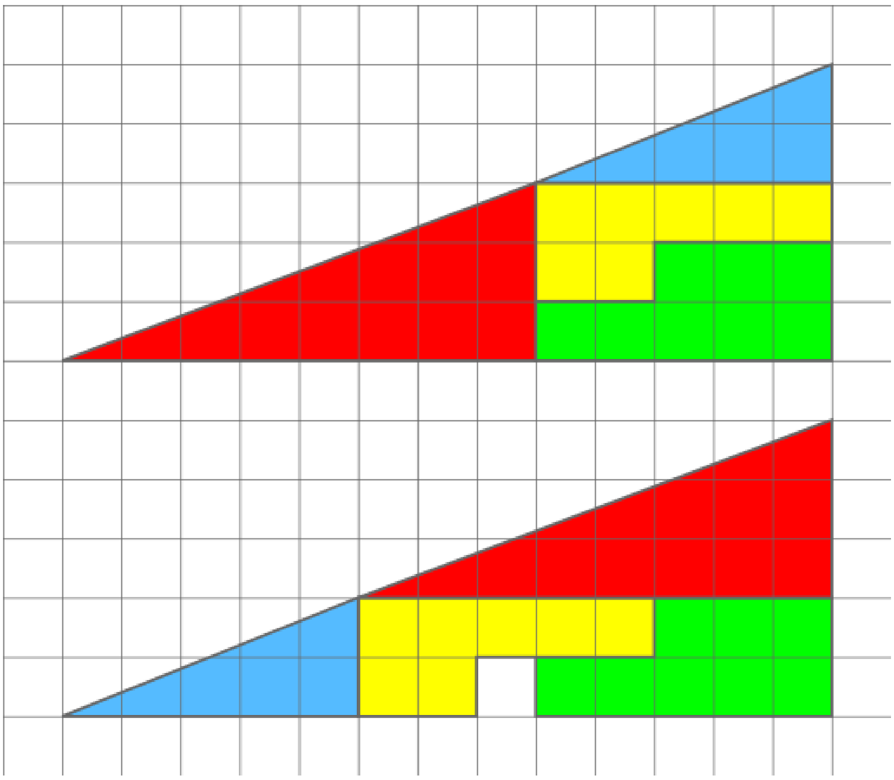
Дану гру-головоломку можна активно використовувати в процесі навчання в курсі геометрії 10 класу в першому розділі після повторення першого параграфу основних понять стереометрії. Та в 11 класі як в звичайному, так і в профільному, під час вивчення другої теми «Тіла обертання» в десятому параграфі «Куля. Взаємне розміщення сфери та площини» та третьої теми «Об'ємні тіла. Площа сфери» в сімнадцятому параграфі «Площа сфери». Де під час гри можна підготувати дітей до вивчення сфер, шляхом обчислення, наочному моделюванню сфери на площину визначення площ та об'єму, розгляді загальних характеристик кулі.

2. **Розвиваюча гра «парадокс Керрі».**

Гра – головоломка створена фокусником Поль Керрі в 1953 році. Це не просто гра, вона створює ілюзію зникнення, може використовуватись до різних вікових груп для виявлення властивостей фігур. До цієї неї вдало підходить вирваний з контексту фразеологізм літературного героя Козьми Пруткова «не вір очам своїм».

Сутність гри полягає в наступному: ми маємо прямокутний трикутник із загальними відношення катетів 13:5, який внутрішньо розділений на два прямокутні трикутники та двох полі міно [21].

Під час «фокусу», трикутники міняють місцями. А верхній поліміно переміщається лівіше (деталі вказані на рис. 3.6), де після цієї дії між ними утворюється незаповнене місце квадратом 1×1, а площа великого трикутника не змінилася.



