

Міністерство освіти і науки України
Херсонський державний університет
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА
МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО
АНАЛІЗУ

ЗАДАЧА МОЗЕРА В ОДНОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ

Кваліфікаційна робота (проект)
на здобуття ступеня вищої освіти “бакалавр”

Виконав: студент 4-го курсу, 12-421 групи
Спеціальності: 014 Середня освіта
Спеціалізація: 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня
освіта (математика)» першого
(бакалаврського) рівня вищої освіти
Будько Сергій Романович

Керівник доктор фізико-математичних наук,
професор Савченко Олександр Григорович

Рецензент: кандидатка технічних наук,
доцентка кафедри інформаційних технологій
та фізико-математичних дисциплін
Херсонського навчально-наукового інституту
Національного університету
кораблебудування імені адмірала Макарова
Литвиненко Олена Іванівна

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи задачі Мозера та її спрощений варіант у шкільному курсі	5
1.1 Історія та математичне формулювання задачі Мозера	5
1.2 Одновимірний випадок: «переміщення стержня у Г-подібному коридорі»	10
1.3 Використання аналогічних задач у системі математичної освіти ..	12
РОЗДІЛ 2. Аналіз розв’язків і практичне застосування	14
2.1 Огляд розв’язків деяких випадків задачі	14
2.2 Зразки практичних завдань для учнів 10 – 11 класів	27
2.3 Практичне застосування задачі у різних сферах науки	27
ВИСНОВКИ	30
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	32

ВСТУП

Математика – це не лише абстрактна наука, а й інструмент для вирішення реальних побутових проблем. Однією з таких проблем є задача, що виникає під час переміщення меблів у вузьких проходах. Чи можливо пронести великий диван зі складною геометрією через коридор, не зачепивши стіни? Саме ця ситуація лягла в основу задачі Мозера про переміщення дивану, яку було сформульовано у 1966 році.

У класичному варіанті задача формулюється так: знайти фігуру найбільшої площі, яку можна протягнути через прямокутний Г-подібний коридор. На даний момент, ця проблема не має точного розв'язку навіть у двовимірному випадку, що робить її однією з найвідоміших відкритих задач у геометрії.

Але як ця задача виглядає в одновимірному випадку? Якщо на площині ми говоримо про диван, то одновимірний випадок, пов'язаний з переміщенням у просторі меншої розмірності, її аналогом є переміщення стержня у Г-подібному коридорі. Тут постає питання: яка найбільша довжина стержня, яку можна повернути через кут вузького коридору? Цей варіант задачі простіший для аналізу і є хорошим прикладом для шкільного курсу математики, оскільки в ньому використовуються базові геометричні та тригонометричні міркування.

Актуальність дослідження полягає у тому, що навіть у спрощеному вигляді задача Мозера демонструє важливість геометричного моделювання у вирішенні реальних практичних завдань. Її аналіз дозволяє розвивати просторове мислення, а також може бути використаний у шкільній математичній освіті як приклад застосування геометрії на практиці.

Об'єкт дослідження – використання математичного апарату для розв'язання задач практичного змісту на прикладі задачі Мозера.

Предмет дослідження – знаходження максимальної довжини стержня при переміщенні у Г-подібному коридорі.

Метою дослідження є аналіз одновимірного варіанту задачі Мозера, а саме: знаходження граничних розмірів стержня, який можна повернути за прямим кутом, та розробка методів розв'язку.

Для досягнення цієї мети потрібно виконати такі **завдання**:

- проаналізувати історію задачі Мозера та її математичне формулювання;
- визначити основні геометричні умови проходження стержня через Г-подібний коридор;
- вивести аналітичні залежності між довжиною стержня, шириною коридору та можливістю його проходження;
- розробити навчальні завдання для учнів, які демонструють практичне застосування геометрії.

Для розв'язання цієї проблеми будуть використані такі **методи дослідження**:

- аналітичний метод – для отримання математичних оцінок;
- геометричне моделювання – для візуалізації задачі;
- педагогічний аналіз – для адаптації задачі до шкільного курсу математики.

РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи задачі Мозера та її спрощений варіант у шкільному курсі

1.1 Історія та математичне формулювання задачі Мозера

Геометричні задачі посідають вагоме місце у сучасній математиці. Вони мають фундаментальне значення для розвитку теоретичних досліджень і водночас знаходять своє практичне застосування у різних галузях науки та техніки. Одним із цікавих завдань, яке виникає не лише в теоретичній математиці, а й у повсякденному житті, є проблема переміщення певних об'єктів через обмежені простори. Це питання має прикладне значення в архітектурі, логістиці, дизайні інтер'єрів та інших сферах.

Однією з відомих задач такого типу є задача Мозера про переміщення дивана. Її сенс полягає у тому, що потрібно визначити максимальну площу фігури, яка може пройти через Г-подібний коридор без деформацій. На перший погляд проблема здається інтуїтивно зрозумілою, проте вона залишається відкритою навіть після десятиліть активного дослідження.



Рис. 1.1 Лео Мозер (1921 – 1970 рр.) [15]

Задачу про переміщення дивана було сформовано в недалекому 1966 році відомим австрійсько-канадським вченим Лео Мозером (Рис.1.1). Проблему можна сформулювати як двовимірну модель реальної життєвої ситуації – переміщення меблів. Вона полягає у точному визначенні двовимірної форми дивана максимально можливої площі A , яку можна протягнути через Г-подібний коридор із заданою шириною прямих ланок.

