Міністерство освіти і науки України

Херсонський державний університет

ФАКУЛЬТЕТ КОМП’ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ПЕРШЕ ЗНАЙОМСТВО УЧНІВ ЗАКЛАДІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ З АДИТИВНОЮ ТЕОРІЄЮ ЧИСЕЛ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти “магістр”

Виконав: студент 2-го курсу, 12-221М групи

Спеціальності: 014 Середня освіта

Спеціалізація: 014.04 Математика

Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти

Керівник доктор фізико-математичних наук,
професор Олександр САВЧЕНКО

Рецензент кандидатка технічних наук, доцентка кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонського навчально-наукового інституту Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова
Олена ЛИТВИНЕНКО

Івано-Франківськ – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Адитивна теорія чисел – це галузь математики, що вивчає арифметичні властивості цілих чисел, зокрема, їх сум та розклад на доданки певного виду. Ця теорія виникла з потреб античних математиків в розв'язанні питань, пов'язаних із структурою цілих чисел та їх арифметикою. Основна ідея адитивної теорії полягає в тому, щоб з’ясувати, чи можна розкласти числа на певні складові елементи (наприклад, прості числа) та яким чином можливо комбінувати ці доданки для отримання інших чисел. На початку свого виникнення основними проблемами адитивної теорії чисел були такі питання, як: розклад чисел, тобто вирішення проблеми, чи існує єдиний спосіб розкласти будь-яке число на прості множники; розв’язання діофантових рівнянь, а саме відшукання їх цілих розв’язків або встановлення існування цих розв’язків.

Одним із ключових подій в розвитку адитивної теорії чисел був Гільбертівський конгрес математиків, який відбувся у Дрездені, Німеччина, в 1900 році. Давид Гільберт, великий математик та лідер в математичній спільноті того часу, представив на конгресі свій список 23 невирішених математичних проблем, які пізніше отримали назву "Гільбертових проблем" [9]. Серед цих проблем було багато аспектів теорії чисел, включаючи адитивну теорію чисел.

Деякі з питань, пов'язаних з адитивною теорією чисел, які розглядались на Гільбертівському конгресі, включають проблему Голдбаха [13], яка стосується того, чи можна кожне парне ціле число більше 2 подати у вигляді суми двох простих чисел. Інші проблеми стосувалися арифметичних властивостей кільця цілих чисел та розкладу цілих чисел на прості множники. Ці проблеми стали важливим стимулом для подальших досліджень в адитивній теорії чисел і сприяли розвитку цієї галузі математики.

Проте і на сьогодні деякі проблеми адитивної теорії чисел залишаються актуальними, крім того, враховуючи тенденції сьогодення, до теорії додаються і нові аспекти. Серед невирішених проблем адитивної теорії чисел найбільш відомими є висунута гіпотеза Гольдбаха (ця гіпотеза залишається непідтвердженою для всіх чисел, її досі не вдалося довести або спростувати), а також гіпотеза, яка висловлює здогадку про можливість подання кожного цілого числа як суми обмеженої кількості кубів цілих чисел [21] (ця гіпотеза залишається однією з відкритих проблем адитивної теорії чисел). Що стосується нових аспектів, які приєднуються до невирішених питань адитивної теорії чисел, то одним із прикладів є зв’язок теорії чисел та криптографії. У зв'язку із розвитком криптографії адитивна теорія чисел використовується для розв'язання проблем, як пов'язані з шифруванням та безпекою інформації [23]. Ці та інші питання залишають адитивну теорію чисел однією з найважливіших і актуальних галузей математики сьогодні.

Мета дослідження – розгляд питання можливості ознайомлення здобувачів середньої освіти з деякими проблемами адитивної теорії чисел.

Об'єктом дослідження є навчальна діяльність здобувачів в процесі вивчення математики, а *предметом дослідження* – процес формування навичок застосування положень адитивної теорії чисел при розв’язуванні алгебраїчних та геометричних задач.

Виходячи з мети, визначені основні *завдання дослідження*:

- проаналізувати психолого-педагогічну та методичну літературу з питання виникнення та розвитку адитивної теорії чисел з метою визначення тих її напрямків, які можуть бути розглянуті в процесі вивчення математики здобувачами середньої освіти;
- розглянути питання застосування адитивної теорії чисел до розв’язування задач з алгебри, які можуть бути запропоновані під час проведення уроків або факультативних занять;

- розглянути питання застосування адитивної теорії чисел до розв'язування задач з геометрії, які можуть бути запропоновані під час проведення уроків або факультативних занять.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що були виокремлені ті питання адитивної теорії чисел, які можуть бути розглянуті в межах навчання здобувачів математики. *Практичне значення* дипломної роботи полягає в можливості застосування матеріалу здобувачами та вчителями закладів середньої освіти.

Для вирішення поставлених завдань було застосовано наступні *методи*: теоретичний аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури з теми дослідження, аналіз навчальних програм, вивчення та узагальнення педагогічного досвіду.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Апробація результатів дослідження. За результатами виконаного дослідження було опубліковано тези в альманаху «Магістерські студії» (Херсонський державний університет).

Робота складається з трьох основних розділів. Перший розділ містить деякі теоретичні положення, які стосуються основних проблем адитивної теорії чисел. У другому розділі наведено приклади застосування адитивної теорії чисел для розв'язування алгебраїчних задач, зокрема, діофантових рівнянь та задач, пов'язаних із поданням чисел у вигляди суми. Треті розділ присвячено питанню застосування адитивної теорії чисел до розв'язування задач з геометрії, зокрема, задач на рівноскладені та рівновеликі фігури.

РОЗДІЛ 1
КЛАСИЧНІ ПРОБЛЕМИ АДИТИВНОЇ ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ

Адитивною теорією чисел називається розділ теорії чисел, який розглядає задачі про розклад цілих чисел на доданки певного виду. Ці задачі називаються *адитивними задачами*. Як правило, розглядаються адитивні задачі про розклад простих чисел. До класичних проблем адитивної теорії чисел відносяться наступні:

1. Проблема Варінга [6] про подання будь-якого натурального числа у вигляді суми $s - s(k)$ від'ємних k-их степенів з фіксованим $k \geq l$.

2. Проблема Гольдбаха [10] про подання непарних натуральних чисел, які більші за 5, у вигляді суми трьох простих чисел і проблема Ейлера-Гольдбаха про подання парних чисел, які більші за 2, у вигляді суми двох простих (ці дві проблеми були висунуті у 1742 р.); також ослаблена проблема Гольдбаха – це проблема подання натуральних чисел у вигляді суми обмеженого числа простих чисел.

3. Проблема Харді-Літлвуда про подання будь-якого цілого числа, яке більше за 1, у вигляді суми простого та двох квадратів (ця проблема ула сформульована у 20-х рр. XX ст. [20]);

4. Адитивна проблема дільників, а також проблема дільників Тічмарша.

5. Задача про подання цілого числа у вигляді квадратичної форми з трьома або чотирьма змінними та аналогічні завдання і інші задачі.

Для розв'зання задач адитивної теорії чисел використовують аналітичні, алгебраїчні, елементарні або змішані методи, а також методи теорії ймовірностей. В залежності від вибору методів розв'язання, адитивні задачі входять складовою частиною до інших розділів теорії чисел – до аналітичної теорії чисел, до теорії алгебри чисел, до ймовірнісної теорії чисел.

Розглянемо деякі найбільш відомі задачі адитивної теорії чисел.

1.1. Проблема Варінга

Це проблема теорії чисел, яка була сформульована Е. Варінгом у 1770 р. в наступному вигляді: «будь-яке натуральне число є сумою чотирьох квадратів, дев'яти кубів, дев'ятнадцяти четвертих степенів» [22]. Інакше кажучи, для будь-якого $n \geq 2$ існує таке $k - k(n)$, що залежить тільки від i, що будь-яке натуральне число є сумою a_i-степенів додатних цілих чисел. Перше загальне розв'язання цієї проблеми з дуже грубою оцінкою для величини k залежно від i було запропоновано у 1909 р. Д. Гільбертом [17], у зв'язку з чим проблему Варінга іноді називають проблемою Гільберта-Варінга. Якщо через $J_{k,\, n}(N)$ позначити число розв'язків в цілих додатних числах рівняння:

$$x_1^n + \cdots + x_k^n = N,$$

то теорема Гільберта стверджує, що існує таке $K = k(n)$, для якого $J_{k,\, n}(N) \geq 1$ при будь-кому $N \geq 1$.

У 1772 році Ейлер уточнив цю гіпотезу Варінга, зауваживши, що наступні після 1, 4, 9 і 19 значення – це числа 37, 73, 143 і 279. Іншими словами, він розшифровував "і так далі" Варінга таким чином: кожне натуральне число представляється як сума ≤ 37 п'ятих степенів, сума ≤ 73 шостих степенів, сума ≤ 143 сьомих степенів і сума ≤ 279 восьмих степенів натуральних чисел [18]. Насправді, там же Ейлер також наводить гіпотетичну загальну формулу в сучасних позначеннях, помічаючи, що це мінімальна кількість доданків, для яких таке уявлення в принципі, це може бути можливим:

$$g(k) = 2^k + \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\rfloor - 2.$$

У 1928 р. Г.Х. Харді та Дж.І. Літлвуд застосували до проблеми Варінга круговий метод, це дозволило їм довести, що при $k \geq (n-2)2^{n-1} + 5$ для $J_{k,\, n}(N)$ має місце асимптотична формула виду

$$J_{k,n}(N) = AN^{\frac{k}{n-1}} + O\left(N^{\frac{k}{n-1-\gamma}}\right),$$

де $A - A(N) \geq c_0 > 0$, а c_0 і $\gamma > 0$ – деякі постійні. Отже, при $N \geq N_0(n)$ початкове рівняння має розв’язки. Цей результат висунув наступні три проблеми: встановити порядок таких трьох величин $G(n), g(n), k_0$, які є найменшими цілими числами та для яких виконується:

а) початкове рівняння має розв’язок при $k \geq G(n)$ та $N \geq N_0(n)$;

б) початкове рівняння має розв’язок при $k \geq g(n)$ і $N \geq 1$;

в) для величини $J_{k,\,n}(N)$ при $k \geq k_0(n)$ справедлива наведена вище асимптотична формула.

а) Відомо, що $G(n) \geq n + 1$.

У 1934 р. вдалося за допомогою певного методу довести, що $G(n) \leq 3n(ln\, n + 9)$. Крім цього, було отримано багато результатів для $G(n)$ для невеликих значень n: $G(4) = 16$ (так, певні результати отримав Х. Давенпорт (1939 р.), а також для $G(3) = 7$ Ю.В. Лінник (1942 р.) [8]).

б) У 1936 р. Л. Діксон та С. Піллаі, використавши метод Виноградова, змогли довести, що

$$g(n) - 2^n + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2$$

для усіх $n > 6$ таких, що

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} - \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 3\right\}.$$

Останню умову було доведено К. Малером у 1957 р. для достатньо великих значень n [13].

в) Найбільш кращий результат отримав І. М. Виноградов [14], який показав, що $k_0 \leq 4n^2 lnn$.

Елементарне доведення проблеми Варінга було надано Ю.В. Лінником у 1942 р. Поряд з цим існує ціла низка узагальнень проблеми Варінга (невідомі приймають значення з деякої підмножини множини натуральних чисел; замість одночленів виду $x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n$ в поданні числа

n приймають участь многочлени $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_k(x_k)$, замість рівняння $x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = N$ розглядається конгруенція тощо.

Особливе значення проблеми Варінга полягає у тому, що при її розв’язанні було створено потужні методи аналітичної теорії чисел.

