

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

---

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ

Том 63

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

2

---

МОСКВА · 1986

УДК 520.844

КУЗЬМЕНКОВ С. Г.

**ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ  
СПЕКЛ-ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ.  
УГЛОВЫЕ ДИАМЕТРЫ И ПОТЕМНЕНИЕ ЗВЕЗД  
К КРАЮ ДИСКА**

Исследованы потенциальные возможности совместной оценки нескольких неизвестных параметров произвольного объекта по результатам измерения спектра мощности спекл-изображений. Рассмотрена типичная задача совместной оценки углового диаметра и коэффициента потемнения к краю диска звезды при линейном законе потемнения. Показано, что в этом случае оценки искомых параметров независимо от способа оценивания получаются сильно скоррелированными, причем коэффициент корреляции совместно-эффективных (по Крамеру — Рао) оценок является функцией обстоятельств наблюдения и характеристик наблюдаемого объекта. Предложена оптимальная стратегия решения данной задачи, учитывающая инвариантность среднего числа детектируемых фотонов на спекл для разных моделей, описывающих распределение яркости по диску звезды. Полученные результаты дают возможность планировать эксперимент при решении методом спекл-интерферометрии задачи измерения углового диаметра и потемнения звезд к краю диска.

THE POTENTIAL PRECISION OF THE SPECKLE INTERFEROMETRIC MEASUREMENTS. STELLAR ANGULAR DIAMETERS AND LIMB DARKENING, by *Kuz'menkov S. G.* — The potentialities are studied of a joint estimation of several unknown parameters of an arbitrary object from the speckle image power spectrum. A typical problem of joint estimation of stellar angular diameter and limb-darkening coefficient for the linear limb-darkening law is considered. It is shown that in this case the estimations of the parameters, irrespective of the method, turn out to be strongly correlated, the correlation coefficient of the jointly-effective (after Kramer — Rao) estimations being the function of the observation circumstances and of the characteristics of the object studied. The optimum strategy for the solution of the stated problem is suggested, accounting for invariance of the mean number of detected photons per speckle for different models describing the brightness distribution over the stellar disc. The results obtained allow to plan an experiment for the speckle interferometric measurements of stellar angular diameters and limb darkening.

**Введение**

В первой статье данной работы [1] было получено общее соотношение, определяющее нижнюю границу (границу Крамера — Рао) дисперсии оценки неизвестного скалярного параметра  $p$  произвольного объекта по результатам измерения спектра мощности спекл-изображений:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{2(M-1)K_p}, \tag{1}$$

где

$$K_p = n_{os}^2 \int_0^\pi \int_0^{v_D} \frac{[g_D(v)]^2 \left[ \frac{\partial \Phi(v, \psi, p)}{\partial p} \right]^2 v dv d\psi}{[1 + n_{os} g_D(v) \Phi(v, \psi, p)]^2}, \tag{2}$$

$n_{os}$  — среднее число детектируемых фотонов на спекл,  $M$  — число спекл-изображений,  $\Phi(v, \psi, p) = |f_n(v, \psi, p)|^2$  — нормированный квадрат модуля фурье-преобразования от распределения яркости по объекту,  $g_D(v)$  — дифракционная оптическая передаточная функция (ОПФ) телескопа,  $v_D$  — пространственная частота, ограниченная дифракцией в телескопе. С помощью этого соотношения была исследована задача измерения углового диаметра звезд для модели равномерно светящегося (однородного) диска.

Очевидно, что величина углового диаметра, полученного в предположении однородного диска, имеет несколько условный характер. Очевидно также, что чем совершеннее будет модель, представляющая распределение яркости по диску звезды, тем ближе к истинному будет значение углового диаметра. Относительное распределение яркости по проекции видимой поверхности звезды на картинную плоскость выражается законом потемнения к краю. Разумеется, в идеале хотелось бы получить из измерений не только величину углового диаметра, но и распределение яркости по диску, так как именно эта информация дает возможность найти функцию источника в атмосфере звезды. В конечном итоге это явилось бы мощным способом проверки теоретических моделей звездных атмосфер.

Для широкого класса моделей тонких звездных атмосфер теория [2] дает так называемый линейный закон потемнения к краю:

$$I(\chi) = I(0) [1 - u(1 - \cos \chi)], \quad (3)$$

где  $I(0)$  — яркость в центре диска звезды,  $\chi$  — угол между лучом зрения и нормалью к поверхности звезды,  $u$  — коэффициент потемнения к краю.

Однако звезды, доступные в настоящее время методу спекл-интерферометрии, обладают, по-видимому, протяженными атмосферами [3], и линейный закон (3) к ним, строго говоря, неприменим. С другой стороны, для протяженных атмосфер в настоящее время отсутствует удовлетворительная теория выходящего излучения [4, 5], и выражения в аналитическом виде, описывающего потемнение к краю, не существует. Поэтому при интерпретации интерферометрических наблюдений [6, 7] или кривых блеска затменно-двойных систем [8], как правило, пользуются линейным законом (3).

