Міністерство освіти і науки України
Херсонський державний університет
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ВИКОРИСТАННЯ ГРАФІЧНИХ МЕТОДІВ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРІЇ У СТАРШИХ КЛАСАХ ЗЗСО

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала: студентка 2-го курсу, 12-221М групи
Спеціальності: 014 Середня освіта
Спеціалізація: 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти
Валерія КУЛИК

Керівник кандидат фізико-математичних наук, професор Валерій КУЗЬМИЧ

Рецензент кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук та програмної інженерії Херсонського державного університету Олександр ВЕЙЦБЛІТ

Івано-Франківськ – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП ………………………………………………………………….. 3

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ОРГАНІЗАЦІЇ НАВЧАННЯ ГЕОМЕТРІЇ В СТАРШИХ КЛАСАХ

1.1. Мета навчання геометрії в старших класах ……………….. 6

1.2. Коротка характеристика змістових ліній курсу стереометрії ……………………………………………………… 11

РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИКОРИСТАННЯ ГРАФІЧНИХ МЕТОДІВ ПРИ ВИВЧЕННІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

2.1. Аналіз психолого-педагогічної, методичної літератури з проблеми дослідження …………………………………………….. 15

2.2. Графічні методи в стереометрії ………………………….. 19

РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАФІЧНИХ МЕТОДІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАЧ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

3.1. Задачі на побудову зображень плоских фігур ……………… 27

3.2. Задачі на зображення просторових фігур ………………….. 31

3.3. Задачі на побудову на зображеннях ………………………… 35

3.4. Задачі на побудову і обчислення …………………………… 39

ВИСНОВКИ ……………………………………………………... 44

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ………………………….. 46

ВСТУП

Актуальність дослідження. Застосування графічних методів в навчанні геометрії має численні переваги. Так, графічні методи допомагають здобувачам краще зрозуміти абстрактні геометричні поняття, такі як лінії, кути, фігури, відношення між ними тощо. Вони допомагають створити зображення, яке візуалізує ці поняття, що полегшує їх розуміння. Робота з графічними методами сприяє розвитку просторового сприйняття і логічного мислення: здобувачі навчаються розуміти, як об'єкти розташовані у просторі, і це допомагає їм вирішувати різні завдання і проблеми. Крім того, робота з лінійкою, транспортиром та іншими геометричними інструментами розвиває практичні навички здобувачів, які можуть бути корисними у багатьох сферах життя, включаючи інженерію, архітектуру та інші технічні галузі. Серед переваг графічних методів можна відмітити і підготовку здобувачів до використання комп'ютерної графіки: У сучасному світі комп'ютерна графіка дуже поширена. Розуміння основних графічних принципів та методів їх застосування на папері може стати основою для подальшого вивчення комп'ютерної графіки та дизайну.

Всі ці фактори роблять застосування графічних методів у викладанні геометрії і стереометрії, зокрема, дуже важливими для формування знань та навичок здобувачів і підготовки їх до вирішення практичних завдань у різних галузях, а питання застосування цих методів при викладанні дисциплін геометричного циклу залишається актуальним і сьогодні.

Питанням застосування графічних методів присвячено роботи педагогів та методистів. Так, М. Четверухін підкреслював, що «уміння складати та читати малюнки і креслення або хоча б лише розуміти їх потрібно особам найрізноманітніших професій, зокрема, особам технічних професій, уся діяльність яких нерозривно пов’язана зі складанням або читанням креслень» [34]. Психологічні аспекти, що мають відношення до формування графічних знань, навичок і умінь, досліджували у своїх роботах

Д. Ельконін, О. Кабанова-Меллер [16], П. Гальперін. Методичні аспекти застосування графічних методів в процесі навчання математики розкрито у роботах Л. Левенберга, В. Лисенка, питання, які стосуються формування просторових уявлень, – у працях О. Власової, Н. Мадько. Проблему формування у здобувачів в процесі навчання саме графічних навичок висвітлювала у своїх роботах О. Васил'єва, питанням використання креслень та побудов в процесі розв'язування задач займалися В. Зикова [15], О. Кабанова-Меллер, а питанням застосування геометричних побудов для дослідження математичних здібностей здобувачів присвячена робота В. Крутецького.

Проте ще низка питань, пов'язаних із застосуванням графічних методів при викладанні стереометрії, не знайшли достатньо повного відображення в педагогічній теорії та не вирішені у практиці навчання.

Мета дослідження – розгляд методичних аспектів застосування графічних методів при викладанні геометрії у старших класах загальноосвітніх закладів.

Об'єктом дослідження виступає навчальна діяльність здобувачів в процесі вивчення стереометрії, а ***предметом дослідження*** – безпосередньо графічні методи, які використовуються при викладанні стереометрії.

Виходячи з мети, визначені основні ***завдання дослідження***:

- розкрити методичні питання навчання геометрії в старших класах;
- проаналізувати психолого-педагогічну та методичну літературу з проблеми дослідження та визначити теоретичні засади застосування графічних методів при вивченні стереометрії;
- розглянути приклади типів стереометричних задач та відповідних графічних методів, які можуть бути застосовані при розв'язуванні задач того чи іншого типу, що можуть бути використані при викладанні геометрії в старших класах.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що були виокремлені основні графічні методи, що можуть бути застосовані при розв'язуванні різноманітних задач зі стереометрії. ***Практичне значення*** дипломної роботи полягає в можливості застосування матеріалу здобувачами вищої освіти та вчителями закладів середньої освіти.

Для розв'язанні поставлених завдань дослідження були застосовані наступні ***методи***: теоретичний аналіз методичної та психолого-педагогічної літератури з теми дослідження, вивчення та аналіз педагогічного досвіду вчителів загальноосвітніх закладів.

Дослідження виконувалось в межах теми науково-дослідної роботи кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики в умовах цифровізації вищої освіти» (державний реєстраційний номер 0123U103793).

Апробація результатів дослідження. За результатами виконаного дослідження було опубліковано тези в альманаху «Магістерські студії» (Херсонський державний університет).

Робота складається з трьох основних розділів. Перший розділ присвячено загальним питанням організації навчання геометрії в старших класах. Зокрема, розглянуто мету вивчення стереометрії та наведено коротку характеристику основних змістових ліній дисципліни. В другому розділі проведено аналіз методичної літератури та порівняння різноманітних поглядів на поняття «графічний метод», а також розкрито суть основних графічних методів, що використовуються в стереометрії. Третій розділ практичного характеру та містить низку прикладів застосування графічних методів при розв'язуванні як конструктивних, так і задач на доведення та обчислення з курсу стереометрії, що можуть бути запропоновані при викладанні дисципліни здобувачам старших класів загально-освітніх шкіл.

РОЗДІЛ 1
ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ОРГАНІЗАЦІЇ НАВЧАННЯ ГЕОМЕТРІЇ В СТАРШИХ КЛАСАХ

1.1. Мета навчання геометрії в старших класах

Геометрія як навчальна дисципліна виступає лише складником в процесі навчання у загальноосвітніх закладах. Тому дуже важливо визначити роль формування у здобувачів геометричних знань та умінь у загальному процесі їх навчання. Геометрія за структурою містить наступні елементи:

– «певні геометричні факти та поняття, теоретичні закономірності, які мають бути зрозумілими для здобувачів конкретної вікової категорії;

– цінності світогляду, етики та естетики, формування яких відбувається засобами геометрії;

– методи дослідження та наукового мислення, які є базою для засвоєння певних геометричних знань;

– геометричні уміння та навички (навички практичного застосування отриманих теоретичних геометричних знань);

– способи пізнавальної діяльності, математичне мислення» [6].

В старших класах здобувачі вивчають дисципліну «стереометрія», складовими частинами якої виступають: наукові геометричні знання; способи діяльності, які характерні саме для геометрії; загальне світосприйняття на базі саме геометричних знань. Раніше зміст освіти зводився до змісту навчальної дисципліни, проте за умов компетентнісного навчання «шкільні предмети не є сукупністю тільки законів, понять і методів відповідної конкретної науки, а містять ще й інші освітні та виховні компоненти» [17]. Відмітимо, що математична компетентність – це по суті здатність розвивати та використовувати своє математичне мислення для вирішення досить широкого спектру повсякденних проблем, це процес моделювання поточних ситуацій із використанням саме математичного апарату; розуміння ролі теоретичних математичних знань та практичних умінь в житті людини. Базою для формування ключових математичних компетентностей є особистісні якості здобувачів, їх здібності та попередній досвід; потреби здобувачів, що виступають мотиваторами навчання; знання, вміння та відношення, які формуються в навколишньому середовищі, а також при різноманітних ситуаціях. Відповідно до нових освітніх документів «мета математичної освітньої галузі визначається як формування математичної компетентності у взаємозв'язку з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та професійної діяльності впродовж життя, що передбачає засвоєння системи знань, вдосконалення умінь і способів дій для розв'язування суто математичних та практичних задач; розвиток логічного мислення та психологічних якостей особистості; розуміння можливостей застосування математики в особистому та суспільному житті» [11].

Для сформованості основних цілей навчання стереометрії здобувачам слід враховувати: ціль математичної освітньої галузі, означення базових понять математичної компетентності, особливості психічного розвитку здобувачів відповідної вікової категорії; відповідність змісту навчального геометричного матеріалу рівню сприйняття його здобувачами освіти; глибину вивчення дисципліни. Зрозуміло, що мета навчання математики не може полягати лише у засвоєнні здобувачами накопичених суспільством знань та навичок. Найбільш важливим є саме розвиток особистісних якостей здобувачів освіти. По традиції вважалося, що цей розвиток напряму залежить від обсягу засвоєних теоретичних математичних фактів, від кількості доведених теорем та від числа розв'язаних геометричних задач. Проте практика та досвід переконують в тому, що сьогодні математичні теореми та формули не застосовуються у повсякденному житті, а у випадку їх потреби інформацію легко можна знайти в інтернеті. Тому знання, які так важко отримували здобувачі в процесі навчання, досить швидко втрачаються ними, а залишаються саме набуті розумові якості особистості, вміння орієнтуватися у навколишньому середовищі та знаходити за потреби інформацію і оцінювати якість її. На сьогодні важливою є поведінка людини при нестандартних ситуаціях та вміння застосовувати креативні методи розв'язання проблем. Компетентнісний підхід у навчанні стереометрії повинен сприяти формуванню таких якостей. Геометричні знання і вміння в процесі своєї еволюції перетворилися на професійно значимі для багатьох спеціальностей. Стереометрія вирізняється певною вільнодумністю, небажанням застосовувати алгоритми, вона є досить потужним засобом особистісного розвитку здобувачів. Саме геометрія допомагає пізнавати оточуючий світ, в якому значна більшість предметів нагадує різноманітні геометричні фігури. Геометрія та стереометрія, зокрема, формують у здобувачів освіти просторову уяву, знайомлять їх з просторовими формами. Проте роль геометрії у навчанні не вичерпується лише її безпосереднім змістом. Саме наочні інтерпретації сприяють кращому розумінню властивостей геометричних фігур, їх прояву у реальному житті. Але одночасно з цим геометрія є однією з найбільш складних дисциплін для засвоєння здобувачами.

