Міністерство освіти і науки України
Херсонський державний університет
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗБІЖНОСТІ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ЧИСЛОВИХ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ І РЯДІВ У КУРСІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ В ЗАКЛАДАХ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала: студентка 2-го курсу, 12-221М групи
Спеціальності: 014 Середня освіта
Спеціалізація: 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти
Анастасія ПРЯДКО

Керівник кандидат фізико-математичних наук, професор Валерій КУЗЬМИЧ
Рецензент кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук та програмної інженерії Херсонського державного університету Олександр ВЕЙЦБЛІТ

Івано-Франківськ – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Підсумовування рядів є однією з найстаріших задач математичного аналізу та бере свій початок з античності. Ця задача завжди мала два аспекти: практичний, тобто розрахунковий, та теоретичний, тобто концептуальний. Інакше кажучи, перед тим, як обчислити суму нескінченного ряду, слід домовитися, що слід розуміти під цією сумою. В часи Ейлера поняття суми ряду не біло чітко визначено, що надавало певний простір у тлумаченні цього поняття та дозволило підсумувати багато розбіжних у звичному сенсі ряди. З появою строгого поняття границі багато математиків відмовилися від використання розбіжних рядів. Проте досить швидко з’ясувалося, що без розбіжних рядів ніяк не обійтися, що призвело до створення теорії розбіжних рядів та до появи методів їх підсумовування [14].

На сьогодні існує досить обширний арсенал методів підсумовування рядів, більшість з яких можуть підсумовувати також і розбіжні ряди. Проте усі ці методи зводять так чи інакше повільно збіжний або розбіжний ряд до збіжного, границю якого і називають сумою ряду. Отже, усі існуючі способи підсумовування рядів, як збіжних, так і розбіжних, використовують поняття границі та визначають суму ряду як границю деякого збіжного процесу, який і є алгоритмом підсумовування. В той самий час суму ряду можна визначити так, що поняття границі ніде не буде використано, що дає можливість підсумовувати ряди, суми яких раніше не були визначені і для яких існуючі методи підсумовування неможливо застосувати.

Дослідження методів узагальненої збіжності рядів залишається актуальною темою в математичному аналізі і у наш час. Цей розділ займається розглядом умов, при яких можна розширити діапазон застосування класичних теорем збіжності рядів на більш загальні класи функцій. Багато математиків працювали над цією темою, і серед них важливо відзначити наступних: А. Борель (він вивчав асимптотичну поведінку рядів та їх узагальнену збіжність на основі аналізу асимптотичних рівнянь [12]); С. Банах (він досліджував узагальнену збіжність рядів в просторах функцій, зокрема в банахових просторах [10]); А.М. Колмогоров (він вивчав такі питання, як підсумовування рядів із загальними членами [19]); Г. Харді (його роботи відіграли вагому роль у розвитку теорії узагальненої збіжності рядів [7]) та інші. Результати цих досліджень полягають у формулюванні та доведенні різних теорем, які визначають умови, за яких ряди можуть збігатися узагальнено (наприклад, у сенсі підсумовування Коші або інших методів підсумовування). Ці теореми встановлюють зв'язок між збіжністю рядів та властивостями функцій, що дозволяє розширити діапазон застосування класичних результатів.

Мета дослідження – розгляд питання застосування методів узагальненої збіжності при вивченні числових послідовностей та функціональних послідовностей та рядів у закладах вищої освіти.

Об'єктом дослідження є навчальна діяльність здобувачів вищої освіти в процесі вивчення математичного аналізу, а ***предметом дослідження*** – вивчення числових послідовностей та функціональних послідовностей та рядів в ході цієї діяльності.

Виходячи з мети, визначені основні ***завдання дослідження***:

- розглянути деякі теоретичні положення з теорії методів узагальненої збіжності рядів;
- визначити основні методичні аспекти вивчення теми в курсі математичного аналізу ЗВО;
- розробити систему завдань, що можуть бути використані для проведення практичних занять при вивчення теми «Числові послідовності та функціональні послідовності та ряди».

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що були виокремлені методичні рекомендації стосовно викладання теми в курсі математичного аналізу з урахуванням тенденцій сьогодення стосовно дистанційного та змішаного навчання. ***Практичне значення*** роботи полягає в можливості застосування практичної частини роботи здобувачами вищої освіти та викладачами.

Для вирішення поставлених завдань було застосовано наступні ***методи***: теоретичний аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури з теми дослідження, аналіз освітніх програм, вивчення та узагальнення педагогічного досвіду.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики в умовах цифровізації вищої освіти» (державний реєстраційний номер 0123U103793) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Апробація результатів дослідження. За результатами виконаного дослідження було опубліковано тези в альманаху «Магістерські студії» (Херсонський державний університет).

Робота складається з трьох основних розділів. В першому розділу наведено основні методи узагальненої збіжності рядів. У другому розділі розкрито питання стосовно методики організації різних видів навчальної діяльності з вивчення теми, зокрема, розкрито роль теми в курсі математичного аналізу та визначені рекомендації для проведення лекційних та практичних занять з теми. В третьому розділі роботи наведено систему вправ, що можуть бути використані для проведення практичних занять при вивчення теми «Числові послідовності та функціональні послідовності та ряди».

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ З ТЕОРІЇ МЕТОДІВ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ

Існує декілька методів узагальненої збіжності рядів, які дозволяють розширити діапазон застосування класичних теорем збіжності рядів на більш загальні класи функцій. Ось деякі з цих методів:

1. *Метод Коші*:

Переваги: цей метод може підсумовувати ряди, які не є збіжними за класичними поняттями, якщо ряд є абсолютно збіжним. Він використовує середнє арифметичне значення частинних сум ряду для обчислення "суми" ряду.

Недоліки: підсумовування за Коші не завжди може підсумовувати ряди, які мають складну асимптотичну поведінку, і не гарантує збіжності взагалі.

2. *Метод Абеля*:

Переваги: цей метод спирається на розклад Абеля для перетворення ряду, що може допомогти в підсумовуванні рядів, які раніше були незбіжними. Він застосовується до рядів, які є абсолютно збіжними.

Недоліки: підсумовування за Абелем також може бути обмежене в здатності підсумовувати ряди зі складними асимптотичними властивостями.

3. *Метод Бореля*:

Переваги: Цей метод спирається на ідею аналізу асимптотики функцій, що з'являються в результатах підсумовування. Він може бути застосований до рядів, які мають комплексні асимптотичні структури.

Недоліки: Визначення результату підсумовування за допомогою методу Бореля може бути складним і підлягати інтерпретації.

4. *Генераторні підходи*:

Переваги: Ці методи використовують генеруючі функції для знаходження асимптотичної поведінки рядів та їх узагальненого підсумовування.

Недоліки: Генераторні підходи можуть бути технічно вимогливими, і їх застосування може вимагати високого рівня відомостей з теорії функцій.

Метод Абеля підсумовування рядів

Якщо

$$0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ \dots\dots, \lambda_n \to \infty \,, \tag{1.1}$$

ряд $\sum a_n\ e^{-\lambda n^x}$ збіжний для всіх додатних x та

$$f(x) = \sum a_n\ e^{-\lambda n^x} \ \to\ \infty \tag{1.2}$$

при $x \to \infty$, то ми будемо говорити, що ряд $\sum a_n$ підсумовується (A, λ_n), або (A, λ) , до суми s і позначатимемо:

$$\sum a_n = s \qquad (A, \lambda). \tag{1.3}$$

В тому випадку, коли $\lambda_n = n,\ (A, \lambda) -$ метод збігається з A-методом [9]. Замість (A, n^k) ми будемо іноді писати (A, k).

Для більшої зручності будемо розглядати більш загальний метод додавання. Нехай $\big(\varphi_n(x)\big)$ – послідовність функцій, які визначені на відрізку $0 < x \le X$ і таких, що

$$\varphi_n(x) \ \to 1 \tag{1.4}$$

при $x \to 0$ для кожного n. Якщо ряд

$$\varphi(x) = \sum a_n \varphi_n(x) \tag{1.5}$$

збігається на деякому відрізку $0 < x \le X_1 \ \le X$ і $\varphi(x) \to\ s$ при $x \to 0$, то будемо говорити, що ряд $\sum a_n$ підсумовуємо (φ) до суми s.

Теорема 1.1. Для регулярності $\varphi -$методу необхідно і достатньо, щоб на деякому відрізку $0 < x \le \varepsilon$

$$\sum |\varphi_n\,(x) - \ \varphi_{n+1}(x)| < H, \tag{1.6}$$

де H не залежить від x . В окремому випадку ця умова виконується, якщо

$$0 \le \varphi_{n+1}(x) \le \varphi_n(x).$$

Додамо зауваження про частинний випадок, коли φ_n є додатною спадною функцією від n. Для цього випадку має місце проста, але корисна теорема.

Теорема 1.2. Якщо b_n не обмежено зростає разом з n та ряд $\sum u_n$ збігається, то

$$V_n = v_0 + v_1 + \ldots. + v_n = b_0\, u_0 + b_1\, u_1 + \ldots.. + b_n\, u_n = 0(b_n) \qquad (1.7)$$

Дійсно, покладемо $w_n = u_n + u_{n+1} + \ldots\ldots\ldots$, так що $w_n \to 0$. Маємо

$$V_n = \sum_0^n b_m(w_m - w_{m+1}) = b_0\, w_0 + \sum_1^n (b_m - b_{m-1}) w_m - b_n w_{n+1}$$

тобто $V_n = T_n b_n + 0(b_n)$, де

$$T_n = \frac{b_0}{b_n}\, w_0 + \frac{b_1 - b_0}{b_n} w_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots. + \frac{b_n - b_{n-1}}{b_n} w_n \to 0$$

Умови теореми 1.1, як бачимо, виконані для функції $\varphi_n(x) = e^{-\lambda} n^x$. Звідси справедлива

Теорема 1.3. (A, λ) – метод регулярний. Зокрема, A –метод регулярний.

Для абелевських середніх не існує загальної теореми [11]: різні методи цілком можуть підсумовувати один і той же ряд до різних сум. Так, ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$.... Додаємо (A) до суми $\frac{1}{2}$, і разом з тим додаємо (A, λ), де (λ_n) – послідовність 0,1,3,4,6,7,……, до суми $\frac{1}{3}$.

Теорема 1.4. Якщо

(I) $\lambda_0 \ge 1, \mu_n = \log \lambda_n$,

(II) $\sum a_n = s(A, \lambda)$,

(III) ряд $\sum a_n e^{-\lambda n^y} = \sum a_n e^{-y \log \lambda_n} = \sum a_n\, \lambda_n^{-y}$ збігається при $y > 0$, то $\sum a_n = s(A, \mu)$.