1.2. Проблеми Гольдбаха та Харді-Літлвуда

Ще одна з найбільш відомих проблем теорії чисел. Ця проблема полягає у доведенні того факту, що будь-яке ціле число, яке більше або дорівнює шести, можна подати у вигляді суми трьох простих чисел. Цю проблему сформулював у 1742 р. Х. Гольдбах у своєму листі до Л. Ейлера. Сам Ейлер помітив, що для розв’язання даної проблеми достатньо довести, що «кожне парне число є сумою двох простих» [25]. Довгий час не змогли відшукати жодних шляхів дослідження цієї проблеми Гольдбаха. Лише у 1923 р. Г. Харді та Дж. Літлвуду вдалося довести, що якщо справедливі певні теореми (які залишаються не доведеними і в наш час) відносно L-рядів Діріхле, то будь-яке достатньо велике непарне число можна подати у вигляді суми трьох простих чисел. У 1937 р. І.М. Виноградов запропонував новий метод аналітичної теорії чисел – це так званий метод оцінок тригонометричних сум з простих чисел. За допомогою цього методу він довів асимптотичну формулу для кількості видів подання непарного числа у вигляді суми трьох простих чисел. Із знайденої формули виходить, що кожне достатньо велике непарне число можна подати у вигляді суми трьох простих чисел. І це твердження є одним із значущих досягнень сучасної математики.

Метод, який запропонував І.М. Виноградов, дозволив розв’язати і ряд більш загальних завдань. Проте задача про подання парного числа у вигляді суми двох простих чисел ще й досі не розв’язана.

Проблема Харді-Літлвуда – це задача відшукання асимптотичної формули для числа $Q(n)$ розв’язків рівняння $p + x^2 + y^2 = n$, де p –

просте, x та y – цілі числа, n – натуральне число [11]. Аналогом даної задачі є задача відшукання асимптотичної формули для числа розв'язків рівняння $p - x^2 - y^2 = l$, де l – деяке фіксоване ціле число, $p \leq n(n \to \infty)$.

За допомогою розробленого дисперсійного методу Ю.В. Лінник знайшов асимптотичну формулу для першого рівняння:

$$Q(n) = \pi A_0 \frac{n}{lnn} \prod_{p/n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} + R(n),$$

де

$$A_0 = \prod_{p/n} \left(1 + \frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right), R(n) = O\left(\frac{n}{(lnn)^{1,012}}\right).$$

З аналогічної формули для другого рівняння впливає нескінченність множини усіх простих чисел виду $x^2 + y^2 + l$. Застосовуючи дисперсійний метод, була знайдена асимптотична формула для числа розв'зків узагальненого рівняння Харді-Літлвуда $p + \varphi(x, y)$, де p – просте, $\varphi(x, y)$ – задана певна додатно визначена квадратична форма. З розгляду аналогічного рівняння $p - \varphi(x, y) = l$ випливає доведення нескінченності множини простих чисел виду $p = \varphi(x, y) + l$.

1.3. Подання числа у вигляді суми квадратів

Почнемо з суми двох квадратів. Ця тема фактично походить від "Арифметики" Діофанта [5]. Відповідь на питання про можливість запису числа як суми двох квадратів була сформульована Ферма і доведена Ейлером.

Просте число p можна розглядати як суму двох квадратів натуральних чисел в точності тоді, коли $p = 2$ або $p = 4m + 1$ для деякого m. Необхідність цієї умови є очевидною, а достатність – і в дійсності більш точне твердження про кількість представлень таких p у вигляді

$x^2 + y^2$ – відомі з XVII століття. Вважається, що твердження про існування таких уявлень вперше сформулював у 1621 р. Клод-Гаспар Баше, у зв'язку з перекладом Діофанта на латину [17]. А твердження про їх кількість – П'єр де Ферма 25 грудня 1640 р. в листі до Марини Мерсенна. У найпростішому вигляді цей факт, який традиційно відомий як теорема Ферма, стверджує, що для будь-якого простого виду $p = 4m + 1$ знайдуться такі

$$x, y \in N, \text{ що } p = x^2 + y^2.$$

Це найпростіше довести за допомогою цілих гаусових чисел $Z[i] = \{x + iy \mid x, y \in Z\}$, як це робив Дедекінд [23].

Ферма не зупинився на цьому і 25 вересня 1654 р. в листі до Блеза Паскаля сформулював аналогічні результати для інших бінарних квадратичних форм. Зокрема, теорема Ферма-Ейлера, яка стверджує, що просте p тоді і тільки тоді можна подати як $p = x^2 + 2y^2$, коли p має вигляд $p = 8l + 1$ або $p = 8l + 3$. Зовсім просте доведення цієї теореми в такому ж сенсі наведено в замітці О.І. Генералова [13], але це все-таки для математичного гуртка, а не для загальноосвітньої школи.

Уявні числа типу p^2, де $p = 4m + 3$, очевидно, є сумою двох квадратів цілих чисел, $p^2 = p^2 + 0^2$. Те, що добуток двох чисел, кожне з яких можна подати як суму двох квадратів, також можна подати як суму двох квадратів, випливає з наступної формули.

$$(u^2 + v^2)(x^2 + y^2) = (ux - vy)^2 + (uy + vx)^2,$$

що виражає мультиплікативність модуля комплексного числа. Звичайно, саме ця тотожність була відома ще Діофанту до будь-яких комплексних чисел.

Відповідь на аналогічне питання для сум трьох квадратів без експерименту вже вгадати трохи складніше.

Задача 1.1. Знайдіть усі числа $n \leq 1000$, які не можна подати як суму трьох квадратів цілих чисел.

Отриманий список показує, що натуральне число n тоді і тільки тоді не може бути подане як сума трьох квадратів, коли n має вигляд

$$n = 4^k(8m + 7) \text{ для деяких } k, m \geq 0.$$

Це дійсно вірно і цей факт називається теоремою Лежандра про три квадрати [21]. Перші числа, які не можна уявити таким чином, це 7, 15, 28, 31, 39, 47, 55, 60, 63, 71, ...

Теорема Лежандра – це вже дещо складніший факт, за нашими сьогоднішніми теоріями це твердження все-таки скоріше для першого університетського курсу теорії чисел, ніж для шкільного курсу. Це пов'язано, зокрема, з тим, що ввести на трійках дійсних чисел структуру, аналогічну до комплексних чисел або кватерніонів, неможливо. На жаль, арифметика кватерніонів тут мало допомагає. З іншого боку, як зауважив Б.О. Венков у 1922-1929 роках, вона «дозволяє відразу вивести з теореми Лежандра більш загальну теорему Гауса про кількість таких уявлень з точки зору кількості класів бінарних квадратичних форм» [27].

Ще в "Арифметиці" Діофанта ним було висунуто гіпотезу, що кожне натуральне число можна подати у вигляді суми чотирьох квадратів цілих чисел

$$n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Інакше кажучи, можна припустити, що деякі з x_i можуть дорівнювати нулю. Важливі кроки в напрямку доведення справедливості цієї гіпотези були отримані Ферма та Ейлером, а в 1770 році Лагранж знайшов повне доведення твердження про подання будь-якого натурального числа у вигляді суми чотирьох квадратів. Це твердження, як правило, називається теоремою Лагранжа [19].

За теоремою Лагранжа кожне натуральне число є нормою цілого ліпшицевого кватерніона (означення за Венковим та Лінніком). Мультиплікація норми кватерніонів

$$N(zw) = N(z)N(w)$$

зазвичай називається тотожністю Ейлера. У координатній формі ця тотожність має вигляд

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \bullet (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)=$$
$$=(x_1y_1+ x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4)^2 +(x_1y_2+ x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 +$$
$$+ (x_1y_3+ x_2y_4 + x_3y_1 - x_4y_2)^2 +(x_1y_4+ x_2y_3 + x_3y_2 - x_4y_1)^2$$

і означає, що добуток двох сум чотирьох квадратів $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ і $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$ знову є сумою чотирьох квадратів $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$, причому z_i лінійні по x_i і по y_i. Згідно тотожності Ейлера достатньо навчитися подавати у вигляді суми чотирьох квадратів всі прості числа.

РОЗДІЛ 2
ЗАСТОСУВАННЯ АДИТИВНОЇ ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ В АЛГЕБРІ

2.1. Розв’язування діофантових рівнянь

Адитивна теорія чисел грає важливу роль у розв'язуванні діофантових рівнянь. Діофантові рівняння – це рівняння з цілими розв’язками, тобто такі, які належать цілим числам. Адитивна теорія чисел досліджує арифметичні властивості сум і оперує цілими числами. Ось кілька способів, як адитивна теорія чисел використовується при розв'язуванні діофантових рівнянь:

1. Подання чисел у вигляді сум: знаходження всіх цілих розв’язків рівнянь може зводитися до знаходження подання деякого числа у вигляді суми інших чисел. Адитивна теорія чисел вивчає можливості таких представлень.

2. Арифметика лишків: арифметика лишків, яка є важливою частиною адитивної теорії чисел, часто використовується для аналізу та розв'язання діофантових рівнянь, особливо коли маємо справу з великими числами або коли ці рівняння пов'язані із остачами.

3. Китайська теорема про остачі [8]: ця теорема є потужним інструментом для розв'язання систем лінійних діофантових рівнянь. Вона дозволяє розділити задачу на менші, що полегшує знаходження цілих рішень.

4. Сітки Діофанта: в адитивній теорії чисел вивчаються розташування точок на сітках, і це може бути корисним для розв'язання діофантових рівнянь. Використовуючи сітковий підхід, можна здійснити арифметичні операції та перевірити, чи належать точки цілим числам.

Застосування адитивної теорії чисел при розв'язуванні діофантових рівнянь залежить від конкретної задачі, але в цілому ця теорія надає ефективні методи для вивчення арифметичних властивостей чисел та їх взаємодії.

Розв'язання діофантових рівнянь у шкільному курсі алгебри має кілька корисних аспектів для здобувачів та їх загального розвитку:

1. Розвиток алгебраїчних навичок.

Розв'язання діофантових рівнянь вимагає від здобувачів використання алгебраїчних методів та вміння працювати зі звичайними та цілими числами. Це сприяє розвитку їх алгебраїчних навичок.

2. Логічне мислення та техніка доведення.

Діофантові рівняння часто вимагають від здобувачів знаходження логічних шляхів розв'язання. Розв'язання таких завдань сприяє розвитку логічного мислення та навичок техніки доведення.

3. Застосування в реальному житті.

Діофантові рівняння можуть мати практичні застосування в різних галузях, таких як оптимізація, криптографія та інші. Розв'язання таких рівнянь надає здобувачам уявлення про те, як алгебра може використовуватися для розв'язання реальних проблем.

4. Розвиток терпіння та самостійності.

Діофантові рівняння можуть бути складними та вимагати від здобувачів великої уваги до деталей та терпіння у процесі розв'язання. Це сприяє розвитку навичок самостійності та вміння перейматися трудношами.

5. Виклик для обдарованих учнів.

Розв'язання більш складних діофантових рівнянь може бути викликом для обдарованих здобувачів, що сприяє їх інтелектуальному розвитку та зацікавленості в математиці.

6. Збагачення математичного багажу.

Вивчення діофантових рівнянь допомагає здобувачам збагатити свій математичний багаж та розширити розуміння алгебри.

Розв'язання діофантових рівнянь не тільки розвиває конкретні математичні навички, але й сприяє розвитку загальних когнітивних та логічних вмінь, які можуть бути корисними в різних сферах життя.

Розглянемо деякі приклади, що можуть запропоновані здобувачам основної школи під час вивчення алгебри.