Значення площі A , що відповідає одиничній довжині цих ланок, називають «сталю дивана». [1], [21]

Константа дивана має верхню та нижню межі. Нижню межу дає напівдиск одиничного радіуса ($A \geq \frac{\pi}{2} \approx 1,57$), проте у 1992 році Джозеф Гервер підвищив межу приблизно до 2,2195. Хаммерслі вказав верхню межу $2\sqrt{2} \approx 2,8284$ проте вже у 2018 році Йоав Каллус і Ден Ромік, застосувавши обертання коридору та комп'ютерний пошук, опублікували дещо більшу межу – 2,37. [20]

Формально задачу Мозера можна сформулювати наступним чином: «Нехай маємо Г-подібний коридор, утворений з двох прямокутних ділянок однакової ширини w . Знайти фігуру максимальної площі A_{max} , яка може безперешкодно пройти через цей коридор без деформацій».

Незважаючи на те, що над цією проблемою працювало кілька поколінь видатних математиків, на сьогодні точне значення константи дивана є відкритою проблемою.

Задача Мозера починається з простого питання: «Як максимізувати площу фігури, яку можна переміщати через кут, зберігаючи її незмінну форму?».

Для одиничного квадрата задача має тривіальне розв'язання. Його можна перемістити через кут без обертання. Це можна зробити просто, просуваючи квадрат по коридору, поки він досягне дальньої стіни, а потім потягнути його вздовж перпендикулярного коридору. Площа цього квадрата очевидно дорівнює 1, і він є найбільшим з квадратів, який може пройти через кут. Такий підхід є простим і зрозумілим, але він не дає відповіді про максимальну площу, яку може мати фігура. (Рис. 1.2)

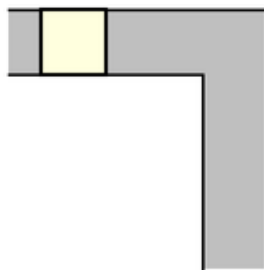


Рис. 1.2 Переміщення одиничного квадрата

Збільшення площі фігури вимагає відхилення від простої форми квадрата до більш складних геометричних фігур, проте вони можуть бути переміщені тільки за умови, що їм дозволено обертатися. Однією з перших фігур, яку було запропоновано для розв'язку задачі, є півкруглий «диван». Площа такого півкола дорівнює $\frac{\pi}{2}$, що більша за площу квадрата (Рис. 1.3). Однак, навіть ця форма не є оптимальною, оскільки існують інші фігури з більшою площею, що можуть пройти через кут.

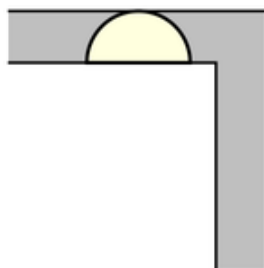


Рис. 1.3 Переміщення півкола

Розвиток спроб розв'язків задачі привів до пошуку більш складних форм, що могли б максимізувати площу. У 1968 році британський математик Джон Майкл Хаммерслі запропонував форму дивана, що нагадує старомодну телефонну слухавку (Рис. 1.4). Площа запропонованої фігури більша за площу півдиска. Дана фігура є значно ефективнішою за попередні варіанти. Хаммерслі «розрізав» півколо на дві чверті диска, розділив їх горизонтально на відстань $2r$, заповнюючи проміжок між ними, крім того, менший півдиск радіуса r видаляється знизу.[18], [19]

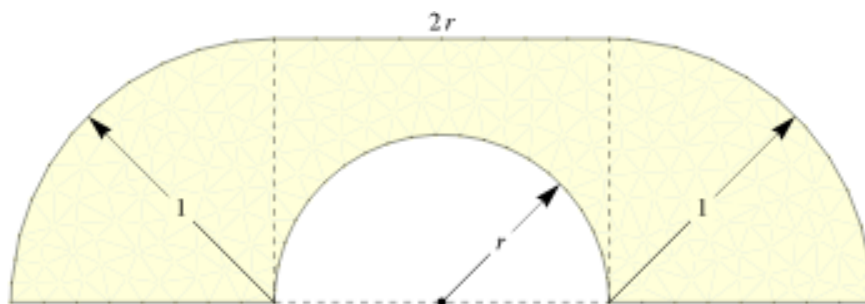


Рис. 1.4 «Диван Хаммерслі»

Форма дивана Хаммерслі максимізує площу, коли радіус $r^* = \frac{2}{\pi} = 0,6366 \dots$, даючи площу $A_H^* = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} = 2,2074 \dots$. Ця площа є більшою ніж площа півкруглого дивана, але меншою, ніж площа, яку може мати оптимальна фігура (Рис. 1.5). [6]

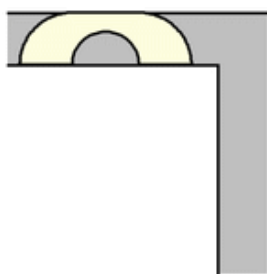


Рис. 1.5 Переміщення дивана Хаммерслі

У 1992 році професор Рутгерського університету Джозеф Гервер описав диван із 18 вигнутими секціями, кожна з яких має гладку аналітичну форму. Диван Гервера має площу $2,219531\dots$, що є дещо більшою за площу дивана Хаммерслі (Рис.1.6). Гервер вважав, що ця форма є близькою до оптимальної для задачі Мозера. [4]