«Рисунок 3.6. Схема зміщення фігур гри «зниклий квадрат»»

Використовуючи алгебраїчний апарат можна пояснити даний парадокс. Для початку з’ясуємо загальну площу прямокутного трикутника:

$$S = \frac{1}{2}absina$$

$$sina = sin90^{\circ}$$

$$sin90^{\circ} = 1$$

$$S = \frac{1}{2} \times 13 \times 5 \times 1 = 32{,}5 \text{ од.}$$

Далі обчислимо площу фігур вписаних в загальний трикутник, отже розглянемо найбільший вписаний трикутник (на схемі відображений червоним кольором), з відношенням його катетів 8:3 одиниць:

$$S = \frac{1}{2}absina$$

$$sina = sin90^{\circ}$$

$$sin90^{\circ} = 1$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 \times 1 = 12 \text{ од.}$$

Площа другого меншого трикутника з відношенням катетів 5:2 складає:

$$S = \frac{1}{2}absina$$

$$sina = sin90^{\circ}$$

$$sin90^{\circ} = 1$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 \times 1 = 5 \text{ од.}$$

Площа двох поліміно, які в першому випадку складають прямокутник з розмірами 3 і 5 одиниць дорівнює:

$$S = ab$$

$$S_3 = 3 \times 5 = 15 \text{ од.}$$

Загальна площа площ усіх фігур складає:

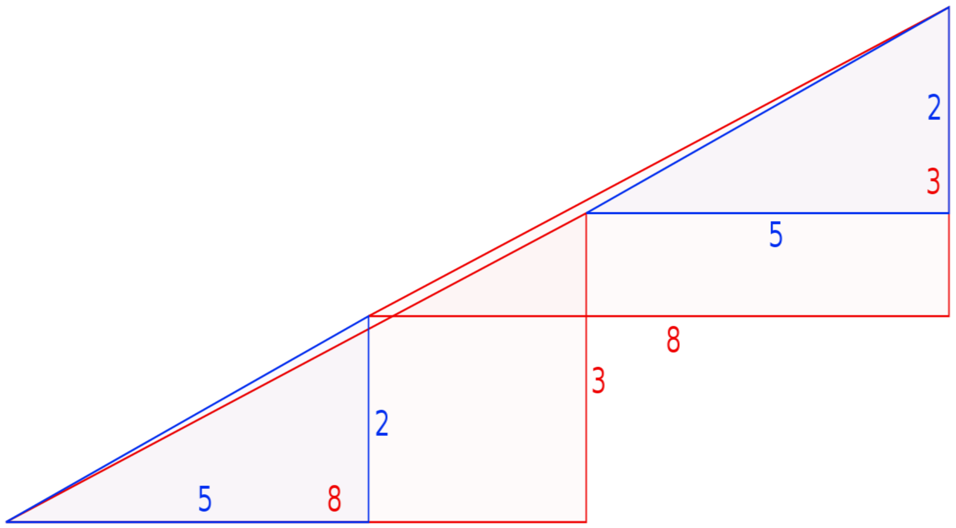
$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$S = 12 + 5 + 15 = 32 \text{ од.}$$

Отже, маємо:

$$32{,}5 \text{ од.} \neq 32 \text{ од.}$$

Провівши обчислення даної фігури, можна дійти висновку, що площа загального трикутника не дорівнює площі її складових чотирьох фігур. Виникає питання такого абсурду, адже ми не змінюємо розміри фігур, а весь секрет криється в двох трикутниках. Справа в тому, що відношення катетів двох трикутників становить відповідно 8:3 та 5:2, згідно трьох ознак подібності трикутників, жодна з ознак нам не підходить, тому вони не подібні, а отже їх гострі кути, котрі прилягають до основи загального трикутника різні, і при процесі зміщення отримуємо не рівну гіпотенузу (візуальний доказ цього можливо помітити розробивши дану гру власноруч).



«Рисунок 3.7. Візуалізація нерівності гіпотенузи»

3. **Гра «чисел від 1 до 20».**

Сутність гри полягає в наступному: вчитель пропонує загадати учням від одного до двадцяти три числа, котрі йдуть один за одним у числовому ряді.

Після чого додати ці три числа і їх суму озвучити, у результаті педагог вміло «вгадує» загадані дітьми числа [21].

У чому секрет? А він в тому, що педагог отриману суму ділить на три, та отримує число, яке стоїть в середині між двома інших чисел вибраними учнями. Наприклад, обрані числа 13, 14, 15, їх сума дорівнює 42. Виконаємо обчислення по даній методиці:

$$\frac{42}{3} = 14$$

14 – це число, котре знаходиться між 13 та 15, отже вибрані нами числа: 13,14,15.