Лінійним діофантовим рівнянням називають рівняння першого порядку, яке має вигляд:

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b,$$

де усі a_i і b – цілі числа, причому хоча б одне $a_i \neq 0$. *Розв‘язком* діофантового рівняння першого порядку називається довільна послідовність цілих чисел $V_1, V_2 \ldots V_n$, яка задовольняє числову рівність:

$$a_1V_1+a_2V_2+\ldots+a_nV_n=b.$$

Якщо діофантове рівняння першого порядку має розв‘язки у множині Z, то завжди можна знайти хоч би один розв‘язок даного діофантового рівняння в цілих числах [12].

Задача 2.1. Розв’язати діофантове рівняння

$$10x_1+12x_2-15x_3=2.$$

Розв’язання.

Це рівняння має розв‘язки в множині цілих чисел, оскільки

НСД(10, 12, –15) = 1.

Знайдемо подання одиниці через числа 10, 12, 15. Одержуємо:

$$1 = 10\cdot 7 + 12(-7) + 15\cdot 1,$$

звідси $10\cdot 14 + 12(-14) - 15(-2) = 2$. Тому послідовність цілих чисел 14, –14, –2 – це один із розв‘язків даного рівняння.

При відшуканні розв‘язків діофантового рівняння першого степеня в множині Z можна скористатися тим, що дане рівняння завжди можна замінити на рівносильне йому діофантове рівняння першого степеня, у якого коефіцієнти при невідомих є взаємно простими числами. Крім того, будь-яке діофантове рівняння із взаємно простими коефіцієнтами при невідомих має розв‘язки в цілих числах. У зв’язку з цим діофантове рівняння першого степеня з цілими розв’язками можна розглядати як рівняння із взаємно простими коефіцієнтами при невідомих. При розв'язуванні такого рівняння в множині цілих чисел достатньо вміти виразити одиницю через дані взаємно прості числа.

Задача 2.2. Розв'язати в множині цілих чисел рівняння:

$$147x - 25y = 14.$$

Розв'язання.

Числа 147 і –25 – взаємно прості. Знайдемо вираз одиниці через ці числа:

$$147 - 25\cdot5 + 22,\ 25 = 22\cdot1 + 3,\ 22 = 3\cdot7 + 1,$$

$$1 = 22 - 3\cdot7 = 22 - (25 - 22)\cdot7 = (147 - 25\cdot5)\cdot8 - 25\cdot7 = 147\cdot8 - 25\cdot47.$$

Тому одержуємо $14 = 147\cdot112 - 25\cdot685$. Враховуючи це, можна стверджувати, що пара чисел 112, 658 є розв‘язком даного рівняння. Загальний розв'язок рівняння в множині цілих чисел має вигляд:

$$x = 112 + 25t,\ y = 658 + 147t,\ (t\in N).$$

Задача 2.3. Скількома способами можна розміняти 20 копійок монетами по 2 і 3 копійки.

Розв'язання.

Позначимо через x кількість монет по 2 копійки, а через y – кількість монет по 3 копійки. Тоді за умовою маємо рівняння: $2x + 3y = 20$, причому $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Один із розв‘язків цього рівняння – це пара –20, 20. Тому усі розв‘язки рівняння знайдемо за формулами:

$$x = -20 - 3t,\ y = 20 + 2t,\ (t\in N)$$

Враховуємо обмеження на x та y:

$$-20 - 3t \geq 0,\ 20 + 2t \geq 0.$$

Звідси знаходимо $-10 \leq t \leq -7$, тому $t = -10, -9, -8, -7$. Тоді можливі тільки чотири способи розміну, які можна здійснити при знайдених значеннях t.

При $t = -10$: $x = 10,\ y = 0,$

$t = -9$: $x = 7$, $y = 2$,

$t = -8$: $x = 4$, $y = 4$,

$t = -7$: $x = 1$, $y = 6$.

Задача 2.4. Від двох даних чисел відняти одне й те саме число так, щоб залишки співвідносилися один з іншим даним відношенням, причому задане співвідношення більше за те, як більше із заданих чисел відноситься до меншого.

Розв'язання.

Нехай дано: від чисел 20 і 100 відняти одне й те ж саме число та зробити так, щоб більше число було у шість разів більше за менше.

Віднімемо від кожного з чисел x. Тоді маємо різниці: $100 - x$, $20 - x$. Потрібно, щоб більше число було у 6 разів більше за меншого. Тому менше число, якщо його взяти 6 разів, буде дорівнювати більшому числу. Але менше число – це $120 - 6x$, причому воно дорівнює $100 - x$. Тоді одержуємо:

$$120 - 6x = 100 - x,\ 5x = 20,\ x = 4.$$

Отримали число 4, а більше число буде дорівнювати меншому числу, взятому 6 разів. Різниця 100 – 4 = 96; різниця 20 – 4 = 16.

Отримали, що більше число 96, воно дорівнює меншому числу, 16, взятому 6 разів.

В своїй книзі "Арифметика" Діофант розглядає різні види діофантових рівнянь другого степеня та доводить наступну теорему: «невизначене рівняння другого порядку від двох змінних або не має жодного раціонального розв'язку, або має їх нескінчену кількість, причому в останньому випадку всі розв'язки виражаються як раціональні функції параметру

$$x = \varphi(k),\ y = \psi(k),$$

де φ, ψ – раціональні функції» [17].

Методи Діофанта для відшукання розв'язків діофантових рівнянь

$$y^2 = a^2x^2 + bx + c$$

співпадають з так званими «підстановками Ейлера» [13]. Основна ідея – це те, що змінні виражаються за допомогою раціональних функцій від одного параметру, у Діофанта ці функції містять раціональні коефіцієнти.

Задача 2.5. Довести, що для кожного натурального числа s рівняння

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+...+\frac{1}{x_s^2}=\frac{1}{x_s^2+1}$$

має нескінченну множину розв‘язків в N x_1, x_2, …, x_s, x_{s+1}.

Розв‘язання.

Доведемо, що задане рівняння має для кожного натурального числа s один розв‘язок в натуральних числах x_1, x_2, …, x_s, x_{s+1}, тоді помноживши усі ці числа на довільне натуральне число, ми знову одержимо розв‘язок вихідного рівняння. Доведення проведемо методом математичної індукції по s.

Для s = 1 маємо розв’язок $x_1 = x_2 = 1$. Для s = 2 маємо розв‘язок

$$\frac{1}{15^2}+\frac{1}{20^2}=\frac{1}{12^2}.$$

Припустимо тепер, що для деякого натурального s рівняння має розв‘язок в натуральних числах

$$\frac{1}{t_1^2}+\frac{1}{t_2^2}+...+\frac{1}{t_s^2}=\frac{1}{t_s^2+1}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{(12t_s)^2}=\frac{1}{(15t_s)^2}+\frac{1}{(20t_s)^2},$$

то натуральні числа $x_i = 12t_i$ для $i = 1, 2, …, s – 1$,

$$x_s = 15t_s,\ x_{s+1} = 15t_s,\ x_{s+2} = 15t_{s+1},$$

будуть задовольняти рівняння:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+...+\frac{1}{x_s^2}+\frac{1}{x_s^2+1}=\frac{1}{x_s^2+2},$$

що і потрібно було довести.

Задача 2.6. Довести, що система двох рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = z^2, \\ 2x^2 + y^2 = t^2, \end{cases}$$

не має розв‘язків в множині N.

Доведення.

Припустимо, що дана система має розв‘язок в натуральних числах x, y, z, t. Будемо вважати, що $(x, y) = 1$, так як у випадку $(x, y) = d > 1$ ми б мали можливість поділити обидві частини рівнянь на d^2. Тому одне з чисел x або y є непарним, але обидва числа не можуть бути непарними, оскільки тоді ліві частини рівнянь при діленні на 4 давали б в остачі 3, а це суперечить тому, що вони є квадратами.

Нехай x – парне число, але тоді y не може бути непарним числом, бо тоді б ліва частина першого рівняння при діленні на 4 давала б в остачі 2, що суперечить тому, що вона є квадратом. В будь-якому випадку ми прийшли до протиріччя, тому припущення невірне і система не має розв’язків в множині натуральних чисел.

2.2. Застосування конгруенцій при розв’язуванні алгебраїчних задач

Теорія конгруенцій або теорія лишків і адитивна теорія чисел – це дві різні галузі математики, але іноді вони можуть перетинатися або використовуватися разом в деяких задачах. Теорія лишків в основному вивчає властивості остач від ділення на фіксоване число. Ця теорія зазвичай пов'язана з арифметикою лишків, конгруенціями та теорією чисел. Адитивна теорія чисел, з іншого боку, займається вивченням властивостей арифметичних функцій та арифметичних виразів, зокрема, вона розглядає прості числа, дільники, суми та інші арифметичні властивості чисел.

Хоча ці галузі, зазвичай, вивчаються окремо, іноді теорія лишків може використовуватися для дослідження конкретних арифметичних властивостей, наприклад, у теорії простих чисел або в задачах, пов'язаних з конгруенціями.

Розглянемо приклади застосування конгруенцій при розв'язуванні задач, пов'язаних із числами, що подаються у вигляді сум певних доданків.

Як відомо, існує багато прикладів на підтвердження думки, що числа, які при діленні на фіксоване натуральне число m дають однакові остачі, мають своєрідні споріднені властивості. Такі числа видатний німецький математик К. Гаусс (1777-1855 рр.) назвав *конгруентними* за модулем m [14].

Нехай дано якесь фіксоване натуральне число $m > 1$. Цілі числа a і b називатимемо конгруентними за модулем m, якщо при діленні на m вони дають однакові остачі.

Конгруентність чисел a і b за модулем m коротко записують так:

$$a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ m),$$

або ще простіше $a \equiv b(m)$.

Цей вираз називають *конгруенцією.* Запис *a не* $\equiv b$ (mod *m)* означає, що числа a і b не конгруентні за модулем m.

Задача 2.7. Яке з чисел більше: $5^{10} + 6^{10}$ або 7^{10}?

Розв'язання.

Перший спосіб. Доведемо, що $5^{10} + 6^{10} < 7^{10}$. Так як $5^{10} + 6^{10} < 2 \cdot 6^{10}$, то достатньо довести, що $\left(7/6\right)^{10} > 2$. Остання нерівність випливає з нерівності Бернуллі [27]:

$$\left(\frac{7}{6}\right)^{10} = \left(1 + \frac{1}{6}\right)^{10} > 1 + 10 \cdot \frac{1}{6} > 2 \cdot$$

Другий спосіб. Зауважимо, що $5^3 + 6^3 = 343 = 7^3$.

Тому

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{10} + \left(\frac{6}{7}\right)^{10} < 1 + \left(\frac{6}{7}\right)^{10} < 1.$$

Так як $\left(\frac{5}{7}\right)^{10} < \left(\frac{5}{7}\right)^{3}$ і $\left(\frac{6}{7}\right)^{10} < \left(\frac{6}{7}\right)^{3}$. Отже, $5^{10} + 6^{10} < 7^{10}$.

Задача 2.8. Яке з десяти чисел $1^{10}, 2^{9}, 3^{8}, 4^{7}, 5^{6}, 6^{5}, 7^{4}, 8^{3}, 9^{2}, 10^{1}$ найбільше?

Розв'язання.

Очевидно, що $2^9 > 1^{10}$. Доведемо, що 3^8 більше за 2^9. Дійсно,

$$3^8 = 9^4 > 8^4 = 2^{12} > 2^9 \cdot$$

Тепер порівняємо 4^7 і $3^8 : 4^7 > 3^8 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^7 > 3$. Залишилось зауважити, що

$$\left(\frac{4}{3}\right)^7 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^7 > 1 + 7 \cdot \frac{1}{3} > 3 \cdot$$

Отже, з перших чотирьох чисел найбільше 4^7.