Теорема 1.5. Нехай $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$ – послідовність функцій, визначених на деякому відрізку змінної x; нехай

$$|f_0(x)| < H, \tag{1.8}$$

$$\sum |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < K, \tag{1.9}$$

де H та K не залежать від $x;$ і нехай ряд $\sum b_n$ збігається. Тоді ряд $\sum b_n \, f_n(x)$ рівномірно збігається.

Зокрема, теорема використовується тоді, коли $f_n(x)$ монотонно змінюється разом із n і рівномірно обмежена [3], так як коли

$$\sum |f_n - f_{n+1}| = \left|\sum (f_n - f_{n+1})\right| = \left|f_0 - \lim_{n\to\infty} f_n\right|$$

Із доведення буде видно, що у формулюванні теореми інтервал можна замінити множиною дійсних або комплексних x.

Зауважимо, що в силу умови (1.9) ряд $\sum(f_n - f_{n+1})$ збігається для кожного розглянутого x, так що $f_n(x)$ прямує до деякої функції $f(x)$ при $n \to \infty$. Крім того,

$$|f_n| \leq |f_0| + \sum_{0}^{n-1} |f_n - f_{n+1}| < H + K \tag{1.10}$$

Нехай $\sum b_n = B$. Припустимо

$$B_n = b_0 + b_1 + b_2 + \ \dots\dots\dots.+b_n, \qquad \beta_n = B_n - B,$$

і домовимося вважати, що $B_{-1} = 0,\ \beta_{-1} = -B$. Тоді $\beta_n \to 0$, і ми можемо вибрати N_0 так, щоб $|\beta_n| < \varepsilon$ для $n \geq N_0 - 1$. Далі,

$$\begin{aligned}\sum_{N}^{N'} b_n f_n &= \sum_{N}^{N'} (\beta_n - \beta_{n-1}) f_n \\ &= -\beta_{N-1} f_N + \sum_{N}^{N'-1} \beta_n \,(f_n - f_{n+1}) + \beta_{N'} f_{N'}\end{aligned} \tag{1.11}$$

$(N' \geq N \geq 0)$. Із (1.9)-(1.11) випливає, що

$$\left|\sum_{N}^{N'} b_n f_n\right| \leq 2\varepsilon(H + K) + \varepsilon K = (2H + 3K)\varepsilon$$

для $N' \geq N \geq N_0$ і кожного x; це і доводить теорему .

Покладаючи в формулі (1.11) $N = 0$ та $N' \to \infty$, отримуємо

$$\sum b_n f_n = Bf_0 + \sum \beta_n (f_n - f_{n+1}) \\ = Bf_0 + \sum (B_n - B)(f_n - f_{n+1}) \tag{1.12}$$

Так як $f_0 = f + \sum(f_n - f_{n+1})$, то має місце більш простіша формула

$$\sum b_n f_n = Bf + \sum B_n \, (f_n - f_{n+1}) \tag{1.13}$$

Але ряд, який стоїть в правій її частині, зазвичай не рівномірно збігається.

Нехай, наприклад,

$$f_0 = 1, \;\; f_n = x^n (n > 0, 0 \leq x \leq 1),$$

так що, $f = 0$ для $x < 1$ і $f = 1$ для $x = 1$; нехай, далі, $b_0 = 1$ та $b_n = 0$ для $n > 0$. Тоді, $B_n = 1, \; \beta_n = 0$ для $n \geq 0$ і (1.13) приймає вид

$$1 = f + \sum (x^n - x^{n+1})$$

Останній ряд не збігається рівномірно і не має неперервної суми, оскільки сума його дорівнює 1 для $x < 1$ (коли $f = 0$) і 0 для $x = 1$ (коли $f = 1$).

Очевидно, умови теореми виконуються, коли $f_n(x) = e^{-\lambda} n^x$ $(x \geq 0)$ або $e^{-\lambda} n^{(x - x_0)}$ $(x \geq x_0)$.

Якщо ряд $\sum b_n$ збігається, то ряд $\sum b_n e^{-\lambda} n^x$ рівномірно збігається для $x \geq 0$; якщо останній ряд збігається для $x > 0$, то він рівномірно збігається на будь-якому нескінченому відрізку $x \geq x_0 > 0$.

Метод Ейлера абсолютного підсумовування рядів

Нехай ряд $\sum a_n \, x^{n+1}$ збігається для малих x до $f(x)$, $q > 0$ і

$$x = \frac{y}{1 - qy}, y = \frac{x}{1 + qx}, \tag{1.14}$$

так що $y = \frac{1}{1+q}$ при $x = 1$. Тоді для малих x і y

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n \left(\frac{y}{1 - qy}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^\infty a_n \sum_{m=n}^\infty \binom{m}{n} q^{m-n} y^{m+1} = \\ = \sum_{m=0}^\infty y^{m+1} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} q^{m-n} a_n = \sum_0^\infty a_m^{(q)} \{(q+1)y\}^{m+1}, \tag{1.15}$$

де

$$a_m^{(q)} = \frac{1}{(q+1)^{m+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} q^{m-n}\, a_n. \tag{1.16}$$

Якщо

$$\sum a_m^{(q)} = A, \tag{1.17}$$

то будемо говорити, що ряд $\sum a_n$ *сумовний* $(E,\ q)$ до суми A. При $q = 1$ це означення зводиться до означення Ейлера [16], а при $q = 0$ – до означення звичайної збіжності.

Якщо $a_n = z^n$, то

$$a_m^{(q)} = \frac{(q+z)^m}{(q+1)^{m+1}}$$

і

$$\sum a_m^{(q)} = \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{q+z}{q+1}} = \frac{1}{1-z}$$

тоді і тільки тоді, коли $|q+z| < q+1$. Таким чином, ряд $\sum z^n$ сумовний $(E,\ q)$ в колі с центром $-q$ і радіусом $q+1$. При зростанні q це коло збільшується і при $q \to \infty$ прямує до півплощини $\Re z < 1$. Це є область B- або B'- сумовності даного ряду [24].

Рівняння (1.16) можна записати у формі

$$(q+1)^{m+1} a_m^{(q)} = (q + \grave{E})^m a_0. \tag{1.18}$$

Далі,

$$\frac{1}{q+1} + \frac{q+x}{(q+1)^2} + \cdots + \frac{(q+x)^m}{(q+1)^{m+1}} = \frac{1}{(q+1)^{m+1}} \frac{(q+1)^{m+1} - (q+x)^{m+1}}{1-x}$$
$$=$$
$$= \frac{1}{(q+1)^{m+1}} \sum_{n=1}^{m+1} \binom{m+1}{n} q^{m+1-n} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}).$$

Тому, замінюючи x на E і помічаючи, що

$$(1 + E + \cdots + E^{n-1}) a_0 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = A_{n-1},$$

одержуємо

$$A_m^{(q)} = \sum_{n=0}^{m} a_n^{(q)} = \left\{\frac{1}{q+1} + \frac{q+E}{(q+1)^2} + \cdots + \frac{(q+E)^m}{(q+1)^{m+1}}\right\} a_0 =$$

$$= \frac{1}{(q+1)^{m+1}}\left\{\binom{m+1}{1} q^m A_0 + \binom{m+1}{2} q^{m-1} A_1 + \cdots + A_m\right\}.$$

Ми будемо називати ряд $A^{(q)} = \sum a_n^{(q)}$ *q-й ейлеровою трансформацією* ряду $A = \sum a_n$. Формальний зв‘язок між обома рядами встановлюється формулами

$$\sum a_n\, x^{n+1} = \sum a_n^{(q)} \{(q+q)y\}^{n+1} = \sum a_n^{(q)} z^{n+1},$$

$$x = \frac{z}{1+q-qz}.$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 1.6. (E, q) – метод регулярний.

Дійсно,

$$c_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{1}{(q+1)^{m+1}}\dbinom{m+1}{n+1} q^{m-n} > 0 \text{ при } n \le m, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } n > m, \end{cases}$$

$$c_{m,n} \to 0 \text{ и } \sum c_{m,n} = 1 - \frac{q^{m+1}}{(q+1)^{m+1}} \to 1 \text{ при } m \to \infty.$$

Теорема 1.6 міститься як частий випадок $q' = 0$ в наступній теоремі.

Теорема 1.7. Якщо ряд сумовний (E, q'), то він сумовний *(E, q)* до цієї ж суми для кожного $q > q'$.

А ця теорема, очевидно, випливає з теореми 1.6 та наступного твердження.

Теорема 1.8. *r-а* ейлерова трансформація q-ої ейлерової трансформації заданого ряду є $(q + r + qr)$-а ейлерова трансформація цього ряду.

Дійсно, якщо

$$x = \frac{z}{1+q-qz}, \text{ а } \quad z = \frac{w}{1+r-rw},$$

то

$$x = \frac{w}{1 + s - sw}, \quad \text{где} \quad s = q + r + qr.$$

Теорема 1.8. *(E, q*)-метод володіє наступними властивостями:

$$\sum a_n^{(q)} = A \tag{1.19}$$

і

$$\sum b_n^{(q)} = A - a_0, \tag{1.20}$$

де $b_n = a_{n+1}$.

Дійсно, ми можемо вважати $a_0 = 0$, так що $B_n = A_{n+1}$. Тоді одержуємо, що

$$B_m^{(q)} = \frac{1}{(q+1)^{m+1}}\left\{\binom{m+1}{1} q^m A_1 + \binom{m+1}{2} q^{m-1} A_2 + \cdots + A_{m+1}\right\},$$

звідки

$$B_m^{(q)} - A_m^{(q)} = \frac{1}{(q+1)^{m+1}}\left\{\binom{m+1}{1} q^m a_1 + \cdots + a_{m+1}\right\} = (q+1) a_{m+1}^{(q)}. \tag{1.21}$$

(I) Якщо справедливо (2.30), то $a_{m+1}^{(q)} \to 0$, і (1.21) випливає з (1.20).

(II) Рівняння (1.21) можна записати в формі

$$B_m^{(q)} = (q+1) A_{m+1}^{(q)} - q A_m^{(q)},$$

звідки, беручи до уваги, що $A_0^{(q)} = 0$, випливає, що

$$(q+1) A_{m+1}^{(q)} = B_m^{(q)} + \frac{q}{q+1} B_{m-1}^{(q)} + \cdots + \left(\frac{q}{q+1}\right)^m B_0^{(q)}.$$

Це – перетворення

$$A_{m+1}^{(q)} = \sum c_{m,n} B_n^{(q)}$$

з

$$c_{m,n} = \begin{cases} q^{m-n}(q+1)^{-m+n-1} & \text{при } n \le m, \\ 0 & \text{при } n > m, \end{cases}$$

і виконання умов теореми тут одразу перевіряється [7]. Тому з (1.19) та (1.20) випливає $A_{m+1}^{(q)} \to A$, тобто (1.21).