1 2 3 4 5
6 7 8 9
10 11 12
13 14 15
16 17 18
19 20

«Рисунок 3.8. Порядок чисел від 1 до 20»

Дана гра може використовуватись на будь-якому етапі уроку чи темі як розминка чи розрядка. Алгебраїчний апарат тут має велике значення, адже лише використовуючи його ми можемо дати розгадати математичний фокус.

4. **Гра «вгадай моє День народження».**

Можна провести дане заняття на початку уроку, як процес зацікавлення, так і в кінці. Обираємо охочого учасника говоримо правила гри, де вчитель виконує роль «екстрасенса», який вгадає День його народження, при цьому ніхто не має права оголошувати дату до кінця гри.

Завдання дитини число свого дня помножити на 2, при цьому не оголошувати цей процес вчителю, далі до добутку додати 5. Отримуємо суму, яку треба домножити на 50, і в кінці до отриманого додати число свого місяця Дня народження. А вже тепер учень може озвучити отримане число вчителю. І педагог використавши алгебраїчний апарат впродовж менше ніж хвилини озвучує дату народження учня/учениці [21].

Секрет екстрасенсорності полягає в наступному: вчитель обчислює різницю між озвученим числом та 250, де отримує чотирьох або трьох значне число, де останні дві цифри – це місяць, а перші одна або дві – день, в залежності чи це трьох чи чотирьох значне число.

Довести цей фокус можна алгебраїчним шляхом. Нехай день – х, а місяць – у, тоді маємо дію, коту виконує дитина:

1) $x \times 2$

2) $x \times 2 + 5$

3) $(x \times 2 + 5) \times 50$

4) $(x \times 2 + 5) \times 50 + Y = Z$

Де х $-$ це день, де $Y -$ місяць, де $Z -$ відповідь дитини.

Коли педагог віднімає 250, отримує:

$$Z - 250 = ((x \times 2 + 5) \times 50 + Y) - 250$$

$$100x + 250 + Y - 250 = 100x + Y$$

$$100x + Y = W$$

Як видно з обчислення на «у» - число місця ніщо не впливає, попереду знаходиться «х» - день народження множиться лише на сто, а так як місяць число котре не перевищує двох одиниць, то між числом та місяцем відсутні нулі. Відповідно отримуємо останні два числа це дата місяця, та перше одне або два (в залежності, яке число отримаємо у відповіді) – дата дня народження.

5. **Розвивальна гра «зачароване число 1089».**

Завдання гри представленні в наступному. Педагог обирає учня, дає завдання загадати будь-яке число, яке складається з трьох цифр. Основним правилом є те, що всі три цифри мають бути різними [21].

Алгоритм дій такий:

1) Загадане число учень має записати у себе в зошиті;

2) Далі отримати нове записавши попереднє у зворотньому напрямку;

3) Далі знаходимо різницю між загаданим число та отриманим, попередньо віднявши від найбільшого найменше;

4) Отримане число записуємо у зворотньому напрямку;

5) Знаходимо суму числа, отриманого під час обчислення різниці, та числа щойно знайденого;

Відповіддю вчителя у будь-якому випадку буде число 1098. Наведемо приклади цього «фокусу». Наприклад, вибране число дорівнює 973, робимо його оберненим, отримаємо 379. Знаходимо їх різницю:

$$973 - 379 = 594$$

Утворюємо знову обернене йому: 495, та знаходимо їх суму:

$$594 + 495 = 1098$$

Що й треба було довести. Отриманий результат можемо конкретизувати наступним чином:

- нехай три цифри одного числа будуть a, b, c відповідно перше є одиницею сотень, друге одиницею десятків. Отже, маємо:

$$\overline{abc} = a \times 10^2 + b \times 10 + c$$

Обернене йому число матиме вигляд:

$$\overline{cba} = c \times 10^2 + b \times 10 + a$$

Обчислимо їх різницю:

$$\overline{abc} - \overline{cba} = (a \times 10^2 + b \times 10 + c) - (c \times 10^2 + b \times 10 + a)$$

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$$

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 100a - 100c + c - a$$

$$\overline{abc} - \overline{cba} = (a - c) \times 10^2 + (c - a)$$

$$\overline{abc} - \overline{cba} = (a - c - 1) \times 10^2 + 9 \times 10 + (10 - a + c), \text{де } (a > c)$$