Доведемо тепер, що

$$4^7 > 5^6 > 6^5 > 7^4 > 8^3 > 9^2 > 10^1 \cdot$$

Із

$$4^7 > 5^6 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^6 < 4 \text{ і } \left(\frac{5}{4}\right)^6 = \left(\frac{125}{64}\right)^2 < 2^2 = 4$$

Випливає $4^7 > 5^6$. Нерівності $5^6 > 6^5$ і $6^5 > 7^4$ доводяться аналогічно.

Нерівності $7^4 > 8^3 > 9^2 > 10^1$ очевидні. Таким чином, найбільше серед наших чисел – це 4^7.

Задача 2.9. Яке число більше: $1^n + 2^n + 3^n + ... + 9^n$ або 10^n ?

Розв'язання.

Легко бачити, що при маленьких *n* $1^n + 2^n + 3^n + ... + 9^n$ більше, ніж 10^n. Дійсно,

$$1 + 2 + \ldots + 9 > 10;\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 9^2 > 10^2;$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 9^3 > 9^3 + 8^3 = 729 + 512 > 1000 = 10^3$$

Перед тим як розглядати інші значення *n*, зауважимо, що якщо при деякому *n* $1^n + 2^n + 3^n + ... + 9^n < 10^n$, то для всіх *m>n,* тим більше $1^m + 2^m + 3^m + ... + 9^m < 10^m$. Дійсно, при переході до більших значень показників права частина збільшується в більше число разів, ніж ліва.

Доведемо тепер, що $1^7+2^7+3^7+...+9^7<10^7$.

Зауважимо, що $1^7+2^7<3^7$. Тому $1^7+2^7+3^7<2\cdot 3^7<4^7$ (останню нерівність можна обґрунтувати за допомогою нерівності Бернуллі [17]. Тоді

$$1^7+2^7+3^7+4^7<2\cdot 4^7<5^7$$

і так далі аж до $1^7+2^7+...+8^7<2\cdot 8^7$. Виявляється, що вірно також $2\cdot 8^7<9^7$ і $2\cdot 9^7<10^7$, але нерівність Бернуллі тут безсила. Щоб довести ці нерівності, достатньо перевірити, що $\left(\frac{9}{10}\right)^7<\frac{1}{2}$, а це можна зробити безпосередньо підрахунком.

Отже, при $n\geq 7$

$$1^n+2^n+3^n+...+9^n<10^n$$

Виявляється, $1^5+2^5+3^5+...+9^5>10^5$, оскільки $0{,}9^5+0{,}8^5+0{,}7^5>1$, а тоді і $1^4+2^4+3^4+...+9^4>10^4$.

Щоб закінчити розв'язання задачі, залишилось з'ясувати, що більше: $1^6+2^6+...+9^6$ або 10^6. Аналогічно до задачі 2.8 можна переконатися, що $10^6>1^6+2^6+3^6+...+9^6$. Отже,

$1^n+2^n+3^n+...+9^n>10^n$ при $1\leq n\leq 5$; при $n\geq 6$ – обернено.

Задача 2.10. Яке число більше: $1^1+2^2+3^3+...+1000^{1000}$ або $2^{2^{2^{2^2}}}$?

Розв'язання.

По-перше,

$$2^{2^{2^{2^2}}}=2^{2^{2^4}}=2^{2^{16}}.$$

Так як $2^{10}=1024>10^3$ і $2^6=64$, отримуємо $2^{16}>64000$.

Це означає, що $2^{2^{2^{2^2}}}>2^{64000}$. З іншого боку,

$1^1+2^2+3^3+...+1000^{1000}<1000^{1000}+1000^{1000}+...1000^{1000}=1000^{1001}<\left(2^{10}\right)^{1001}=2^{10010}$

Так як , $2^{64000}>2^{10010}$, то отримаємо:

$$2^{2^{2^{2^2}}}>1^1+2^2+...+1000^{1000}.$$

Задача 2.11. Знайти степінь четвірки , найбільш близьку до числа $2^{100}+3^{100}$.

Розв'язання.

По-перше, давайте спробуємо оцінити, у скільки разів число 3^{100} більше, ніж 2^{100}. Для цього розглянемо відношення цих чисел:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{100}=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\right)^{50}>2^{50}=\left(2^{10}\right)^{5}>\left(10^{3}\right)^{5}=10^{15}.$$

Отже, 2^{100} складає менше, ніж 0,000000000000001 від 3^{100}. Тепер нам зрозуміло, що число $2^{100}+3^{100}$ «практично» дорівнює 3^{100}.

Отже, $4^{k}\approx 3^{100}$, де k – степінь. Тому $k\approx 100\dfrac{\lg 3}{\lg 4}$. За таблицею логарифмів знаходимо, що $\lg 3\approx 0{,}4771$, $\lg 4\approx 0{,}6021$. Звідси отримуємо, що $k\approx 79$.

Наведені міркування не можна вважати достатніми для доведення. Поки що вони дозволили нам знайти відповідь лише наближено.

Задача 2.12. Знайти останню цифру натурального числа $33^{22}+22^{11}$.

Розв'язання.

Потрібно знайти остачу від ділення даного числа на 10, яку позначимо, як $r(33^{22}+22^{11},10)$.

Оскільки $33\equiv 3(\mathrm{mod}\,10)$, то $33^{2}\equiv 9\equiv -1(\mathrm{mod}\,10)$ і

$$33^{22}\equiv(-1)^{11}\equiv -1(\mathrm{mod}\,10).$$

З $22\equiv 2(\mathrm{mod}\,10)$ випливає

$$22^{5}\equiv 32\equiv 2(\mathrm{mod}\,10),\ 22^{10}\equiv 4(\mathrm{mod}\,10)$$

і $22^{11}\equiv 4\cdot 22\equiv 8(\mathrm{mod}\,10)$. Додаючи почленно отримані конгруенції, отримаємо:

$$33^{22}+22^{11}\equiv 7(\mathrm{mod}\,10).$$

Отже, даним числом є цифра 7.

Задача 2.13. Довести, що не існує натуральних чисел *x*, *y* і *z*, які задовольняють рівнянню $2^x + 7^y = 19^z$.

Розв'язання.

Використаємо модуль 3. В силу $19 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$ маємо $19^z \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$. З іншого боку,

$$2^x + 7^y \equiv (-1)^x + 1 (\mathrm{mod}\, 3),$$

звідки

$$2^x + 7^y \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3) \text{ або } 2^x + 7^y \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$$

(в залежності від парності *x*). Так як $2^x + 7^y \neq 19^z (\mathrm{mod}\, 3)$, то

$$2^x + 7^y \neq 19^z .$$

Підкреслимо, що при розв'язуванні цієї задачі ми здогадались, що потрібно використовувати модуль 3. Якби ми взяли модуль 4, то не отримали б протиріччя. Питання вибору потрібного модуля при розв'язуванні задач не просте.

Задача 2.14. Довести, що число $p^3 + 2$ – просте, якщо простими є числа p і $p^2 + 2$.

Розв'язання.

Якщо $p \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, тоді

$$p = 3 \text{ і } p^2 + 2 = 11, p^3 + 2 = 29 .$$

Якщо $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, то

$$p^2 \equiv 1 \text{ і } p^2 + 2 \equiv 3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3),$$

звідки $p^2 + 2 = 3$, але таке відношення жодне просте число не задовольняє. До протиріччя приводить варіант $p \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$. Отже, числа p і $p^2 + 2$ є простими лише при p = 3. В цьому випадку і число $p^3 + 2$ буде простим.

Задача 2.15. Довести, що не існує квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ з цілими коефіцієнтами та дискримінантом 215.

Розв'язання.

Якщо $b^2 - 4ac = 215$, тоді $b^2 - 215 \vdots 4$ або

$$b^2 \equiv 215 \equiv 3 \pmod 4.$$

Але це неможливо, тому що $r(b^2, 4)$ може бути рівним лише 0 або 1.

Зауваження. Із розв’язання зрозуміло, що всі цілі числа, конгруентні з 2 або 3 за модулем 4, не можуть бути дискримінантом квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами.

Задача 2.16. Довести, що принаймні одна із сторін піфагорового трикутника (прямокутного трикутника, сторони якого вважаються натуральними числами [6]) ділиться на 5.

Розв’язання.

Нехай x, y, z – натуральні числа, причому $x^2 + y^2 = z^2$. Припустимо, що жодне з них не конгруентне 0 за модулем 5. Тоді квадрат кожного з них конгруентний 1 і 4. Маємо три можливості:

а) $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 5$;

б) $x^2 \equiv 1, y^2 \equiv 4 \pmod 5$ або $x^2 \equiv 4, y^2 \equiv 1 \pmod 5$;

в) $x^2 \equiv y^2 \equiv 4 \pmod 5$.

Тоді відповідно:

а) $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 5$;

б) $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 5$;

в) $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 8 \equiv 3 \pmod 5$.

Випадки а) і в) неможливі. Отже, хоча б одне з чисел *x, y, z* конгруентне 0 за модулем 5, тобто ділиться на 5.

РОЗДІЛ 3
ЗАСТОСУВАННЯ АДИТИВНОЇ ТЕОРІЇ В ГЕОМЕТРІЇ

3.1. Рівноскладені та рівновеликі многокутники

Розглянемо деякий многокутник F. Нехай M і N – які-небудь точки, що лежать на сторонах многокутника. Якщо всі точки ламаної, що з'єдную точки M і N, крім самих точок M і N, лежать усередині многокутника, то кажуть, що *ламана розбиває многокутник на два многокутника*. На рис. 3.1 многокутник F розбитий на два многокутники F_1 і F_2, а на рис. 3.2 шестикутник F розбитий на 4 трикутника.

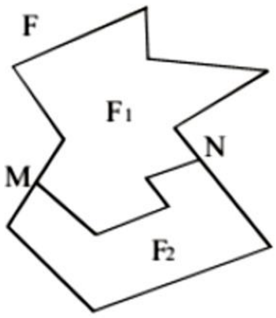

Рис. 3.1

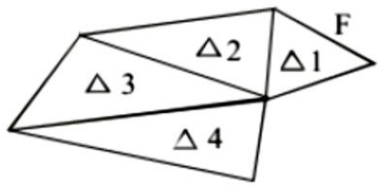

Рис. 3.2

Нехай многокутник F розбитий на многокутники F_1, F_2, ..., F_k. Розглянемо які-небудь многокутники F_1', F_2', ..., F'_k, відповідно рівні многокутникам F_1, F_2, ..., F_k. Кажуть, що *многокутник F можна розрізати на многокутники F_1, F_2, ..., F_k, а з многокутників F_1', F_2', ..., F'_k можна скласти многокутник F*.

Відзначимо одну з основних властивостей рівноскладених многокутників [28]. Справедлива

Теорема 3.1. Якщо многокутник F_1 рівноскладений з многокутником F і многокутник F_2 рівноскладений з многокутником F, то многокутники F_1 і F_2 рівноскладенні.

Завдання, в яких потрібно розрізати многокутник на якісь певні частини (многокутники) або, навпаки, скласти з даних многокутників новий многокутник із заданими властивостями, називають *задачі на розрізання многокутників.*

Якщо один многокутник можна розрізати на частини і скласти з них інший многокутник, то такі многокутники називають *рівноскладеними*. Плоскі фігури, які мають рівні площі, називають *рівновеликими.*

Прикладами рівновеликих многокутників можуть бути будь-які рівні многокутники. Обернена твердження, звісно, хибне: рівновеликі многокутники можуть бути нерівними. Так, прямокутник, сторони якого 1 см і 4 см і квадрат, сторони якого дорівнюють 2 см рівновеликі (площа кожного з них дорівнює 4 см^2), але вони, очевидно, не рівні один одному.

За властивістю площі, будь-які два рівноскладені многокутники рівновеликі. Завдання на розрізання демонструють справедливість цього твердження.