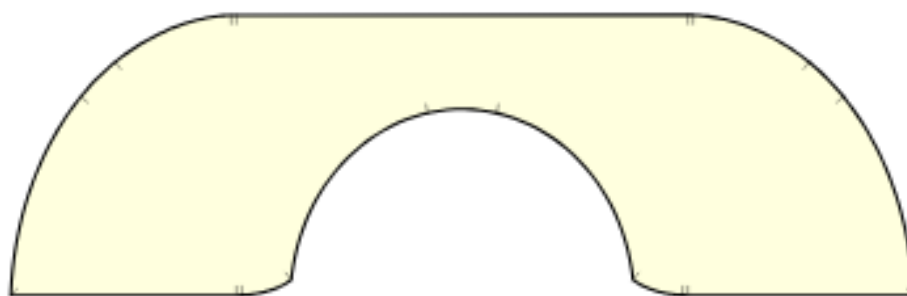


Рис.1.6 Диван Гервера

У 2024 році дослідження задачі отримало новий етап розв'язку завдяки застосуванню варіаційного числення. Доцент Університету з Флориди – Джипен Денг використав варіаційні методи для формулювання інтегрального функціонала на наборі параметричних рівнянь для кривих, який описує форму фігури, що переміщається через кут. За допомогою числових методів було розв'язано відповідні диференціальні рівняння Ейлера-Лагранжа, що дозволило досягти максимальної площі 2,2195316, що практично збігається з площею дивану Гервера. [2], [3]

Цього ж року докторант з математики університету Йонсей в Південній Кореї Джінеон Бек також довів, що конструкція Гервера є оптимальною. [5], [13], [16] (Але результат ще не підтверджений широкою математичною спільнотою).

Задача Мозера про переміщення дивана через Г-подібний коридор є важливим прикладом геометричної задачі, що поєднує абстрактні математичні дослідження з реальними прикладними задачами. Незважаючи на просте формулювання, вона фактично залишається відкритою і викликає інтерес серед математиків протягом десятиліть.

У процесі розв'язування задачі було запропоновано кілька геометричних форм, що поступово наближало до оптимального результату. Починаючи від простого одиничного квадрата до більш складних фігур, таких як півкруглий диван та диван Хаммерслі, площа яких була значно більшою. Запропонований Хаммерслі варіант дивана значно збільшив площу допустимої фігури, однак подальші дослідження Джозефа Гервера показали можливість ще максимізувати площу фігури. Диван Гервера наразі є оптимальним варіантом із максимальною площею.

Останні досягнення в дослідженні цієї задачі дозволили досягти точності, близької до площі дивану Гервера, що стало значним кроком у вирішенні цієї задачі. Незважаючи на свою простоту, задача Мозера

показує важливість математичних досліджень у пошуку оптимальних рішень, а також демонструє, як теоретичні пошуки можуть знайти широке застосування в повсякденному житті.

1.2 Одновимірний випадок: «переміщення стержня у Г-подібному коридорі»

Традиційно задача Мозера розглядається у двовимірному просторі, але що буде, якщо ми спростимо ситуацію та зведемо її до задачі в одновимірному випадку, де «диван» замінимо на лінію – «стержень»? Як зміняться умови та обмеження на проходження? Саме ця ідея лежить в основі одновимірного випадку задачі Мозера, де ми маємо справу з переміщенням жорсткого стержня через Г-подібний коридор, що має обмежену ширину. Даний випадок дозволяє зосередитися на основних геометричних принципах, не вдаючись до надто складних розрахунків. Проте, не дивлячись на свою спрощену форму, задача є надзвичайно цікавою з математичної точки зору і має широке коло практичних застосувань.

На перший погляд, геометрія такої задачі може здаватися простою. Але що буде, якщо розглянути різні випадки цієї задачі? Наприклад, якщо розглядати задачу, в умові якої сказано, що ширина коридорів однакова, і навпаки, коли розглядаються коридори з різною шириною.

Уявімо ситуацію, коли нам потрібно провести довгу трубу через вузький Г-подібний коридор. Завдання здається досить простим, але чи зможемо ми зробити це без проблем? Тобто виникає нова побутова задача. Спробуємо сформулювати її.

Розглянемо Г-подібний коридор, який складається з двох частин, які перетинаються під прямим кутом, ширина між якими дорівнює a та «жорсткий стержень» – відрізок довжини L , який необхідно перемістити через цей коридор. Отже, маємо наступну задачу:

Задача 1. Визначити максимальну довжину стержня L , за якої його можна пронести через Г-подібний коридор однакової ширини a , не порушуючи меж проходу та не деформуючи стержень. (Рис.1.7.)

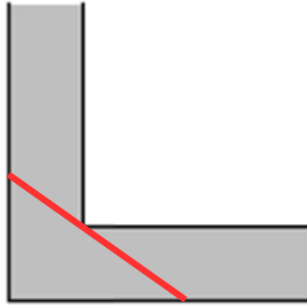


Рис.1.7. Переміщення стержня

Тепер зробимо цю задачу дещо цікавішою. Розглянемо випадок, коли ширина двох частин коридору різна. Нехай ширина першого коридору дорівнює a , а ширина другого – b , за умови, що $a \neq b$. Очевидно, що в такому випадку стержень має пройти через дві частини коридору, кожна з яких має свою ширину. Сформулюємо умову задачі:

Задача 2. Визначити максимальну довжину стержня L , за якої його можна пронести через Г-подібний коридор, який складається з двох частин, ширина яких a та b , не порушуючи меж проходу та не деформуючи стержень (Рис. 1.8).

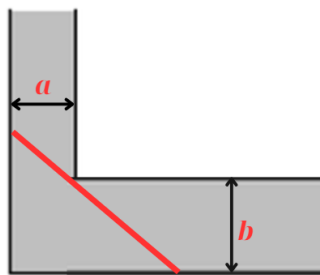


Рис. 1.8 Переміщення стержня у Г-подібний коридор із різними ширинами

Отже, маємо нову, більш цікавішу проблему.