З теореми 1.8 випливає, що співвідношення $A_n \to A$ *(E, q)* рівносильне співвідношенню $A_{n+1} \to A$ *(E, q)* і тим самим співвідношенню

$$\frac{1}{(q+1)^{m+1}}\left\{q^{m+1}A_0+\binom{m+1}{1}q^mA_1+\cdots+A_{m+1}\right\}\to A.$$

Тому підставляючи тут m замість $m+1$, ми можемо замінити $A_m^{(q)}\to A$ на

$$A_m^{(q)}=\frac{1}{(q+1)^m}\left\{q^mA_0+\binom{m}{1}q^{m-1}A_1+\cdots+A_m\right\}\to A.$$

Зазвичай зручніше всього і визначати «ейлерове середнє» для A_n таким способом, тобто ми можемо говорити, що $A_n\to A$ $(E,\ q)$, якщо

$$A_m^{(q)}=\frac{1}{(q+1)^m}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}q^{m-n}A_n=\left(\frac{q+E}{q+1}\right)^mA_0\to A. \qquad (1.22)$$

Підставляючи тоді s_n і t_n замість A_n і $A_n^{(q)}$, одержуємо

$$\Delta^m t_0=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}t_n=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}\left(\frac{q+E}{q+1}\right)^n s_0=$$

$$=\left(1-\frac{q+E}{q+1}\right)^m s_0=\left(\frac{1-E}{q+1}\right)^m s_0=\frac{1}{(q+1)^m}\Delta^m s_0. \qquad (1.23)$$

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ В КУРСІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

2.1. Місце теми в навчальній програмі

Сьогодні мета вищої освіти – це підготовка фахівців, які «здатні забезпечити перехід від індустріального до інформаційно-технологічного суспільства через новаторство в навчанні, вихованні і науково-методичній роботі» [7]. Підготовка здобувачів вищої освіти у ЗВО забезпечується професійними освітніми програмами (ОП), на базі ОП розробляються відповідні навчальні плани для спеціальностей. Зміст навчального плану охоплює усі форми організації навчального процесу: аудиторні заняття, відповідні контрольні заходи, а самостійну роботу здобувачів вищої освіти. Як правило, зазначені форми навчання подаються у рівній пропорції, проте наразі спостерігається тенденція до скорочення аудиторних годин та при цьому збільшення годин для самостійної роботи.

Курс математичного аналізу традиційний для вивчення в університетах педагогічного напрямку. Він посідає досить важливе місце в професійній підготовці майбутніх учителів математики. Побудова курсу здійснюється на основі ОП та тих вимог, які висуваються до здобувачів вищої освіти сьогодні. Метою курсу математичного аналізу є введення основних ідеї математичного аналізу та знайомство здобувачів вищої освіти із такими поняттями курсу, як поняття послідовності та границі, неперервності та диференційованості функції тощо.

Одним із основних понять курсу є поняття послідовності та ряду. Це поняття є результатом значних та довготривалих зусиль, які були спрямовані в свій час на розв’язання значної кількості задач природознавства та математики. Ряди виступають інструментом для вимірювання значимості тих понять математичного аналізу, які з’явилися поза теорії рядів. Багато математиків, досліджуючи ряди, описували їх вишуканість та неповторність. Серед них були Ґ. Лейбніц, Й. Густав, Л. Діріхле [11], В. Бернуллі, Б. Тейлор [16], Ф. Марі, Ш. Фур'є, Л. Ейлер, Ж. Д'Аламбер, К. Маклорен, Ж. Лагранж, Н. Абель [5], К. Вейєрштрас, Б. Ріман [28].

Ряди в математиці є важливим інструментом для аналізу та обчислення сум нескінченних послідовностей чисел. Вони знаходять застосування в різних галузях науки, а також у повсякденному житті. Ряди є одним із фундаментальних понять в математиці. Вони використовуються для опису нескінченних сум чисел або функцій. Розуміння рядів дозволяє розв'язувати цілу низку задач в різних галузях. Одним із застосувань рядів є аналіз функцій. Ряди можуть бути використані для наближеного обчислення значення функції, особливо коли вона не може бути виражена аналітично. Крім того, ряди дозволяють також досліджувати поведінку функції в околі певної точки або на нескінченності. Ряди також широко застосовуються у фізиці та інженерії. Вони допомагають моделювати складні фізичні явища, такі як розподіл електричного поля або теплових потоків. Ряди використовуються для розробки алгоритмів та методів розв'язування різноманітних задач. Вони мають множину властивостей, які відіграють важливу роль в їх аналіз та застосуванні. Наприклад, збіжність ряду визначає, чи збігається нескінченна сума до певного значення. Також існують різні теореми та методи для оцінки збіжності та обчислення суми ряду. Ці властивості дозволяють контролювати та керувати обчисленнями з рядами та застосовувати їх у практичних задачах.

Ряди являють собою суму нескінченного числа доданків, що записується у вигляді символічної формули. Одна із основних властивостей рядів – збіжність та розбіжність. Властивості рядів включають лінійність, асоціативність та комутативність операції підсумовування. Лінійність означає, що можна додавати та віднімати ряди, множити або ділити ряд на число. Асоціативність дозволяє змінювати порядок доданків в ряді без зміни його суми. Комутативність означає, що порядок доданків не впливає на суму ряду [19].

Основні поняття, які розглядаються при вивченні теми – це поняття функціональної послідовності, функціонального ряду, області збіжності ряду, рівномірно збіжні функціональні послідовності. Серед основних тверджень, які розглядаються при вивченні теми, можна відмітити критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності та ряду, достатню ознаку рівномірної та абсолютної збіжності функціонального ряду, властивості рівномірно збіжних функціональних послідовностей та рядів, теореми про почленне інтегрування та почленне диференціювання функціональних послідовностей та рядів.

2.2. Методичні рекомендації щодо проведення лекційних та практичних занять з теми

Курс «Математичний аналіз» входить до блоку обов’язкових компонент підготовки здобувачів вищої освіти та займає важливе місце серед них в процесі підготовки майбутніх вчителів математики. Метою курсу є наукове обґрунтування тих понять, які відносяться до цього курсу, перше уявлення про які дається у школі. Курс математичного аналізу має також загальноосвітнє та прикладне значення; багато питань містять матеріал, який сприяє формуванню правильного уявлення про сучасну природничо-наукову картину світу.

Матеріал з курсу математичного аналізу, який підлягає вивченню, розподілений на 4 семестри, він містить лекційний матеріал, практичні заняття та самостійну роботу. До системи підготовки здобувачів вищої освіти входять також курсові роботи. Лектор на свій розсуд може змінювати послідовність проходження окремих тем, обираючи методи викладання питань курсу та розподіляти час на їх проходження. Лекційний матеріал дозволяє викласти матеріал, який входить до змісту курсу, та створює теоретичну основу для усіх видів навчальної діяльності з математичного аналізу. Контрольні заходи забезпечують контроль засвоєння здобувачами частини лекційного матеріалу.

Різке скорочення аудиторного часу на вивчення курсу «Математичний аналіз» ставить задачу посилення самостійної роботи здобувачів вищої освіти по опрацюванню найважливіших розділів курсу. На лекції викладач може лише встигнути в тезисній формі викласти основні питання курсу, решта кладеться на плечі здобувачів у вигляді їх самостійної роботи. В процесі вивчення курсу передбачено наступні види самостійної роботи здобувачів вищої освіти над матеріалом, який вивчається:

1) опрацювання та усвідомлення лекційного матеріалу;

2) робота з підручниками та навчальними посібниками з лекційного матеріалу;

3) підготовка до практичних занять за літературними джерелами, які рекомендуються.

Ряд тем та питань курсу відведені для самостійного опрацювання здобувачами вищої освіти. Кількість та зміст цих питань залежить від ступеня засвоєння здобувачами лекційного матеріалу. Якщо лектор відчуває, що матеріал лекції добре сприймається та засвоюється аудиторією достатньо, то складність лекції можна підвищити, а темп читання можна прискорити, щоб дати здобувачам вищої освіти більше цікавого матеріалу, що може дещо скоротити обсяг самостійної роботи. З іншого боку, у лектора з'являється можливість розширити коло проблем, що вивчаються, винести на самостійне опрацювання нові цікаві питання. Здобувач вищої освіти має вивчити ці питання, використовуючи літературу з математичного аналізу, яка є у наявності, та викласти коротко та доступно для себе основний зміст матеріалу. Викладач перевіряє кість засвоєння самостійно опрацьованих питань на практичних заняттях та під час контрольних заходів. Потім він корегує викладання матеріалу та навантаження на здобувачів. Таким чином, використання самостійної роботи здобувачів дає можливість значно активізувати їх роботу над матеріалом курсу та підвищити рівень їх засвоєння.

Теоретичний матеріал з теми «Числові послідовності та функціональні послідовності та ряди» може бути розміщений на відповідній платформі ЗВО або на сайті кафедри, що викладає курс математичного аналізу. Теоретичний матеріал теми має бути необхідним та достатнім для вивчення усіх питань теми. Спираючись на розроблені лекції з теми та враховуючи те, на скільки добре здобувачі засвоюють лекційний матеріал, викладач може вирішувати, що розглядати під час лекції, а що запропонувати здобувачам вищої освіти для самостійного вивчення. Звісно, що основні важливі поняття, які стосуються числових рядів, функціональних послідовностей та рядів, а також найбільш ґрунтовні теореми теми повинні бути розглянуті під час проведення лекцій, проте положення, які є наслідками основних теорем, або доведення допоміжних тверджень може бути винесено на самостійне опрацювання.

Лекційний матеріал з теми «Числові послідовності та функціональні послідовності та ряди» має містити необхідний та достатній матеріал з теми, а саме: основні поняття (числовий ряд, сума ряду, функціональна послідовність, функціональний ряд, область збіжності функціонального ряду, гранична функція, рівномірно збіжний функціональний ряд, мажоритарний ряд); означення збіжності числового ряду, функціональної послідовності та ряду; критерій збіжності числових рядів, критерій Коші рівномірної збіжності функціональних послідовностей та рядів; достатня ознака рівномірної та абсолютної збіжності функціонального ряду (ознака Вейєрштрасса); властивості рівномірно збіжних функціональних послідовностей та рядів; теореми про почленне інтегрування функціональних послідовностей та рядів; теореми про почленне диференціювання функціональних послідовностей та рядів [12].

Концепція цілеспрямованого розвитку у здобувачів вищої освіти готовності до самоосвіти [27] приводить до того, що самостійна діяльність здобувачів, керована та організована, тісно пов'язана із освітою, яка є складовою та закономірно частиною цілісної системи навчально-виховної роботи. В рамках цієї концепції на перший план виходить самостійна робота здобувачів вищої освіти, яка подана в рамках основних форм організації навчального процесу (лекції, практичні заняття), так і, зокрема, організації самостійної роботи у позааудиторний час. Програма з «Математичного аналізу» передбачає різні види самостійних робіт: за зразком, реконструктивно-варіативні, частково-пошукові, творчі. Перші два види самостійних робіт можуть бути застосовані безпосередньо на заняттях в аудиторії та призначені для підготовки здобувачів до більш високого рівня навчальної діяльності. Наступні види самостійної роботи призначені для інтелектуального зросту здобувачів вищої освіти, виконання роботи такого роду передбачається здобувачами старших курсів – це індивідуальні завдання, курсові роботи, бакалаврські роботи.