Завдання на розрізання фігур виникли в давнину. Вже в VII-V ст. до н.е. в Індії в книжці «Правила мотузки» розглядали завдання на перефарбування фігури, що складається з двох квадратів, в рівновеликий їй квадрат і перефарбування прямокутника в квадрат [8].

Пізніше, приблизно в II ст. до н.е. в «Началах» Евкліда наводиться розв’язання тих же завдань, але вже з використанням метричних відношень в прямокутному трикутнику [11]. Перший трактат, в якому досліджувались способи розв’язання завдань на розрізання, написав чудовий астроном та математик з Хорсана Абу-аль-Вафа (940-998 рр.) [5].

Розглянемо задачі, які по суті, є складовими виведення формул площ паралелограма, трикутника і трапеції.

Задача 3.1. Довести, що трапеція рівноскладена з паралелограмом, основа якого дорівнює середній лінії трапеції, а висота – висоті трапеції.

Розв’язання наведено на рисунку 3.3.

Задача 3.2. Намалюйте паралелограм. Покажіть, на які дві частини потрібно його розрізати, щоб потім скласти з них прямокутник.

Задача 3.3. Намалюйте трапецію. Покажіть: а) на які дві частини потрібно її розрізати, щоб потім скласти з них трикутник; б) на які три частини потрібно її розрізати, щоб потім скласти з них прямокутник.

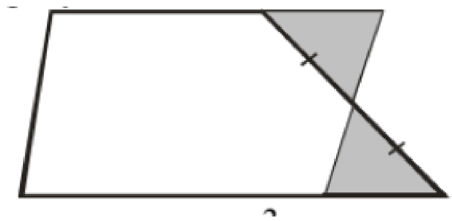

Рис. 3.3

Задача 3.4. Потрібно розрізати рівнобедрений трикутник на такі частини, щоб з них можна було скласти: а) прямокутник; б) паралелограм.

Задача 3.5. Намалюйте прямокутник, одна сторона якого в два рази більше іншої. Покажіть: а) на які дві частини потрібно його розрізати, щоб потім скласти з них прямокутний трикутник; б) на які три частини потрібно його розрізати, щоб потім скласти з них квадрат;

Задача 3.6. Потрібно розрізати прямокутник на такі частини, щоб з них можна було скласти рівновеликий йому квадрат.

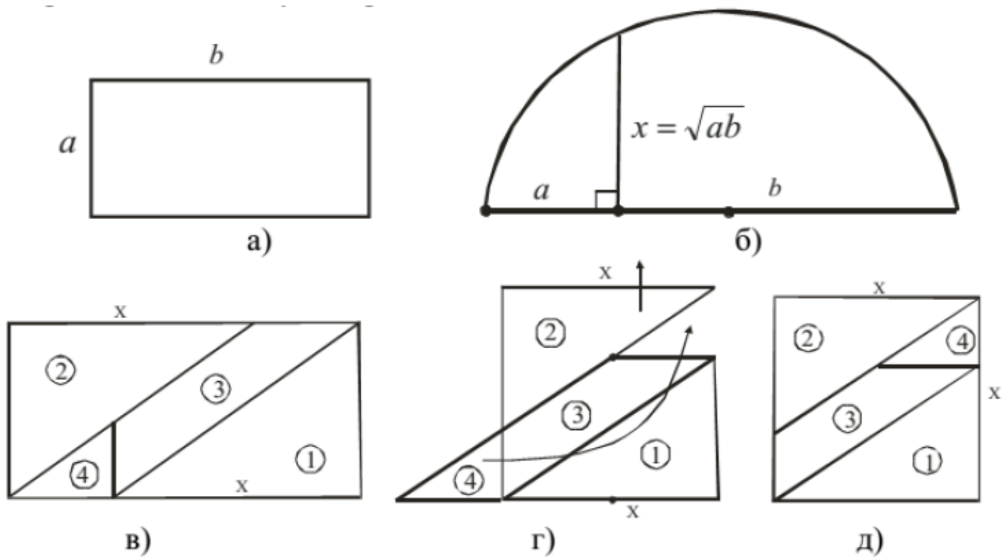

Рис. 3.4

Розв'язок задачі проілюстрований на рис. 3.4. Площа прямокутника дорівнює ab (рис. 3.4, а), отже, сторона рівновеликого йому квадрата дорівнює $\sqrt{ab}$. Побудуємо відрізок, який дорівнює стороні квадрата (рис.

3.4, б). Потім відкладемо цей відрізок на великих сторонах прямокутного трикутника і проведемо прямі, як показано на рис. 3.4, в. На рис. 3.4, г позначені лінії розрізу і спосіб перекроювання прямокутника в квадрат. В результаті ми отримали квадрат (рис. 3.4, д), рівновеликий даному прямокутнику.

Задачі на розрізання допускають подальше ускладнення: можна розрізати на частини декілька даних многокутників і складати з них новий многокутник. Або, навпаки, можна розрізати даний многокутник на частини і складати з них декілька нових многокутників. Ці задачі, зазвичай, формулюють так: довести, що многокутник F рівноскладений з многокутниками $F_1, F_2, \ldots, F_k$. Розглянемо, наприклад, таку задачу.

Задача 3.7. Довести, що квадрат, побудований на гіпотенузі прямокутного трикутника, рівноскладений з квадратами, побудованими на катетах.

Сформульоване в цій задачі твердження являє собою знамениту теорему Піфагора (VI ст. до н.е.). На сьогодні відомо більше 100 її доведень. Рис. 3.5 ілюструє одне з них. Це доведення було опубліковано лише в 1873 році [7]. Його автор – лондонський біржовий маклер Генрі Прічел – був в такому захваті від свого відкриття, що наказав віддрукувати схему розрізання квадрата на своїй візитівці.

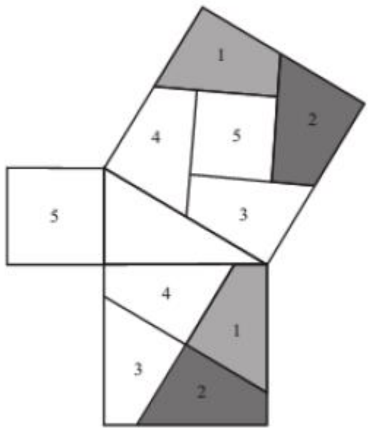

Рис. 3.5

Здобувачам можна запропонувати поміркувати та пояснити, яким чином розділений на 4 рівні частини квадрат, побудований на більшому катеті.

Рисунок 3.6 ілюструє одразу два доведення теореми Піфагора:

1) $(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$

2) $c^2 = (a-b)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$

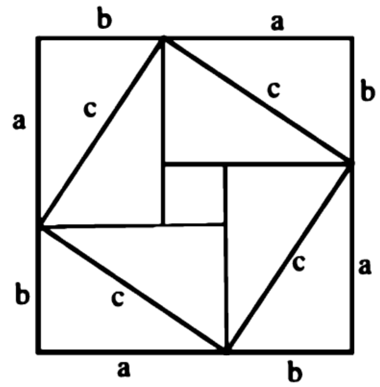

Рис. 3.6

Серед різноманітних задач на розрізання многокутників слід зазначити задачу про розрізання квадрата на менші квадрати, будь-які два з яких не рівні один одному. Ця проста за формулюванням задача виявилась в дійсності дуже важка. До кінця 30-х років XX ст. багато геометрів вважали, що вона взагалі не має розв’язку. Лише в 1939 році німецький математик Р. Шпраг зумів розбити квадрат на 55 попарно нерівних квадратів [12]. Приблизно в цей же час група вчених Кембриджського університету в Англії встановили міцний зв’язок між задачею про розрізання квадрата та теорії електричних ланцюгів в фізиці [16].

Задачі на розрізання мають практичне застосування. Розглянемо, наприклад, таку задачу.

Задача 3.8. У господині були клітчасті килимки: один розміром 60х60 см, другий – 80х80 (рис. 3.7). Вона вирішила зробити з них один клітчастий килимок розміром 100х100 см. Майстер взявся виконувати цю роботу і пообіцяв, що кожен килимок буде розрізаний не більше ніж на дві частини і при цьому не буде розрізана жодна клітинка. Обіцянку свою він стримав. Як він це зробив?

Розв'язання представлено на рисунку 3.7.

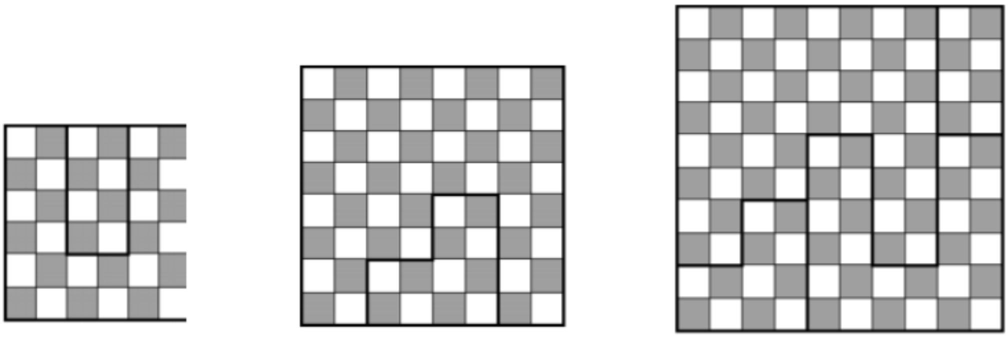

Рис. 3.7

Наступна задача на розрізання ілюструє відомий парадокс.

Задача 3.9. Квадрат розміром 8х8 розрізали на 4 частини, як показано на рисунку 3.8. З тих частин склали прямокутник розміром 13х5. Площа квадрата 64, а прямокутника 65. Отже 64 = 65? Поясніть, де допущена помилка?

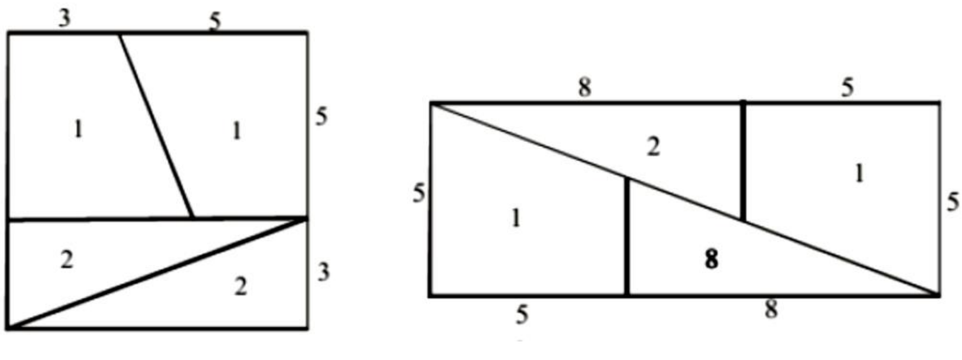

Рис. 3.8

3.2. Теорема Бояї – Гервіна

Отже, можна переконатися на практичних задачах, що будь-які два рівноскладені многокутники рівновеликі. А чи вірне обернене твердження? Чи будуть рівноскладеними будь-які два рівновеликі многокутники?

Задача 3.10. Доведіть, що будь-який трикутник рівноскладений деякому певному паралелограму, що має таку саму основу і висоту, рівну половині висоти трикутника.

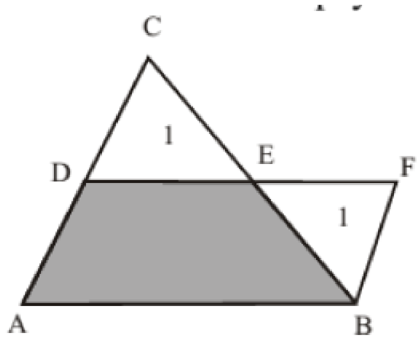

Рис. 3.9

Розв'язання.