1.3 Використання аналогічних задач у системі математичної освіти

Математика – це наука, яка вчить мислити, знаходити нестандартні рішення та бачити закономірності у повсякденному житті. Саме тому потрібно пропонувати учням задачі, які формують аналітичне та просторове мислення. Задача Мозера є гарним прикладом проблеми, що поєднує в собі геометрію, логіку, просторове мислення та інтуїцію. Хоча подібні задачі не часто зустрічаються у стандартному шкільному курсі геометрії, вони можуть стати цінним матеріалом для завдань підвищеної складності, математичних олімпіад, гурткових та факультативних занять. Це важливо, тому що саме такі задачі мотивують учнів думати, а не просто застосовувати шаблонні методи. Саме через такі нестандартні задачі діти починають цікавитися математикою, усвідомлюють її зв'язок з іншими науками та розуміють її значення у повсякденному житті.

Задача про переміщення стержня у Г-подібному коридорі є гарним прикладом геометричної проблеми, що демонструє взаємозв'язок між теоретичними математичними поняттями та їхнім практичним застосуванням. У шкільному курсі математичної освіти розглядаються провідні теми, які безпосередньо стосуються даної задачі.

В основі знаходження розв'язку задачі лежать тригонометричні співвідношення у прямокутному трикутнику, вивчення яких починається у 8 класі. Саме тоді учні знайомляться з поняттям синуса, косинуса, тангенса та їх застосування в геометричних задачах. Тобто, учні можуть записати рівняння стержня, що описує його положення. [7]

У підручнику авторського колективу Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. «Геометрія 8 клас» пропонуються теми, тісно пов'язані з даною проблемою, в розділі «Розв'язування прямокутних трикутників»: «Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника» та «Властивості тригонометричних функцій гострого кута». [8]

У 10 класі, опанувавши диференціювання функцій, учні профільних класів можуть глибше дослідити цю проблему, розв'язавши задачу через знаходження мінімуму функції, яка задає стержень. [9]

За підручником авторського колективу Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. «Алгебра і початки аналізу: профільний рівень 10 клас» у розділі «Похідна та її застосування» вивчаються теми: «Поняття похідної», «Правила обчислення похідних», «Точки екстремуму функції», «Друга похідна» та інші, які тісно пов'язані з проблемою даного дослідження. [10]

Як бачимо, задача про переміщення стержня є гарним прикладом для інтеграції різних розділів математики, що вивчаються на різних етапах шкільної освіти.

Окрім тригонометричних співвідношень та методів диференціального числення, одним з підходів до розв'язання задачі Мозера в одновимірному випадку є використання диференціального рівняння Клеро. Даний метод належить до розділу диференціальних рівнянь першого порядку, який вивчається у курсі вищої математики на спеціальностях прикладного математичного спрямування. [11]

Проаналізувавши вище зазначене, можна зробити висновок, що включення аналогічних задач у шкільний курс математики сприяє поглибленню знань та формуванню стійкого інтересу до предмета. Саме завдяки таким завданням, учні починають сприймати математику як захопливу науку, що допомагає досліджувати світ і вирішувати реальні життєві проблеми.

РОЗДІЛ 2. Аналіз розв'язків і практичне застосування

2.1 Огляд розв'язків деяких випадків задачі

Цікавим прикладом практичної задачі, яку можна розв'язувати різними методами на різних рівнях освіти є задача Мозера в одновимірному випадку. Починаючи з шкільного курсу, проблему можна вирішити знаходженням мінімуму функції, яка задає рівняння «стержня», застосування синтетичного методу також дасть свій результат, але він є дещо складнішим для учнів, його доцільно продемонструвати після розв'язку задачі попереднім методом, як ще один варіант розв'язку. Вже на математичних спеціальностях прикладного спрямування у закладах вищої освіти, студентам доцільно запропонувати розв'язати дану проблему з використанням диференціального рівняння Клеро, як окремого випадку сімейства рівнянь Лагранжа. Отже, розглянемо три способи, якими можна розв'язати задачу.

Задача. Визначити максимальну довжину стержня $L(HG)$, за якої його можна пронести через «Г-подібний» коридор, який складається з двох частин, ширина яких a та b , не порушуючи меж проходу та не деформуючи стержень. (Рис.2.1)

Уточнення: у даній задачі розглядається нескінченно тонкий стержень, тобто, надалі будемо розглядати стержень, як відрізок.

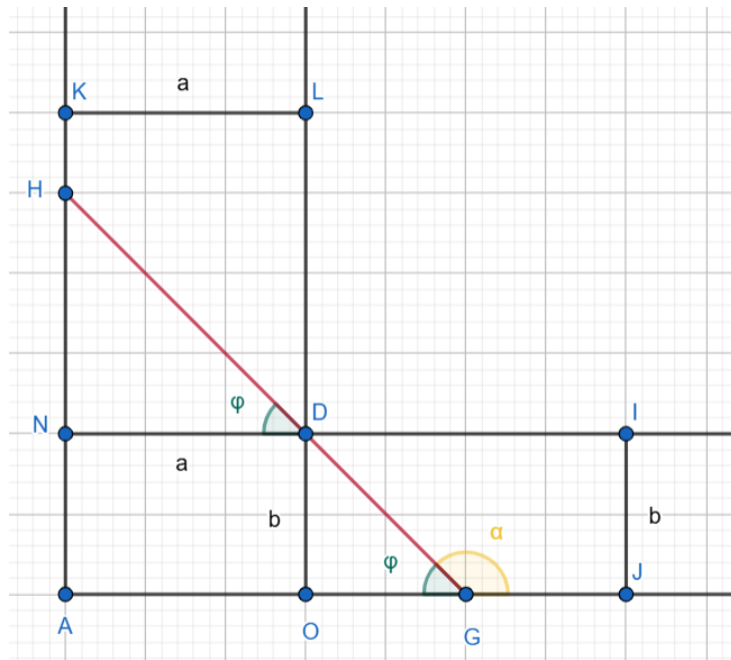


Рис 2.1 Ілюстрація задачі Мозера в одновимірному випадку

Для зручності доцільно ввести наступну термінологію: $\angle KAJ$ – внутрішній кут коридору, а $\angle LDI$ – зовнішній.