Утворюємо обернене йому число:

$$(10 - a + c) \times 10^2 + 9 \times 10 + (a - c - 1)$$

Обчислюємо суму отриманих чисел:

$$\big((a - c - 1) \times 10^2 + 9 \times 10 + (10 - a + c)\big)$$
$$+ \big((10 - a + c) \times 10^2 + 9 \times 10 + (a - c - 1)\big)$$
$$= 100a - 100c - 100 + 90 + 10 - a + c + 1000 - 100a$$
$$+ 100c + 90 + a - c - 1$$
$$= -100 + 90 + 10 + 1000 + 90 - 1 = 1089$$

Отже, не зважаючи на обране число гравцем в результаті все одно отримаємо відповідь 1089. Дану гру можна використовувати у старших класах на початку або в кінці уроку для привернення уваги до дисципліни математика.

6. **Гра «знайди суму за 1 хвилину».**

Дається завдання всьому класу порахувати суму всіх непарних чисел від 0 до 40, з можливістю використання калькулятора за одну хвилину. Попередньо не даючи часу завчасно виписати непарні числа. Скоріше за все ніхто з учнів не зможе виконати дане завдання не знаючи алгоритму найшвидшого рішення. Дану гру можна інтерпретувати різним періодом задання чисел [21].

Щоб найшвидше стати «чемпіоном» даної гри треба знати такий алгоритм її вирішення:

Для початку беремо останнє непарне число із заданого періоду, в нашому випадку це 39. Додаємо до нього одиницю, отриману суму ділимо на 2 та підносимо до квадрату:

$$39 + 1 = 40$$
$$40 \div 2 = 20$$
$$20^2 = 400$$

Отже, розв’язком гри є число 400. Дана гра дещо аналогічна попереднім, здатна розвивати логічне мислення, моторику обчислення.

Може використовуватись в незалежності від теми уроку як розминка перед початком або розслаблення в кінці уроку.

7. **Гра «живий комп'ютер».**

Дана гра показує як не користуючись калькулятором можна знайти суму чисел, користуючись алгебраїчним апаратом.

Для початку викличте учня до дошки, дайте йому/їй завдання записати два десятизначних числа один під одним. Після цього ви (вчитель) записуєте одне своє число підчеркуєте риску і відразу ж пишете суму трьох чисел.

Весь секрет обчислень криється у записаному вашому числі, котре створене дивлячись на попереднє вказане учнем. Справа в тому, що кожна із цифр :одиниці, одиниці десятків, одиниці сотні вашої та дитини має складати суму дев'ятки, а в отриманому результаті ставиться попереду одиниця, переписується вказане перше число учня, та від останньої цифри забираєте одну одиницю [21]. Загальний приклад такий:

$$4920163579$$
$$+6739411673$$
$$+3260588326$$
$$= 14920163578$$

8. **Гра «сума чисел Фібоначчі».**

Завдання гри полягає в наступному: вчитель повертається до учнів, а один із клас має написати будь-які два числа на дошці, і виконати додавання отримане число підписуємо в столик та знову додаємо до попереднього, отримане знову додаємо до попереднього і продовжувати цей процес аж поки кількість написаних чисел становитиме 10 штук. Після цього вчитель повертається до дошки підводить лінію та вправно записує суму всіх десяти чисел.

Весь секрет вправності вчителя залежить від вправного використання алгебраїчного апарату, а саме поглянути на четверте від кінця число, помножити його на 11 та вміло записати відповідь [21].

Наприклад, маємо два числа 3 та 7, робимо обчислення учня:

$$3,$$
$$7,$$
$$10,$$
$$17,$$
$$27,$$
$$44,$$
$$71,$$
$$115,$$
$$186,$$
$$301$$

Отже, після обчислень учня увага вчителя сконцентрована на четверте з кінця число – це 71, множимо його на 11 і отримуємо суму десяти його чисел – 781.

9. **Гра «закреслена цифра».**

Учень має загадати будь-яке число, потім нехай додасть всі цифри цього числа та від отриманого результату відніме задумане перше число. Подумки або в зошиті закреслить одну цифру і скаже вчителю отримане число без закресленої цифри. Завдання вчителя швидко і з точністю назвати її [21].