В трикутнику *ABC* проведемо середню лінію *DE* і продовжимо її на відрізок *EF*, який дорівнює *DE*. Так як $DF=2DE=AB$, то $DF \parallel AB$, то *ADFB* – паралелограм. Трикутники *DCE* і *EFB* рівні. Отже, трикутник *ABC* і *ADFB* рівноскладені.

Задача 3.12. Кожен трикутник рівноскладений із деяким прямокутником.

Розв'язання.

Нехай *AB* – найбільша сторона трикутника *ABC*, *CD* – висота, опущена на неї. Точка *D* знаходиться між *A* та *B*. Через середину *CD* – точку *K* – проведемо пряму, паралельну *AB* та опустимо на неї перпендикуляри *AE* та *BF*. Отримаємо прямокутник *AEFB*, який рівноскладений із трикутником *ABC*. Дійсно, трикутники, позначені цифрами 1 та 2, попарно рівні між собою. Кожна з фігур *ABC* і *AEFB* складається із заштрихованої трапеції та двох трикутників 1 і 2.

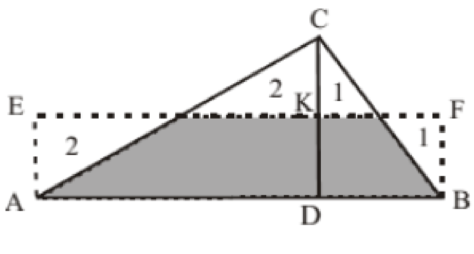

Рис. 3.10

Теорема 3.2. Довести, що два рівновеликі паралелограми, які мають спільну основу, рівноскладені.

Доведення.

Нехай *ABCD* і *ABEF* – два паралелограми, які мають спільну основу *AB* та однакову міру площі.

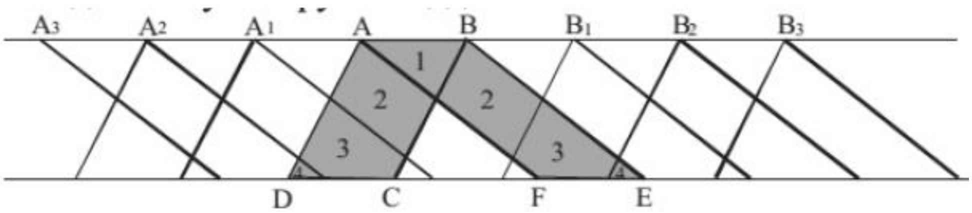

Рис. 3.11

Тоді висоти паралелограмів однакові і відрізки *DC* та *EF* лежать на одній прямій. На прямій *AB* відкладемо ряд відрізків BB_1, B_1B_2, B_2B_3, ..., AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... рівних *AB* і через кожну точку поділу проведемо відрізки, рівні за довжиною та паралельні *AD* та *AF*. Тоді смуга між паралельними прямими *AB* та *DE* розіб'ється на ряд многокутників. Кожен із цих многокутників при паралельному перенесенні на відстань, що дорівнює *AB*, і паралельно *AB* співпадає з іншим, рівним йому многокутником. Рівні многокутники відмічені однаковими цифрами. Залишається помітити, що кожен із паралелограмів *ABCD* і *ABEF* складений із попарно рівних многокутників. Відповідно, вони рівноскладені.

Теорема 3.3. Два прямокутники, що мають однакову міру площі, рівноскладені.

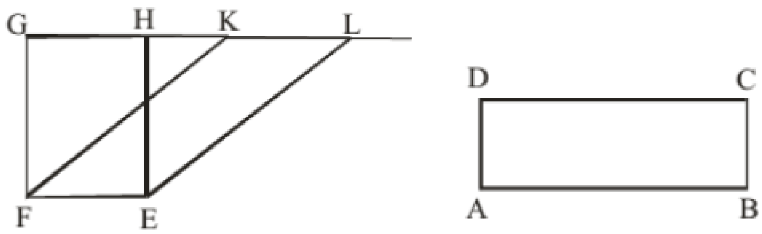

Рис. 3.12

Доведення.

Нехай *ABCD* та *EFGH* – два прямокутники однакової площі. Нехай *AB* – найбільший із чотирьох відрізків *AB, BC, EF* і *FG*. Продовжимо відрізок *GH* за *H* і на цій прямій радіусом, рівним *AB*, зробимо насічку з точки *E* (оскільки $AB \geq EH$, то коло радіуса *AB* з центром у точці *E* буде з прямою *GH* мати спільну точку). Нехай *EL* = *AB*. На відрізку *HL* відкладемо *LK*=*EF*, отримаємо паралелограм *EFKL*, який рівновеликий прямокутнику *EFGH*. За теоремою 3.2 *EFGH* та *EFKL* рівноскладені. З іншого боку, *EFKL* рівновеликий з прямокутником *ABCD*. Враховуючи при цьому, що *AB*=*EL*, за теоремою 3.2 *ABCD* рівноскладений із *EFKL*. Отже, дані прямокутники рівноскладені з паралелограмом *EFKL* і за теоремою 3.1 вони рівноскладені, що і треба було довести.

Задача 3.13. Нехай задано трикутник *ABC* і відрізок *PQ*. Доведіть, що завжди можна побудувати прямокутник *PQMN*, рівновеликий даному трикутнику.

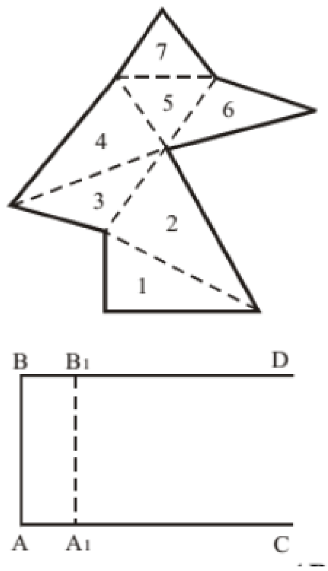

Рис. 3.13

Вказівка. Для розв’язання задачі достатньо виразити сторону прямокутника *MN* через сторону та відповідну висоту трикутника *ABC*, а потім побудувати відрізок *MN* за отриманою формулою.

Лема 3.1. Кожен многокутник рівноскладений з деяким прямокутником.

Доведення.

Кожен многокутник можна розбити на скінчене число трикутників. Позначимо їх 1, 2, …, *n*. Візьмемо далі довільний відрізок *AB* і на його кінцях проведемо перпендикуляри *AC* і *BD*. Проведемо відрізок A_1B_1, паралельний відрізку *AB*, таким чином, щоб площа прямокутника ABB_1A_1 дорівнювала площі трикутника 1. Відповідно до задачі 3.12 трикутник 1 рівноскладений з деяким прямокутником, який, у свою чергу, рівновеликий з прямокутником ABB_1A і, відповідно, за теоремою 3.3 рівноскладений з ним. За теоремою 3.1 прямокутник ABB_1A_1 і трикутник 1 рівноскладені.

Аналогічно проводимо A_2B_2 паралельно *AB* так, що $A_1B_1B_2A_2$ рівновеликий з трикутником 2 та з ним рівноскладений. В результаті отримаємо прямокутник ABB_nA_n, рівноскладений з цим многокутником.

Теорема Бояї-Гервіна. Два рівновеликі многокутники рівноскладені.

Доведення.

Відповідно до леми кожен із многокутників рівноскладений з деяким прямокутником. Отримані два прямокутники мають однакову площу і, відповідно, рівноскладені (теорема 3.3). Таким чином, за теоремою 3.1 два початкові многокутники рівноскладені.

Вперше цю теорему було доведено у 1832 році угорським математиком Я. Бояї, а у 1833 році передоведено німецьким математиком П. Гервіном [13] .

Звичайно виникає питання: чи правильно, що рівновеликі многогранники є рівноскладеними? Сформульоване питання є третьою проблемою Гільберта [4].

Розглянемо задачі, пов'язані з розподілом трикутника на дві рівновеликі частини.

Задача 3.14. У трикутнику *ABC* проведіть пряму паралельну *BC* так, що трикутник розділиться на дві рівновеликі частини.

Розв'язання.

Нехай *EF* – пряма, яку шукаємо. Трикутники *ABC* та *AEF* подібні. Так як $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$, то коефіцієнт подібності дорівнює $\sqrt{2}$, тобто $AC = \sqrt{2}AF$ і $AF = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$. Відповідно, відрізок *AF* дорівнює катету рівнобедреного прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює *AC*.

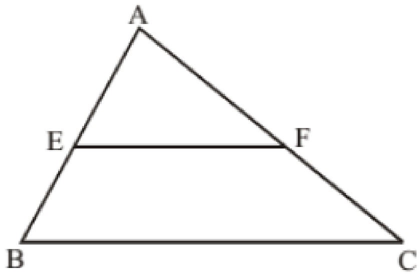

Рис. 3.14

Задача 3.15. Усередині трикутника *ABC* вкажіть усі точки *M*, для яких $S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$.

Розв'язання.

Так як у шуканого трикутника *BMC* та даного трикутника *ABC* спільна основа *BC*, то відношення їх площ дорівнює відношенню їх висот. Відповідно, *M* – будь-яка точка середньої лінії M_1M_2 трикутника *ABC*.

Задача 3.16. У трикутнику *ABC* проведіть пряму, перпендикулярну до *BC* так, щоб трикутник розділився на дві рівновеликі частини.

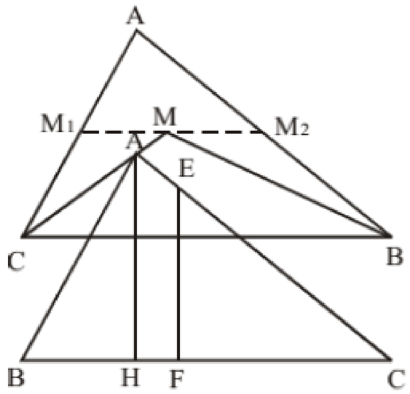

Рис. 3.14

Розв'язання.

Нехай EF – шукана пряма, тобто $EF \perp BC$ та $S_{\triangle EFC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$. Проведемо висоту AH. Трикутники AHC та EFC подібні.

$$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CHA}} = \frac{CF^2}{CH^2} \Leftrightarrow \frac{0{,}5\, S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CHA}} = \frac{CF^2}{CH^2} \Leftrightarrow \frac{0{,}25 \cdot AH \cdot BC}{0{,}5 \cdot CH \cdot AH} = \frac{CF^2}{CH^2} \Leftrightarrow CF^2 = \frac{1}{2} CH \cdot BC$$

Залишається побудувати відрізок $CF = \sqrt{\frac{1}{2} CH \cdot BC}$

Задача 3.17. Доведіть, що якщо в опуклому чотирикутнику $ABCD$ $S_{\triangle ABO} = S_{\triangle CDO}$, де O – точка перетину діагоналей, то $BC \parallel AD$.

Задача 3.18. Через дану точку M, що належить стороні AC трикутника ABC, проведіть пряму, яка розділить цей трикутник на дві рівновеликі фігури.

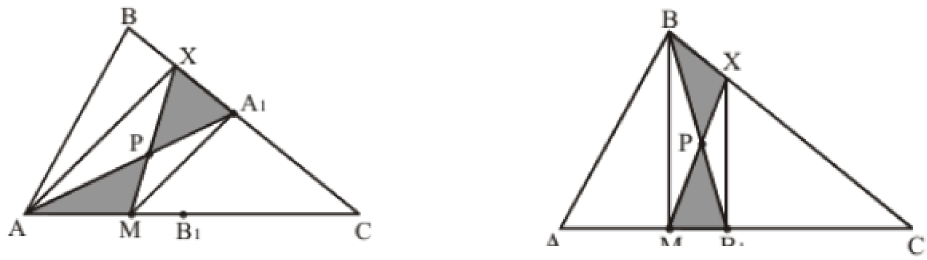

Рис. 3.15

Розв'язання.