Відрізок HG будемо проносити наступним чином. Проносимо його вдовж горизонтальної стінки AJ , доти він не торкнеться внутрішнього кута, а далі починаємо повертати так, щоб один кінець невідривно ковзав вздовж стіни KA , а другий кінець ковзав вдовж горизонтальної стіни AJ . Будемо вважати, що такий рух є оптимальним, тобто забезпечить поворот відрізка максимальної довжини в середині перетину цих коридорів.

Розглянемо задачу, в якій необхідно визначити максимально можливу довжину стержня L , що може пройти через поворот у Г-подібному коридорі. Нехай a – ширина вертикального коридору, b – ширина горизонтального, φ – кут між стержнем та нижньою стіною (Рис. 2.1).

Максимальна довжина стержня досягається у момент його дотику до зовнішнього кута повороту. У такому випадку довжину стержня можемо задати як функцію від кута φ :

$$L(\varphi) = \frac{a}{\cos \varphi} + \frac{b}{\sin \varphi}$$

Перший спосіб – ґрунтується на елементарному математичному аналізі, суть якого полягає в аналітичному знаходженні мінімуму функції, яка описує положення стержня.

Знаходження мінімального значення функції.

$$L(\varphi) = \frac{a}{\cos \varphi} + \frac{b}{\sin \varphi} \quad (1)$$

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Зайдемо критичні значення функції, прирівнявши першу похідну до нуля:

$$L'(\varphi) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{a}{\cos \varphi} + \frac{b}{\sin \varphi} \right),$$

$$L'(\varphi) = a \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - b \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi},$$

$$a \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = b \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi},$$

$$a \cdot \sin \varphi \cdot \sin^2 \varphi = b \cdot \cos \varphi \cdot \cos^2 \varphi,$$

$$a \cdot \sin^3 \varphi = b \cdot \cos^3 \varphi,$$

$$a \frac{\sin^3 \varphi}{\cos^3 \varphi} = b \Rightarrow a \operatorname{tg}^3 \varphi = b,$$

$$\operatorname{tg}^3 \varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi_0 = \operatorname{arctg} \left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right).$$

Оскільки $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, маємо: $\sin \varphi > 0$, $\cos \varphi > 0$, то функція визначена та диференційовна на всій області.

Знайдемо другу похідну:

$$L''(\varphi) = a \cdot \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \right) - b \cdot \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right),$$

обчислимо кожен похідну окремо:

$\begin{aligned} & \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \right) = \\ & = \frac{\cos \varphi \cdot \cos^2 \varphi - \sin \varphi \cdot 2 \cos \varphi (-\sin \varphi)}{\cos^4 \varphi} = \\ & = \frac{\cos^3 \varphi + 2 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} = \\ & = \frac{\cos \varphi (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi)}{\cos^4 \varphi} = \\ & = \frac{\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} = \\ & = \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} = \\ & = \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) = \\ & = \frac{-\sin \varphi \sin^2 \varphi - \cos \varphi \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^4 \varphi} = \\ & = \frac{-\sin^3 \varphi - 2 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{\sin^4 \varphi} = \\ & = \frac{\sin \varphi (-\sin^2 \varphi - 2 \cos^2 \varphi)}{\sin^4 \varphi} = \\ & = \frac{\sin \varphi (-\sin^2 \varphi - 2 \cos^2 \varphi)}{\sin^4 \varphi} = \\ & = -\frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\sin^3 \varphi} = \\ & = -\frac{1 + \cos^2 \varphi}{\sin^3 \varphi} \end{aligned}$
---	---

Тоді:

$$L''(\varphi) = a \cdot \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} + b \cdot \frac{1 + \cos^2 \varphi}{\sin^3 \varphi}.$$

Оскільки $a, b > 0$, $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $L''(\varphi) > 0$.

Отже, φ_0 – точка мінімуму.

Ведемо параметр t :

$$\operatorname{tg} \varphi = t \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}(t) \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Використаємо тригонометричні співвідношення:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Підставимо ці значення у рівняння (1):

$$L_{\min} = \frac{a}{\cos \varphi} + \frac{b}{\sin \varphi} = a\sqrt{1+t^2} + b\frac{1}{t}\sqrt{1+t^2};$$

$$L_{\min} = \sqrt{1+t^2} \left(a + \frac{b}{t} \right).$$

Піднесемо обидві частини виразу до степеня $\frac{2}{3}$:

$$L_{\min}^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt{1+t^2} \right)^{\frac{2}{3}} \left(a + \frac{b}{t} \right)^{\frac{2}{3}},$$

виконаємо піднесення до степеня множників:

$\begin{aligned} \left(\sqrt{1+t^2} \right)^{\frac{2}{3}} &= \left((1+t^2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} = \\ &= (1+t^2)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{1}{3}} = \\ &= a^{-\frac{2}{9}} \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \left(a + \frac{b}{t} \right)^{\frac{2}{3}} &= \left(a + \frac{b}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \right)^{\frac{2}{3}} = \\ &= \left(a + \left(b \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \right)^{\frac{2}{3}} = \\ &= \left(a + \left(b \cdot a^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{3}} \right) \right)^{\frac{2}{3}} = \\ &= \left(a + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{2}{3}} = \end{aligned}$
--	---

	$= \left(a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right) \right)^{\frac{2}{3}} =$ $= a^{\frac{2}{9}} \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{2}{3}}$
--	--

Після підстановок і піднесення до степеня $\frac{2}{3}$, отримали:

$$L_{min}^{\frac{2}{3}} = a^{-\frac{2}{9}} \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{9}} \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{2}{3}} ;$$

$$L_{min}^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{9}} \cdot a^{-\frac{2}{9}} \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right) ;$$

$$L_{min}^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} .$$

Виведемо функцію максимально можливої довжини стержня L від $\angle \varphi$ між ним і однією із зовнішніх сторін, при умові, що ширина першого коридору дорівнює a , а ширина другого дорівнює b .