Исследования влияния эффектов потемнения к краю на измерения угловых диаметров интерферометром интенсивностей были проведены Ханбери Брауном с сотрудниками [6]. Помимо (3) они включили в рассмотрение более сложный закон

$$I(\chi) = I(0) [1 - u(1 - \cos \chi) - v(1 - \cos \chi)^2 - w(1 - \cos \chi)^3]. \quad (4)$$

Проведенный анализ показал, что кривая корреляции флуктуаций интенсивностей, измеренная данным интерферометром и пропорциональная, как известно, функции когерентности источника  $\Gamma^2(d)$ , где  $d$  — длина базы интерферометра, по своей форме до первого минимума не чувствительна к распределению яркости по диску звезды. Более того, они пришли к выводу, что если измерения функции когерентности источника покрывают ее только до второго минимума, то практически невозможно сделать различие между разными законами потемнения, например (3) и (4), либо отдать предпочтение какому-либо набору из множества значений  $u$ ,  $v$  и  $w$  в (4). Поэтому данные наблюдений интерпретировались поначалу через угловой диаметр эквивалентного однородного диска  $\theta_{UD}$ . Затем для получения истинного углового диаметра  $\theta_{LD}$  потемненной к краю диска звезды вносилась поправка по приближенной формуле

$$\frac{\theta_{LD}}{\theta_{UD}} = \left[ \frac{1 - u/3}{1 - 7u/15} \right]^{1/2}, \quad (5)$$

где значения  $u$  задавались путем подгонки методом наименьших квадратов уравнения (3) к распределению яркости по диску, даваемому определенной моделью атмосферы звезды. Формула (5) приближенно (однако с точностью не хуже 1%) отражает связь между  $\theta_{LD}$  и  $\theta_{UD}$ , полученную в результате соответствующего масштабирования по аргументу функций когерентности источника при условии, что они совпадают в точке  $\Gamma^2(d) = 0,3$ . Эта точка была выбрана потому, что на  $\Gamma^2(d) = 0,3$  было выполнено большинство измерений угловых диаметров интерферометром интенсивностей. Использование уравнения (4) вместо (3) почти не изменяет окончательного значения величины  $\theta_{LD}$ .

## Постановка задачи

Возникает вопрос: возможно ли по спектру мощности спекл-изображений определить угловой размер звезды и распределение яркости по ее диску, описываемое законом потемнения к краю? Разумеется, в данном контексте постановка задачи должна быть следующей. Из априорных соображений выбирается подходящая модель потемнения к краю, характеризуемая одним или несколькими параметрами. Требуется выяснить, насколько точно можно оценить методом спекл-интерферометрии этот или эти параметры совместно с оцениванием величины углового диаметра? Проблему можно сформулировать иначе: с какой достоверностью можно решать в рамках данного метода сбора и обработки информации, какая из множества возможных моделей наилучшим образом описывает объект?

Представим, как и в [1], результат измерения величины  $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{p})$  в  $i$ -й точке спектра мощности в виде

$$S_i = \Phi(\mathbf{v}_i, \mathbf{p}) + v_i, \quad i=1, 2, \dots, k, \quad (6)$$

где  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(p_1, p_2, \dots, p_N)$  — подлежащий оценке векторный параметр,  $k$  — общее число измерений, равное числу независимых точек отсчета в спектре мощности,  $v_i$  — независимые ошибки измерений с нулевым математическим ожиданием (в предположении адекватности модели  $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{p})$ ) и дисперсией

$$\sigma_i^2 = \frac{[1 + n_{os} g_D(\mathbf{v}_i) \Phi(\mathbf{v}_i, \mathbf{p})]^2}{n_{os}^2 (M-1) [g_D(\mathbf{v}_i)]^2}. \quad (7)$$

Выражение (7) учитывает влияние спекл-шума и квантовых флуктуаций и справедливо при условиях [9]  $n_T > 1$  и  $(D/r_0)^2 \gg 1$ , где  $n_T$  — среднее число фотонов, детектируемых в одном спекл-изображении,  $D$  — диаметр телескопа,  $r_0$  — радиус когерентности искаженного атмосферной турбулентностью волнового фронта в плоскости апертуры (параметр Фрида [10]).

## Общее решение

Пусть  $G(\mathbf{p})$  — ковариационная матрица оценки вектора  $\mathbf{p}$  (матрица ошибок),  $A$  — матрица частных производных  $\partial\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{p})/\partial p_j$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ), которые существуют для всех  $\mathbf{p}$ ;  $\Omega$  — весовая матрица с диагональными элементами  $\omega_i = 1/\sigma_i^2$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ), где  $\sigma_i^2$  определены выражением (7). Можно показать, что матрица  $G(\mathbf{p}) = (A^T \Omega A)^{-1}$  является неотрицательно определенной для всех  $\mathbf{p}$ , что может быть записано как