Щоб навчальний процес при даних умовах проходив найбільш ефективно, здобувачам з перших занять необхідно виробити та розвивати у себе систему знань та умінь, які відображають міру інтелектуального розвитку: у конкретному бачити загальне, із загального виділяти конкретне, бачити всередині – і міжпредметні зв'язки відносно різних наукових понять, методів; вміння співвідносити наукові категорії з об'єктивною реальністю; розуміння відносного характеру знань та необхідності уточнювати їх шляхом систематичного пізнання; уміння аналізувати та узагальнювати; міцність вже набутих знань, умінь та навичок [14].

Для реалізації наведеної системи знань здобувачам пропонуються різні засоби. Зокрема, методичні рекомендації до практичних занять з теми «Числові послідовності та функціональні послідовності та ряди», що можуть бути розміщені на платформі ЗВО або на сайті кафедри, які допомагають здобувачам організовувати свою роботу як під час практичних занять, так і при роботі у позааудиторний час.

Приклади задач та методичні рекомендації до практичних занять з теми передбачають розбиття навчального матеріалу на підтеми, які передбачені ОП та навчальною програмою з математичного аналізу. Кожне практичне заняття краще розбити на ряд питань, які допоможуть здобувачам вищої освіти самостійно працювати при підготовці до практичних занять та лекцій. Це такі питання, як:

1) план заняття: в плані мають бути більш детально позначені питання, які розглядаються на занятті;

2) завдання: перша група завдань готує здобувачів до сприйняття нового матеріалу, друга група завдань – це завдання по засвоєнню та закріпленню вивченого;

3) питання для самоконтролю: етап самооцінки та самоконтролю є досить важливим в процесі самоосвітньої діяльності, тому наявність цього пункту дає можливість здобувачам оцінити результати своєї роботи, співвіднести їх з базовим рівнем, а також дозволяє засвоювати не лише матеріал практичного плану, але й теоретичні аспекти цих методів, тобто сприяє фундаменталізації знань.

Окрім методичних рекомендацій для більш успішної адаптації здобувачів вищої освіти викладач на кожному практичному занятті з теми «Числові послідовності та функціональні послідовності та ряди» може запропонувати виконати завдання по аналогії, пояснити виконання завдання на двох-трьох прикладах, розібрати найбільш складні елементи завдань для самостійного розв'язування. Знання та вміння, які формуються у здобувачів в ході вивчення математичного аналізу, досягають найбільшого ефекту при наступних основних умовах, які можуть бути створені лише при безпосередній участі та роботі самих здобувачів:

- чітке визначення цілі діяльності в сенсі результату дії та мети завдання;
- чітке уявлення стосовно техніки виконання дій, тобто зразка, якого слід досягнути;

- розуміння правил та послідовності виконання дій, спрямованих на досягнення цілей;
- постійний самоконтроль якості дій шляхом порівняння результатів з вже наявними зразками;
- своєчасне виявлення відхилень, помилок в діях при подальших повтореннях цих дій;
- правильна самооцінка успіхів у досягненні конкретної діяльності та мети завдань в сенсі удосконалення дій, які засвоюються.

Отже, потрібні, по-перше, система та послідовність завдань; по-друге, розумний розподіл їх в часі; по-третє, необхідна постійна актуалізація у самоосвітній діяльності здобувачів по перенесенню знань та умінь у нову ситуацію; по-четверте, активізація досвіду по розв’язуванню задач та перетворення раніше засвоєних способів діяльності.

Уміння, які необхідні здобувачам вищої освіти для самостійної діяльності при вивченні теми «Числові послідовності та функціональні послідовності та ряди» особливо у позааудиторний час і які підвищують готовність до самоосвіти:

1) вміння намічати та приймати до виконання задачі, основні шляхи пошуку та засвоєння навчального матеріалу;

2) навички планування навчальної діяльності, розподілу зусиль та часу для вирішення цих задач;

3) вміння оцінювати досягнуті результати та ставити нові задачі [15].

Планування практичних занять можна побудувати на основі технологічної карти (приклад наведено у таблиці 2.1), в якій наводяться деякі цілі (перший стовпчик), що можуть бути поставлені на практичному занятті та полегшують планування заняття. В другому стовпчику подані приклади завдань, розв’язання яких приводить до досягнення поставленої мети, тобто цей матеріал можна розглядати як зміст практичних занять та завдань для позааудиторної роботи у тому числі. Третій стовпчик – це корегування, в ньому викладені типові помилки та можливі труднощі, які виникають при розв'язуванні завдань з даної теми зі сторони здобувачів. Враховуючи їх, легко намітити шляхи подолання цих помилок та труднощів, провести профілактичну роботу для недопущення їх.

На перших практичних заняттях з теми «Числові послідовності та функціональні послідовності та ряди» варто ознайомити здобувачів вищої освіти з поняттями числового ряду, суми ряду, функціональної послідовності та функціонального ряду, збіжності та області збіжності функціональних рядів, суми функціонального ряду. Доцільно розглянути 3-4 типових приклади та по кожному прикладу запропонувати 3-5 завдань для самостійного розв'язування.

На наступних практичних заняттях здобувачів можна ознайомити з поняттями збіжності числового ряду, рівномірної збіжності функціональної послідовності та рядів, ознакою Вейєрштрасса рівномірної та абсолютної збіжності функціонального ряду. Доцільно навести два приклади на доведення рівномірної збіжності функціонального ряду на проміжку за допомогою означення рівномірної збіжності та ознаки Вейєрштрасса відповідно. Також доцільно запропонувати здобувачам по 5 прикладів для самостійного розв'язування.

На подальших практичних заняттях доцільно розглянути теореми про властивості збіжних числових рядів, рівномірно збіжних функціональних послідовностей та рядів, про почленне інтегрування та диференціювання функціональних послідовностей та рядів. Доцільно навести 3 типових приклади (дослідження ряду на інтегровність та диференційовність функціонального ряду за допомогою теорем про почленне інтегрування та диференціювання функціонального ряду). Також після цього доцільно запропонувати здобувачам по 5 завдань для самостійного розв'язування за відповідними питаннями.

Таблиця 2.1

Приклад технологічної карти

Логічна структура навчального процесу	Технологічна карта з теми «Функціональні ряди»	Курс 2
Цілі	Діагностика	Корегування
Ц 1: Засвоїти поняття функціонального ряду, його суми та збіжності. Ц 2: Засвоїти поняття рівномірної збіжності функціонального ряду. Ц 3: Засвоїти поняття почленного інтегрування та диференціювання функціонального ряду.	Д 1: 1) Знайдіть область збіжності функціонального ряду: $-\frac{1-x}{1+x}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n+\ldots$ 2) Дослідити збіжність функціонального ряду: $\frac{1!}{1}\left(x^2-4x+6\right)+\frac{2!}{2^2}\left(x^2-4x+6\right)^2+\ldots$ $\ldots+\frac{n!}{n^n}\left(x^2-4x+6\right)^n+\ldots$ в точках x = 1 і x = 2. 3) Знайти суму ряду: $\frac{1}{3}-\frac{(x-3)}{9}+\frac{(x-3)^2}{27}-\ldots$ Д 2: 1) Показати, що ряд $x^2+x^4+\ldots+x^{2n}+\ldots$ збігається рівномірно на відрізку [-1; 1]. 2) Користуючись ознакою Вейєрштрасса, довести рівномірну збіжність функціонального ряду Д 3: 1) Показати, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$ можна інтегрувати на будь-якому інтервалі. 2) Показати, що до ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\sin\frac{x}{n}$ можна застосувати теорему про диференціювання функціональних рядів.	I Типові помилки: при знаходженні суми ряду (Ц1); при дослідженні меж області збіжності Ц1, Ц2; при дослідженні ряду на інтегровність та диференційовність (Ц3). II Можливі труднощі: при визначенні області збіжності функціонального ряду (Ц1); при підборі числового ряду для доведення рівномірної збіжності (Ц2); при використанні властивостей, пов’язаних із диференціюванням та інтегруванням рядів (Ц3).

Для контролю знань та вмінь здобувачів вищої освіти можна запропонувати тестування. Окрім цього, при розгляді теми можна розглянути історичну довідку, яка містить історичні дані з розділу математичного аналізу «Числові послідовності та функціональні послідовності та ряди». В ній можна навести опис робіт Архімеда, Ньютона, Ейлера, Меркатора, Лейбніца, Бернуллі, Тейлора та інших відомих математиків.

Наведені компоненти системи вивчення теми можуть додаватися, змінюватися або замінюватися в ході навчання. Таким чином, надаються великі можливості для особистісної творчої роботи. Викладач та здобувачі вищої освіти можуть приймати участь у складанні власних компонент, у розробці матеріалу до лекційних або практичних занять. Розробка та розміщення компонент навчання з теми «Числові послідовності та функціональні послідовності та ряди» на платформі ЗВО або на сайті кафедри надає можливості внесення змін викладачем, додавання до матеріалу оновлених даних тощо, що дозволяє корегувати викладання безпосередньо під час його процесу, що є досить актуальним в умовах дистанційного або змішаного навчання.

РОЗДІЛ 3
СИСТЕМА ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ТЕМИ

Приклад 3.1. Довести безпосередньо збіжність числового ряду та знайти його суму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2}.$$

Розв'язання.

Розглянемо допоміжну раціональну функцію $f(x) = \frac{3}{9n^2+3n-2}$ таку, що $f(n) = a_n$ для $\forall n \geq 1$, де a_n – загальний член даного ряду, і розкладемо її на елементарні дроби. Маємо

$$\frac{3}{9n^2 + 3n - 2} = \frac{3}{(3x+2)(3x-1)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{3x+2}.$$

Звідки

$$A(3x+2) + B(3x+1) \equiv 3.$$

Знайдемо константи A і B відомими методами [15], отримаємо $A = 1, B = -1$. Отже, загальний член даного ряду $a_n = \frac{3}{9n^2+3n-2}$ можна подати у вигляді

$$a_n = \frac{3}{9n^2 + 3n - 2} = \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}, n = 1,2, \dots$$

Тоді частинні суми $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ будуть

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}.$$

Тепер зрозуміло, що існує границя $\lim_{n\to\infty} S_n$, яка дорівнює сумі ряду:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Приклад 3.2. Довести збіжність числового ряду та знайти його суму:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n + 5^n}{15^n}.$$

Розв'язання.