Беручи до уваги теоретичні засади та практичний досвід навчання геометрії в загальноосвітніх закладах України, завдання та мету компетентнісного навчання, можна виокремити декілька основних груп цілей навчання геометрії загалом. Однією з проблем змісту шкільної освіти сьогодення є надмірне завантаження здобувачів інформацією з різноманітних дисциплін, яка наповнена такими даними, що іноді навіть не пов'язані між собою. У цьому випадку через обмеженість обсягу підручників навчання дисципліни зводиться до формальності та сухого викладу навчального матеріалу. В результаті цього весь освітній процес перетворюється для здобувачів на важкий обов'язок, вони починають втрачати інтерес та мотивацію до навчання, відбувається погіршення якості освіти, а це не призводить жодним чином до формування основних якостей особистості. У зв’язку з цим слід обрати такі елементи геометричних знань, які можуть стати у нагоді в житті та діяльності, а також які виступають засобом формування ключових компетентностей здобувачів освіти. Крім цього, обраний обсяг фундаментальних геометричних знань має також бути підґрунтям продовження процесу навчання. Також варто не забувати, що здобувачі освіти можуть мають складати зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО) з математики або НМТ. Саме тому навчальна програма зі стереометрії має враховувати зміст програми зовнішнього незалежного оцінювання. Таким чином, курс стереометрії в загальноосвітніх закладах має бути, по-перше, цікавим та корисним (пояснювати зв’язки геометрії з навколишнім світом), а по-друге, він має забезпечувати хоч і мінімальний, але достатній рівень теоретичних знань та вмінь. Слід «забезпечити формування в учнів таких важливих навичок, як побудова математичних моделей реальних явищ і процесів; письмова та усна математичної мови (впорядкованість, чіткість, точність, обґрунтованість, лаконічність); використання приладів та інструментів, комп’ютерних технологій» [22]. Важливо також, що вивчення стереометрії сприяло розвитку у здобувачів освіти просторової уяви та інтуїції.

Зазначені вище цілі навчання стереометрії спрямовані насамперед на формування у здобувачів освіти базових знань зі стереометрії, а також математичної компетентності. Вирішити це завдання допомагає така педагогічна технологія, як «технологія повного засвоєння знань», авторами якої є американські психологи Дж. Керролл, Б. Блум [17]. Так, у своїх роботах Дж. Керролл звернув увагу на те, що при традиційному процесі навчання умови навчання майже завжди фіксовані: однаковими для всіх є час навчання, способи подання навчальної інформації тощо. І єдиним, що виявляється нефіксованим, є результат навчання, він різний для всіх здобувачів. У зв’язку з цим Дж. Керролл запропонував постійним параметром навчання зробити саме результат навчання, а змінними факторами – умови навчання, які мають підлаштовуватися під досягнення очікуваного результату кожним здобувачем. Б. Блум розробив свою так звану «таксономію Блума» [38], яка містить шість навичок мислення, розташовані у ієрархії від базового рівня до найбільш просунутого. Б. Блум та його послідовники ввели таке поняття, як «педагогічна таксономія» – це «побудова чіткої системи педагогічних цілей, в яких встановлені відповідні категорії та послідовності рівнів» [38]. Дослідники виокремили три основні області навчальної діяльності:

1) когнітивна область – це безпосередньо розумові навички здобувачів;

2) афективна область – вона включає в себе область почуттів та емоцій;

3) психомоторна область – до неї відносяться психофізичні вміння та навички.

Цілі когнітивної області передбачають безпосередньо запам’ятовування та відтворення здобувачами вивченого матеріалу, а також розв’язування таких завдань, що вимагають переосмислення наявних знань, побудову нових об’єднань отриманих знань, створення зовсім нових знань. Цілі саме цієї області визначають цілі у навчальних програмах, підручниках та посібниках. Цілями афективної області є формування емоційного ставлення здобувача до навколишнього середовища. Таке відношення відбувається через сприймання, здібності, особистісні хвилювання, інтерес, а цілі навчання спрямовані на формування відношення здобувачів до самого навчання. Цілі психомоторної області визначаються певними діями психомоторної діяльності здобувачів та пов’язані із формуванням навичок мовлення, письма та діяльнісних якостей особистості.

Крім зазначених навчальних цілей однією з провідних цілей навчання геометрії в старших класах є формування у здобувачів прийомів мислення, тому що саме «за допомогою цього компоненту відбувається розвиток інтелекту і формування ключових компетентностей цілісної особистості»

[13]. Психолого-педагогічні дослідження методистів свідчать про ефективність для продуктивного мислення оперування саме зоровими образами. Тому принципу наочності в процесі навчання геометрії відводиться саме основна роль. Також однією з цілей навчання геометрії є формування у здобувачів освіти абстрактного мислення, оскільки без нього фактично неможливе засвоєння теоретичних математичних знань. Фундаментом розвитку абстрактного мислення виступає здатність людини мислити образами, саме образне, тобто геометричне, мислення є найбільш характерною рисою мислення особистості. У зв'язку з цим методика навчання стереометрії має базуватися на використанні образного мислення в процесі навчальної діяльності здобувачів освіти. А саме, «необхідно забезпечити умови для формування, збереження і відтворення в пам'яті учнів образів за допомогою наочності, створення нових образів завдяки цілеспрямованому перетворенню в уяві здобувачів наявних образів» [28].

Побудова системи задач зі стереометрії з урахуванням цілей навчання на основі таксономії Б. Блума передбачає: конкретизацію базових пізнавальних цілей у формі когнітивних досягнень здобувачів освіти та за частинними складовими змісту дисципліни; інтерпретацію когнітивних результатів навчання здобувачів у формі певних видів запитань та задач; побудову різнорівневої системи завдань зі стереометрії до кожної теми змісту дисципліни.

1.2. Коротка характеристика змістових ліній курсу стереометрії

Зміст шкільного курсу стереометрії містить п'ять змістових ліній:

1) просторові геометричні фігури та їхні властивості;
2) геометричні побудови;
3) геометричні перетворення;
4) координати і вектори в просторі;
5) геометричні величини.

Виходячи з їх переліку, можна зробити висновок, що курс стереометрії призначений надалі розвивати основні змістові лінії курсу планіметрії. У зв'язку з цим «йому властивий систематизуючий та узагальнюючий виклад навчального матеріалу, широке використання аналогій, спрямованість на закріплення й розвиток умінь і навичок, набутих в основній школі» [19]. В курсі стереометрії не всі базові змістовні лінії курсу планіметрії розвиваються однаково. Досить чітко вивчаються геометричні фігури та їх властивості, розглядаються змістовно геометричні величини та їх вимірювання та обчислення, увагу приділено координатам і векторам. Але на противагу їм геометричні побудови, використовуючи циркуль та лінійку, майже не вивчаються. Проте належну увагу рекомендовано приділяти уявним побудовам, принципам зображення просторових фігур. Що стосується лінії геометричних перетворень, то вона взагалі відображена досить опосередковано. Так, можна зазначити, що поняття руху розглядається під час вивчення паралельних площин, поняття перетворення симетрії – під час вивчення властивостей просторових геометричних фігур.

Що стосується розділів стереометрії, то за навчальною програмою з геометрії для здобувачів освіти старших класів передбачається вивчення наступних розділів: паралельність прямих та площин у просторі; перпендикулярність прямих і площин у просторі; координати та вектори; многогранники, тіла обертання; об'єми та площі поверхонь геометричних [16]. Початок вивчення стереометрії визначається розглядом теми «Паралельність прямих і площин у просторі». Саме ця тема є фундаментом для вивчення стереометрії загалом. При цьому важливо не забувати зробити акцент на реалізації прикладної спрямованості теми. При цьому головним завданням вивчення цієї теми є формування чітких уявлень у здобувачів стосовно взаємовідносин між геометричними об'єктами (прямими, площинами) та між цими об'єктами та об'єктами навколишнього світу. Належну увагу слід приділити навчанню здобувачів освіти зображенню просторових фігур та застосуванню побудованих зображень до розв’язування задач.

В процесі вивчення теми «Перпендикулярність прямих і площин у просторі» формується фундамент для здійснення вимірювань у стереометрії. Потрібно приділити достатньої уваги таким поняттям, як відстань, кута саме як міри взаємного розміщення прямих та площин та поняття двогранного кута як геометричної фігури. Розгляд поняття перпендикулярності прямих та площин, поняття перпендикулярності площин, а також поняття відстані та кута допомагають розкрити здобувачам можливості моделювання. Вивчення навчального матеріалу розділу «Координати і вектори» сприяє розширенню понять векторів та їх координат на площині та, крім того, розкриває нові підходи до вивчення взаємного розташування прямих і площин у просторі (векторний та координатний методи у просторі).

Матеріал розділів «Многогранники» та «Тіла обертання» передбачає вивчення базових геометричних тіл та властивостей їх. При цьому досить важливим є застосування аналогій між властивостями вже відомих планіметричних та стереометричних фігур. Такий підхід при вивченні теми передбачає використання конструктивних означень, які дають можливість встановлювати аналогії між призмами та циліндрами, маж пірамідами та конусами тощо. В ході вивчення об’ємів та площ поверхонь тіл слід використовувати різні методи їх обчислення. При цьому досить корисним буде «проведення аналогій між способами вимірювання та обчислення об’ємів та площ, розбиття просторових фігур на частини для обчислення об’ємів та виконання розгортки просторової фігури для обчислення її бічної поверхні тощо» [12]. Як було зазначено вище, основною метою навчання геометрії є формування у здобувачів освіти ключових та предметних компетентностей, і зміст навчального матеріалу має бути засобом досягнення цього.

Також при вивченні усіх змістових ліній доцільно укрупнювати навчальний матеріал, звертати увагу здобувачів на аналогічні, схожі поняття, на взаємно обернені твердження, на ті операції, які сприятимуть цілісності здобутих знань. Досить корисно доповнювати систему задач завданнями з неповною або надлишковою, ймовірнісною або суперечливою інформацією, вправами на складання здобувачами задач з відповідних тем.

РОЗДІЛ 2
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИКОРИСТАННЯ ГРАФІЧНИХ МЕТОДІВ ПРИ ВИВЧЕННІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

2.1. Аналіз психолого-педагогічної, методичної літератури з проблеми дослідження

Графічним методом називають такий підхід у навчанні та дослідженнях, який передбачає використання графічних засобів (схем, діаграм, малюнків тощо) для візуалізації і структурування інформації з метою зрозумілішого подання та аналізу концепцій, процесів або певних даних.

Розглянемо декілька означень цього поняття декількох зарубіжних та українських методистів:

1. Рудольф Арнхейм (німецько-американський психолог та мистецтвознавець) трактує поняття графічного методу наступним чином: «Графічний метод є засобом дослідження структурних зв'язків між різними елементами та їхнім відображенням на площині» [40].

2. Едвард Тафт (американський інформаційний дизайнер) дає таке означення: «Графічний метод – це метод візуалізації даних і інформації за допомогою графічних засобів для підвищення зрозумілості, аналізу та комунікації» [29].

3. Ігор Герман (український психолог та методист) наводить своє означення цього поняття: «Графічний метод в навчанні – це використання графічних засобів, таких як схеми, графіки, малюнки, для сприяння кращому засвоєнню матеріалу та підвищенню пізнавальної активності здобувачів освіти» [15].

Хоча ці означення допомагають розуміти сутність графічного методу, проте вони можуть не враховувати деякі аспекти, а саме:

1. Технологічні аспекти: означення можуть не враховувати роль

сучасних технологій, таких, як комп'ютерні програми для створення графіків або візуалізації даних.

2. Контекст використання: означення можуть не зазначати, в яких конкретних сферах або дисциплінах графічний метод може бути застосований, або в яких випадках він найефективніший.

3. Практичні методики: означення не деталізують конкретні методики або підходи до використання графічного методу у навчанні, дослідженнях чи в професійній діяльності.