Алгебраїчний розрахунок педагога наступний:

- В отриманому числу від учня додаємо всі цифри;
- Якщо відповідь не ділиться на 9, тоді шукаємо наступні у порядку зростання числа, котрі б задовольняли даній умові;
- Від знайденого числа віднімали б пораховану вчителем попередньо суму та отримали б цифру закреслену учнем.

Наприклад, нехай придумане число – 5734, тоді:

$$5 + 7 + 3 + 4 = 19$$

$$5734 - 19 = 5715, \text{де закреслена цифра } 7$$

Учень називає отримане число – 515. Дії вчителя наступні:

$$5 + 1 + 5 = 11$$

Так, як 11 не ділиться на 9 підбираємо ділене більше ніж 11 – це 18.

$$18 - 11 = 7$$

Отже, 7 і є шуканою цифрою. Секрет полягає у тому, що давно доведено, коли від числа віднімаємо суму його цифр отримаємо результат кратний дев'яти. Розглянемо загальну формулу розрахунків, за умови, якщо $a -$ цифра сотень, $b -$ десятків, $\text{c} -$ одиниць:

$$(100a + 10b + c) - \text{це і є загадане число}$$

$$100a + 10b + c - (a + b + c) = 100a + 10b + c - a - b - c$$
$$= 99a + 9b$$

$$99a + 9b = 9(11a + b)$$

Отже отримане число у будь – якому випадку має ділитися на 9. Але є одна особливість, в деяких випадках, може трапитись, що сума цифр озвученого числа дорівнює дев'яти, тому варіантами відповіді будуть 9 або 0.

10. **Гра «задумане число».**

У процес цієї гри можна залучити частину класу, а саме шість чоловік. Першому дається завдання на листочку записати будь-яке двозначне число, друга дитина має біля цього числа дописати таке ж попереду та ззаду нього, так щоб воно мало вигляд шестизначного. Третій учасник має поділити отриманий результат на 7. Наступний поділити на 3 отримане значення від третього учня. П'ятий на 13 отримане число від четвертого, та шостий – загальний результат поділити на 37. Потім передають розв'язок першій дитині, котра і загадала. У результаті він отримає своє загадане число, де вчитель був лише координатором алгебраїчних дій та не мав жодного стосунку до розрахунків [21]. Наприклад: нехай це буде 37, маємо:

$$1)37;$$

$$2)\ 373737;$$

$$3)\ \frac{373737}{7} = 53391;$$

$$4)\ \frac{53391}{3} = 17797;$$

$$5)\ \frac{17797}{13} = 1369;$$

$$6)\ \frac{1369}{37} = 37$$

Відповідь: 37=37, що й треба було довести.

Розглянемо, загальний вигляд таких обчислень. Нехай загадане число $10b + c$, де с $-$ одиниці, $10b$ $-$ одиниці десятків.

$$1)10b + c;$$

$$2)\ (10b + c)(10b + c)(10b + c)$$
$$= 1000000b + 10000c + 10000b + 100c + 10b + c$$
$$= 1010010b + 10101c = 10101(999909b + c)$$

$$3)\ \frac{10101(999909b + c)}{7} = 1443(999909b + c)$$

$$4)\ \frac{1443(999909b + c)}{3} = 481(999909b + c)$$

$$5)\ \frac{481(999909b + c)}{13} = 37(999909b + c)$$

$$6)\ \frac{37(999909b + c)}{37} = (999909b + c)$$

Отже, $(999909b + c)$ це і загальна формула задуманого учнем числа. Як бачимо з обчислень, операція ділення на 7, 3, 13, 37 це і є добуток числа 10101, котрий в процесі скорочується.

11. **Гра «дата Дня народження».**

Процес реалізації цієї гри полягає в тому, що вчитель може сказати дату народження учня, після того як той виконає певне обчислення. Дії дитини повинні бути наступними:

- Множення числа місяця народження на 100;
- Додавання дня, в якому народився/народилась;
- Множення результату на 2;
- Додавання до отриманого 2;
- Множення на 5;
- Додавання цифри 1;
- Допис в кінці до числа цифри 0;
- Додавання 1;
- Додавання кількості років;
- Повідомлення педагогу результату обчислень.