Загальний член ряду можна подати у вигляді

$$a_n = \frac{(-3)^n + 5^n}{15^n} = \left(-\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{3^n},$$

отже, даний ряд можна записати у вигляді суми двох збіжних геометричних рядів:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n + 5^n}{15^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}.$$

Скориставшись формулою суми геометричного ряду [9] маємо:

$$S = \frac{1}{1 + \frac{1}{5}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{6} + \frac{3}{2} = \frac{7}{3}.$$

Приклад 3.3. Довести безпосередньо збіжність числового ряду та знайти його суму:

$$\sum_{n=0}^{\infty} arctg \frac{1}{2n^2}.$$

Розв'язання.

Скористаємось формулою

$$arctg\, x + arctg\, y = arctg \frac{x + y}{1 - xy},$$

вірною при $x, y \in [0; 1)$. Дійсно, при $x, y \in [0; 1)$ маємо $0 \leq arctg\, x \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq arctg\, y \leq \frac{\pi}{4}$, отже, сума $0 \leq arctg\, x + arctg\, y \leq \frac{\pi}{2}$. Обчисливши тангенс цієї суми, маємо

$$tg(arctg\, x + arctg\, y) = \frac{tg(arctg\, x) + tg(arctg\, y)}{1 - tg(arctg\, x)tg(arctg\, y)} = \frac{x + y}{1 - xy},$$

що і доводить формулу.

Складемо частинну суму

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} arctg\frac{1}{2k^n}.$$

Послідовно знайдемо:

$$S_1 = arctg\frac{1}{2},$$

$$S_2 = arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{8} = arctg\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}} = arctg\frac{2}{3},$$

$$S_3 = S_2 + arctg\frac{1}{10} = arctg\frac{2}{3} + arctg\frac{1}{10} = arctg\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{10}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}} = arctg\frac{3}{4}.$$

Доведемо методом математичної індукції [13], що $S_n = arctg\frac{n}{n+1}$. Формула вірна для $n = 1,2,3$. Припустимо, що вона вірна для $n = m$ і доведемо її для $n = m + 1$. Маємо

$$S_{m+1} = S_m + arctg\frac{1}{2(m+1)^2} = arctg\frac{m}{m+1} + arctg\frac{1}{2(m+1)}$$

$$= arctg\frac{\frac{m}{m+1} + \frac{1}{2(m+1)^2}}{1 - \frac{m}{m+1}\cdot\frac{1}{2(m+1)^2}} =$$

$$= arctg\frac{(m+1)(2m^2+2m+1)}{(m+2)(2m^2+2m+1)} = arctg\ \frac{m+1}{m+2}.$$

В силу принципу математичної індукції формула $S_n = arctg\frac{n}{n+1}$ вірна при всіх натуральних n. Знайдемо суму ряду:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} arctg\frac{n}{n+1} = arctg\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = arctg\ 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ряди з невід'ємних чисел

Приклад 3.4. Використавши ознаки порівняння, дослідити на збіжність ряди:

А) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+3)3^n}$;

Б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}-n^2}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}+n}$;

Г) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n}\, tg\, \frac{1}{2n^2}$;

Д) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$.

Розв'язання.

А) Порівняємо загальний член даного ряду з загальним членом геометричного ряду: $\frac{n}{(2n+3)} < \frac{1}{2\cdot 3^n}$. Отже, даний ряд мажорується збіжним геометричним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot 3^n}$, тому він збігається за першою ознакою порівняння.

Б) Скористаємося другою ознакою порівняння. Нехай

$$a_n = \frac{1}{2^{2n-1}-n^2}, \quad b_n = \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

Обчислимо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n-1}}{2^{2n-1}-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{n^2}{2^{2n-1}}} = 1 \neq 0.$$

(ми скористались тим, що показникова функція зростає швидше степеневої, тому $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^{2n-1}} = 0$ **).** Отже, ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ведуть себе однаково.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}}$ – гармонічний ряд із знаменником $q = \frac{1}{4} < 1$, тому збігається, а отже, збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

В) Неважко переконатися, що $\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}+n} \sim \frac{1}{3n}$, при $n \to \infty$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний, тому розбіжний і заданий ряд.

Г) Скористаємось еквівалентністю $tg\, \frac{1}{2n^2} \sim \frac{1}{2n^2}$ $(n \to \infty)$. Тому

$$\sqrt[3]{n}\, tg\, \frac{1}{2n^2} \sim \frac{\sqrt[3]{n}}{2n^2} = \frac{1}{2n^{\frac{5}{3}}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{5}{3}}}$ є узагальненим гармонічним рядом з показником $\alpha=\frac{5}{3}>1$, тому збігається. Отже, даний ряд теж збігається.

Д) Відомо, що $\ln n<n$, однак ця нерівність нічого не дає, оскільки з нерівності $\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$ ніякого висновку зробити не можна. Представимо загальний член ряду у вигляді

$$\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}=\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}.$$

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ збіжний (оскільки $\frac{5}{4}>1$), тому ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$ теж збіжний.

Приклад 3.5. Дослідити на збіжність ряд:

А) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(3n+1)!}$;

Б) $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$.

Розв'язання.

А) Застосуємо ознаку Д'Аламбера. Маємо

$$a_n=\frac{3^n}{(3n+1)!},\ a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(3n+4)!}.$$

Границя співвідношення

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(3n+4)!}\frac{(3n+1)!}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(3n+4)(3n+3)(3n+2)}=0<1.$$

Отже, ряд збіжний.

Б) Застосуємо радикальну ознаку Коші. Маємо $a_n=n\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$, тоді

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right).$$

Обчислимо

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}<1.$$

Отже, заданий ряд збіжний.

Приклад 3.6. Дослідити на збіжність ряди:

А) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$;

Б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)ln^2 n}$.

Розв’язання.

А) Порівняємо даний ряд з рядомм $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Оскільки границя відношення

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1)}{(2n+1)\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

то даний ряд поводить себе так само, як $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. Дослідимо останній ряд за допомогою інтегральної ознаки [12], при $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$.

Обчислимо

$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{n\to\infty} \int_2^{t} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{t\to\infty}(\ln\ln(n+1) - \ln\ln 2) = +\infty$.

Отже, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ – розбіжний, а тому, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$ теж розбіжний.

Б) Аналогічно, даний ряд порівняємо з рядом $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$, який поводить себе так само, як і початковий ряд. Оскільки

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{d\ln x}{\ln^2 x} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln t}\right) = \frac{1}{\ln 2} < +\infty,$$

то звідси випливає збіжність вихідного ряду.

Приклад 3.7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$ при різних значеннях параметра p.

Розв’язання.

За формулою Стірлінга [19] $n! \sim \sqrt{2\pi n}^{\,n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ $(n \to \infty)$. Отже, заданий ряд слід порівняти з рядом

$$b_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^n}{n^{n+p}} = \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$ збігається при $p - \frac{1}{2} > 1$ і розбігається при $p - \frac{1}{2} \leq 1$. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$ збігається при $p > \frac{3}{2}$ і розбігається при $p \leq \frac{3}{2}$.

Приклад 3.8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де

$$a_n = \left(2 - \sqrt{a}\right)\left(2 - \sqrt[3]{a}\right) \dots \left(2 - \sqrt[n]{a}\right),\ a > 0.$$

Розв'язання.

Маємо:

$$\frac{a_{n+1}}{a} = 2 - \sqrt[n+1]{a} = 2 - e^{\frac{\ln a}{n+1}} = 2 - \left(1 + \frac{\ln a}{n+1} + \frac{ln^2 a}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{\ln a}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{ln^2 a}{2n^2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{\ln a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Згідно ознаки Гаусса [9], якщо $\frac{a_{n+1}}{a} = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$, при деякому $\varepsilon > 0$ ряд збіжний при $\mu < -1$ і розбіжний при $\mu \geq -1$.

Отже, при $-\ln a < -1$, тобто при $a > e$, ряд збігається, при $-\ln a \geq -1$, тобто при $a \leq e$ ряд розбігається.

Знакозмінні числові ряди

Приклад 3.9. Дослідити на абсолютну чи умовну збіжність ряди:

А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin 2n}{\sqrt[n]{n+2}}$

Б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}$.

Розв'язання.

А) Розглянемо ряд із модулів членів даного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=}^{\infty} \frac{|\sin 2n|}{\mathrm{n}\sqrt{n+2}}.$$

Маємо очевидну нерівність

$$\frac{|\sin 2n|}{n\sqrt{n+2}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ збігається, то даний ряд розбігається абсолютно за першою ознакою порівняння.

Б) Розглянемо ряд з модулів: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$. Для $n \geq 2$ справедлива нерівність $\ln n < n$. При $n = 2$ $\ln 2 < 2$, тобто $e^2 > 2$ вірно. Припустимо, що вірно при

$n = k$, $\ln k < k$ і доведемо при $n = k + 1$.

Маємо

$$\ln(k+1) = \ln k + \ln\frac{k+1}{k} = \ln k + \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Оскільки $e > 2 > 1 + \frac{1}{k}$ при $k \geq 2$, то $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < 1$. Отже,

$$\ln(k+1) = \ln k + \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < k + 1,$$

і нерівність $\ln n < n$ доведена по індукції для $n \geq 2$. Звідки $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, тому $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ – розбіжний ряд. Однак,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ і } \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)} \text{ при } n \geq 2.$$

Отже, за ознакою Лейбніца ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}$ збігається. Оскільки ряд із модулів розбіжний, то даний ряд збігається умовно.

Приклад 3.10. Скільки членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ слід взяти, щоб обчислити його суму з точністю до $\varepsilon_1 = 0{,}01$.

Розв'язання.

Даний ряд знакозмінний, тому для його залишку порядку n справедлива оцінка

$$|r_n| \le |a_{n+1}| = \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

Щоб обчислити суму ряду з точністю до $\varepsilon_1 = 0{,}01$, знайдемо мінімальне n таке, що $\frac{1}{(2n+3)^2} < 10^{-2} \Leftrightarrow 2n+3 > 10$, або $n > 3\frac{1}{2}$, тобто $n = 4$. Отже,

$$S = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{49} - \frac{1}{81}\right) \pm 0{,}01.$$

Виконавши обчислення до трьох знаків після коми та округливши, маємо $S = 0{,}08 \pm 0{,}01$.

Приклад 3.11. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Розв'язання.

Скористаємося ознакою Діріхле збіжності [22], прийнявши $a_n = \sin n$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Часткову суму $A_n = \sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n$ обчислимо, помноживши обидві частини рівності на $\sin\frac{1}{2}$ і перетворивши добутки синусів на суму. Маємо:

$$A_n \sin\frac{1}{2} = \sin 1\ \sin\frac{1}{2} + \sin 2 \sin\frac{1}{2} + \dots + \sin n \sin\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cos\frac{1}{2} - \cos\frac{3}{2} + \cos\frac{3}{2} - \cos\frac{5}{2} + \dots + \cos(n - \frac{1}{2}) - \cos\ (n + \frac{1}{2})) = \frac{1}{2}\cos\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\,(n + \frac{1}{2}).$$

Очевидно, що

$$\left|A_n \sin\frac{1}{2}\right| \le \left|\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{2}\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Звідки $|A_n| \le \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$ для довільного $n \ge 1$. Очевидно далі, що для $n \ge 1$ вірно $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Отже, послідовність $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ монотонно прямує до нуля. Значить даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ збігається за ознакою Діріхле.