Загалом, графічний метод – це комплексний підхід, який вимагає використання як методологічних принципів, так і практичних навичок в роботі з графічними засобами для досягнення кращого розуміння, візуалізації та комунікації інформації.

В шкільному курсі стереометрії (геометрії простору), графічний метод часто використовується для відображення та аналізу геометричних об'єктів у тривимірному просторі. Одним з найчастіших означень графічного методу в цьому контексті є наступне: «Графічний метод в стереометрії – це метод візуалізації просторових взаємозв'язків між точками, прямими, площинами та іншими геометричними об'єктами за допомогою плоских графічних зображень, які допомагають зрозуміти їхню розташованість та властивості у тривимірному просторі» [34].

Це означення відображає основний підхід до використання графічного методу в стереометрії, де створення різних графічних зображень (проекцій, перерізів, розгорток тощо) допомагає аналізувати і розуміти конфігурації та взаємне розташування об'єктів у просторі. Основною метою графічного методу в стереометрії є спрощення візуалізації просторових структур і полегшення розв'язання завдань, пов'язаних з геометричними об'єктами у тривимірному просторі.

Відмінною рисою графічного методу виступає його наочність, яка значно спрощує процес доведення результатів проведеного аналізу умови задачі для широкого кола здобувачів. Для правильного наочного відтворення заданих даних необхідно дотримуватись техніки та методики побудови зображень фігур.

Питання стосовно формування та розвитку вмінь здобувачів старших класів зображувати стереометричні фігури та їх різноманітні комбінації віднайшло своє відображення в роботах відомих педагогів та методистів, як Л.С. Виготський, Г.С. Костюк [24], В.А. Крутецький, В.О. Оніщук, Л.М. Фрідман [34], П.О. Шеварьов. У своїх роботах вони висвітлили питання стосовно психолого-дидактичних основ формування у здобувачів наукових понять. Про теоретичні та методичні аспекти формування у здобувачів освіти вмінь та навичок будувати зображення стереометричних фігур, а також їх комбінацій, знайшли своє відображення у наукових та методичних працях Л.М. Лоповка, В.М. Савченка [30], М.Ф. Четверухіна [35], В.М. Литвиненка, Я.Є. Гольдберга та інших. Проте слід зауважити, що наукові засади теорії зображень просторових фігур за допомогою застосування методів зображень із використанням проекцій в курсі стереометрії розробив та обґрунтував саме професор М.Ф. Четверухін. Він ввів ідею застосування основної площини для того, щоб побудувати зображення, враховуючи вимоги до малюнка в умовах процесу навчання здобувачів. У подальшому його послідовники більш деталізували та популяризували ідеї наставника, пропонуючи вже власні методики побудови зображень просторових фігур відповідно до типу стереометричних задач, які потрібно розв’язати.

Наведемо огляд ще декількох публікацій, які стосуються питань використання графічних методів при вивченні стереометрії; цей огляд допоможе зрозуміти, як графічні методи впливають на процес навчання та розуміння стереометричних концепцій. Наведемо деякі здобутки та публікації, що висвітлюють цю тему:

1. "The Role of Graphic Methods in Teaching and Learning Spatial Geometry" (Autio, O. & Björn, P., 2016) – ця стаття досліджує вплив графічних методів на навчання та розуміння стереометрії. Автори

досліджують, як використання графічних інструментів, таких, як комп'ютерні програми для створення тривимірних зображень, може полегшити учням засвоєння складних концепцій стереометрії.

2. "Visualization of Three-Dimensional Geometry in the Mathematics Classroom" (Maletsky, E. M., 2015) – ця стаття розглядає роль візуалізації та графічних методів у навчанні стереометрії. Автор досліджує, як використання графічних засобів, таких, як тривимірні моделі та проекційні методи, може допомогти учням краще розуміти геометричні об'єкти у просторі.

3. "Using Computer Graphics in the Teaching of Stereometry" (Yashina, M. V. & Sheremetyeva, E. N., 2020) – у цій статті досліджується використання комп'ютерної графіки при навчанні стереометрії. Автори розглядають роль комп'ютерних програм та інструментів у створенні візуальних допоміжних засобів для кращого розуміння геометричних об'єктів у просторі.

4. "Interactive Visualization in Geometry Teaching" (Fortuny, J. M. & Miralles, A., 2013) – ця стаття досліджує використання інтерактивної візуалізації у навчанні геометрії, зокрема, стереометрії. Автори аналізують, як використання комп'ютерних програм і інтерактивних засобів може сприяти активній участі учнів у навчальному процесі та полегшити їхнє засвоєння геометричних концепцій.

5. "Stereometry and Interactive Geometry Software: A Case Study" (Trouche, L. & Drijvers, P., 2010) – ця стаття розглядає використання інтерактивного програмного забезпечення у вивченні стереометрії. Автори проводять дослідження з використання комп'ютерних програм для розв'язання стереометричних завдань та досліджують вплив цих програм на підвищення мотивації та розуміння учнів.

Ці дослідження та статті підкреслюють важливість графічних методів у навчанні стереометрії. Вони вказують на можливості використання сучасних технологій, комп'ютерної графіки та інтерактивних засобів для полегшення візуалізації та розуміння геометричних об'єктів у тривимірному просторі.

2.2. Графічні методи в стереометрії

Розглянемо основні конструктивні методи, які використовуються в процесі навчання стереометрії.

Метод уявних (умовних) побудов

Геометричні побудови, які вивчалися в планіметрії, виконувалися в одній площині за допомогою креслярських інструментів. Інструментів, які б залишали "слід" безпосередньо в просторі, не існує. Крім того, при побудові просторових фігур з'являється новий елемент – площина, яку не можна побудувати звичайними креслярськими інструментами. Вже ці обставини говорять про те, що побудови в просторі мають велику специфіку. Для з'ясування цих особливостей необхідно точно визначити, що означає виконати ту або іншу побудову в просторі. Відповісти на це питання допомагають наступні аксіоми геометричних побудов в просторі.

1. Якщо побудовані елементи, що визначають положення площини в просторі, то площина, що проходить через ці елементи, вважається побудованою.
2. Якщо побудовані дві площини, що перетинаються, то лінія їх перетину також вважається побудованою.
3. Якщо дано площину, то вважається, що в ній можна виконати усі планіметричні побудови [19].

Виконати побудову в просторі – це означає звести її до скінченого числа наступних трьох основних побудов:

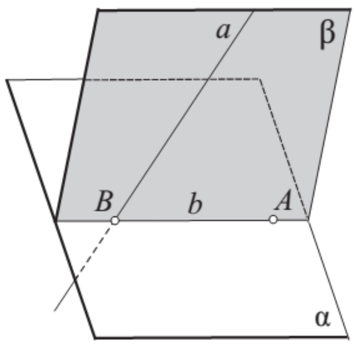
1) побудова площини через три точки, що не лежать на одній прямій;
2) побудова лінії перетину двох даних площин, що перетинаються;
3) виконання планіметричних побудов в кожній площині;

Як видно, побудови в просторі розпочинаються з деяких умовних домовленостей. Тому ці побудови не носять конструктивного характеру. Вони виконуються подумки, в уяві. Супроводжуючий їх малюнок носить ілюстративний характер. Такі побудови в просторі називаються *уявними* або *умовними*.

За допомогою уявних побудов встановлюється існування просторових фігур. Відмітимо, що питання існування в математиці належить до найважливіших теоретичних положень.

Наведемо приклади уявних побудов. Щоб підкреслити зв'язок уявних побудов з обґрунтуванням існування фігур, наведемо дві форми запису розв'язання першої задачі. Спочатку покажемо звичайний запис (з використанням слів: "візьмемо точку", "побудуємо точку", "проведемо площину", "побудуємо площину" і т. д.), потім – запис з використанням слова "існує".

Задача 2.1. Побудуйте точку перетину даної прямої a з даною площиною α (мал. 2.1).



Мал. 2.1

Розв'язання.

І спосіб запису.

1) Візьмемо на площини α деяку точку A;

2) через пряму a і точку A проведемо площину β;

3) площини α і β, маючи спільну точку A, перетнуться по деякій прямій b;

4) якщо прямі a і b не паралельні, то в площині β побудуємо точку

перетину цих прямих – точку *B*.

Ця точка є шуканою. Якщо *a* || *b*, то задача розв'язку не має.

II спосіб запису.

1) На площині *a* існує деяка точка *A*;

2) існує також площина β, що проходить через пряму *a* і точку *A*;

3) оскільки площини α і β мають спільну точку *A*, те існує пряма b – лінія їх перетину;

4) якщо прямі *a* і b не паралельні, то в площині β існує точка перетину цих прямих – точка *B*.

Ця точка є шуканою. Якщо *a* || *b*, то задача розв'язку не має.

Задача 2.2. Через точку *A*, що лежить поза даною прямою *a*, проведіть пряму, паралельну прямій *a*.

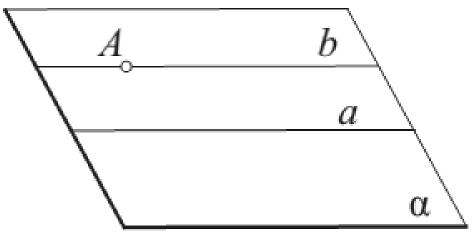
Розв'язання.

1) Через пряму *a* і точку *A* (мал. 2.2) проведемо площину α;

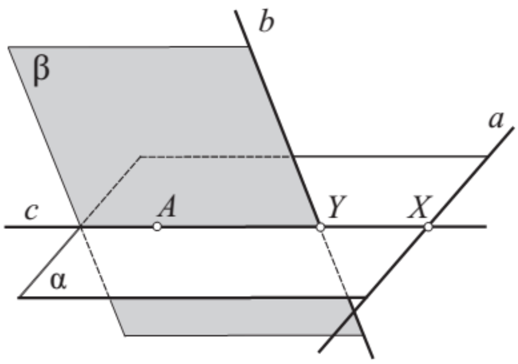
2) в цій площині через точку *A* проведемо *b* || *a*.

Задача завжди має єдиний розв’язок.

Задача 2.3. Через точку *A* проведіть пряму, що перетинає дві дані прямі, які перетинаються, *a* і b (мал. 2.3).



Мал. 2.2



Мал. 2.3

Розв'язання.

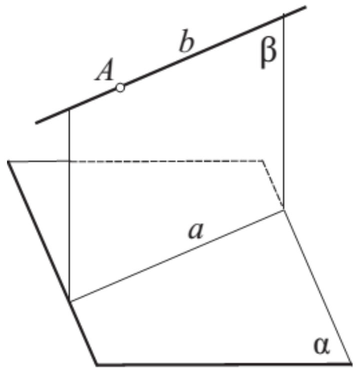
1) Оскільки шукана пряма повинна проходити через точку *A* і перетинати пряму *a*, то вона повинна лежати в площині α, що проходить через точку *A* і пряму *a*;

2) аналогічно, шукана пряма повинна лежати в площині β, що проходить через точку A і пряму b;

3) тому шукана пряма, якщо вона існує, будується як лінія перетину c площин α і β.

Якщо пряма c виявиться паралельною одній з даних прямих a або b, то задача розв'язку не має.

Задача 2.4. Через точку A, що лежить поза площиною α, проведіть пряму, паралельну цій площині (мал. 2.4).



Мал. 2.4

Розв'язання.

1) В площині α проведемо довільну пряму a;

2) через пряму a і точку A проведемо площину β;

3) в площині β через точку A проведемо $b \parallel a$. Пряма b є шуканою (на основі ознаки паралельності прямої і площини [26]).