Вчитель робить певну операцію і повідомляє відповідь, а саме віднімає від отриманого числа 111. Умовно розділяє результат на три частинки, починаючи з кінця, дві цифри – кількість років по яким з легкістю можна вирахувати рік народження, середні дві цифри – день народження, та перші дві або одна, у залежності від кількості наявних цифр в числі, буде місяць [21]. Розглянемо дану гру на загальному прикладі обчислення. Нехай день народження дитини буде a, тоді місяць – b, $c -$ кількість років. Отже, маємо:

$$(b \times 100) + a) = 100b + a$$

$$2 \times (100b + a) + 2 = 200b + 2a + 2$$

$$5 \times (200b + 2a + 2) + 1 = 1000b + 10a + 10 + 1$$

$$\begin{aligned} 10 \times (1000b + 10a + 10 + 1) + 1 + c \\ = 10000b + 100a + 100 + 10 + 1 + c \\ = 10000b + 100a + 111 + c \end{aligned}$$

Обчислення результату вчителем матиме такий вигляд:

$$(10000b + 100a + 111 + c) - 111 = 10000b + 100a + c$$

Згідно формули число умовно поділене на три частинки, де остання цифра – це кількість років, за допомогою яких можна вирахувати рік народження. Де $100a$ – це день, та $10000b$ – місяць.

12. **Гра із кістками.**

Для цієї гри нам знадобляться два гральні кубики. Процес виконується перед учнями. Де вчитель підкидає куби на стіл. Та пропонує учням назвати суму чисел на гранях, що лежать на столі. Цю дію можна повторювати поки учні не зрозуміють алгоритм вирішення.

«Рисунок 3.9. Гральні кубики»

Щоб обчислити дане завдання необхідно знати, що при додаванні протилежних граней сума завжди становитиме семи [21]. Наприклад, на кістках випали значення 6 та 4 (рис.3.9). Обчислюємо для першого:

$$7-6=1$$

Для другої кістки розв’язок наступний:

$$7-4=3$$

Сума граней, що лежать на столі становитиме:

$$3+1=4$$

Або ж використати другий варіант:

$$6+4=10$$

$$14-10=4$$

Отже,що дізнатись суми основ граней треба лише знати, що будь-які протилежні матимуть суму 7.

13. **Гра «число з таблиці».**

Вчитель пропонує учням поглянути на таблицю, яка складається з п’яти стовбців та сімнадцяти рядків та містить числа від 1 до 31.

Завдання полягає в наступному, дитина має загадати одне із них та повідомити лише у яких стовбцях воно знаходиться [21]. Використовуючи алгебраїчний апарат педагог з легкістю вирішить дане завдання. Наведемо приклад таблиці чисел від 1 до 31:

«Таблиця 3.1»

Числа від 1 до 31

1	2	3	4	5
16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31

Щоб обчислити та знайти загадане число учнем, вчителю треба лише знати наступне:

- Треба додати числа стовбців, що отримуються у результаті знаходження степеня числа 2;
- Перший стовбик – це 2^4;

- Другий - 2^3;

- Третій – 2^2;

- Четвертий – 2^1;

- П'ятий - 2^0.

Загальна сума числе всіх стовбців складає:

$$2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$$

Наприклад, нехай учень загадав число 18, яке знаходиться в першому та четвертому стовбиках, тому алгебраїчне обчислення вчителя має вигляд:

$2^4 + 2^1 = 16 + 2 = 18$

ВИСНОВКИ

Згідно поставленої мети завдання кваліфікаційного проєкту були виконані.

Зародження алгебраїчного апарату відбувалося ще до нашої ери, коли математики як науки не існувало. Завдяки Рене Декарту ми можемо зараз користуватись символікою для обчислення математичних дій. Саме він та П’єр Ферм зародили альтернативу геометричної побудови та алгебраїчних дій, де останнє спрощує процес моделювання на обчислення. Але головним підґрунтям апарату стало введення, а особливо діагностика та конкретизація Декартом алгебраїчної символіки, яка користується й до наших днів, та ввійшла в основу методів.

Алгебраїчні методи є однією із складових алгебраїчного апарату, і широко використовувались і застосовуються зараз для вирішення найскладніших завдань. Вони характеризуються точністю та всеосяжністю, адже дозволяють вирішити завдання чітко, конкретно та з можливістю перевірки в інтернет – джерелах. Тому що, зараз дуже активно поширюється дистанційне навчання та учні все більше розвиваються в сфері технологій, де на даний момент безперешкодно знаходять задані алгебраїчні дії. Це дає змогу більш детально вивчити процес обчислення. З геометричним моделюванням буде набагато складніше, тому що, більшість додатків та сайтів не зводять побудову до загальних алгоритмів.