Приклад 3.12. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ збігається умовно.

Розв'язання.

Збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ доведена в попередньому прикладі. Розглянемо ряд із модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{\sqrt{n}}$. Маємо $|\sin n| \geq \sin^2 n, n = \frac{1-\cos 2n}{2}$, звідки

$$\frac{|\sin n|}{\sqrt{n}} \geq \frac{1-\cos 2n}{2\sqrt{n}}.$$

Зауважимо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2n}{2\sqrt{n}}$ розбіжний, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{1}{2}}}$ розбіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}}$ збіжний за ознакою Діріхле (що встановлюється аналогічно прикладу 3.11). За ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{\sqrt{n}}$ розбіжний, отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ збігається умовно.

Приклад 3.13. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$.

Розв'язання.

Скористаємось ознакою Абеля збіжності, прийнявши $a_n = \sqrt[n]{n}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$. Доведемо, що послідовність a_n монотонна і обмежена. Маємо $a_n = e^{\frac{\ln n}{n}}$. Розглянемо функцію $f(x) = e^{\frac{\ln n}{n}}$. Її похідна

$$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2} < 0 \text{ при } x > e.$$

Отже, послідовність $a_n = \sqrt[n]{n}$ монотонно спадає при $n \geq 3$ і обмежена зверху, оскільки $\ln n < n$. Ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$$

збіжний, що доведено в прикладі 3.8. Отже, за ознакою Абеля даний ряд збігається.

Нескінченні добутки

Приклад 3.14. Обчислити значення нескінченного добутку

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}.$$

Розв'язання.

Як відомо,

$$n^3 - 1 = (n-1)(n^2+n+1), n^3 + 1 = (n+1)(n^2-n+1).$$

Враховуючи те, що

$$n^2 + n + 1 = (n+1)^2 - (n+1) + 1,$$

запишемо n – й частковий добуток у вигляді

$$\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \ldots \cdot \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{(2-1)(3^2-3+1)}{(2+1)(2^2-2+1)} \cdot \frac{(3-1)(4^2-4+1)}{(3+1)(3^2-3+1)} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)((n+1)^2-(n+1)+1)}{(n+1)(n^2-n+1)} =$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n+1)} \cdot \frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{2^2-2+1} = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n^2+n+1}{3}.$$

Обчислимо границю цієї послідовності

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(n^2+n+1)}{3(n^2+n)} = \frac{2}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2+n}\right) = \frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}$.

Приклад 3.15. Дослідити на збіжність нескінченний добуток

$$\prod_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{x^2}{1+x^2} dx.$$

Розв'язання.

Обчислимо визначений інтеграл

$$\int_n^{n+1} \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_n^{n+1} \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \int_n^{n+1} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = (x - acrtg\, x)|_n^{n+1} = n + 1 - n - arctg(n+1) + arctg\, n = 1 + arctg\, n - arctg(n+1).$$

Оскільки послідовність $arctg\, n$ монотонно зростає і $\lim_{n\to\infty} arctg\, n = \frac{\pi}{2}$ [17], то послідовність $(arctg\, n - arctg(n+1))$ є нескінченно малою та такою, що не міняє знак. Таким чином, наш нескінченний добуток збігається тоді і тільки тоді, коли збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (arctg\, n - arctg(n+1))$. Це числовий ряд з додатними членами. Порівняємо його з числовим збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Для цього обчислимо границю

$$A = \lim_{n\to\infty}(arctg\ (n+1) - arctg\ n) : \frac{1}{n^2}.$$

Оскільки $tg(arctg(n+1) - acrtg\ n) \sim arctg(n+1) - arctg(n)$, то

$$A = \lim_{n\to\infty} n^2 tg(arctg(n+1) - arctg\ n) = \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)} = A =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2+n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+1+\lim\limits_{n\to\infty 8}\frac{1}{}} = 1.$$

Таким чином, за теоремою порівняння ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(arctg\ n - arctg(n+1)) = -\sum_{n=1}^{\infty}(arctg(n+1) - acrtg\ n)$$

збігається, а отже, збігається і наш добуток.

Зауваження. Збіжність ряду можна довести безпосередньо, знайшовши суму ряду.

Функціональні ряди. Рівномірна збіжність

Приклад 3.16. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}.$$

Розв'язання.

Для будь-якого фіксованого x існує номер N такий, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $n + x > 0$. Оскільки збіжність ряду не залежить від скінченної кількості доданків, то будемо надалі вважати, що наш ряд – це ряд з додатними членами. Порівняємо його з рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

який, як відомо, збігається при $x > 1$. Для цього розглянемо границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}} : \frac{1}{n^x} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = e^x \neq 0.$$

Отже, наш ряд також збігається при $x > 1$ і розбігається при інших значеннях x.

Відповідь: $x \in (1; +\infty)$.

Приклад 3.17. Дослідити на рівномірну збіжність функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\ \frac{2x}{x^2+n^3}$.

Розв'язання.

Оскільки $|arctg\ t| = arctg\ |t| \leq |t|$, дослідимо на екстремум функцію $f(x) = \frac{2x}{x^2+n^3}$ при кожному фіксованому n. Для цього знайдемо її похідну

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2n^3 - 4x^2}{(x^2 + n^3)^2} = \frac{2(n^3 - x^2)}{(x^2 + n^3)^2}.$$

Нас цікавлять тільки додатні значення аргументу x, отже знайдемо значення $f(x)$ в точці максимуму $x_{max} = \sqrt{n^3}$:

$$f\left(\sqrt{n^3}\right) = \frac{2\sqrt{n^3}}{n^3 + n^3} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ збігається, то, за ознакою Вейєрштрасса [12], наш ряд збігається для всіх $x \in R$.

Відповідь: рівномірно збігається для всіх $x \in R$.

Приклад 3.18. Довести рівномірну збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt[3]{n^2 + x^4}}$$

на множині $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, де $\varepsilon \in (0, \pi)$.

Розв'язання.

Розглянемо суму $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx$. Помножимо та одночасно поділимо її на $2\sin\frac{x}{2}$, одержимо

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx=\frac{2\sin x\sin\frac{x}{2}+2\sin 2x\sin\frac{x}{2}+\cdots+2\sin nx\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}+\cdots+\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Таким чином, $\forall n\in N$, $\forall x\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$, $\varepsilon\in(0,\pi)$ маємо

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\le\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\le\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Оскільки $\forall x$, $\sqrt[3]{(n+1)^2+x^4}>\sqrt[3]{n^2+x^4}$, то послідовність $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+x^4}}$ є монотонною. Покажемо, що вона прямує до нуля при $n\to\infty$ рівномірно на множині $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$, $\varepsilon\in(0,\pi)$. Дійсно, $\forall x$, $\frac{1}{\sqrt{x^4+n^2}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. Отже, $\forall\varepsilon>0$ та $\forall x\ \exists N=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^3}}$ такий, що для $n>N$ $\left|\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+x^4}}-0\right|<\varepsilon$.

Оскільки виконуються усі умови теореми Харді-Діріхле [8], то наш ряд збігається рівномірно на вказаній множині.

Степеневі ряди. Ряд Тейлора

Приклад 3.19. Знайти радіус та область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^{-\sqrt{n}}\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Розв'язання.

Радіус збіжності знайдемо за формулою

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{\sqrt{n}}(2n^2+1)^{\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, то одержуємо, що $R=1$. Отже, інтервал збіжності – це проміжок (-1;1). Дослідимо на збіжність ряд в точках $x=\pm1$. Підставимо в ряд $x=1$, одержимо числовий ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Порівняємо його з рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n}}$. Оскільки для будь-якого $n \in N$ виконується нерівність $\frac{1}{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n}}$, то зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n}}$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n^2+1}}$. Застосуємо до ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n}}$ інтегральну ознаку Коші. Для цього розглянемо невласний інтеграл

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}dx = -2\int_{1}^{+\infty}3^{-\sqrt{x}}\,d\left(-\sqrt{x}\right) = -2\lim_{b\to\infty}\frac{3^{-\sqrt{x}}}{\ln 3}\Bigg|_{1}^{b} =$$

$$= -\frac{2}{\ln 3}\lim_{b\to+\infty}\left(3^{-\sqrt{6}} - 3^{-1}\right) = \frac{2}{3\ln 3}.$$

Отже, інтеграл збігається. А оскільки виконуються усі умови інтегральної ознаки, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n}}$. Таким чином, за теоремою порівняння збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n^2+1}}$.

Підставимо в наш степеневий ряд $x = -1$. Одержимо знакозмінний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^{-\sqrt{b}}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Оскільки числовий ряд, складений з абсолютних величин цього ряду, збігається, то за означенням цей ряд збігається абсолютно.

Відповідь: $R = 1$, область збіжності $[-1; 1]$, причому на всій області збіжності ряд збігається абсолютно.

Приклад 3.20. Знайти радіус та область збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^n}\right)^n \cdot x^n.$$

Розв'язання.

Знайдемо верхню границю

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^n}\right) = \frac{3}{4},$$

оскільки члени останньої послідовності з парними номерами дорівнюють $\frac{3}{4}$, а всі члени з непарними номерами дорівнюють $\frac{1}{6}$. Таким чином, за теоремою Коші-Адамара [16] радіус збіжності $R = \frac{4}{3}$. Підставимо в ряд $x = \frac{4}{3}$, одержимо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^n}\right)^n \cdot (\frac{4}{3})^n.$$

Оскільки при $n = 2k$: $\left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^n}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = 1$, тобто $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (ця границя не існує), то за необхідною ознакою збіжності наш числовий ряд розбігається. З цієї ж причини розбігається числовий ряд, який одержується, якщо в степеневий ряд підставити $x = -\frac{4}{3}$.

Відповідь: $R = \frac{4}{3}$, область збіжності $(-\frac{4}{3};\ \frac{4}{3})$.

Приклад 3.21. Розвинути функцію xe^{-x^2} в ряд Маклорена, вказати його область збіжності.

Розв'язання.

Використавши відомий розклад функції e^t у степеневий ряд $e^t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$, одержимо розвинення функції e^{-x^2}, підставивши в останній ряд $t = -x^2$:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!};\ xe^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}.$$

Оскільки ряд функції e^t збігається для $t \epsilon R$, то очевидно, що наш ряд збігається для $x \in R$.

Відповідь: $xe^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}$, $x \in R$.

Приклад 3.22. Розвинути функцію $\sqrt{x}\, arctg\sqrt{x}$ в ряд Маклорена, вказати область збіжності.