Якщо точка співпадає з вершиною трикутника, то шуканою прямою є, очевидно, медіана, проведена з цієї вершини. Медіана буде шуканою прямою і у випадку, якщо точка M є серединою однієї зі сторін.

Припустимо, що точка M лежить, наприклад, на стороні AC трикутника і ближче до A. ніж до C. Розглянемо два способи побудови шуканої прямої.

Перший спосіб. Нехай B_1 – середина AC трикутника ABC, M – внутрішня точка відрізка AB_1. Проведемо медіану AA_1 трикутника і через вершину A проведемо пряму, паралельну MA_1, що перетинає BC у точці X. Тоді MX – шукана пряма, так як $S_{\triangle PXA_1} = S_{\triangle APM}$.

Другий спосіб. Через точку B_1 – середину відрізка AC – проведемо пряму B_1X, паралельну до прямої MB. Тоді через те, що $S_{\triangle MPB_1} = S_{\triangle PBX}$, де P – точка перетину MX і BB_1, MX – шукана пряма.

Задача 3.19. Нехай в опуклому чотирикутнику $ABCD$ точка E – середина діагоналі BD. Проведіть через точку E пряму, паралельну AC і перетинаючи сторону CD у точці X. Доведіть, що AX ділить чотирикутник на дві рівновеликі частини.

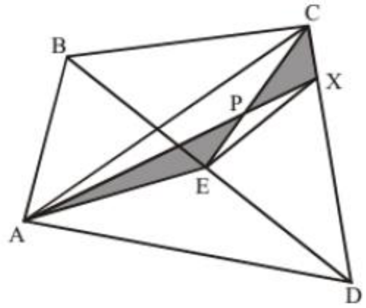

Рис. 3.16

Вказівка: обґрунтуйте рівність площ чотирикутників $AECB$ та $AECD$.

Задача 3.20. Нехай AH – висота трикутника ABC, MN – серединний перпендикуляр до сторони BC. Доведіть, що HN поділяє трикутник ABC на дві рівновеликі фігури.

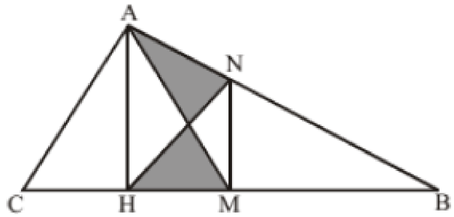

Рис. 3.17

Задача 3.21. Із середини кожної сторони гострокутного трикутника ABC опущені перпендикуляри на інші сторони. Доведіть, що площа утвореного шестикутника становить половину площі трикутника ABC.

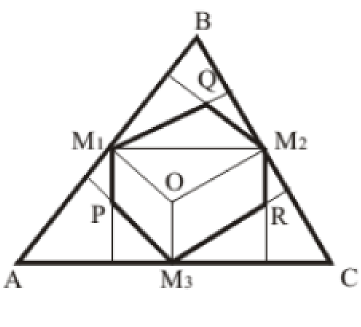

Рис. 3.18

Вказівка. $M_1M_2M_3$ – середини сторін трикутника ABC, O – точка перетину висот трикутника $M_1M_2M_3$. Доведіть, що половина площі шестикутника $M_1QM_2RM_3P$ дорівнює площі трикутника $M_1M_2M_3$.

Задача 3.22. Через точку M, що лежить на стороні опуклого чотирикутника, провести пряму, що ділить його на дві рівновеликі частини.

Лема 3.2. Рівновеликі паралелограми, що мають рівні сторони, рівноскладені.

Доведення.

Розглянемо паралелограми $ABCD$ і $KLMN$. Вважатимемо, що відрізки AB і KL співпадають, і точки M і N лежать на прямій CD. Розглянемо окремо два випадки взаємного розташування відрізків CD та MN.

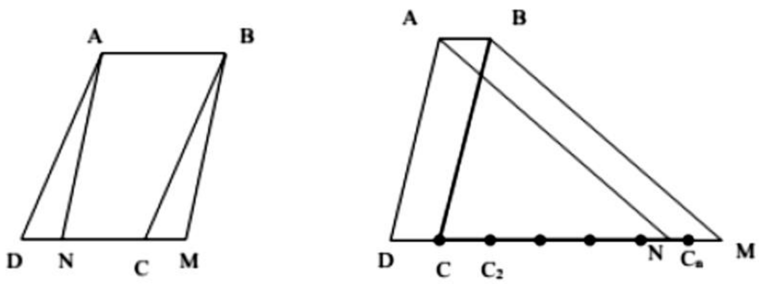

Рис. 3.19

Перший випадок. Нехай відрізки CD та MN перетинаються. Точка C лежить на відрізку MN. Тоді рівноскладненість $ABCD$ та $ABMN$ випливає з умови $\triangle DAN = \triangle CBM$.

Другий випадок. Якщо відрізки CD і MN не перетинаються, то послідовно відкладемо точки $C_1 = C,...,C_n$ так, що $C_iC_{i+1} = CD$ і відрізок $C_{n-1}C_n$, перетинає MN.

Тепер до ланцюжка паралелограмів $ABCD$, $ABC_1C_2,...,ABC_{n-1}C_n$, $ABMN$ достатньо застосувати перший випадок та лему 3.1. Лему доведено.

Лема 3.3. Якщо прямокутники $ABCD$ та $KLMN$ мають однакову площу, то вони рівноскладені.

Доведення.

Вважатимемо, що відрізок *AB* – найбільша зі сторін даних прямокутників. Тоді на промені *ML* знайдуться такі точки *P* і *S*, що *S PM,* *PS* = *KN* і *SN* = *AB*.

Чотирикутники *ABCD* та *KNSP*, а також *KNSP* та *KLMN* рівноскладені за попередньою лемою. Тоді з леми 3.1 випливає, що *ABCD* і *KLMN* рівноскладені. Лему доведено.

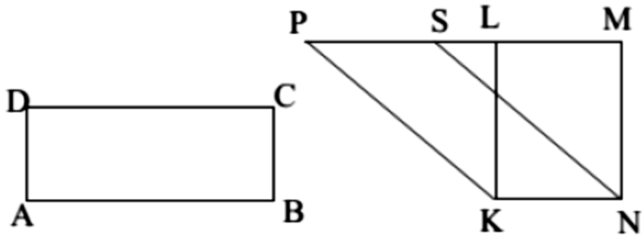

Рис. 3.20

Лема 3.4. Будь-який многокутник *M* рівноскладений із деяким прямокутником.

Доведення цієї леми випливає з лем 3.2 і 3.3.

Розглянемо застосування рівноскладеності і рівновеликості для доведення деяких теорем.

Теорема 3.4. Площа правильного восьмикутника дорівнює добутку довжин найбільшої та найменшої його діагоналей.

Доведення.

Відокремимо від правильного восьмикутника трикутники і переставимо їх так, як показано на рисунку. У результаті отримаємо прямокутник, сторони якого дорівнюють найбільшій і найменшій діагоналям восьмикутника.

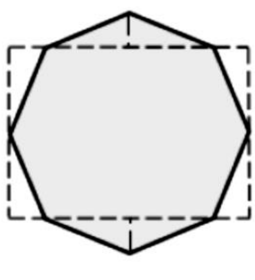

Рис. 3.21

Теорема 3.5. Для будь-якого многокутника можна побудувати рівновеликий йому трикутник.

Доведення.

Розглянемо многокутник *ABCDE*. Проведемо діагональ *BE* та побудуємо пряму *AM* || *BE*. Трикутник *ABE* замінимо рівновеликим трикутником *MBE*. Отже, ми замінили цей п'ятикутник *ABCDE* рівновеликим йому чотирикутником *BCDM*.

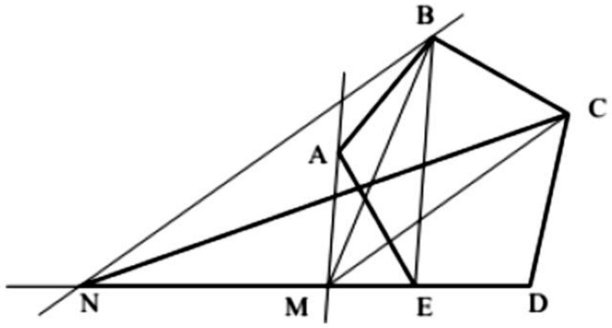

Рис. 3.22

Проведемо діагональ *CM* та побудуємо пряму *BN* || *MC*. Трикутник *MBC* замінимо рівновеликим трикутником *NCM*. Отже, многокутник *ABCDE* замінили рівновеликим йому трикутником *CDN*.

Задача 3.23. Сторони *AB* і *CD* паралелограма *ABCD* площі 1 розбиті на *n* рівних частин. Точки поділу показані на малюнку. Чому рівні площі утворених маленьких паралелограмів? [4]

Розв'язання.

Відріжемо від паралелограма дві частини як показано на рисунку 3.23 і перекладемо їх так, як показано на рисунку. Вийде фігура, що складається з $mn + 1$ паралелограма. Тому площа маленького паралелограма дорівнює $1/(mn + 1)$.

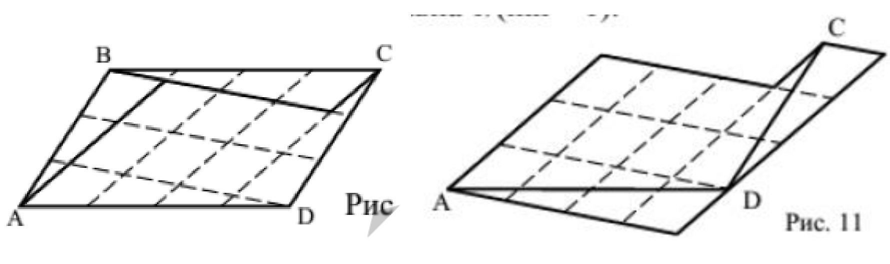

Рис. 3.23

Аналогічно поняттю рівноскладених многокутників можна ввести поняття рівноскладених многогранників: два многогранники називаються *рівноскладеними*, якщо їх можна розбити на однакові многогранні частини. Знову ж таки очевидно, що рівноскладені многогранники рівновеликі. Показати, однак, що рівновеликі многогранники рівноскладені, довгий час нікому не вдалося . Нарешті, в 1901 р. німецьким математиком М. Деном було доведено, що, взагалі кажучи, це не так [11]; але міркування Дена були дуже складними. Два роки по тому дуже витончений і порівняно простий доказ результату Дена було дано геометром В.Ф. Каганом [9].

З результатів Дена-Кагана випливає, що при виведенні формул об'ємів многогранників недостатньо користуватися методом розкладання або методом доповнення; зокрема, виявляється, що правильний тетраедр і рівновеликий йому куб не рівноскладені, і в той же час їх не можна доповнити до рівних або хоча б рівноскладенних многогранників . Саме тому при виведенні формули об'єму піраміди в курсі середньої школи доводиться вдаватися до теорії границь.

З теореми Дена-Кагана випливає, що рівноскладеність рівновеликих многогранників є винятком: як правило, два рівновеликих многогранники не будуть рівноскладені.

Задача 3.24. Доведіть, що будь-який многогранник можна розрізати на опуклі многогранники.

Доведення.

Проведемо всі площини, що містять грані цього многогранника. Всі частини, на які вони розбивають простір, опуклі. Тому вони задають потрібне розбиття.

Задача 3.25. а) Доведіть, що будь-який опуклий многогранник можна розрізати на тетраедри. б) Доведіть, що будь-який опуклий многогранник можна розрізати на тетраедри, вершини яких розташовані у вершинах многогранника .

