

## АВТОМАТИЗОВАНЕ ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДІВ МАШИННОГО НАВЧАННЯ

*Стаття присвячена аналізу методів автоматизованого доведення теорем у сучасній математиці та інформатиці з використанням машинного навчання. Розглянуто підходи до генерації тактик, пошуку доказів та інтеграції моделей у формальні середовища. Описані основні алгоритми, моделі трансформерів, проблеми інтеграції з системами доказів та перспективи розвитку галузі.*

*The article is devoted to the analysis of methods for automated theorem proving in modern mathematics and computer science using machine learning. Approaches to generating tactics, finding evidence, and integrating models into formal environments are considered. The main algorithms, transformer models, integration problems with evidence systems, and prospects for the development of the field are described*

*Ключові слова: машинне навчання, автоматизоване доведення теорем, тактика, пошук доказів, LeanDojo, автоматизація.*

*Keywords: machine learning, automated theorem proving, tactics, proof-finding, LeanDojo, automation.*

Автоматизоване доведення теорем (АДТ) є ключовим напрямком сучасної математичної логіки та комп'ютерної науки. Зростання складності математичних теорем і необхідність формалізації доведень стимулюють розробку інтелектуальних систем, здатних до самостійного формування доказів. Використання машинного навчання дозволяє підвищити ефективність та адаптивність таких систем, забезпечуючи глибший аналіз станів теорем і прогнозування стратегій доведення.

Проблема полягає в тому, що традиційні системи формальних доказів, хоч і забезпечують точність і строгість, залишаються залежними від людського втручання. Процес доведення вимагає значного часу та високої кваліфікації дослідника. Методи глибинного навчання створюють умови для розробки нових підходів, здатних частково або повністю автоматизувати цей процес, зменшуючи навантаження на людину та підвищуючи ефективність роботи з формальними системами.

Останніми роками з'явилися численні роботи, що поєднують методи трансформерів та глибинного навчання з формальними системами доказів, такими як Lean, Coq, HOL Light. Наприклад, NeurIPS 2023 Tutorial [1] показав ефективність моделей, у яких генератор тактик навчається на парах «стан-тактика» з бібліотеки *mathlib*. Це дозволяє автоматично шукати та формувати стратегії доказів без прямої участі користувача. Подібний підхід демонструє модель ВуТ5, реалізована у GitHub-репозиторії [2].

Інше дослідження — Learning to Prove Theorems by Learning to Generate Theorems (Wang & Deng, 2020) — вийшло за межі класичного доведення, навчивши модель не лише шукати докази, а й генерувати нові твердження, що відкриває перспективи для автоматичного розширення баз знань. Аналогічно, сучасна система GPT-f від OpenAI успішно взаємодіє із середовищем Lean, доводячи теореми на основі текстових підказок природною мовою, що зближує машинне доведення з людським мисленням.

Попри досягнення, залишається низка невирішених питань: обмеження потужності моделей при роботі з великими формулами, проблема надлишкових тактик, а також відсутність універсальних методів інтеграції у різні формальні системи.

Метою роботи є систематизація сучасних підходів до автоматизованого доведення теорем із використанням машинного навчання, аналіз архітектур нейронних мереж для формування доказів, а також демонстрація можливостей інтеграції таких моделей у формальні середовища.

Основні завдання:

- дослідити сучасні ML-архітектури (трансформери, Graph Neural Networks, sequence-to-sequence моделі), що застосовуються в АДТ;
- проаналізувати ефективність інтеграції з системами **Lean** та **Coq**;
- розглянути методи пошуку та оптимізації доказів (DFS, MCTS, reinforcement learning);
- визначити переваги та недоліки ML-підходів у порівнянні з класичними алгоритмами.

Перспективи розвитку галузі включають використання гібридних підходів, комбінування ML з класичними алгоритмами доказу, розвиток інтерфейсів для інтеграції з різними системами доказів та покращення навчальних стратегій моделей трансформерів. Практичне застосування охоплює автоматизацію доведення теорем у навчальних курсах, перевірку складних математичних тверджень та розвиток інтелектуальних асистентів для науковців. Основний матеріал дослідження:

#### 1. Генерація тактик.

Для автоматизації процесу доведення використовується LeanDojo — інструмент для витягання пар «стан-тактика» з mathlib. Модель BuT5 навчається на цих парах, прогножуючи ефективні дії для кожного стану. Такі моделі використовують контекст попередніх кроків і формують наступну логічну дію, що скорочує час пошуку правильних тактик.

#### 2. Пошук доказів.

Скомбіноване використання генератора тактик і алгоритмів пошуку, як-от Depth First Search (DFS) чи Monte Carlo Tree Search (MCTS), забезпечує ефективний пошук доказів. Система може автоматично формувати послідовність тактик для завершення доведення логічних, арифметичних чи геометричних тверджень.

#### 3. Інтеграція у формальні системи.

Сучасні ML-моделі можуть безпосередньо взаємодіяти з середовищами Lean, Coq, Isabelle, використовуючи API-інтерфейси. Це відкриває шлях до створення інтелектуальних асистентів-помічників, що підтримують дослідника у процесі формалізації тверджень і верифікації доведень.

#### 4. Оцінювання якості доказів.

Для оцінки успішності ML-підходів використовуються такі метрики, як частка правильних доказів, середня довжина доведення та узгодженість із формальними аксіомами. Наразі показник успішності для задач середньої складності в Lean досягає близько 50-60 %, що свідчить про значний потенціал технології.

#### 5. Гібридні підходи.

Перспективним напрямком є поєднання класичних методів пошуку (наприклад, *E-prover*, *Vampire*) із машинним навчанням. Такі гібридні системи дозволяють зберігати логічну строгість формальних доказів при підвищенні швидкості пошуку рішень.

Автоматизоване доведення теорем із використанням машинного навчання демонструє значний потенціал для розвитку сучасної науки. Комбінація трансформерів, евристичних методів і формальних систем дозволяє створювати системи, здатні до самостійного формування

доказів. Попри значні досягнення, залишаються проблеми масштабування, узагальнення та інтерпретації результатів моделей.

Подальші дослідження доцільно спрямувати на:

- удосконалення моделей трансформерів для роботи зі складними логічними структурами;
- створення відкритих баз даних формальних доказів для навчання ML-систем;
- розвиток інтерактивних інтерфейсів для інтеграції людини й машини в єдиний процес доказу;
- дослідження етичних і філософських аспектів «машинного мислення» у контексті логічного доведення.

Такі технології мають потенціал не лише автоматизувати доведення відомих тверджень, а й відкривати нові теоретичні зв'язки, розширюючи горизонти математичних досліджень.

## ЛІТЕРАТУРА:

1. NeurIPS 2023 Tutorial on Machine Learning for Theorem Proving. <https://neurips.cc/virtual/2023/tutorial/73946>
2. Yang, K. ml4tp-tutorial. GitHub repository. <https://github.com/yangky11/ml4tp-tutorial>
3. Mingzhe Wang, Jia Deng. Learning to Prove Theorems by Learning to Generate Theorems. arXiv: 2002.07019

**Науковий керівник:**

**Песчаненко В.С., к.ф.-м.н., доцент**