Розв'язання.

Розкладемо в ряд Маклорена функцію $\frac{1}{1+t^2}$. Оскільки вона є сумою геометричної прогресії з першим членом $b_1 = 1$ та знаменником $q = -t^2$, маємо

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}, |t| < 1.$$

Проінтегрувавши почленно цей степеневий ряд, маємо

$$C + arctg\ t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}.$$

Область збіжності при цьому не зміниться. Підставимо в рівність значення $t = 0$. Оскільки $arctg\ 0 = 0$, то одержимо $C = 0$. Тому

$$arctg\ t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, |t| < 1.$$

Поклавши $t = \sqrt{x}$, дістанемо

$$arctg\sqrt{x} = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1};$$

$$\sqrt{x} arctg\sqrt{x} = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{2n+1}.$$

Враховуючи область визначення даної функції, остання рівність має місце при $x \in [0; 1]$.

Відповідь: $\sqrt{x} arctg\sqrt{x} = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{2n+1}, x \in [0; 1].$

Зауваження. Підставивши в останню рівність $x = 1$, одержимо суму знакозмінного числового ряду, якщо враховувати, що $arctg\ 1 = \frac{\pi}{4}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 3.23. Розвинути в ряд за степенями $(x-2)$ функцію $\ln(1+3x)$, вказати область збіжності.

Розв'язання.

Зробимо заміну $x - 2 = t$. Одержимо

$$\ln(1+3x) = \ln\big(1+3(t+2)\big) = \ln(7+3t) = \ln 7\left(1+\frac{3}{7}t\right) =$$

$$\ln 7 + \ln(1 + \frac{3}{7}t).$$

Використаємо відоме розвинення

$$\ln(1+u) = \sum_{n=1} (-1)^{n-1}\frac{u^n}{n}, -1 < u \le 1.$$

Підставивши в цю рівність $u = \frac{3}{7}t = \frac{3}{7}(x-2)$, одержимо

$$\ln(1+3x) = \ln 7 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{7}\right)^n (x-2)^n.$$

Останній ряд збігається при умові

$$-1 < \frac{3}{7}(x-2) \le 1,$$

$$-\frac{7}{3} < x - 2 \le \frac{7}{3},$$

$$2 - \frac{7}{3} < x < 2 + \frac{7}{3}.$$

Відповідь:

$$\ln(1+3x) = \ln 7 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{7}\right)^n (x-2)^n, x \in (-\frac{1}{3}; \frac{13}{3}].$$

Зауваження. Підставивши в останню рівність $x = \frac{13}{3}$, одержимо суму числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2.$

Приклад 3.24. Обчислити $f^{(18)}(0)$, якщо $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Розв'язання.

Поклавши $x^2 = z$ і використавши біноміальний ряд, дістанемо

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+z)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!} x^{2n}.$$

Оскільки область збіжності біноміального ряду $|t| < 1$, то останній ряд збігається при $|x| < 1$. Цей ряд є рядом Маклорена нашої функції, тобто

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!} x^{2n} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Розглянувши член ряду, який містить x^{18}, одержимо

$$(-1)^9 \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 17}{2^9\cdot 9!} = \frac{f^{(18)}(0)}{18!}.$$

Відповідь: $f^{(18)}(0) = -\frac{17!\cdot 18!}{2^9\cdot 9!}$.

Приклад 3.25. Обчислити суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

Розв'язання.

Знайдемо радіус збіжності цього ряду за формулою

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Отже, цей ряд можна почленно інтегрувати або диференціювати на проміжку (-1;1). Але з іншого боку можна двічі почленно продиференціювати відомий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, сума якого дорівнює $\frac{1}{1-x}$, $x \in (-1;1)$. Одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^3}\cdot 2.$$

Запишемо наш ряд у вигляді суми двох рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n + n) x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} + x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}.$$

Оскільки останні два ряди збігаються на тому ж проміжку $\in (-1; 1)$, то сума нашого ряду дорівнює

$$S(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

Відповідь: $S(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}, x \in (-1; 1)$.

Приклад 3.26. Обчислити суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} x^n.$$

Розв'язання.

Знайдемо радіус збіжності ряду за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(n+1)(n+2)}{n(n+1)(2n+3)} = 1.$$

Доцільно коефіцієнти ряду записати у вигляді

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)+n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} + \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

Тоді наш ряд можна записати у вигляді суми двох рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Позначимо через $S_1(x)$ суму останнього ряду, тобто

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Він має ту ж область збіжності, що і даний ряд.

Продиференціюємо його почленно

$$S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, |x| < 1.$$

$$S_1(x) - S_1(0) = \int_0^x S_1(t)dt = \int_0^x \frac{t}{1-t} dt = -x - \ln(1-x).$$

Оскільки $S_1(0) = 0$, маємо

$$S_1(x) = -x - \ln(1-x).$$

Разом з тим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = x + \sum_{n=1}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x).$$

Таким чином, сума нашого ряду дорівнює

$$S(x) = -\ln(1-x) - 1 - \frac{\ln(1-x)}{x},\ |x| < 1.$$

Зауваження. Підставивши в даний ряд $x = -1$, одержимо умовно збіжний знакозмінний ряд. Таким чином його сума рівна

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}(-1)^n = -1.$$

Хоча цей факт можна встановити безпосередньо, знайшовши границю часткової суми $S_n = -1 + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Завдання для організації самостійної роботи та позааудиторної роботи здобувачів вищої освіти з теми наведено у додатках.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було розглянуто деякі теоретичні положення з теорії методів узагальненої збіжності рядів; визначено основні методичні аспекти вивчення теми в курсі математичного аналізу ЗВО; розроблено систему завдань, що можуть бути використані для проведення практичних занять при вивчення теми «Числові послідовності та функціональні послідовності та ряди». Підсумовуючи основні результати виконаного дослідження, можна відмітити наступні твердження.

Серед основних методів узагальненої збіжності можна відмітити наступні:

1. Підсумовування за Коші: цей метод дозволяє здобувачам вищої освіти зрозуміти, як можна знайти "суму" ряду, який не є збіжним за класичними поняттями. Він демонструє важливість абсолютної збіжності і дає можливість знаходити "суму" для рядів, які вказують на асимптотичну поведінку функцій.

2. Метод Абеля: цей метод показує, як застосування підходу розкладання Абеля може полегшити підсумовування рядів, які мають певну структуру. Він допомагає здобувачам вищої освіти побачити, як взаємодіють різні аспекти рядів для отримання суми.

3. Методи узагальнених функцій: вивчення цих методів може допомогти здобувачам вищої освіти усвідомити, як різні функціональні підходи можуть застосовуватися для аналізу рядів та їх поведінки.

Кожен з цих методів має свої переваги та недоліки, а їх вибір залежить від конкретних властивостей ряду та функцій, які вивчаються. Узагальнені методи збіжності нерідко використовуються в аналізі асимптотики, теорії поля та інших галузях математики та фізики, де зустрічаються незвичайні або складні ряди.

Включення методів узагальненої збіжності рядів до курсу математичного аналізу в університеті може бути корисним, оскільки це дозволяє здобувачам вищої освіти отримати більш глибоке розуміння поведінки рядів, які не збігаються класичними методами. Додавання таких методів допомагає розширити знання студентів і підготувати їх до аналізу більш складних математичних та наукових проблем. Окрім того, вивчення цих методів може розвивати аналітичні навички студентів, спонукати їх до креативного мислення при вирішенні проблем, а також допомогти зрозуміти взаємозв'язок між асимптотичною поведінкою рядів та їх сумою. Незважаючи на це, важливо пам'ятати, що додавання таких методів може бути викликом для студентів, і може знадобитися додатковий час для їх вивчення та засвоєння.

Наведена в роботі система вправ можуть бути використана для проведення практичних занять при вивчення теми «Числові послідовності та функціональні послідовності та ряди». Крім того, в додатках наведено завдання для організації індивідуальної роботи здобувачів вищої освіти під час проведення аудиторних практичних занять або під час позааудиторної роботию

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М. : Наука, 1961. – 326 с.
2. Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов / С. Барон. – М. : Учпедгиз, 1965. – 128 с.
3. Бевз В. Г. Практикум з історії математики: навчальний посібник для студентів фізико-математичних педагогічних університетів. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. – 312 с.
4. Білоус В. Т. Основи організації та методики викладання у вищій школі: навчально-методичний посібник / Білоус В.Т., Горюнова Л.І., Цимбалюк А.В., Цимбалюк С.Я. – Ірпінь: Академія ДПС України, 2001. – 146 с.
5. Вірченко Н. О. Нариси з методики викладання вищої математики. – К.: ТОВ «Задруга», 2006. – 396 с.
6. Вірченко Н. О. Вибрані питання методики вищої математики. – К., 2003. – 282 с.
7. Грепачевская Л. В. Абсолютная суммируемость ортогональных рядов / Л. В. Грепачевская // Сиб. матем. ж. – 1965, 6. – № 4. – С. 737-774.
8. Давыдов Н. А. Консервативные положительные матричные методы суммирования, неэффективные на некоторых множествах последовательностей / Н. А. Давывов // Украинский математический журнал. – 1978, 30. – № 6. – С. 723-730.
9. Дубіна О. Е. Основи проектування та розробки навчальних курсів за модульною технологією : навч. посібник. – Кіровоград: ТОВ «Полімед-Сервіс», 2005. – 112 с.
10. Евграфов М. А. Об обращении теоремы Абеля для рядов, имеющих пропуски / М. А. Евграфов // Изв. АН СССР. – Т. 16. – 1952. – С. 521-524.

11. Зигмунд А. Тригонометрические ряды / А. Зигмунд. – М. : Наука, 1965. – 312 с.

12. Кангро Г. О. некоторых исследованиях по теории суммируемости / Г. О. Кангро // Изв. АН ЭстССР. физ., матем. – 1967, 16. – № 3. – С. 255-266.

13. Коханівський О. П. Умова рівносильності логарифмічних методів підсумовування / О. П. Коханівський // Украинский математический журнал. – 1974. – № 6. – С. 229-234.

14. Кугай Н. В. Методологічні знання майбутнього вчителя математики: монографія. – Харків: ФОП Панов А.М., 2017. – 337 с.

15. Кузьмінський А. І. Наукові засади методичної підготовки майбутнього вчителя математики / А.І. Кузьмінський, Н.А. Тарасенкова, І.А. Акуленко. – Черкаси: ЧНУ ім. Богдана Хмельницького, 2009. – 320 с.

16. Кузьмич В. И. О включении и равносильности методов Чезаро абсолютного суммирования рядов / В. И. Кузьмич. – [В кн: Приближенные методы математического анализа]. – К. : Изд-во Киев. пед. ин-та, 1979. – С. 18-26.

17. Крилова Т.В. Проблеми навчання математики в технічному вузі. – К.: Вища школа, 1998. – 296 с.