Задача має нескінченну множину розв'язків.

Задача 2.5. Через дану точку A проведіть площину, перпендикулярну прямій a.

Розв'язання.

1-й випадок: нехай $A \in a$ (мал. 2.5, а). 1) Візьмемо деяку точку $B \notin a$;

2) через точку B і пряму a проведемо площину α;

3) далі візьмемо точку $C \notin a$;

4) через точку C і пряму a проведемо площину β;

5) через точку A в площинах α і β проведемо відповідно прямі b і c, перпендикулярні до прямої a;

6) через прямі b і c проведемо шукану площину γ.

Можна довесть, що $a \perp \gamma$. Задача завжди має єдиний розв'язок.

2-й випадок: нехай А $\notin a$ (мал. 2.5, б). Виконаємо наступні побудови (запишемо їх в символічних позначеннях) :

1) $\alpha = (\mathrm{A}; a)$

2) С $\notin \alpha$;

3) $\beta =$ (С; a);

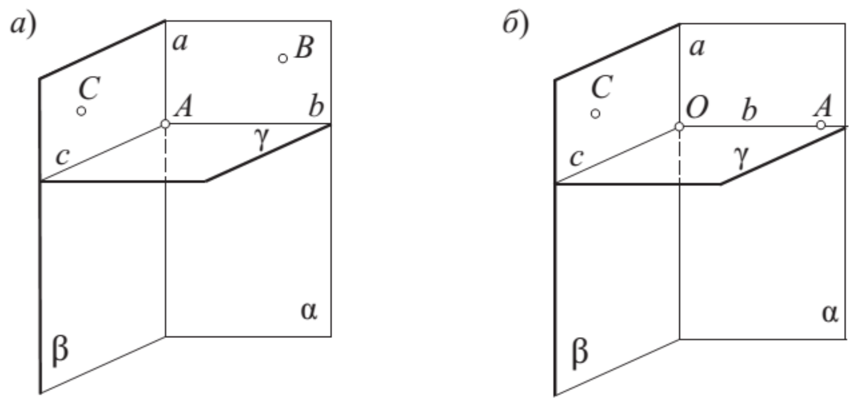
4) b: (А$\in b$, $b \subset \alpha$, $b \perp a$) ;

5) О = $a \cap b$;

6) c: (О $\in c$, $c \subset \beta$, $c \perp a$);

7) $\gamma =$ (b; c) – шукана площина.

Задача завжди має єдиний розв'язок.



Мал. 2.5

Метод проекції

У стереометрії існує два види геометричних побудов та відповідно два методи побудов: метод уявних побудов і метод проекцій (задачі на проекційному кресленні). Розглянемо новий вид побудов в просторі – побудови на проекційному кресленні (метод проекцій).

Для цього розглянемо наступні поняття: паралельна проекція, властивості паралельного проектування, зображення фігури, побудова зображень плоских і просторових фігур.

Розглянемо площину α і пряму l, яка перетинає цю площину (мал. 2.6, а). Візьмемо в просторі довільну точку *А*, проведемо через неї пряму $l_1 \parallel l$. Нехай пряма l_1 перетинає площину α в точці A_1. Точка A_1 називається *паралельною проекцією* точки *А* на площину α в даному напрямі *l*. Площина α називається *площиною проекцій*; пряма *l* – *напрямом проектування*; пряма l_1 – прямою проектування точки *А*.

Множина Φ_1 проекцій усіх точок фігури Ф(мал. 2.6, б) називається *паралельною проекцією фігури Ф на площину* α *в даному напрямі l.*

Властивостей паралельного проектування:

При паралельному проектуванні для прямих, не паралельних напряму проектування, виконуються наступні властивості:

1. Проекція прямої є пряма, проекція відрізку – відрізок.

2. Проекції паралельних прямих паралельні.

3. Відношення відрізків, що лежать на паралельних прямих, зберігається.

4. Якщо трикутник лежить в площині, паралельній площині проекцій, то він дорівнює своїй проекції.

Доведення.

1) Нехай точка A_1 – проекція точки *А* на площину α у напрямі *l* і точка В $\in a$ (мал. 2.6, в), $\beta = (a;\ \mathrm{AA}_1)$, $\beta \cap \alpha = a_1$. Доведемо, що пряма a_1 є проекцією прямої *а*;

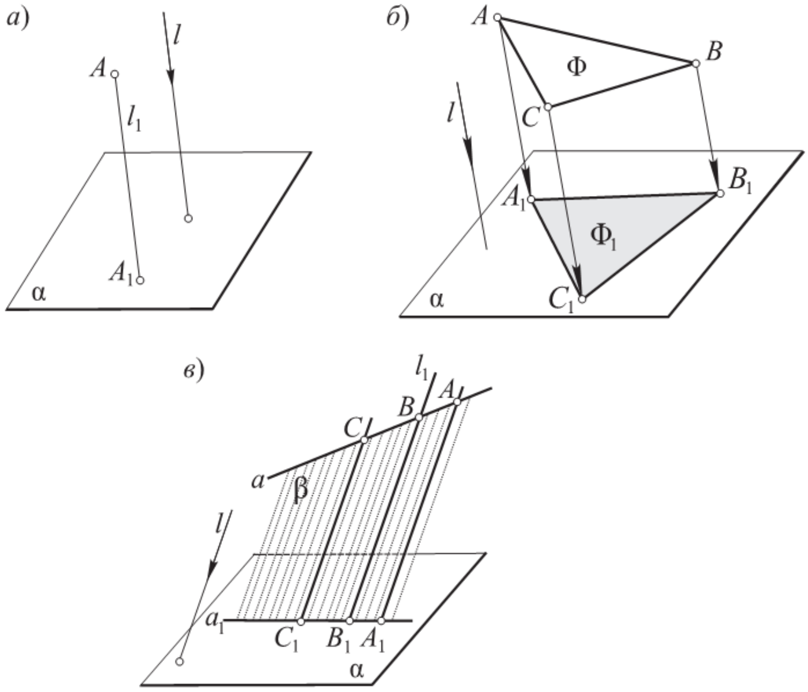
2) для цього в площині β через точку *В* проведемо $l_1 \parallel \mathrm{AA}_1$;

3) нехай $l_1 \cap a_1 = \mathrm{B}_1$. Отримана точка B_1 є проекцією точки *В* на площину α у напрямі *l*. Дійсно: ($l_1 \parallel \mathrm{AA}_1$ і $\mathrm{AA}_1 \parallel l$) $\Rightarrow l_1 \parallel l$;

4) аналогічними міркуваннями показується, що кожна точка прямої a_1 є проекцією деякої точки прямої *а;*

5) отже, при вказаному паралельному проектуванні пряма *а* переходить в пряму a_1.

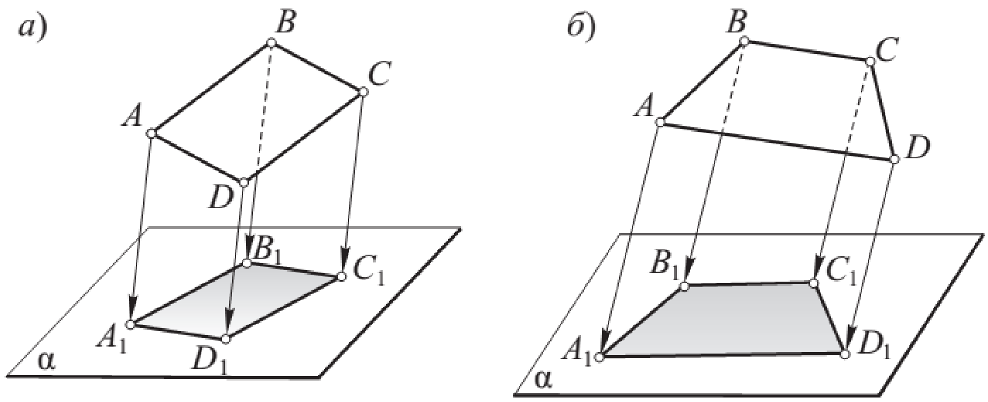
Примітка. Площина $\beta = (a; AA_1)$, що проходить через пряму a (див. мал. 2.6, в) і пряму проектування AA_1 деякої точки $A \in a$, *називається площиною проектування прямої а.*



Мал. 2.6

У наступних задачах розглядаються проекції фігур, розташованих в площинах, які не паралельні напряму проектування.

Задача 2.6. Доведіть, що паралельною проекцією паралелограма (мал. 2.7, а) є паралелограм.



Мал.2.7

Доведення.

1) Оскільки при паралельному проектуванні паралельні прямі переходять в паралельні прямі, то протилежні сторони паралелограма (вони

паралельні між собою) перейдуть в паралельні відрізки;

2) тому паралельною проекцією цього паралелограма *ABCD* буде паралелограм $A_1B_1C_1D_1$.

Задача 2.7. Доведіть, що при паралельному проектуванні медіани трикутника переходять в медіани трикутника проекції.

Задача 2.8. Доведіть, що при паралельному проектуванні трапеція (мал. 2.7, б) переходить в трапецію з тим же самим відношенням основ.

Доведення.

1) Оскільки при паралельному проектуванні паралельні прямі переходять в паралельні прямі, то основи трапеції (вони паралельні між собою) перейдуть в паралельні відрізки;

2) тому паралельною проекцією трапеції є трапеція;

3) крім того, при паралельному проектуванні зберігається відношення паралельних відрізків. Отже, трапеція-проекція має таке ж відношення основ, як і дана трапеція.

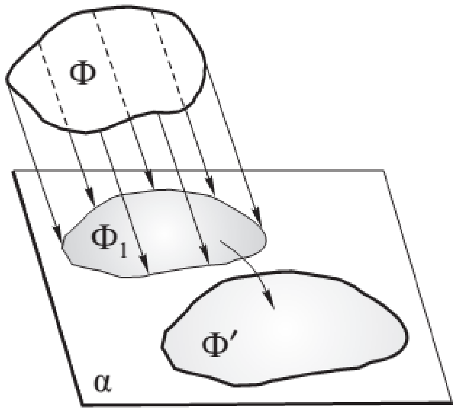
РОЗДІЛ 3
ЗАСТОСУВАННЯ ГРАФІЧНИХ МЕТОДІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАЧ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

3.1. Задачі на побудову зображень плоских фігур

Зображення фігур і побудови на зображеннях призводять до нового виду задач в стереометрії. Ці побудови, на відміну від уявних (умовних) побудов, як правило, не допускають довільності в побудові і виконуються за допомогою креслярських інструментів. Побудови на зображеннях спираються на метод проекцій, розглянутий вище.

Що таке зображення фігури? Погодьтеся, що не завжди зручно користуватися паралельною проекцією фігури. Якщо розміри проекції фігури незручні для розгляду (дуже великі або, навпаки, дуже малі), то проекцію замінюють подібною фігурою, із зручними розмірами. Тому необхідно ввести поняття "зображення фігури".

Фігура Φ' називається *зображенням фігури* Φ, якщо фігура Φ' подібна до проекції Φ_1 даної фігури Φ (мал. 3.1).



Мал. 3.1

З означення поняття зображення фігури і властивостей паралельного проектування виходить ряд властивостей зображень. *Наслідки* (властивості зображень):

1. Пряма зображається прямою, відрізок – відрізком.

2. Паралельні прямі зображуються паралельними прямими.

3. Паралельні відрізки зберігають своє відношення на зображенні.

4. Якщо трикутник лежить в площині, паралельній площині малюнку, то він зображується трикутником, подібним до даного.