$$G(\mathbf{p}) \geq (A^T \Omega A)^{-1}, \quad (8)$$

где  $\tau$  — знак транспонирования. Неравенство (8) является обобщением неравенства Крамера — Рао на случай векторного параметра [11]. Нижняя граница в (8) достигается, если, во-первых, ошибки измерений (т. е. величины  $v_i$  в (6)) распределены нормально, что будет иметь место при достаточно большом объеме выборки спекл-изображений  $M$  в силу центральной предельной теоремы. Во-вторых, функция  $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{p})$  должна быть линейной относительно  $\mathbf{p}$ . Если  $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{p})$  — нелинейная функция, то оценка  $\hat{\mathbf{p}}$  будет эффективной только при неограниченном увеличении числа измерений ( $k \rightarrow \infty$ ) [12], т. е. в асимптотике. Число независимых точек отсчета в спектре мощности  $k \propto (D/r_0)^2$  [1] и при  $(D/r_0)^2 \gg N$  можно получить оценку  $\hat{\mathbf{p}}$ , достаточно близкую к эффективной, если  $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{p})$  — нелинейная функция.

Диагональные элементы ковариационной матрицы  $G(\mathbf{p})$  представляют собой дисперсии  $\sigma_1^{*2}, \sigma_2^{*2}, \dots, \sigma_N^{*2}$  оценок компонентов параметрического вектора  $\mathbf{p}$ , недиагональные элементы —  $\text{Cov}(p_j, p_l) = q_{jl} \sigma_j^* \sigma_l^*$ , где  $q_{jl} = \text{Cov}(p_j, p_l) / (\sigma_j^* \sigma_l^*)$  — коэффициент корреляции оценок компонентов  $p_j$  и  $p_l$ .

Коэффициент корреляции совместно-эффективных оценок  $\hat{p}_j$  и  $\hat{p}_l$  согласно (8) и с учетом (7) равен

$$q_{jl} = \frac{K_{jl}}{\sqrt{K_j} \sqrt{K_l}}, \quad (9)$$

где

$$K_{ji} = \int_0^{\pi} \int_0^{v_D} \frac{[g_D(v)]^2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \right) v dv d\psi}{[1 + n_{os} g_D(v) \Phi(v, \psi, \mathbf{p})]^2}, \quad (10)$$

$K_j = K_{jj}$  и  $K_l = K_{ll}$ , т. е.  $K_j$  и  $K_l$  имеют тот же смысл, что и в (2), только без величины  $n_{os}^2$  перед интегралом. Здесь, как и в [4], совершен переход от суммирования по независимым точкам отсчета к интегрированию по всему спектру мощности.

Для низких световых уровней сигнала, т. е. при  $n_{os} \ll 1$ , слагаемым  $n_{os} g_D(v) \Phi(v, \psi, \mathbf{p})$  в знаменателе подынтегрального выражения (10) можно пренебречь. Тогда

$$K_{ji} = \int_0^{\pi} \int_0^{v_D} [g_D(v)]^2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \right) v dv d\psi, \quad (11)$$

и интегралы  $K_j$  и  $K_l$  упрощаются аналогичным образом. Таким образом, в этом случае коэффициент корреляции  $q_{ji}$  перестает зависеть от величины  $n_{os}$ .

При раздельной оценке компонентов  $p_1, p_2, \dots, p_N$  (когда, кроме одного, все остальные предполагаются известными) точность эффективной оценки определяется формулами (1), (2). При совместной оценке, когда  $N=2$ , граница Крамера — Рао для  $\sigma_1^{*2}$  и  $\sigma_2^{*2}$  определяется соотношениями [13]

$$\sigma_1^{*2} = \frac{\sigma_1^2}{1 - q^2}, \quad \sigma_2^{*2} = \frac{\sigma_2^2}{1 - q^2}, \quad (12)$$

где  $\sigma_1^2$  и  $\sigma_2^2$  — дисперсии раздельно-эффективных оценок  $\hat{p}_1$  и  $\hat{p}_2$  соответственно,  $q = q(p_1, p_2)$  и определяется формулой (9).

Рис. 1. Идеальное изображение диска звезды с потемнением к краю по закону (3),  $2a = R\theta_{LD}$ , где  $R$  — фокусное расстояние телескопа

Рис. 2. Коэффициент корреляции  $q$  совместно-эффективных оценок параметров  $u$  и  $\epsilon$  в зависимости от величины  $\epsilon = \theta_{LD} D / \lambda$ : 1, 1' и 1'' —  $u=0$ ; 2, 2' и 2'' —  $u=0,5$ ; 3, 3' и 3'' —  $u=1$  при  $n_{os} \ll 1$ ,  $n_s = 1$  и  $10^2$  соответственно. Область значений  $q$ : а —  $0,95 \leq q \leq 1$ ; б —  $0,5 \leq q \leq 1$