Мається на увазі не стала довжина L , а лише максимальне значення при конкретному значенні $\angle \varphi$.

За a візьмемо ширину вертикального коридору, а b – горизонтального, за $\angle \varphi$ – кут між стержнем і нижньою стінкою.

Максимально можливу довжину стержень досягає при його дотику до зовнішнього кута коридору. Таким чином, знаючи $\angle \varphi$, можна знайти: $L(\varphi) = \frac{a}{\cos \varphi} + \frac{b}{\sin \varphi}$.

Максимальна довжина стержня, який пройде поворот, дорівнює мінімальному значенню L_{min} .

Знайдемо похідну цієї функції від φ і прирівняємо її значення до нуля:

$$L'(\varphi) = a \frac{a \sin^3 \varphi - b \cos^3 \varphi}{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} = 0, \text{ при } \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$\varphi \neq 0$ і $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, що нас задовольняє.

$$a \cdot \sin^3 \varphi = b \cdot \cos^3 \varphi; \quad \operatorname{tg}^3 \varphi = \frac{b}{a}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Подамо L_{max} через $\operatorname{tg} \varphi$ за теоремою Піфагора:

$$\begin{aligned} L_{max} &= ((a \operatorname{tg} \varphi)^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} + \left(\left(\frac{b}{\operatorname{tg} \varphi} \right)^2 + b^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= a(\operatorname{tg}^2 \varphi + 1)^{\frac{1}{2}} + b \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Підставимо $\operatorname{tg} \varphi = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$:

$$\begin{aligned} L_{max} &= a \left(\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{2}{3}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + b \left(\left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{2}{3}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= a \frac{\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}} + b \frac{\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}} = \\ &= a^{\frac{2}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{2}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right) = \\ &= \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Другий спосіб розв'язання задачі синтетичний метод, який ґрунтується на геометричних міркуваннях. Розглядаючи, як кінці стержня рухаються вдовж стінок коридору при його повороті,

отримуємо параметричне рівняння астроїди, що описує цю траєкторію. Цей метод є дещо складнішим для сприйняття, оскільки потребує глибоких математичних знань та логіки.

Відрізок при русі описує певну фігуру. Якщо знайти границю заштрихованої області, яка отримується при русі відрізка, то отримаємо відповідь на питання про максимальну довжину відрізка, який можна повернути всередині коридорів.

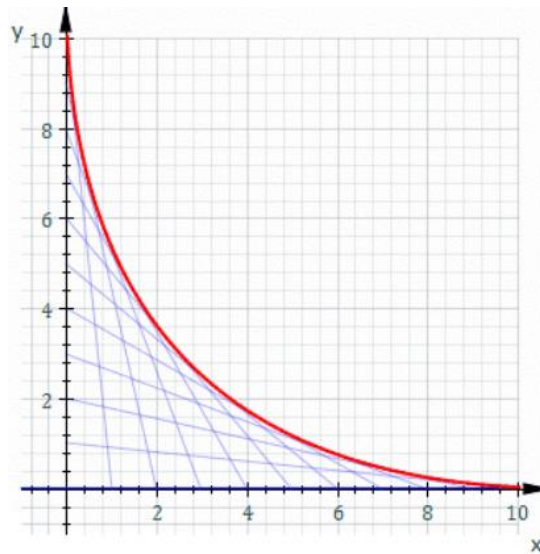


Рис. 2.2 Рух відрізка [17]

Введемо прямокутну систему координат. Початок системи співпадатиме з внутрішнім кутом коридору. Знайдемо рівняння границі області, яка отримується при русі відрізка.

Візьмемо на кривій довільну точку S . Нехай її координати $(x; y)$. Зрозуміло, що в результаті $y(x)$.

Проведемо через точку S дотичну. Фактично вона являє собою одне з положень відрізка при його повороті в середині коридорів.

За умовою задачі, довжина відрізка дорівнює L . Тоді $L \cap Oy$ в точці $(0; L)$, $L \cap Ox$ в точці $(L; 0)$.

Проведемо з точки S перпендикуляри до осей. Тоді довжина $AS = x$, а $BS = y$. Отримали два прямокутні трикутники.