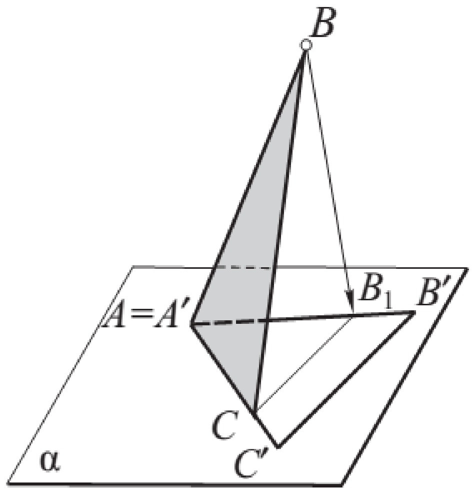
5. Коло зображується еліпсом.

Побудова зображень плоских фігур пов'язана з умінням зображувати просту плоску фігуру – трикутник. Розглядаючи сонячну тінь від трикутника на екрані, можна помітити, що його проекція (тобто і його зображення) може бути яким завгодно трикутником. Досвід підказує наступну теорему.

Теорема 3.1. На площині малюнка в якості зображення даного трикутника може бути взятий абсолютно довільний трикутник.

Доведення.

1) Візьмемо в площині α (мал. 3.2) довільний трикутник $A'B'C'$ і доведемо, що він може бути вибраний в якості зображення даного трикутника *ABC*;



Мал. 3.2

2) трикутник *ABC* розташуємо так, щоб $A = A'$, $C \in A'C', B \notin a$;

3) неважко вибрати напрям проектування, при якому трикутник *ABC* проектується в трикутник, подібний до трикутника $A'B'C'$. Для цього побудуємо $\triangle A'CB_1 \sim \triangle A'C'B'$ (проведемо $CB_1 \| C'B'$);

4) якщо тепер в якості напряму проектування виберемо напрям BB_1, то трикутник *ABC* проектується в трикутник$A'CB_1$, подібний до довільно узятого трикутника $A'B'C'$.

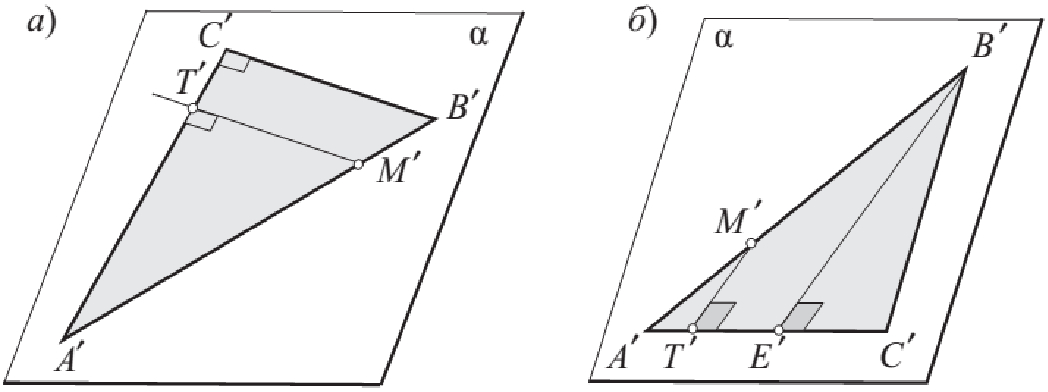
Задача 3.1. У площині α дано трикутник $A'B'C'$ – зображення деякого прямокутного трикутника *ABC* (мал. 3.3, а). Кут C' – зображення прямого кута *C*. На гіпотенузі *AB* узята точка *M*. Побудуйте зображення перпендикуляра *MT*, проведеного з точки *M* до катета *AC*.

Розв'язання.

1) Оскільки $MT \perp AC$ і $BC \perp AC$, то $MT \parallel BC$;

2) паралельність відрізків зберігається на зображенні. Тому зображенням перпендикуляра *MT*, проведеного з точки *M* до катета *AC*, являється відрізок $M'T' \parallel B'C'$.

Задача 3.2. У площині α дано трикутник $A'B'C'$ – зображення деякого рівнобедреного трикутника *ABC* (мал. 3.3, б). Сторони $A'B'$ і $B'C'$ зображають бічні сторони трикутника *ABC*. На стороні *AB* узята точка *M* і проведений перпендикуляр *MT* до основи *AC*. Побудуйте зображення цього перпендикуляра.



Мал. 3.3

Розв'язання.

1) Спочатку побудуємо зображення медіани *BE*, проведеної до основи *AC*: медіана *BE* зобразиться медіаною $B'E'$;

2) відрізок $B'E'$ одночасно є і зображенням висоти *BE*, проведеної до основи трикутника-оригіналу;

3) оскільки $MT \parallel BE$, то відрізок MT зобразиться відрізком $M'T' \parallel B'E'$.

Задача 3.3. У площині α дана трапеція $A'B'C'D'$ – зображення деякої рівнобедреної трапеції $ABCD$ (мал. 3.4, а). Сторони $A'B'$ і $C'D'$ зображують бічні сторони трапеції $ABCD$. На стороні AB узята точка M і проведений перпендикуляр MT до основи AD. Побудуйте зображення цього перпендикуляра.

Розв'язання.

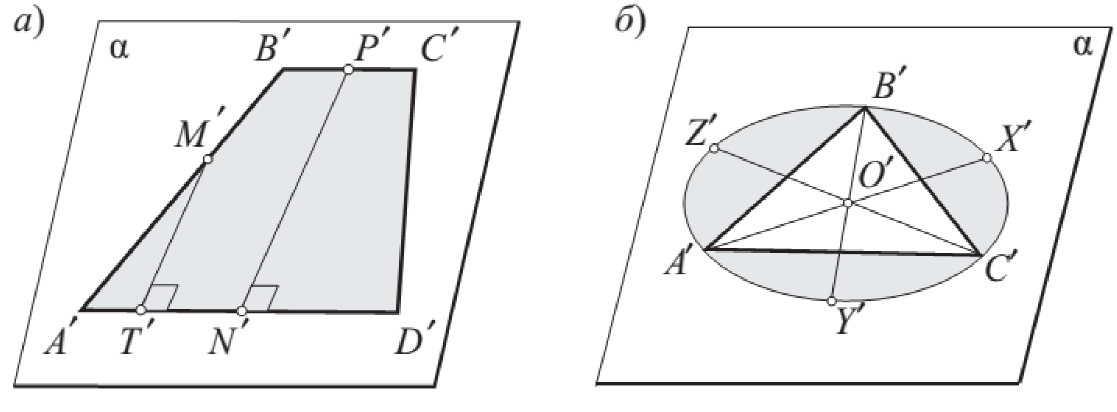
1) Спочатку побудуємо зображення відрізку PN, який сполучає середини основ трапеції $ABCD$. Цей відрізок зобразиться відрізком $P'N'$, який також сполучає середини основ трапеції $A'B'C'D'$;

2) в рівнобедреній трапеції $ABCD$ відрізок PN перпендикулярний її основам;

3) оскільки $PN \perp AD$ і $MT \perp AD$, то $MT \parallel PN$;

4) тому відрізок MT зобразиться відрізком $M'T'$, паралельним відрізку $P'N'$.

Задача 3.4. У площині α даний трикутник $A'B'C'$ (мал. 3.4, б) – зображення рівностороннього трикутника ABC. Навколо трикутника ABC описано коло. Побудуйте його зображення (за 6 точками).



Мал. 3.4

Розв'язання.

1) Коло, описане навколо трикутника ABC, зобразиться еліпсом. Три точки шуканого еліпса відомі – це вершини трикутника $A'B'C'$. Залишилося побудувати ще три точки;

2) побудуємо спочатку зображення центру O кола, описаного навколо рівностороннього трикутника ABC. Центр O в рівносторонньому трикутнику співпадає з точкою перетину медіан цього трикутника [7]. Медіани трикутника ABC зобразяться медіанами трикутника $A'B'C'$, центр O – точкою O'– точкою перетину медіан трикутника $A'B'C'$;

3) діаметри кола AX, BY і CZ зобразяться відрізками $A'X', B'Y', C'Z'$, для яких точка O' буде серединою;

4) тому для побудови точкиX' продовжимо відрізок $A'O'$ за точку O' і на продовженні відкладемо відрізок $O'X' = O'A'$;

5) аналогічно будуються точки Y' і Z' ;

6) через точки A', B', C', X', Y', Z' проводимо еліпс. Він і буде зображенням кола, описаного навколо трикутника ABC.

3.2. Задачі на зображення просторових фігур

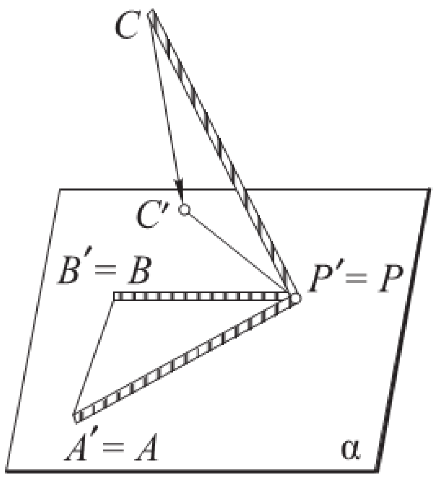
В основі побудов різних просторових фігур лежить уміння будувати зображення тетраедра і паралелепіпеда. Тому розпочнемо саме з цих фігур. Побудова зображень просторових фігур спирається на один простий факт, до вивчення якого ми приступаємо. Спочатку сформулюємо наступне означення.

Фігура, утворена трьома відрізками, що виходять з однієї точки і не лежать в одній площині, називається *триножником* [21]. Триножник – просторова фігура. Позначення: *PABC*, де *P* – *вершина* триножника, *PA*, *PB* і *PC* – відрізки, що виходять з вершини.

Наступна теорема примітна тим, що з її допомогою можна будувати не лише правильні, але і що дуже важливе – наочні зображення.

Теорема 3.2. Нехай дано триножник *PABC* (мал. 3.5). Можна підібрати напрям проектування на площину малюнку таким чином, що трикутник *PAB* зобразиться рівним трикутником $P'A'B'$, а відрізок *PC* – довільним відрізком $P'C'$.

Доведення.



Мал. 3.5

1) Нехай на площині малюнка – площині α – є $\triangle$ A′P′B′, рівний $\triangle APB$ цього триножника, а P′C′ – довільний відрізок в площині α;

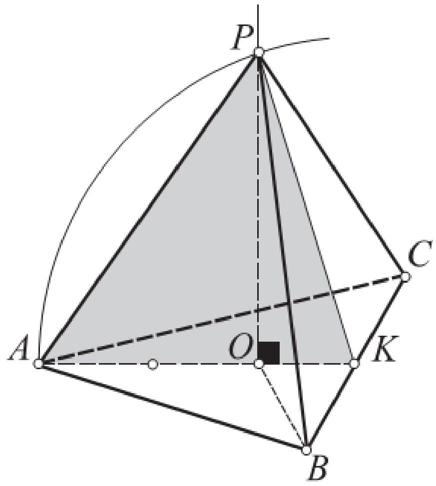
2) з'ясуємо, як же треба прикласти триножник *PABC* до площини малюнка і як потім вибрати напрям проектування, щоб відрізки PA, PB і PC триножника проектувалися відповідно у відрізки P′A′, P′B′, P′C′;

3) зробити це зовсім просто: трикутник *PAB* необхідно поєднати з трикутником P′A′B′ і після цього в якості напряму проектування узяти напрям CC′.