Доведення.

а) Візьмемо довільну точку P всередині многогранника і розрізаємо його грані на трикутники. Трикутні піраміди з вершиною P, основами яких є ці трикутники, дають шукане розбиття.

б) Виберіть одну з вершин V многогранника і розглянемо грані, які не є суміжними з вершиною V. Кожну з цих граней можна розрізати на трикутники, провівши в ній діагоналі, що виходять з однієї вершини. Трикутні піраміди з вершиною V, основами яких є отримані трикутники, дають шукане розбиття.

ВИСНОВКИ

Підсумовуючи основні результати виконаного дослідження, можна відмітити наступні положення.

Одними з провідних проблем адитивної теорії чисел є проблема Варінга, проблема Гольдбаха та задача подання числа у вигляді суми. Проблема Варінга в теорії чисел є однією з класичних задач, яка виникла в рамках аддитивної комбінаторики. Поставлена у 1770 р. І. Варінгом, вона виражається наступним чином: кожне ціле число більше 1 може бути подане у вигляді суми певної кількості степенів інших цілих чисел. Ця проблема має важливе значення в теорії чисел і комбінаториці і пов'язана із задачами подання чисел у вигляді сум степенів (прямий аналог проблеми Варінга) та багатьох інших аспектів теорії апроксимацій і адитивних властивостей цілих чисел.

Проблема Гольдбаха – це одна з найстаріших і невирішених задач в теорії чисел. Сформульована в 1742 р. математиком К. Гольдбахом, вона звучить наступним чином: кожне парне ціле число більше 2 можна подати у вигляді суми двох простих чисел. Існують спроби довести або спростувати це твердження для всіх парних чисел більше 2, але досі немає загального розв’язку. Тому проблема Гольдбаха хоча і є гіпотезою, проте вона залишається важливим об'єктом дослідження та стимулює розвиток нових методів в теорії чисел. Її важливість також полягає в тому, що, якщо б вона була вирішена, це могло б відкрити нові перспективи для розуміння властивостей простих чисел та арифметики загалом.

Адитивна теорія чисел грає важливу роль у розв'язуванні алгебраїчних задач, оскільки вона досліджує арифметичні властивості сум і оперує цілими числами. Вона може бути застосована при розв’язуванні задач на відшукання розв’язків діофантового рівняння, оскільки знаходження всіх цілих розв’язків рівнянь може зводитися до знаходження подання деякого числа у вигляді суми інших чисел, а адитивна теорія чисел вивчає можливості таких представлень. Крім того, положення адитивної теорії чисел можуть бути корисними при розв’язуванні задач, в яких виникає потреба подання числа у вигляді суми певного виду доданків, або задач, до розв’язання яких застосовується теорія конгруенцій. Теорія конгруенцій в основному вивчає властивості остач від ділення на фіксоване число. Ця теорія зазвичай пов'язана з арифметикою лишків, конгруенціями та теорією чисел. Адитивна теорія чисел, з іншого боку, займається вивченням властивостей арифметичних функцій та арифметичних виразів, зокрема, вона розглядає прості числа, дільники, суми та інші арифметичні властивості чисел. І хоча ці галузі, зазвичай, вивчаються окремо, іноді теорія лишків може використовуватися для дослідження конкретних арифметичних властивостей, наприклад, у теорії простих чисел або в задачах, пов'язаних з конгруенціями.

Ідеї адитивної теорії чисел можуть застосовувати і в шкільному курсі геометрії. Це стосується поняття рівноскладених та рівновеликих фігур. При вивченні геометрії можна пропонувати здобувачам задачі на розрізання фігур та рівновеликі фігури; завдання такого плану забезпечують засвоєння здобувачами істотних властивостей та ознак окремих видів чотирикутників, правильних многокутників і сприяють розвитку навичок застосовувати здобуті знання до розв'язування різних видів задач.

Хоча усі ці зазначені аспекти можуть не бути досить глибоко розглянуті у стандартному шкільному курсі математики, проте деякі з них можуть бути включені до більш спеціалізованих курсів для здобувачів, які цікавляться математикою або комп'ютерними науками. Крім того, адитивна теорія чисел може бути надзвичайно корисною для розвитку здобувачів та допомагати їм усвідомити міжпредметні зв'язки з іншими дисциплінами. Так, вивчення адитивної теорії чисел вимагає від здобувачів аналізу та застосування логіки для розв'язання проблем. Це розвиває їх логічне мислення, навички аналізу та розв'язування складних завдань. Задачі адитивної теорії чисел часто мають багатозначний характер та можуть мати багато можливих розв'язків. Вони вимагають від здобувачів творчого мислення та здатності знаходити нові підходи до розв'язання задач. Отже, адитивна теорія чисел не тільки розвиває математичні навички здобувачів, але й допомагає їм усвідомити широкі можливості застосування математики в реальному світі та її зв'язки з іншими науками та галузями знань, надає математичний фундамент для важливих концепцій в курсі алгебри та геометрії, допомагаючи здобувачам розвивати свої навички розв'язування складних математичних задач та застосовувати їх в різних галузях знань та технологій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адамар Ж. Елементарна геометрія. Планіметрія. Посібник для учителів середньої школи / Адамар Ж. – К.: Радянська школа. – 1953. – 574 с.
2. Антоненко М. І. Розв'язання геометричних задач / І. М. Антоненко. – К. : Радянська школа, 1991. – 125 с.
3. Бевз Г.П. Математика: Посібник для факульт. занять у 7 кл. / Бевз Г.П., Конфорович А.Г., Резніченко З.О., Ченакал Є.О. – К.: Рад. школа, 1982. – 152 с.
4. Бевз Г.П. Методи навчання математики / Г.Бевз – Х.: Вид. Група – Основа, 2003. – 96 с.
5. Бевз В. Розвиток індивідуальності дитини через індивідуальне навчання математики / В. Бевз, В. Кузьменко // Математика в школі. – 2009. – №3. – С. 16–19.
6. Безущак О.О. Елементи теорії чисел / Безущак О.О., Ганюшкін О.Г. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2003. – 214 с.
7. Бородін О.І. Теорія чисел / О.І. Бородін. – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1970. – 276 с.
8. Волошина Т.В. Основні алгебраїчні структури: курс лекцій / Волошина Т.В. – Луцьк: Вежа-Друк, 2015. – 60 с.
9. Гайштут О.Г. Розв'язування алгебраїчних задач: Посібник для вчителів / О.Г. Гайштут, Г.М. Литвиненко. – К.: Рад. шк., 1991. – 203 с.
10. Гнезділова Т. Діофантові рівняння / Гнезділова Т. // Математика. – 2009. – №38. – С. 3.
11. Гнезділова Т. Діофантові рівняння / Гнезділова Т. // Математика. – 2009. – №39. – С. 4.

12. Гнезділова Т. Діофантові рівняння / Гнезділова Т. // Математика. – 2009. – №41. – С. 5.

13. Гнезділова Т. Діофантові рівняння / Гнезділова Т. // Математика. – 2009. – №46-47.

14. Грохольська А.В. Невизначені рівняння / Грохольська А.В. // Математика в школі. – 2003. – №5. – С.36-43

15. Завало С.Т. Алгебра і теорія чисел / С.Т. Завало, В.М. Костарчук, Б.І. Хацет. – Ч.2. – К.: Вища школа, 1980. – 408 с.

16. Завало С.Т. Курс алгебри / Завало С.Т. — К.: Вища школа, 1985. – 500 с.

17. Завало С.Т. Алгебра і теорія чисел: практикум / С.Т. Завало, С.С. Левищенко, В.В. Пилаєв, І.А. Рокицький. – Ч.2. – К.: Вища школа, 1986. — 284 с.

18. Кушнір І.А. Трикутник у задачах / І.А. Кушнір. – К.: Либідь. – 1994. – 104 с.

19. Лейфура В.М. Математичні олімпіади школярів України 2001-2006 / Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. – Львів: Каменяр, 2008. – 348 с.

20. Лимаренко О.М. Діофантові рівняння / Лимаренко О.М., Ушаков І.П. // У світі математики. – 2001. – т. 7., В.2. – С.37-43.

21. Мазорчук В.С. Розв’язність класу рівнянь в цілих числах Ї Мазорчук В.С. // У світі математики. – 1998. – Т.4, В.1. – С.46-48.

22. Медяник А.Г. Учителеві про шкільний курс геометрії. Книга для вчителя / А.Г. Медяник. – К.: Рад. Шк., 1988. – 124 с.

23. Миронюк В. Методика розв’язування олімпіадних задач, пов’язаних з показниковими та степенево-показниковими діофантовими рівняннями / Миронюк В., Ясінський М. // Математика в школі. – 2005. – №3 . – С.47-49.

24. Морокішко Є.П. Збірник задач і вправ з теорії чисел / Морокішко Є.П. – К.: Вища школа, 2004. – 158 с.

25. Назаренко О.М. Елементи теорії чисел: навч. посібник / О.М. Назаренко, Т.І. Панченко. – Суми: СумДУ, 2003. – 204 с.
26. Ненхо Т. Вивчення шкільної геометрії як засіб розвитку різних видів мислення учнів / Т. Ненхо // Математика в школі. – 2003. – №2. – С. 34– 35.
27. Оглобліна О.І. Елементи теорії чисел / Оглобліна О.І., Сушко Ю.В., Шрамко Ю.В. – Суми: Сумський державний університет, 2015. – 220 с.
28. Плис Т.В. Вивчення діофантових рівнянь у шкільному курсі алгебри / Плис Т.В. // Математика в школах України. – 2006. – №35. – С.21-24.
29. Практикум з алгебри і теорії чисел / Гудивок П.М., Кирилюк О.А., Погоріляк Є. Я., Тилищак О.А., Юрченко Н.В. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2008. – 176 с.
30. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів / З. І. Слєпкань – К.: Зодіак – Еко, 2000. – 512 с.
31. Слєпкань З. Формування творчої особистості учня в процесі навчання математики / З. Слєпкань// Математика в школі. – 2003. – №3. – С. 7–13.
32. Скоробагатько В.Я. Дивлюсь на світ як математик / Скоробагатько В.Я. – Львів: Афіша, 1994. – 80 с.
33. Тарасенкова Н.А. Математика. На допомогу вчителю / Н. Тарасенкова, І. Богатирьова, О. Коломієць, З. Сердюк. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2013. – 56 с.
34. Філозоф К.Ф. Основи теорії чисел (курс лекцій) / Філозоф К.Ф. – Луцьк: РВВ «Вежа», Волин. держ. ун-ту ім. Лесі Українки, 2010. – 132 с.

35. Фішман І.М. Методологічні питання шкільного курсу математики: Посібник для самоосвіти / І.М Фішман. – К.: Рад. шк., 1985. – 214 с.
36. Цукренко С. Дидактичні матеріали / С. Цукренко //Математика в школі. –2002.– №2. – С. 4–8.
37. Черватюк О.Г. Елементи цікавої математики на уроках математики / О,Г. Черватюк, Г.Д. Шиманська. – К.: Радянська школа, 1988. – 298 с.
38. Черепинський О. Розв’язування рівнянь у цілих числах / Черепинський О. // Математика. – 2005. – №29-30. – С.22-26.
39. Ядренко М.Й. Піфагорові трикутники і Велика теорема Ферма // У світі математики. – К., 2004. – Т. 11. – Вип. 2. – С. 1-9.
40. Яцкова Т. Про розвиток евристичного мислення у школярів / Т. Яцкова // Математика в школі. – 2001. – №4. – С. 14 – 18.
41. Cohen H. A Course in Computational Algebraic Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1996. 546 p.
42. Ribenboim P. The New Book of Prime Number Records. New York: SpringerVerlag, 1996. 541 p.