Нехай у нижньому трикутнику гострий кут утворений з віссю Ox дорівнює φ , тоді відомо, що й у верхньому трикутнику аналогічний кут буде рівним φ . (Рис.2.3)

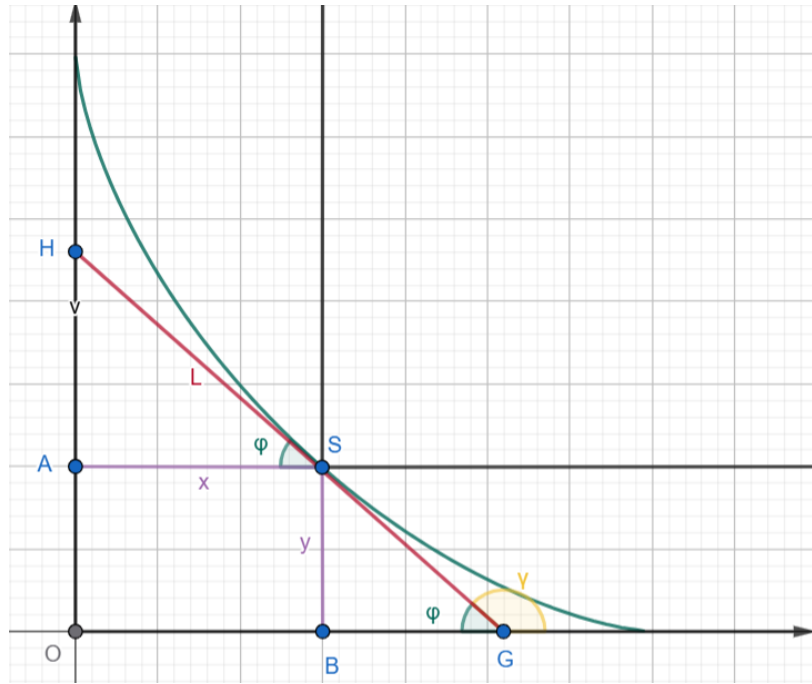


Рис.2.3 Побудова задачі

У верхнього $\triangle HSA$ гіпотенуза дорівнює $\frac{x}{\cos \varphi}$, а у нижнього $\triangle SGB$ — $\frac{y}{\sin \varphi}$. У сумі ці дві гіпотенузи складають весь відрізок дотичної.

$$\frac{x}{\cos \varphi} + \frac{y}{\sin \varphi} = L. \quad (2)$$

Нехай $\angle \gamma$ суміжний з $\angle \varphi$, тоді за властивістю дотичної:

$$\operatorname{tg} \gamma = y' = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Оскільки, $\angle \gamma$ суміжний з $\angle \varphi$, то:

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\pi - \varphi) = -\operatorname{tg} \varphi,$$

тоді:

$$-\operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Помножимо ліву та праву частини рівності (2) на $\sin \varphi$:

$$x \cdot \operatorname{tg} \varphi + y = L \sin \varphi \quad (3)$$

Оскільки $y(x)$ та $\varphi(x)$, продиференціюємо по $\frac{d}{dx}$.

$$1 \cdot \operatorname{tg} \varphi + x \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \varphi' + y' = L \cdot \cos \varphi \cdot \varphi' ,$$

$$x \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \varphi' = L \cdot \cos \varphi \cdot \varphi' .$$

Якщо $\varphi' = 0 \Rightarrow \varphi = \text{const}$,

Якщо $\varphi' \neq 0$, тоді скоротимо обидві частини на :

$$x \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} = L \cdot \cos \varphi ,$$

$$x = L \cdot \cos^3 \varphi.$$

Підставимо значення x у вираз (3):

$$L \cdot \cos^3 \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi + y = L \sin \varphi ,$$

$$y = L \sin \varphi - L \cdot \cos^3 \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi ,$$

$$y = L \sin \varphi - L \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi ,$$

$$y = L \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi) ,$$

$$y = L \cdot \sin^3 \varphi.$$

Запишемо шукане рівняння кривої в параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = L \cdot \cos^3 \varphi \\ y = L \cdot \sin^3 \varphi \end{cases} - \text{параметричне рівняння астроїди.}$$

Виключимо з цієї системи параметр φ , для цього кожен з рівностей піднесемо до степеня $\frac{2}{3}$, отримаємо:

$$+ \begin{cases} x^{\frac{2}{3}} = L^{\frac{2}{3}} \cdot \cos^2 \varphi \\ y^{\frac{2}{3}} = L^{\frac{2}{3}} \cdot \sin^2 \varphi \end{cases}$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = L^{\frac{2}{3}};$$

$$L_{max} = \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Третій спосіб – використання диференціального рівняння Клеро, яке виникає у результаті перетворення початкового рівняння задачі у вигляді залежності між функцією та її похідною.

Диференціальне рівняння Клеро:

з попередніх міркувань маємо:

$$\frac{x}{\cos \varphi} + \frac{y}{\sin \varphi} = L,$$

$$- \operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{\partial y}{\partial x};$$

$$\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right),$$

$$x \cdot \operatorname{tg} \varphi + y = L \sin \varphi,$$

виконаємо підстановку:

$$x \cdot (-y') + y = L \cdot \frac{-y'}{\sqrt{1 + (y')^2}},$$

$$y = x \cdot y' - \frac{Ly'}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Отримали диференціальне рівняння Клеро вигляду :

$$y = xy' + \psi(y') \quad , [12]$$

$$\text{де: } \psi(y') = -\frac{Ly'}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Розв'яжемо рівняння Клеро. Введемо параметр $y' = p$, тоді:

$$y = xp + \psi(p).$$

Продиференціюємо це рівняння по x . Маємо:

$$y' = p + xp' + \psi'(p)p',$$

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \frac{dp}{dx} ,$$

$$\frac{dp}{dx} (x + \psi'(p)) = 0,$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{або} \quad (x + \psi'(p)) = 0.$$

1) Якщо $\frac{dp}{dx} = 0$, то $p = C$, маємо:

$$\begin{cases} p = C, \\ y = xp + \psi(p); \end{cases}$$

$$y = xC + \psi(C),$$

$$y = xC - \frac{LC}{\sqrt{1 + C^2}}.$$

2) Якщо $x + \psi'(p) = 0$, то

$$\begin{cases} x + \psi'(p) = 0, \\ y = xp + \psi(p); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -\psi'(p)p + \psi(p); \end{cases}$$