Примітки. 1) Розглянута теорема дозволяє виділити в просторовій фігурі деякий трикутник *PAB* і зобразити його без спотворення. Зазвичай в якості такого трикутника вибирається той, в якому зосереджена більша кількість відомих елементів фігури, що є важливими для розв'язування задач. Наочність зображення підвищується. Безумовно, це допомагає швидше знайти розв’язок задачі;

2) частіше трикутник *PAB* будується лише з точністю до подібності – без спотворення його кутових елементів;

Задача 3.5. На малюнку 3.6 зображені: правильний тетраедр; перпендикуляр *PO*, проведений з вершини *P* на площину *ABC*; $\triangle APK$, в якому *PO* є висотою, причому в цілях наочності цей трикутник зображений без спотворення. Припустимо, що вам необхідно самостійно виконати цей малюнок. Які побудови і в якій послідовності ви б виконали?



Мал. 3.6

Розв'язання.

Очевидно, що почати потрібно з побудови трикутника *APK*. Побудуємо його без спотворення лінійних (а отже, і кутових) елементів. Для цього помітимо, що якщо *PA* = *PB* = *PC*, то ортогональні проекції цих відрізків також рівні: *OA* = *OB* = *OC*. Тому точка *O* є центром описаного кола.

У рівносторонньому трикутнику *AB*С точка *O* лежить на медіані *AK*, причому $AO = \frac{2}{3}AK$. Щоб трикутник *APK* зобразився без спотворення лінійних розмірів, скористаємося триножником *KPAB* і розташуємо його так, щоб трикутник *KPA* виявився паралельним площині малюнка. Відрізок *KB* при цьому можна зображувати довільним відрізком. Отже, переходимо до наступних побудов:

1) на горизонтальній прямій відкладаємо відрізок *AK* у натуральну величину (див. мал. 3.6) і ділимо його на три рівні частини; будуємо точку *O* так, щоб $AO = \frac{2}{3}AK$;

2) через точку *O* проводимо пряму, перпендикулярну до *AK* (прямий кут зображуємо без спотворення);

3) проводимо коло (*K*; *KA*), при перетині кола з побудованим

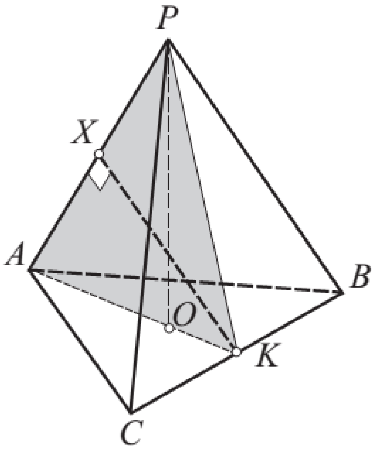
перпендикуляром отримуємо точку P (в результаті побудований трикутник APK);

4) відрізок KB будуємо на малюнку довільно, керуючись тільки міркуваннями наочності креслення (наприклад, точку B потрібно вибирати так, щоб відрізки PO і PB не накладалися один на одного);

5) точку C будуємо з урахуванням того, що $KC = KB$;

6) будуємо ребра тетраедра AB, AC, PB і PC. Шукані побудови знайдені.

Задача 3.6. Дано правильний тетраедр $PABC$ (мал. 105). Побудуйте перпендикуляр до прямих PA і BC, що перетинаються, кінці якого лежали б на цих прямих. Знайдіть довжину цього перпендикуляра, якщо ребра тетраедра дорівнюють a.



Мал. 3.7

Розв'язання.

1) Будуємо зображення правильного тетраедра так, як і при розв’язанні попередньої задачі;

2) неважко встановити, що PA і BC – перпендикулярні прямі (див. задачу вище);

3) в цьому випадку досить з точки K в площині PAK провести перпендикуляр KX до прямої PA (провести висоту трикутника PAK). Перпендикуляр KX проводимо до прямої PA без спотворення прямого кута. Враховуючи, що трикутник PAK – рівнобедрений, точка X – середина ребра

PA;

4) відрізок *KX* – шуканий перпендикуляр до прямих *PA* і *BC*, що перетинаються. Дійсно: $PA \perp KX$ за побудовою; $BC \perp KX$, оскільки $BC \perp PAK$ і $KX \subset PAK$;

5) обчислення довжини перпендикуляра *KX* зводиться до знаходження катета *KX* прямокутного трикутника *PXK*, в якому $PK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $PX = \frac{a}{2}$:

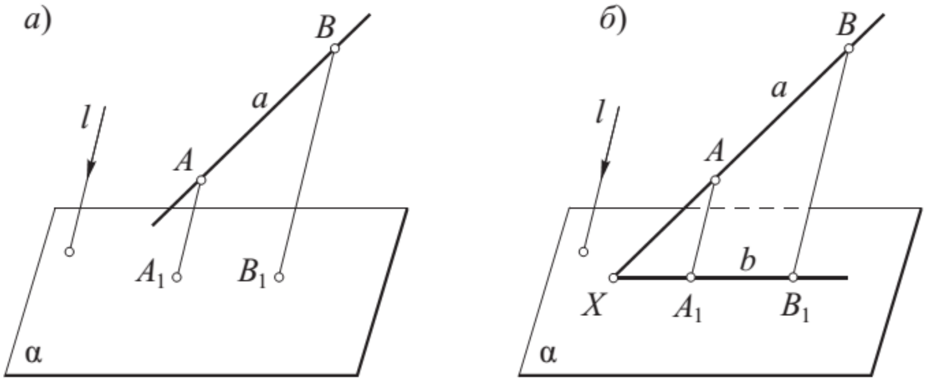
$$KX = \sqrt{PK^2 - PX^2} = \sqrt{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Відповідь: $KX = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

3.3. Задачі на побудову на зображеннях

Повернемося до задач на уявні побудови і подивимося, чи не можна їх переформулювати в задачі на побудову на зображеннях. У задачі 3.1 вимагалося побудувати точку перетину даної прямої *a* з даною площиною α. Сформулюємо її таким чином.

Задача 3.7. На малюнку 3.8, а, б зображені пряма *a*, площина α, точки *A* і *B* даної прямій і їх проекції A_1 і B_1 на площину α. Побудуйте точку перетину цієї прямої *a* з даною площиною α.



Мал. 3.8

Розв'язання.

1) При розв'язанні задачі 3.1 в площині α бралася довільна точка. У

цій задачі в цьому немає необхідності. В якості такої точки можна узяти не довільну, а дану точку A_1;

2) при розв'язанні задачі 3.1 проводилася площина $\beta = (a; A_1)$. Тут ми теж розглянемо площину $\beta = (a; A_1)$;

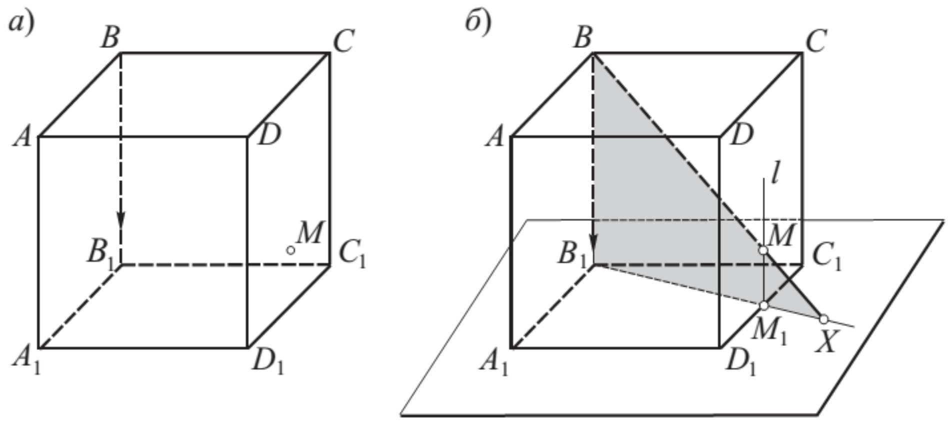
3) як і раніше, побудуємо пряму $b = \alpha \cap \beta$. Але в цьому завданні ця пряма будується єдиним чином: $b = A_1B_1$;

4) як і при розв'язанні задачі 3.1, побудуємо точку перетину прямих a і b: $X = a \cap b$.

Точка X – шукана точка.

Задачу 3.1 можна сформулювати і таким чином.

Задача 3.8. (Конкретизація попередньої задачі на прикладі куба.) На малюнку 3.9, а, б зображені куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і точка M, що належить грані D_1DCC_1. Побудуйте точку перетину прямої BM з площиною нижньої основи куба.



Мал. 3.9

Розв'язання.

1) Ця задача близька до попередньої. Приймемо за напрям проектування бічне ребро куба і знайдемо проекції точок B і M на площину нижньої основи (див. мал. 3.9, б). Проекцією точки B буде точка B_1, а проекцією точки М – точка $M_1 = l \cap D_1C_1$, де $l \parallel CC_1$;

2) подальші побудови такі ж, як і при розв'язуванні задачі 3.7:

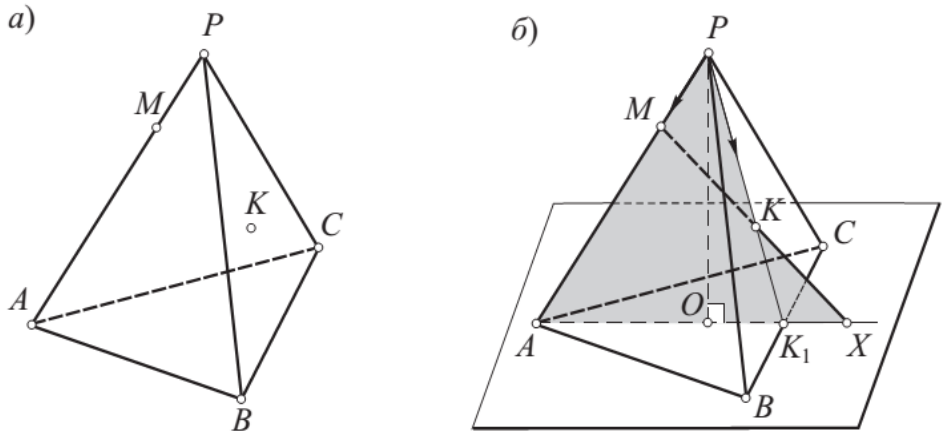
а) проводимо пряму B_1M_1, при цьому прямі BM і B_1M_1 розташовуються в одній площині проектування β;

б) будуємо точку Х $=BM \cap B_1M_1$.

Точка X – шукана точка.

Розглянемо ще один приклад "перекладу" задачі 3.1 в задачу на побудову на зображенні.

Задача 3.9. На малюнку 3.10, *а* зображені тетраедр $PABC$, точка M, що належить ребру PA, і точка K, що належить грані PBC. Побудуйте точку перетину прямої MK з площиною основи тетраедра.



Мал. 3.10

Розв'язання.