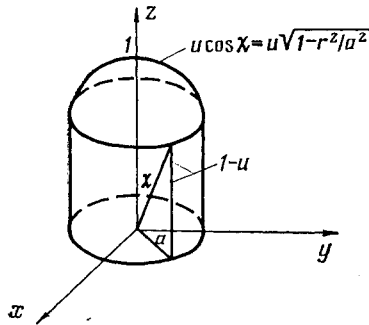


Рис. 1

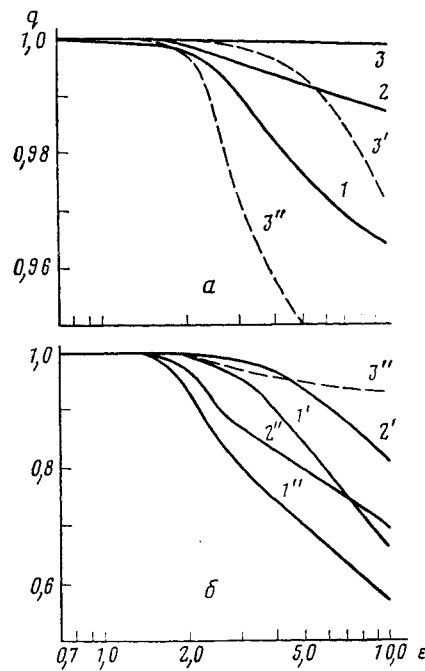


Рис. 2

### Коэффициент корреляции оценок при линейном законе потемнения

Проанализируем возможность совместной оценки по спектру мощности углового диаметра  $\theta_{LD}$  и коэффициента потемнения к краю  $u$  в предположении, что распределение яркости по диску звезды описывается уравнением (3). Преобразование Ханкеля от  $I(\chi)$  (рис. 1) находим с помощью интеграла [14]:

$$\int_0^1 x^{\alpha+1} (1-x^2)^\beta J_\alpha(bx) dx = 2^\beta \Gamma(\beta+1) b^{-(\beta+1)} J_{\alpha+\beta+1}(b), \quad (13)$$

$[b > 0, \operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re} \beta > -1].$

В нашем случае  $\alpha=0$  и  $\beta=1/2$ . В результате нормированный квадрат модуля спектра объекта имеет вид

$$\Phi(\xi) = \frac{9}{(3-u)^2} \left[ (1-u) \frac{2J_1(\pi \varepsilon \xi)}{\pi \varepsilon \xi} + u \sqrt{2\pi} \frac{J_{3/2}(\pi \varepsilon \xi)}{(\pi \varepsilon \xi)^{3/2}} \right]^2, \quad (14)$$

где  $\varepsilon = \theta_{LD} D / \lambda$  — мера близости потемненного к краю диска к дифракционному элементу разрешения телескопа диаметром  $D$ ;  $\xi = v/v_D$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ),  $v_D = D/\lambda$  — частота, ограниченная дифракцией в телескопе;  $J_1$  и  $J_{3/2}$  — функции Бесселя порядка 1 и  $3/2$  соответственно.

Принятая модель потемнения к краю (3) для среднего числа фотособытий на спекл  $n_{os}$ , как нетрудно убедиться, дает

$$n_{os} = n_s \left[ 1 + \left( 1 - \frac{u}{3} \right) \varepsilon^2 \right], \quad (15)$$

где  $n_s$  — среднее число фотособытий на дифракционный элемент разрешения, которое определяем следующим образом [1]:

$$n_s = 0,342 \eta n_v t_E \Delta \lambda r_0^2. \quad (16)$$

Здесь  $n_v$  — спектральная плотность потока от звезды (квантов/(см<sup>2</sup>·с·нм)),  $t_E$  — время экспозиции одного спекл-изображения,  $\Delta \lambda$  — полуширина спектральной полосы фильтра. Под величиной  $\eta$  подразумеваем эквивалентный квантовый выход (DQE [15, 16]) спекл-камеры.

Согласно (9) на ЭВМ «Наири-К» и ЕС-1022 был вычислен коэффициент корреляции оценок параметров  $u$  и  $\varepsilon$  в зависимости от  $\varepsilon$  при некоторых значениях  $u$  и  $n_s$ . В качестве  $g_D(\xi)$  использовалась ОПФ телескопа со сплошной круглой апертурой

$$g_D(\xi) = \frac{2}{\pi} (\arccos \xi - \xi \sqrt{1-\xi^2}). \quad (17)$$

На рис. 2 представлена зависимость величины  $q$  от  $\varepsilon$  при фиксированных значениях  $u$ , равных 0; 0,5; 1, для случаев  $n_{os} \ll 1$ ,  $n_s = 1$  и  $n_s = 10^2$ . Из рис. 2 видно, что, во-первых, с ростом  $n_{os}$  коэффициент корреляции уменьшается, а с ростом  $u$  — увеличивается; во-вторых, в случае  $n_{os} \ll 1$  коэффициент корреляции мало отличается от 1 для всех значений  $\varepsilon$  вплоть до  $\varepsilon = 10$ . То же самое наблюдается и при  $n_{os} \gg 1$  для коэффициентов потемнения  $u > 0,5$ . Наличие столь сильной корреляции между оцененными по спектру мощности величинами  $u$  и  $\varepsilon$  означает, что практически очень трудно разделить их влияние на форму (профиль) спектра, а для  $\varepsilon < 1,5$  это сделать, пожалуй, принципиально невозможно.