На сьогодні, середні освітні навчальні заклади не мають в своїх методиках викладання матеріалів, які б розвивали індивідуальні здібності, кожного окремо взятого, учня. Не вистачає інновацій, гуманного підходу, особливо у старших класах.

У методиках пропонованих МОН, не вистачає ігрових форм навчання. Спостерігається лише поступове перевантаження швидко прохідним матеріалом, де основну увагу приділяють кількості пройденого матеріалу, а не процесу його засвоєння. Це, в свою чергу, не стимулює учнів до навчання, а лише погіршує його якість. Тому перед педагогами постає завдання самостійно впроваджувати в систему викладу матеріалу ігрових форм навчання, задля підвищення цікавості до певної теми уроку, та найлегшого засвоєння знань.

Нами розглянуті етапи, структура, вимоги та правила проведення розвивальних ігор.

Розвивальні ігри – це мікроклімат уроку, вони дарують яскраві відчуття та захоплення, розвивають увагу, всі види пам’яті, уяву, вміння систематизації та класифікації матеріалу, вміння комбінувати алгоритми розв’язку гри, відчуття, наштовхують на аналіз помилок та їх активне виправлення. саме за ними криються можливості активного засвоєння матеріалу. Гра розкриває індивідуальні здібності кожного учня, де кожен учень спроможний виконати, вирішити її, адже в тут немає тих, хто програв є лише переможці, де кожен вклав свою частинку знань, умінь, навичок. Це, в першу чергу, не лише розвиток, а й виховання колективізму, поваги, відповідальності. Через цю форму викладання ми надаємо можливість учням розвивати творчі, професійні, соціальні здібності і вміння, що вкрай необхідні у майбутньому.

Нами представлені приклади використання розвиваючих ігор у 10 - 11 класах для підвищення цікавості до математики, де під час реалізації використовується алгебраїчний апарат, як засіб найкращого сприйняття інформації. «Найщільніше пакування куль у двовимірному просторі» та «парадокс Керрі» - ігри, які можна використовувати у 10-11 класах на уроках алгебри та геометрії, під час вивчення тем що стосуються кулі і сфери, їх взаємне розміщення з площиною та площа.

Решту ігор таких як «від 1 до 20», «вгадай моє День народження», «зачароване число 1089», «знайди суму за 1 хвилину», «живий комп’ютер», «сума чисел Фібоначчі», «закреслена цифра», «задумане число», «дата Дня народження», «чисто з таблиці» та гра з кістками, можна реалізовувати на уроках математики не зважаючи на тематику. Адже вони добре розвивають логіку, підвищують інтерес до предмету.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебраїчний метод. URL: https://formula.kr.ua/konstruktivna-geometriya-tsirkulya-ta-liniyki/algebrajichnij-metod.html.

2. Алгебраїчний метод розв'язку геометричних задач. URL: https://knowledge.allbest.ru/mathematics/3c0b65625b3ac78b5c53a88421316c37_0.html.

3. Алгебра чи геометрія. URL: https://vseosvita.ua/user/id135231/blog/alhebra-chy-heometriia-87211.html.

4. Бартіш М.Я., Дудзяний І.М. Дослідження операцій. Ухвалення рішень і теорія ігор. Львів: центр ЛНУ ім. І.Франка, 2009. 277 с.

5. Бартіш М. Я., Роман Л. Л. Теорія ігор. Львів: центр ЛНУ ім. І.Франка, 2005. 120 с.

6. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навч. посіб. К.: Вища школа, 1977. 376 с.

7. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навч. посібник. – 3-тє вид. К.: Вища шк., 1989. 367 с.

8. Боравльов А.П., Ленчук І.Г. Аналіз у розв'язанні задач на побудову: навч. посібник. К.: Вища школа, 2002. 192 с.

9. Бурда М.І. Розв'язування задач на побудову: навч.-метод. посіб. Київ: Радянська школа, 1986. 112 с.

10. Власенко О.І. Методика викладання математики. Загальні питання: навч. посіб. К.: Вища школа, 1974. 208 с.