1) У даному випадку зручно скористатися не паралельним проектуванням, а *центральним* [30]. При центральному проектуванні на деяку площину прямі проектування "виходять" з деякої точки, що називається *центром* проектування. Застосуємо центральне проектування з центром P на площину ABC (мал. 3.10, б). Проекцією точки M буде точка A, проекцією точки K – точка $К_1 = РК \cap СВ$;

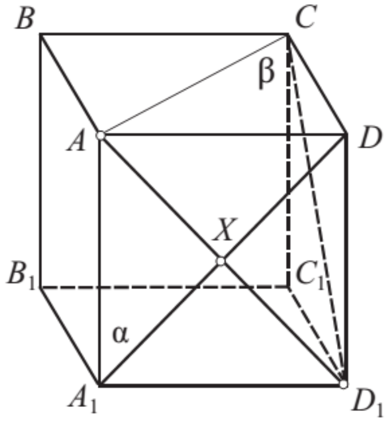
2) подальші побудови такі ж, як і при розв'язуванні задачі 3.8:

а) проводимо пряму $АК_1$;

б) прямі MK і $АК_1$ лежать в одній площині проектування $РАК_1$; будуємо точку $Х=МК \cap АК_1$. Точка X – шукана.

Примітка. Як видно, при побудовах на зображенні немає довільності в побудові точок, прямих, площин, отже, їх загальних елементів. У цьому і полягає головна особливість цих побудов. Звернемося до задачі 3.3 і покажемо, яким чином її можна переформулювати в задачу на побудову на зображенні.

Задача 3.10. На малюнку 3.11 зображені куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і дві прямі A_1D і D_1C, що перетинаються. Побудуйте пряму, що проходить через точку A і перетинає прямі A_1D і D_1C.



Мал. 3.11

Розв'язання.

1) При розв'язанні задачі 3.3 проводили дві площини α і β. Такі ж площини проведемо і зараз: $\alpha =$ (А; A_1D), β = (А; D_1C). Якщо при розв'язуванні задачі 3.3 ці площини проводилися чисто умовно, то тут положення площин повністю визначене: α – площина передньої грані куба, β – площина АD_1C;

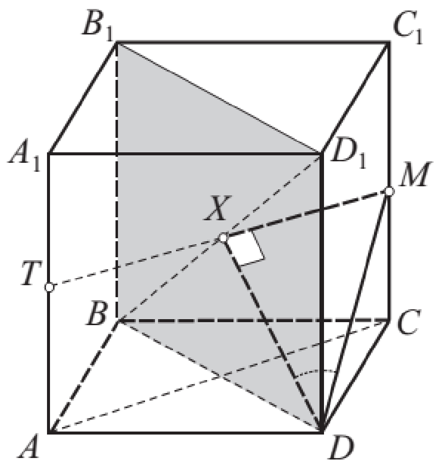
2) шукана пряма визначається як лінія перетину площин α і β.

Такою прямою є пряма A_1D, вона – шукана: проходить через точку A і перетинає дві дані прямі A_1D і D_1C, що перетинаються.

Примітка. Як видно, задум розв'язання цієї задачі такий же, як і задачі 3.3. Реалізується ж він інакше. Малюнок перестає бути умовним, усі побудови на нім виконані за допомогою лінійки, взаємне розташування різних його елементів строго визначене.

3.4. Задачі на побудову і обчислення

Задача 3.11. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M – середина ребра CC_1 (мал. 3.12). Побудуйте перпендикуляр, проведений з точки M до площини BDD_1. Знайдіть довжину цього перпендикуляра, а також кут нахилу прямої DM до площини BDD_1. Ребро куба покладете рівним a.



Мал. 3.12

Розв'язання.

1) Нехай T – середина ребра AA_1, проведемо пряму MT. Скористаємося тим, що $MT \parallel AC$;

2) ($AC \perp BB_1D_1D$ і $MT \parallel AC$) $MT \perp BB_1D_1D$;

3) пряма MT перетинає відрізок BD_1 в точці X – його середині (доведіть це). Тому відрізок MX – шуканий перпендикуляр, проведений з точки M до площини BDD_1;

4) перейдемо до обчислень:($MX \perp BB_1D_1D$ і $XD \subset BB_1D_1D$) $\Rightarrow$ ($MX \perp XD$ і $\triangle MXD$ – прямокутний);

5) в цьому трикутнику: $MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $XD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Тоді за теоремою Піфагора:

$$MX = \sqrt{MD^2 - XD^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

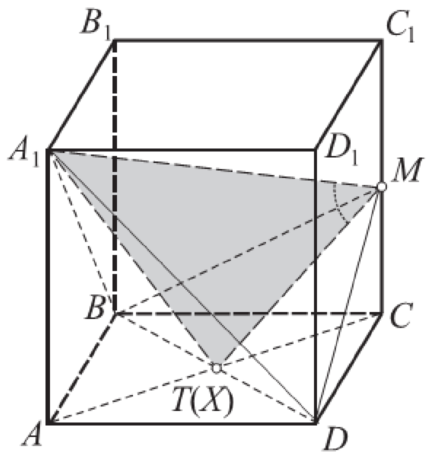
6) оскільки відрізок XD є ортогональною проекцією відрізка MD на площину BDD_1, то $\angle MDX = \alpha$ – кут нахилу відрізку DM до площини BDD_1.

З прямокутного трикутника *MXD* маємо:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{MX}{XD} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,, \alpha \approx 39{,}2°.$$

Відповідь: $MX = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Задача 3.12. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка *M* – середина ребра CC_1 (мал. 3.13). Побудуйте перпендикуляр, проведений з точки A_1 до площини *BMD*. Знайдіть довжину цього перпендикуляра, а також кут нахилу прямої A_1M до площини *BMD*. Ребро куба рівне *a*.



Мал. 3.13

Розв'язання.

1) Розглянемо похилі A_1B і A_1D до площини *BMD*. Оскільки ці похилі рівні, то рівні їх ортогональні проекції на цю площину. Тому точка A_1 ортогонально проектується на площину *BMD* в деяку точку *X*, рівновіддалену від кінців відрізку *BD*;

2) отже, точка *X* лежить в площині *BMD* на серединному перпендикулярі до відрізку *BD*. З аналогічної причини точка *M* також лежить на цьому серединному перпендикулярі. Значить, відрізок A_1X є висотою трикутника A_1MT (*T* – середина сторони *BD*);

3) з'ясуємо, якого виду цей трикутник. Для цього обчислимо його сторони. З прямокутного трикутника A_1AT за теоремою Піфагора маємо:

$$A_1\text{T} = \sqrt{(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 + a^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Із прямокутного трикутника *MTC* за теоремою Піфагора маємо:

$$\text{MT} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Із прямокутного трикутника $A_1\text{C}_1\text{M}$ за теоремою Піфагора знаходимо:

$$A_1\text{M} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + (a\sqrt{2})^2} = \frac{3a}{2}.$$

Отримали: $A_1\text{T}^2 + \text{MT}^2 = A_1\text{M}^2$.

Тому трикутник A_1MT – прямокутний і $A_1\text{T} \perp MT$;

4) тоді точка *X* співпаде з точкою *T* і $A_1\text{T}$ – перпендикуляр до площини *BMD*;

5) отже, $A_1\text{X} = A_1\text{T} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$;

6) знайдемо тангенс $\angle A_1\text{MT} = \alpha$ – кута нахилу прямої $\text{M}A_1$ до площини *BMD*. З прямокутного трикутника A_1MT:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1T}{MT} = \frac{a\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad \alpha \approx 54{,}7°$$

Відповідь: $A_1\text{X}= a\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$.

Задача 3.13. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка *M* – середина ребра CC_1, точка *T* – середина ребра AA_1 (мал. 3.14). Знайдіть косинус двогранного кута, утвореного ребром *BD* і гранями, що проходять через точки *M* і *T*. Знайдіть також косинус кута між площинами граней цього двогранного кута.

Розв'язання.

1) Побудуємо лінійний кут даного двогранного кута. Нехай *O* – середина відрізку *BD*. Оскільки *MO* і *TO* перпендикулярні до *BD*, то

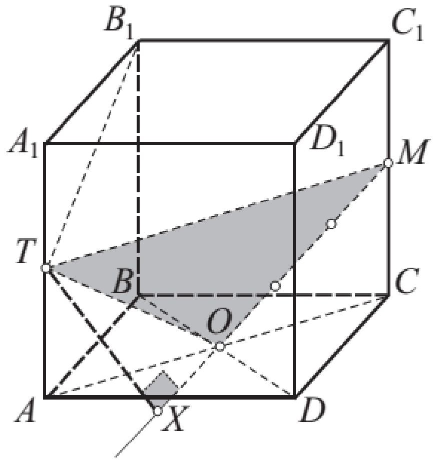
$\angle \mathrm{MOT} = \alpha$ є шуканим лінійним кутом цього двогранного кута;

2) кут *MOT* знайдемо по теоремі косинусів з трикутника *MOT*:

$$(\mathrm{MT} = \mathrm{AC} = a\sqrt{2}, \mathrm{OM} = \mathrm{OT} = \sqrt{(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow 2a^2$$

$$= \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha.$$

Звідси $\cos\alpha = -\frac{1}{3}, \alpha \approx 109{,}5°$;



Мал. 3.14

3) тоді кут δ між площинами граней цього двогранного кута дорівнює суміжному куту:

$$\delta = 180° - \alpha \Longrightarrow \cos\delta = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{1}{3}, \delta \approx 70{,}5°.$$

Відповідь: $\cos\alpha = -\frac{1}{3}, \cos\delta = \frac{1}{3}$.

Задача 3.14. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, M – середина ребра BC (мал. 3.15, а). Побудуйте загальний перпендикуляр до прямих $\mathrm{A_1M}$ і $\mathrm{AB_1}$, що перетинаються. Знайдіть його довжину, якщо ребро куба рівне a.

Розв'язання.

1) Розглянемо ортогональну проекцію прямої $\mathrm{A_1M}$ на площину бічної грані $\mathrm{AA_1B_1B}$ – пряму $\mathrm{A_1B}$;

2) оскільки ця пряма $\mathrm{AB_1}$ перпендикулярна до ортогональної проекції похилої $\mathrm{A_1M}$, то пряма $\mathrm{AB_1}$ перпендикулярна до самої похилої $\mathrm{A_1M}$. Тому

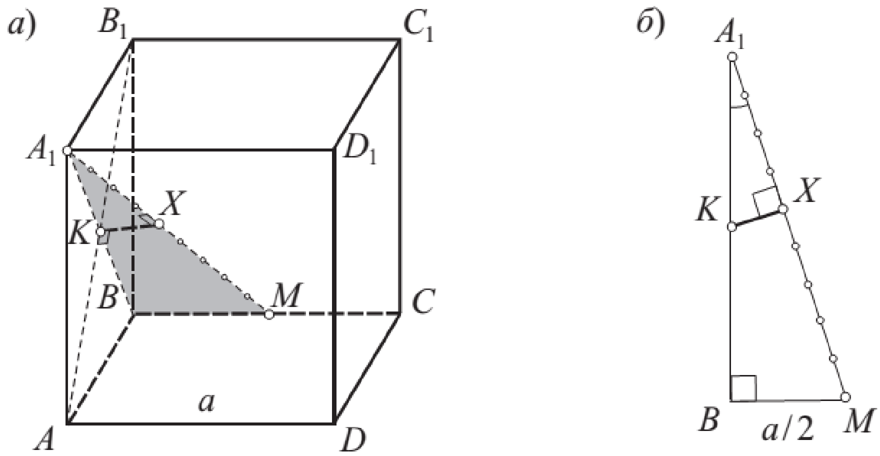
дані прямі, що перетинаються, є перпендикулярними;

3) нехай K = $AB_1 \cap A_1B$;

4) для побудови загального перпендикуляра до прямих A_1M і AB_1, що перетинаються, достатньо з точки *K* провести перпендикуляр *KX* до прямої A_1M (вище розв'язана задача);

5) для цього розглянемо прямокутний трикутник A_1BM (мал. 3.15, б). Прямокутні трикутники A_1BM і A_1XK подібні (за двома кутами). З подібності цих трикутників виходить (заздалегідь з прямокутного трикутника AA_1M знайдемо, що $A_1M = \frac{3a}{2}$):

$$\frac{KX}{BM} = \frac{A_1K}{A_1M} \Rightarrow \frac{KX}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{2}} \Rightarrow KX = \frac{a\sqrt{2}}{6};$$



Мал. 3.15

6) для точної побудови точки *X* знайдемо, в якому відношенні вона ділить відрізок A_1M. Знаходимо A_1X з прямокутного трикутника A_1XK і шукане відношення :

$$A_1X = \sqrt{\frac{2a^2}{4} - \frac{2a^2}{36}} = \frac{2a}{3}, \qquad \frac{A_1X}{A_1M} = \frac{2a}{3} : \frac{3a}{2} = \frac{4}{9};$$

7) користуючись цим відношенням, будуємо точку *X* і тим самим шуканий перпендикуляр *KX*.