Подчеркнем, что найденный нами коэффициент корреляции не является выборочным и отражает фундаментальное свойство оценивания (независимо от способа) параметров  $u$  и  $\varepsilon$  на основе измерений спектра мощности спекл-изображений. Очевидно, что величина  $q$  отражает линейную составляющую ложной функциональной зависимости, возникающей в рамках данного метода сбора и обработки информации.

Из соотношений (12) следует, что при  $q \rightarrow 1$ , каковы бы ни были  $\sigma_u$  и  $\sigma_\varepsilon$  (среднеквадратичные ошибки отдельных оценок), величины  $\sigma_u^*$  и  $\sigma_\varepsilon^*$  растут неограниченно и совместная оценка параметров теряет всякий смысл. Даже для больших  $\varepsilon$  и (или)  $n_s$ , исключая случаи  $u \leq 0,5$ , положение остается крайне плохим. И дело не только в том, что значения  $\sigma_u^*$  и  $\sigma_\varepsilon^*$  будут велики. При оценивании, например, методом наименьших квадратов матрица коэффициентов системы нормальных уравнений будет плохо обусловлена — случай довольно типичный в задачах нелинейного оценивания. Для решения таких задач существуют специально разработанные методы улучшения обусловленности матрицы (методы Марквардта (Marquardt) и Джонса (Jones), методы «выбора направлений» и т. д. [17]), но и они не всегда приводят к успеху. В любом случае неопределенность, присущая оценкам  $\hat{u}$  и  $\hat{\varepsilon}$ , останется. Ведь ошибка, например, в оценке  $\hat{u}$  должна приводить к ошибке в оценке  $\hat{\varepsilon}$  и наоборот, т. е. решение нельзя считать устойчивым.

### Уравнение связи

Существует одно обстоятельство, которое всегда нужно иметь в виду. Какой бы ни предполагалась модель распределения яркости по диску звезды, неизменным остается одно — среднее число фотособытий на спекл для данных обстоятельств наблюдения. В первой статье данной работы [1] было показано, что модель однородного диска дает

$$n_{os} = n_s(1 + \varepsilon_0^2), \quad (18)$$

где  $\varepsilon_0 = \theta_{UD} D / \lambda$  — мера близости однородного диска. Приравнивая правые части равенств (15) и (18) друг к другу, находим

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\theta_{LD}}{\theta_{UD}} = \left[ \frac{3}{3-u} \right]^{1/2}. \quad (19)$$

Это соотношение дает чуть большие поправки при переходе от  $\theta_{UD}$  к  $\theta_{LD}$  при известном  $u$ , чем соотношение (5). Например, при переходе от  $\theta_{UD}$  к  $\theta_{LD}$  полностью потемненного диска ( $u=1$ ) поправочный коэффициент по формуле (5) получается равным 1,118, а по формуле (19) — 1,225. Напомним, что формула (5) является приближенной, точное значение поправочного коэффициента по Х. Брауну и др. [6] равно 1,127, однако окончательно они корректировали свои значения угловых диаметров (для случая  $u=1$ ) с коэффициентом 1,134.

Учитывая изложенное выше, естественным при совместной оценке  $u$  и  $\varepsilon$  представляется следующий путь. Оцениваем сначала величину  $\varepsilon_0$  — меру близости эквивалентного однородного диска. Это можно сделать, например, методом наименьших квадратов — при нелинейном оценивании мнк-оценки являются асимптотически эффективными [17]. Затем находим мнк-оценки параметров  $u$  и  $\varepsilon$ , используя функцию (14) при наличии уравнения связи (19) между параметрами. Это можно сделать, например, методом множителей Лагранжа [18].

Однако прежде всего нужно ответить на вопрос: всегда ли такая процедура оценивания имеет смысл? Быть может, различие рассматриваемых моделей (однородного и потемненного к краю диска) при условии, что их параметры связаны уравнением (19), настолько незначительно, что легко ливелируется ошибками измерений? Попытаемся это выяснить.

### Вероятность правильного решения

Условимся для упрощения рассуждений считать, что рассматриваемые модели адекватно описывают соответствующие объекты. Ответ на вопрос о том, какой из двух возможных объектов дал данный спектр мощности, может быть получен методами статистической теории принятия решений (или теории проверки гипотез). Поскольку критерии отношения правдоподобия являются наиболее мощными среди всех других возможных кри-

териев (лемма Неймана — Пирсона) [19], будем в качестве критериальной статистики использовать логарифм отношения правдоподобия (впервые для различения изображений этот критерий использовал Харрис [20]).