11. Воєвода А.Л. Зацікавити математикою: метод. Посіб. Вінниця: Легкун В.М, 2012. 81-86 с.

12. Гра – це прогресивний засіб навчання. URL: https://www.schoollife.org.ua/gra-tse-progresyvnyj-zasib-v-protsesi-na/.

13. Головань М.С. Розвиток пізнавальної активності учнів в процесі навчання алгебри і початків аналізу на основі НІТ: дис. канд. пед. наук. К.НПУ імені М.П. Драгоманова, 1997. 190 с.

14. Десять найкращих математичних ігор. URL: https://ahaslides.com/uk/blog/classroom-maths-games/.

15. Долбенко Т. Активізація пізнавальної діяльності підлітків: ігрові технології: монографія. Київ, 2004. № 10. С. 36-39.

16. Дослідження Рене Декарта як основа сучасної математики, фізики, філософії. URL: https://osvita.ua/vnz/reports/philosophy/12706/.

17. Кукуш О.Г., Ушаков Р.П. Математичний гурток. Харків: Основа, 2018. 118 с.

18. Кушнир І.А. Методи розв’язання задач з геометрії: навч.-метод. посібник. К.: Абрис, 1994. 464 с.

19. Математичний апарат. URL: https://www.wikiwand.com/uk/Математичний_апарат.

20. Математичний апарат педагогічної науки: навч.-метод. посіб.. Умань: Візаві, 2019. 109 с.

21. Математичні ігри. URL: https://poki.com/ru/%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0.

22. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія 9 клас: навч. посіб. Харків, 2009. 105 с.

23. Методика навчання алгебраїчному методу розв’язування текстових задач. URL: https://naurok.com.ua/navchannya-uchniv-algebra-chnomu-metodu-rozv-yazuvannya-tekstovih-zadach-v-osnovniy-shkoli-38606.html.

24. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів. Профільний рівень. URL: https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58881/.

25. Печерський С.Л., Бєляєва А.А. Теорія ігор для економістів, 2001.

26. Рішення задач алгебраїчним методом: сутність і методика використання. URL: https://alternativa-profi.ru/znacheniya/resenie-zadac-algebraiceskim-sposobom-sut-i-metodika-primeneniya.

27. Сергієнко Л.В. Дидактична гра як форма навчання в системі професійної освіти. *Освіта на Луганщині.* Луганськ, 2009. №1. С. 152-154.

28. Склепань З.І. Методика навчання математики: підручник. К.: Вища школа, 2006. 582 с.

29. Структура розвиваючих ігор. URL: https://pomahach.com/question/577937-19748/nazvati-strukturu-rozvivayuchih-igor/.

30. Субботін. А. Ігор теорія. Політична енциклопедія. К.: Парламентське видавництво, 2011. 273 с.

31. Форми, типи і методи проведення уроків. URL: http://dvpub.dp.ua/content/load_files/130.pdf.

32. Цікаві ігри та завдання математики. URL: https://naurok.com.ua/cikavi-igri-ta-zavdannya-z-matematiki-61354.html.

33. Bragg L. Перевірка ефективності математичних ігор як педагогічного засобу для навчання дітей. URL: https://doi.org/10.1007/s10763-012-9349-9.

34. Encyclopedia of Mathemation Education. URL: https://link.springer.com/referencework/10.1007/978-3-030-15789-0.

35. Ernest P. Ігри: обґрунтування їх використання у викладданні математики в школі. URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-012-9349-9.

36. How do games in math promote effective learning. URL: https://mathsnoproblem.com/blog/teaching-practice/how-do-games-in-maths-promote-effective-learning.

37. IXL Math. URL: https://www.ixl.com/math.

38. Math. URL: https://www.khanacademy.org/math.

39. Mathematical Games in Learning and Teaching. URL: https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007/978-3-030-15789-0_97.

40. Packing problem. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Packing_problems.

41. The value games and gamification with mathematics. URL: https://www.mathletics.com/blog/educators/value-of-games-in-mathematics/.

42. Wiersum E.G. Teaching and learning mathematic through games and activities. URL: https://pdfs.semanticscholar.org/87b7/f2fa51cdee31fc2c85fdcf12529c55153b8f.pdf.