18. Михалін Г.О. Професійна підготовка вчителів математики у процесі навчання математичного аналізу. – К., 2003. – 124 с.

19. Москаленко О.А. Практикум з методики навчання математики. Математика. Алгебра. Початки аналізу: навчальний посібник [для студентів спеціальності «Педагогіка і методика середньої освіти. Математика»]. – Полтава: АСМІ, 2004. – 348 с.

20. Москаленко О. А., Черкаська Л. П., Коваленко О. В. Педагогічне забезпечення самостійної роботи студентів в умовах дистанційного навчання. International scientific and practical conference “Current trends and factors of the development of pedagogical and psychological sciences in Ukraine and EU countries” conference proceedings, Lublin, 25- 26

September, 2020 Lublin, Izdevnieciba “Baltija Publishing”, 2020. – P. 72-74.

21. Моторіна В.Г. Інноваційні підходи до навчання математики: навч. посібник. – Харків: ХНПУ, 2008. – 112 с.
22. Навчальний процес у вищій педагогічній школі : навч. посібник / О.Г. Мороз та ін. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова. Інститут вищої освіти АПН України, 2001. – 242 с.
23. Папласкаускас А. Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега / А. Б. Папласкаускас. – М. : Наука, 1966. – 214 с.
24. Прокопенко І.Ф. Порівняльний аналіз альтернативних технологій навчання у вузі : навч. посібник / Прокопенко І.Ф., Євдокимов В.І. – Харків: Основа, 1995. – 192 с.
25. Реймерс Э. Новые общие методы суммирования / Э. Реймерс // Уч. зап. Тарктуск. ун-та. – 1962. – № 129. – С. 119-154.
26. Семенець С. П. Наукові засади розвивального навчання в системі методичної підготовки майбутніх учителів математики: монографія. – Житомир: «Волинь», 2010. – 504 с.
27. Слєпкань З. І. Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі. – К. : НПУ, 2000. – 210 с.
28. Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов / С. Б. Стечкин // Матем. сб. – 1951, 2.9. – №1. – С. 225-232.
29. Тиман М. Ф. Об абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье / М. Ф. Тиман // Сообщения АН ГрузССР. – 1961, 26. – №6. –С. 641-646.
30. Тягай І. М. Форми інтерактивного навчання математичних дисциплін майбутніх учителів математики: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. – К., 2017. – 20 с.
31. Тягай І. М. Інтерактивне навчання у вищій школі : навчально-методичний посібник для організації самостійної роботи магістрантів. – Умань: ФОП Жовтий О. О., 2015. – 117 с.

32. Харди Г. Х. Расходящиеся ряды / Г. Х. Харди. – М. : Просвещение, 1951. – 386 с.

33. Харшиладзе Ф. И. Множители равномерной сходимости / Ф. И. Харшиладзе // Тр. Тбилисск. матем. ин-та. – 1960. – № 27. – С. 195-208.

ДОДАТКИ

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Довести безпосередньо збіжність рядів і знайти їх суми або встановити їх розбіжність.

1. А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+12n-5}$;

Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$;

В) $\sum_{n=2}^{\infty} ln\left(1-\frac{2}{n^2+n}\right)$;

2. А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{9n^2-12n-5}$;

Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$;

3. А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+6n-8}$;

Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+2}{2^n}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$;

4. А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2+21n-8}$;

Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+(-3)^n}{6^n}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

5. А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}$;

Б) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{10}{3^n}-\frac{1}{2^n}\right)$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$;

6. А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-28n-45}$;

Б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5+(-2)^n}{3^n}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)(n+6)}$;

7. А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-70n-24}$;

Б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+(-4)^n}{12^n}$;

В) $\sum_{n=0}^{\infty} arctg\ \frac{2}{n^2+n+1}$;

8. А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2-7n-12}$;

Б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5+(-3)^{n+1}}{4^n}$;

В) $\sum_{n=0}^{\infty} arctg\ \frac{\sqrt{3}}{2n(2n-1)}$;

9. А) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-2}$;

Б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n-4^n}{12^n}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

Завдання 2. Використавши необхідну ознаку збіжності ряду, встановити розбіжність рядів:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n+2}$;

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-3^n}{(10n+1)^2}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n$;

4. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n tg \frac{3}{2^n}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$;

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^3+3}}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) arctg \frac{1}{n}$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} \sin \frac{1}{n+2}$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n+2} tg \frac{1}{n}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$;

Завдання 3. Використовуючи ознаки збіжності рядів з невід’ємних чисел, дослідити на збіжність ряди:

1. А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{3n^2+1}$;

Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$;

Г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$;

Д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+1)}$;

Е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$;

2. А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n-n^2}$;

Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} arctg \frac{1}{n+1}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{(n+1)!}$;

Г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$;

Д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln^2 n}$;

Е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$;

3. А) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \arcsin \frac{1}{n^2+1}$;

Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+1}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2}{(3n+5)\cdot 2^n}$;

Г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n^2}$;

Д) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)\ln^2(5+2)}$;

4. А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n\pi}{2n^2-1}$;

Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin^2 \frac{1}{2n+1}}{3n-2}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)\cdot 5^n}{(2n-1)!}$;

Г) $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{-n^2}$;

Д) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln(n+2)}$;

Д) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n(\ln^2 n+1)}$;

Е) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\frac{3}{2}}$;

Е) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^3$;

5. А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{(n+1)\sqrt{n}}$;

Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\sin\frac{1}{n}}{2n+1}$;

В) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\cdot 3^n}{(3n+1)!}$;

Г) $\sum_{n=1}^{\infty} n \; arcsin^n \frac{1}{2n+1}$;

Д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)ln^2(2n+1)}$;

Е) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\frac{1}{2}}$;

6. А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{tg}^2\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}}$;

Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n^3+1}}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\cdot 2^n}{(n+1)!}$;

Г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{2}{2^n}$;

7. А) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$;

Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n^4+1}}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+5}{n\cdot 2^{n+1}}$;

Г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\ln^n(n+1)}$;

Д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(\ln^2 n+1)}$;

Е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n\cdot n!}$;

8. А) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}\cdot\sqrt{n+1}}$;

Б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n\sqrt[2]{n^4+1}}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!!}$;

Г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$;

Д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(\ln^2 n+1)}$;

Е) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\frac{5}{2}}$;

9. А) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt{n}\cdot\sqrt[3]{n^2+1}}$;

Б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+3)}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n^2+1}}{2^n}$;

Г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{3^n}$;

Д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$;

Е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(n!)^2}{4\cdot11\cdot\ldots\cdot(2n^2+n+1)}$;

10. А) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n}$;

Б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}+\ln n}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2\cdot7\cdot12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}$;

Г) $\sum_{n=1}^{\infty} n^5\, arcsin^n \frac{1}{n+1}$;

Д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(n+2)}$;

Е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{n^7}$;

Завдання 4. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряди:

1. А) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

   Б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)$;

2. А) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{\ln n}}$; Б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$;

3. А) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,tg\,\frac{n}{n^2+1}$; Б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\ln^2(n+1)}$;

4. А) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+1)\ln n}$; Б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$;

5. А) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)$;

   Б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n2^{n}}{(n+1)!}$;

6. А) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n^2}{\ln^{n}n}$; Б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

7. А) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$; Б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\arcsin\frac{1}{2n^2}$;

8. А) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n^2+1}$; Б) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n-1}{3n^2}$;

9. А) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)\ln^3 n}$;

   Б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$;

10. А) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n}\frac{n}{3^{n}}$;

    Б) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\sqrt{n^2+2}}$;

Завдання 5. Обчислити суму ряду з точністю до ε:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{3n^2},\ \varepsilon=10^{-2}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n}}{(2n+1)!},\ \varepsilon=10^{-2}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^3},\ \varepsilon=10^{-3};$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{5n},\ \varepsilon=10^{-3};$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^3(5n+1)},\varepsilon=10^{-2}\ ;$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(2n)!},\ \varepsilon=10^{-3}\ ;$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n2^n},\varepsilon=10^{-2};$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3},\varepsilon=10^{-3};$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n-1)^2(2n+2)},\varepsilon=10^{-2};$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)},\varepsilon=10^{-3};$

Завдання 6. Дослідити на збіжність ряди за ознакою Абеля чи Діріхле. Чи збігаються ряди абсолютно?

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n+2};$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{2n+1};$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{3n+1};$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{\ln\ln n};$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{\pi}{3}\right)}{n-\ln^2(n+2)};$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{\pi}{3}\right)}{n-\ln^2(n+2)};$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin 3n}{\sqrt{n^2+1}};$

8. $\sum_{n=}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n^2+1}};$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3n}{2n-1}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{2n-1}$;

Завдання 7. Обчислити значення нескінченного добутку:

1. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$;

2. $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$;

3. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2+2n}$;

4. $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)}{n^2+n-2}$;

5. $\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + 2^{-2^n}\right)$;

6. $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)$;

7. $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{1}{2^n}$;

8. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^n}\right)$;

9. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}$;

10. $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}$;

Завдання 8. Дослідити на збіжність нескінченний добуток:

1. $\prod_{n=1}^{\infty} tg\ \left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$;
2. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{8}{n}\right) e^{-\frac{8}{n}}$;
3. $\prod_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$;
4. $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$;
5. $\prod_{n=1}^{\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;
6. $\prod_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{n}$;
7. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;
8. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{\frac{1}{n+1}}$;
9. $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}$;

$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$;

Завдання 9. Знайти область збіжності ряду

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{1-4x^n}$;
2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{nx}}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{nx}+n^2}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{nx}}{n^n}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^5+x^{10}}}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{nx}$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin\frac{x}{2}$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\sin nx}{3^n-2^n}$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{x}{n}$;

Завдання 10. Довести рівномірну збіжність ряду на вказаній множині:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n+x^2}, x \in [\varepsilon, 2\pi-\varepsilon], \varepsilon \in (0,\pi)$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}, x \in (0;+\infty)$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2} arctg\, nx, x \in R$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n+x^2}}, x \in [0;+\infty]$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+x}+x}, x \in [0;+\infty]$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^2e^{-n^2|x|}, x \in R$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}, x \in [0;a], a > 0$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}, x \in [2; +\infty];$

9. $\sum_{n=2}^{\infty} \sin \frac{x^2}{n \ln^2 n}, x \in [-a; a], a > 0;$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n+x^2}}, x \in [\varepsilon; 2\pi - \varepsilon], \varepsilon \in (0; \pi);$

Завдання 11. Знайти радіус та область збіжності ряду

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\ln(n+1)} x^n;$

2. $\sum_{n=2}^{\infty} (n-2)^{2^{n-1}} x^n;$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 10^{n-1} x^n;$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1};$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+2)^n}{n(n+1)^2};$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-3)^n}{n(n+1)};$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(x-3)^n}{n^2(n+1)};$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{1+n^2}};$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2nx^{2n-1};$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(n+1)}{n+1} (x-3)^n.$