Обозначим для удобства  $\Phi(\xi_i, \varepsilon_0) = \Phi_{1i}$  и  $\Phi(\xi_i, u, \varepsilon) = \Phi_{2i}$ , где индекс  $i$  пробегает значения от 1 до  $k$ , а  $k$ , как и прежде, — число независимых точек отсчета в спектре мощности. Результат измерения величины  $\Phi$  в  $i$ -й точке представляем, как и ранее, в виде (6). Тогда функция правдоподобия, обусловленная присутствием  $\Phi_1$ , имеет вид

$$L(\Phi_1) = \prod_{i=1}^k \left( \frac{\omega_i}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{\omega_i (S_i - \Phi_{1i})^2}{2} \right], \quad (20)$$

где среднюю ошибку единицы веса принимаем равной 1. Аналогично

$$L(\Phi_2) = \prod_{i=1}^k \left( \frac{\omega_i}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{\omega_i (S_i - \Phi_{2i})^2}{2} \right]. \quad (21)$$

Если альтернативы  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  являются априори равновероятными, то решение должно приниматься по принципу максимума правдоподобия. Определяем критериальную статистику как

$$\gamma_{12} = 2 \ln \frac{L(\Phi_1)}{L(\Phi_2)} = \sum_{i=1}^k [\omega_i (S_i - \Phi_{2i})^2 - \omega_i (S_i - \Phi_{1i})^2]. \quad (22)$$

Очевидно, если  $\gamma_{12} > 0$ , то решение должно быть принято в пользу  $\Phi_1$ , в противном случае, т. е. при  $\gamma_{12} < 0$ , решение должно быть принято в пользу  $\Phi_2$ . Зная распределение величины  $\gamma_{12}$ , можно вычислить вероятность принятия правильного решения.

Пусть на самом деле мы наблюдали объект, который имеет квадрат спектра  $\Phi_1$ . Тогда, подставляя  $S_i = \Phi_{1i} + v_i$  в (22), получаем

$$\gamma_{12}(\Phi_1) = \sum_{i=1}^k \omega_i [(\Phi_{1i} - \Phi_{2i})^2 + 2v_i(\Phi_{1i} - \Phi_{2i})]. \quad (23)$$

Так как величина  $v_i$  распределена нормально, то  $\gamma_{12}(\Phi_1)$  также имеет нормальное распределение со средним значением

$$\mu = \langle \gamma_{12} \rangle = \sum_{i=1}^k \omega_i (\Phi_{1i} - \Phi_{2i})^2 \quad (24)$$

и дисперсией, которая определяется известным образом:  $\sigma_\gamma^2 = \langle \gamma_{12}^2 \rangle - \mu^2$ . Нетрудно показать, что

$$\sigma_\gamma^2 = 4 \sum_{i=1}^k \omega_i (\Phi_{1i} - \Phi_{2i})^2. \quad (25)$$

Вероятность правильного решения вычисляется следующим образом:

$$P = \frac{1}{\sigma_\gamma \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp \left[ -\frac{(\gamma_{12} - \mu)^2}{2\sigma_\gamma^2} \right] d\gamma_{12}. \quad (26)$$

Производя замену переменных  $(\gamma_{12} - \mu)/\sigma_\gamma = z$ , получаем

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\mu/\sigma_\gamma}^\infty \exp \left( -\frac{z^2}{2} \right) dz, \quad (27)$$



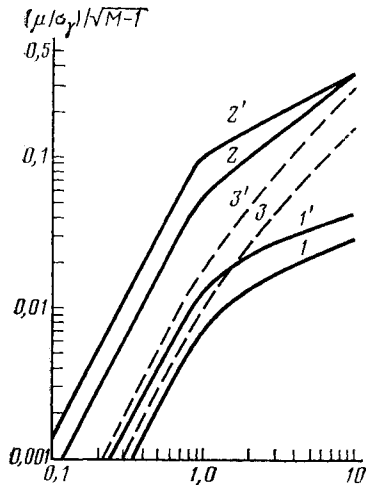


Рис. 3

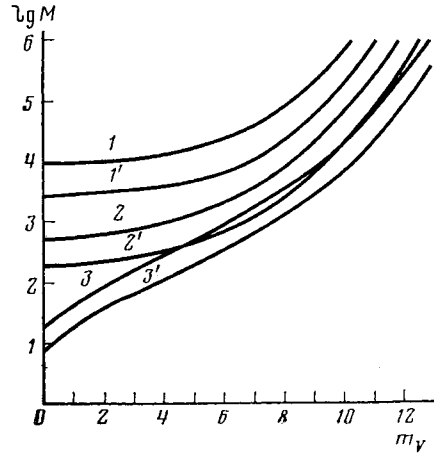


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость величины  $\mu/\sigma_\gamma$ , нормированной таким образом, чтобы не зависеть от  $M$ , от величины меры близости эквивалентного однородного диска  $\epsilon_0 = \theta_{UD}D/\lambda$ : 1 и 1' -  $n_s=1$ ; 2 и 2' -  $n_s=10^2$  при  $u=0,5$  и 1 соответственно. Штриховыми линиями обозначена зависимость  $(\mu/\sigma_\gamma)/n_s\sqrt{M-1}$  от  $\epsilon_0$  в случае  $n_s(1+\epsilon_0^2) \ll 1$ : 3 -  $u=0,5$ ; 3' -  $u=1$