Відповідь: $KX = \frac{a\sqrt{2}}{6}$.

ВИСНОВКИ

В старших класах здобувачі вивчають дисципліну «стереометрія», складовими частинами якої виступають: наукові геометричні знання; способи діяльності, які характерні саме для геометрії; загальне світосприйняття на базі саме геометричних знань. Відповідно до нових освітніх документів основна мета математичної освітньої галузі полягає у формуванні математичної компетентності у тісному взаємозв’язку з іншими ключовими компетентностями. Для сформованості основних цілей навчання стереометрії слід враховувати: ціль математичної освітньої галузі, означення базових понять математичної компетентності, особливості психічного розвитку здобувачів відповідної вікової категорії; відповідність змісту навчального геометричного матеріалу рівню сприйняття його здобувачами освіти; глибину вивчення дисципліни. Компетентнісний підхід у навчанні стереометрії повинен сприяти формуванню таких якостей, як вміння застосовувати креативні методи розв’язання проблем. Таким чином, курс стереометрії в загальноосвітніх закладах має бути, по-перше, цікавим та корисним (пояснювати зв’язки геометрії з навколишнім світом), а по-друге, він має забезпечувати хоч і мінімальний, але достатній рівень теоретичних знань та вмінь. Важливо також, що вивчення стереометрії сприяло розвитку у здобувачів освіти просторової уяви та інтуїції.

Стереометрія – це галузь геометрії, яка вивчає об'ємні фігури та просторові відносини між ними. Застосування графічних методів на уроках стереометрії актуальне і сьогодні з ряду причин:

- візуалізація об'ємних об'єктів: графічні методи дозволяють здобувачам легше розуміти та розглядати об'ємні фігури, такі як паралелепіпеди, призми, та циліндри, які є складнішими для уявлення у тривимірному просторі;

- розвиток спроможностей до просторового аналізу: робота з графічними зображеннями сприяє розвитку навичок просторового аналізу, що є важливим для рішення завдань і проблем, пов'язаних з об'ємними фігурами;

- підготовка до реальних ситуацій: знання стереометрії може бути корисним у багатьох професіях, таких як архітектура, інженерія, геодезія, медицина та інші, де потрібно розуміти об'ємні відносини та розташування об'єктів у просторі.

Основний підхід до використання графічного методу в стереометрії полягає у тому, що створення різних графічних зображень (проекцій, перерізів, розгорток тощо) допомагає аналізувати і розуміти конфігурації та взаємне розташування об'єктів у просторі. Основною метою графічного методу в стереометрії є спрощення візуалізації просторових структур і полегшення розв'язання завдань, пов'язаних з геометричними об'єктами у тривимірному просторі. Відмінною рисою графічного методу виступає його наочність, яка значно спрощує процес доведення результатів проведеного аналізу умови задачі для широкого кола здобувачів. Для правильного наочного відтворення заданих даних необхідно дотримуватись техніки та методики побудови зображень фігур.

В роботі наведено низку прикладів застосування графічних методів при розв’язуванні як конструктивних, так і задач на доведення та обчислення з курсу стереометрії, що можуть бути запропоновані при викладанні дисципліни здобувачам старших класів загально-освітніх шкіл.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П. Методика розв'язування стереометричних задач / Г. П. Бевз. – Київ : Радянська школа, 1975. – 240 с.

2. Буряк В. К. Самостійна робота з книгою / В. К. Буряк. – К. : Знання, 1990. – 48 с.

3. Відкриття геометрії через комп'ютерні експерименти в пакеті DG : посіб. для вчителів математики / С. А. Раков, В. П. Горох, К. О. Осенков та ін. – Харків : Вікторія. – 2002. – 136 с.

4. Вишенський В. А. Збірник задач з математики : навч. посібник / В. А. Вишенський, М. О. Перестюк, А. М. Самойленко. − 2-е вид., доп. – К. : Либідь, 1993. – 344 с.

5. Грамбовська Л. В. Методика використання комп'ютерного моделювання у процесі розв'язування прикладних стереометричних задач на побудову / Л. В. Грамбовська // Математика в школі. – 2011. – № 5. – С. 40–45.

6. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти : постанова Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. № 1392 // Офіційний вісник України. – 2012. – №11. – С. 51.

7. Добровольский В.В. Графічний метод в школі / В.В. Добровольский. – К.: Добровіт, 2015. – 158 с.

8. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках геометрії: посіб. для вчителів [Електронний ресурс] / М. І. Жалдак, О. В. Вітюк. – Київ : РННЦ „ДІНІТ", 2004. – 168 с.

9. Іваненко Л. О. Використання евристичної моделі мислення при розв'язуванні математичної задачі / Л. О. Іваненко // Збірник тез доповідей Міжнародної науково-методичної конференції «Евристичне навчання математики». – Донецьк, 2005. – С. 36-37.

10. Капіносов А. М. Математична алгоритмічна компетентність: теоретикометодологічні основи дослідження, структура та рівні / А. М.

Капіносов, В. В. Корольський // Педагогіка вищої та середньої школи : зб. наук. праць. – Кривий Ріг, 2013. – Вип. 37. – С. 71–78.

11. Капіносов А. М. Математична понятійна компетентність: теоретикометодологічні основи дослідження, структура та рівні / А. М. Капіносов, В. В. Корольський // Педагогіка вищої та середньої школи : зб. наук. праць. – Кривий Ріг, 2012. – Вип. 34. – С. 69–74.

12. Капіносов А. М. Тематичне поетапне рівневе вивчення математики в основній школі / А. М. Капіносов. –Кривий Ріг : Видавничий дім, 2005. – 112 с.

13. Колчук Т. В. Методика дистанційного навчання геометрії учнів основної школи : автореф. дис. на здобуття наукового ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія і методика навчання (математика)» / Т. В. Колчук ; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 2014. – 20 с.

14. Кондратенко С. В. Формування загально-навчальних умінь ліцеїстів під час вивчення математики / С. В. Кондратенко // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : Збірник наукових праць. Випуск 3 : В 3-х томах. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2003. – Т.1 : Теорія та методика навчання математики. – С. 123–126.

15. Концепція Нової української школи [Електронний ресурс] // Міністерство освіти і науки України. Режим доступу: https://www.kmu.gov.ua/.../ukrainska-shkola-compressed.pd.

16. Крамаренко Т. Г. Педагогічні замальовки [Електронний ресурс] : нариси / Тетяна Григорівна Крамаренко. – Кривий Ріг : Вид. Р. А. Козлов, 2018. – 592 с. – Режим доступу: http://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/handle/0564/2007.

17. Лук’янова С.М. Текстові задачі на уроках і в позаурочний час: алгебра: 7-9 класи / С.М.Лук’янова. – К.: Вид. дім «Шкільний світ», 2012. – 125 с.

18. Математика. Навчальна програма для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Сайт Міністерства освіти і науки

України URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednyaosvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-5-9-klasiv.

19. Математика: посібник для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання / А. М. Капіносов, Г. І. Білоусова, Г. В. Гап'юк та ін. ; за ред. В. В. Корольського. – 3-є вид., перероб. і доп. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2012. – 416 с.

20. Моторина В.Г. Теорія і практика розвитку графічної грамотності / В.Г. Моторина. – Х.: ХДПУ, 1997. – 156 с.

21. Національний звіт за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2018: режим доступу: https: // testportal.gov.ua /wpcontent /uploads/ 2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf.

22. Освітні технології: навчально-методичний посібник / за ред. О.М. Пєхоти. – К.: АСК, 2009. – 255 с.

23. Освітні технології : навч.-метод. посіб. / О. М. Пєхота, А. З. Кіктенко, О. М. Любарська та ін., за ред. О. М. Пєхоти. – К. : А.С.К., 2001. – 256 с.

24. Освітні програми : сайт Міністерства освіти і науки України [Електронний ресурс]. – Режим доступу : https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednyaosvita/navchalni-programi.

25. Панченко Л. В. Система прикладних задач як засіб формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики / Л. В. Панченко // Математика в школі. – 2004. – № 9. – С. 21-28.

26. Педагогічний словник / [за ред. дійсного члена АПН України Ярмаченка М.Д.]. – К.: Педагогічна думка, 2001. – 516 с.

27. Раков С.А. Математична освіта: компетентністий підхід з використанням ІКТ: Монографія / С.А. Раков. – Х. Факт, 2005. – 360 с.

28. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій : дис. на здобуття наук. ступеня д-ра пед. наук : 13.00.02 / Раков Сергій Анатолійович. – Київ, 2005. – 503 с.

29. Риковський М. Й. Комбінації геометричних тіл : GeoGebraBook [Електронний ресурс] / М. Й. Риковський. – Режим доступу : https://www.geogebra.org/u/mirinf.

30. Сидорук В. А. Побудова перерізів многогранників : навчально-методичний посібник GeoGebraBook [Електронний ресурс]. – Режим доступу : https://www.geogebra.org/m/Jd4va4rs.

31. Сиротенко Г. О. Шляхи оновлення освіти : науково-методичний аспект : інформаційно-метод. зб. / Г. О. Сиротенко. – Харків: Основа, 2003. – 96 с.

32. Сисоєва С. О. Підготовка вчителя до формування творчої особистості учня : монографія / Світлана Олексіївна Сисоєва. – К. : Поліграфкнига, 1996.– 406 с.

33. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підручник для студентів мат. спец. пед. навч. закладів / З.І. Слєпкань. – К.: Зодіак, 2000. – 512 с.

34. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики / З. І. Слєпкань. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. – 240 с.

35. Часнікова О. В. Компетентнісний підхід в освіті як основа її реформування [Електронний ресурс] / О. В. Часнікова // Електронне наукове фахове видання «Народна освіта». – 2014. – №3(24). – Режим доступу : http://narodnaosvita.kiev.ua/?page_id=2607.

36. Чашечнікова О. С. Система компонентів творчого мислення, що можуть діагностуватися в процесі навчання математики / О. С. Чашечнікова // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнародний зб. наук. робіт, вип. 14. − Донецьк: Фірма ТЕАН, 2005. – С. 33−40.

37. Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52(3), 215-241.

38. Bloom, Benjamin S. Taxonomy of Educational Objectives (1956).

Published by Allyn and Bacon, Boston, MA. Copyright (c) 1984 by Pearson Education.

39. Dewey, J. Democracy And Education: An Introduction to the Philosophy of Education / Dewey, J.. – New York : Free Press, 1997. – 384 p.

40. Grundmann, Uta; and Arnheim, Rudolf. «The Intelligence of Vision: An Interview with Rudolf Arnheim». February 21, 2013.