Рис. 4. Число спекл-изображений  $M$ , необходимых для принятия правильного решения с вероятностью  $P=0,99$  в зависимости от звездной величины объекта  $m_V$ : 1 и 1' -  $\epsilon_0=0,5$ ; 2 и 2' -  $\epsilon_0=1$ ; 3 и 3' -  $\epsilon_0=2$  при  $u=0,5$  и 1 соответственно. Условия наблюдений:  $r_0=10$  см,  $t_E=0,01$  с,  $\Delta\lambda=40$  нм,  $\eta=10\%$

где

$$\frac{\mu}{\sigma_\gamma} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \omega_i (\Phi_{1i} - \Phi_{2i})^2 \right]^{1/2}. \quad (28)$$

Переходя к интегральной форме и учитывая (7), находим

$$\frac{\mu}{\sigma_\gamma} = \frac{1}{2} \sqrt{(M-1) \pi K_\Phi}, \quad (29)$$

где

$$K_\Phi = \int_0^1 \frac{[n_s(1+\epsilon_0^2)g_D(\xi)\delta\Phi(\xi)]^2 \xi d\xi}{[1+n_s(1+\epsilon_0^2)g_D(\xi)\Phi_1(\xi)]^2}, \quad (30)$$

$$\delta\Phi(\xi) = \Phi_1(\xi, \epsilon_0) - \Phi_2(\xi, u, \epsilon) = \left[ \frac{2J_1(\pi\epsilon_0\xi)}{\pi\epsilon_0\xi} \right]^2 - \frac{9}{(3-u)^2} \left[ (1-u) \frac{2J_1(\pi\alpha\epsilon_0\xi)}{\pi\alpha\epsilon_0\xi} + u\sqrt{2\pi} \frac{J_{3/2}(\pi\alpha\epsilon_0\xi)}{(\pi\alpha\epsilon_0\xi)^{3/2}} \right]^2, \quad (31)$$

$\alpha = \epsilon/\epsilon_0$  и определено формулой (19).

При низких световых уровнях сигнала, т. е. при  $n_s(1+\epsilon_0^2) \ll 1$ , имеем

$$\frac{\mu}{\sigma_\gamma} = \frac{1}{2} n_s(1+\epsilon_0^2) \sqrt{(M-1) \pi K_\Phi}, \quad (32)$$

где

$$K_\Phi = \int_0^1 [g_D(\xi)]^2 [\delta\Phi(\xi)]^2 \xi d\xi. \quad (33)$$

Таким образом, вероятность правильного решения является функцией обстоятельств наблюдения и характеристик наблюдаемого объекта.

На рис. 3 представлена зависимость  $(\mu/\sigma_\gamma)/\sqrt{M-1}$  от  $\epsilon_0$  при значениях  $u=0,5$ ; 1 и  $n_s=1$  и  $10^2$ . На этом же рисунке штриховые линии соответствуют зависимостям  $(\mu/\sigma_\gamma)/n_s\sqrt{M-1}$  в случае  $n_s(1+\epsilon_0^2) \ll 1$ .

Определим число спекл-изображений  $M$ , необходимых для принятия правильного решения с вероятностью  $P=0,99$  (т. е. вероятность ложной тревоги равна 0,01). Такая высокая вероятность не должна вводить в заблуждение, ибо значение  $P=0,5$  соответствует в условиях альтернативы принятию решения наугад. Пользуясь таблицей нормального распределения [18], находим, что при  $P=0,99$  величина  $\mu/\sigma_\gamma$  должна равняться 2,33. Из (29) получаем

$$M=1+\frac{6,91}{K_\Phi}. \quad (34)$$

На рис. 4 изображена зависимость необходимого числа спекл-изображений  $M$  от звездной величины объекта  $m_V$ , когда  $\epsilon_0=0,5$ ; 1 и 2, при  $u=0,5$  и 1. Величина  $m_V$  входит в формулу (34) через формулу (16) посредством известного соотношения

$$n_V=n_0 10^{-0,4m_V}, \quad (35)$$

где  $n_0$  — спектральная плотность потока от звезды нулевой величины, равная  $10^4$  квантов/(см<sup>2</sup>·с·нм) в зеленой области спектра [21]. Условия наблюдений предполагались следующими:  $\eta=10\%$ ,  $t_E=0,01$  с,  $\Delta\lambda=40$  нм и  $r_0=10$  см. При этом не учитывались потери света в атмосфере и в оптике телескопа и спекл-камеры.

Таким образом, предложенная стратегия дает возможность в каждой конкретной ситуации судить о правомерности совместной оценки неизвестных параметров  $u$  и  $\epsilon$ . Для этого достаточно знать меру близости эквивалентного однородного диска, так как зависимость  $\mu/\sigma_\gamma$  от  $u$ , как видно из рис. 3, довольно слаба. Следовательно, начинать всегда следует с оценки  $\epsilon_0$ . И если окажется, что яркость объекта и обстоятельства наблюдения (т. е. величины  $\eta$ ,  $r_0$ ,  $M$ ) не позволяют принять с достаточно высокой вероятностью правильное решение об адекватности модели, приписываемой данному объекту, то на этом и закончить ограничившись самой простой моделью — моделью эквивалентного однородного диска. В ином случае (когда информации в выборке спекл-изображений достаточно) можно переходить к более сложной модели и искать совместную оценку углового диаметра и коэффициента потемнения к краю при наличии уравнения связи, которое является следствием инвариантности среднего числа фотособытий на спекл для разных моделей, описывающих распределение яркости по диску звезды.

### Заключительные замечания

1. Спекл-интерферометрические измерения углового диаметра и потемнения к краю (по закону (3)) сверхгиганта  $\alpha$  Ori, проведенные Уилкерсон и Уорденом [7] с помощью 4-м телескопа, дали следующие результаты: в континууме (область  $510\pm 5$  нм)  $\theta_{LD}=0'',0520\pm 0'',0017$ ,  $u=0,75\pm 0,13$  и в полосе TiO ( $520\pm 5$  нм)  $\theta_{LD}=0'',0569\pm 0'',0010$ ,  $u=0,93\pm 0,03$ . Обращает на себя внимание высокая, особенно в полосе TiO, точность оценок  $\theta_{LD}$  и  $u$ , полученных по 180 спекл-изображениям при наилучшем, как утверждается, соответствии данным. И это при  $\epsilon_0\approx 1,7$ . К тому же обнаруженный эффект возрастания потемнения при переходе от континуума к полосе TiO наряду с увеличением углового диаметра может быть следствием сильной положительной корреляции оценок  $\theta_{LD}$  и  $u$ .

2. Эмпирическое соотношение, известное как соотношение Барнеса — Эванса, между величиной углового диаметра, звездной величиной  $V$  и показателем цвета ( $V-R$ ) в системе  $UBVRI$ , было прокалибровано по 76 звездам, для которых имелись прямые измерения угловых размеров [22]. При этом опубликованные значения угловых диаметров, полученные разными методами (в том числе и методом спекл-интерферометрии), редуцировались от  $\theta_{UD}$  или  $\theta_{LD}$  при  $u=1$  к значениям с соответствующим  $u$  с помощью формулы (5). Редукция спекл-интерферометрических измерений по формуле (5) (или любой другой) вместо формулы (19) представляется нам необоснованной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьменков С. Г. Астрон. журн. 1985, т. 62, с. 1201.
2. Соболев В. В. Курс теоретической астрофизики. М.: Наука, 1975.
3. Богданов М. Б. Астрон. журн., 1983, т. 60, с. 529.
4. Гончарский А. В., Черепашук А. М., Ягола А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука, 1978.
5. Михалас Д. Звездные атмосферы. В 2-х частях (пер. с англ.). М.: Мир, 1982.
6. Brown R. H., Davis J., Lake R. J. W., Thompson R. J. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1974, v. 167, p. 475.
7. Wilkerson M. S., Worden S. P. Astron. J., 1977, v. 82, p. 642.
8. Шульберг А. М. В кн.: Затменные переменные звезды/Под ред. Цесевича В. П. М.: Наука, 1971, с. 89.
9. Miller M. G. J. Opt. Soc. Amer., 1977, v. 67, p. 1176.
10. Fried D. L. J. Opt. Soc. Amer., 1965, v. 55, p. 1427.
11. Закс Ш. Теория статистических выводов (пер. с англ.). М.: Мир, 1975.
12. Сакрисон Д. Лекции об аналоговой связи (пер. с англ.). М.: Мир, 1974.
13. Крамер Г. Математические методы статистики (пер. с англ.). М.: Мир, 1975.
14. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
15. Jones R. C. Photogr. Sci. Eng., 1958, v. 2, p. 57.
16. Fellgett P. V. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1958, v. 118, p. 224.
17. Круг Г. К., Кабанов В. А., Фомин Г. А., Фомина Е. С. Планирование эксперимента в задачах нелинейного оценивания и распознавания образов. М.: Наука, 1981.
18. Брандт Э. Статистические методы анализа наблюдений (пер. с англ.). М.: Мир, 1975.
19. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных (справочное издание). М.: Финансы и статистика, 1983.
20. Harris J. L. J. Opt. Soc. Amer., 1964, v. 54, p. 606.
21. Никонов В. Б. В кн.: Курс астрофизики и звездной астрономии/Под ред. Михайлова А. А. Т. I. М.: Наука, 1973, с. 392.
22. Barnes T. G., Evans D. S., Moffett T. J. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1978, v. 183, p. 285.

Астрономическая обсерватория  
Харьковского гос. университета

Поступила в редакцию  
4.VIII.1984