Знайдемо похідну $\psi'(p)$:

$$\psi(p) = -\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}} = -Lp(1+p^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned}\psi'(p) &= -L \left[(1+p^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{p^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = \\ &= -\frac{L}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = \frac{L}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ y = \frac{Lp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{L}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ y = Lp \left(\frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{L}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ y = -\frac{Lp^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}; \end{cases}$$

Виконаємо піднесення до степеня $\frac{2}{3}$:

$$\begin{aligned} &+ \begin{cases} x^{\frac{2}{3}} = \frac{L^{\frac{2}{3}}}{1+p^2}, \\ y^{\frac{2}{3}} = \frac{L^{\frac{2}{3}}p^2}{1+p^2}; \end{cases} \\ \hline x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} &= \frac{L^{\frac{2}{3}}}{1+p^2} + \frac{L^{\frac{2}{3}}p^2}{1+p^2}, \end{aligned}$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \frac{L^{\frac{2}{3}} + L^{\frac{2}{3}}p^2}{1 + p^2},$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \frac{L^{\frac{2}{3}}(1 + p^2)}{1 + p^2},$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = L^{\frac{2}{3}}.$$

2.2 Зразки практичних завдань для учнів 10 – 11 класів

Задача 1. Група туристів здійснює похід на байдарках по каналу шириною 1 метр, який знаходиться перпендикулярно до відкритої водойми ширина якої – 8 метрів. Чи зможуть туристи безперешкодно пройти канал та вийти у відкриту водойму, якщо довжина байдарки – 11 метрів?

Задача 2. У лабораторії природничого класу учні проводять спостереження над мурахами, які пересуваються лабіринтом, тягнучи соломину. Чи зможуть вони протягти соломину через Г-подібний прохід з поворотом під прямим кутом не пошкодивши її, якщо відомо, що ширина проходів 10 мм, а довжина соломини 28 мм?

Задача 3. До головної дороги шиною a метрів прокладено під прямим кутом з'їзд на другорядну дорогу шириною b метрів. Яка максимальна довжина транспортного засобу, який зможе проїхати цією дорогою?

Задача 4. На олімпіаді з робототехніки учням потрібно побудувати Г-подібний прохід, через який робот повинен протягнути металеву трубку довжиною 36 см. Якою повинна бути мінімальна ширина проходів, щоб він зміг це зробити? (У відповідь записати найближче ціле число)

2.3 Практичне застосування задачі у різних сферах науки

Незважаючи на те, що задача має математичне коріння, вона також знаходить широке застосування у різних сферах науки. Одна з галузей, де

подібне питання є надзвичайно актуальним – це архітектурне проектування. Проходження великих конструкцій: балок, труб чи елементів модульних споруд, через вузькі простори вимагає ретельного геометричного аналізу. Архітекторам та інженерам потрібно передбачити, які обмеження накладають розміри приміщень та коридорів, і як уникнути ситуації, коли транспортування неможливе без додаткових змін у конструкції будівлі чи об'єкта.

Однією із сфер, де розглянута задача має практичне значення, є логістика та транспортна інженерія. Під час перевезення великогабаритних вантажів, наприклад, промислове обладнання, виникає необхідність обчислити найкращі маршрути з урахуванням поворотів доріг та ширини проїздів.

Також типові задачі використовуються у робототехніці та автоматизації. Розробка алгоритмів навігації для автономних роботів часто передбачає аналіз їхньої здатності рухатися у середовищі з обмеженим простором. Наприклад, промислові маніпулятори мають пересуватися між деталями, робот-пилосос повинен орієнтуватися серед меблів, а складські автоматизовані системи – оптимізувати маршрути проходження між стелажми.

Ще одна цікава сфера застосування – комп'ютерне моделювання та віртуальна реальність. У відеоіграх та симуляторах часто виникають ситуації, у яких потрібно визначити, чи може об'єкт пройти через вузький простір без зіткнень. Використання методів обчислювальної геометрії, пов'язаної із задачею Мозера, дає змогу створити реалістичні моделі взаємодії об'єктів у тривимірному просторі.

Як бачимо, задача Мозера має широке практичне застосування у різних галузях науки та техніки. Вона допомагає вирішувати завдання в архітектурному проектуванні, логістиці, робототехніці, комп'ютерному

модельованні та автоматизації. Всі ці галузі потребують точних геометричних розрахунків для вирішення проблем, які пов'язані з проходженням об'єктів через обмежені простори.

ВИСНОВКИ

Отже, у ході кваліфікаційної роботи на тему: «Задача Мозера в одновимірному випадку» було досліджено один з варіантів задачі Мозера, а саме: знаходження максимальної довжини стержня, який можна повернути за прямим кутом. Опрацьовано три методи розв'язку, які застосовуються на різних рівнях математичної освіти. Визначено основні геометричні умови проходження стержня через Г-подібний коридор. Виведено аналітичні залежності між довжиною стержня, шириною коридору та можливістю його проходження. Розроблені навчальні завдання для учнів, які демонструють практичне застосування математики під час вирішення реальних життєвих проблем.

Для розв'язання наукового завдання було використано такі методи дослідження, як аналітичний метод, геометричне моделювання та педагогічний аналіз. Усі три методи дали однаковий результат щодо знаходження максимальної довжини стержня. Розроблені конкретні завдання, які може використати вчитель у своїй роботі з учнями під час проведення факультативних занять у 10 – 11 профільних математичних класах.

Здійснено аналіз історії задачі Мозера та її математичного формулювання. Дослідження відкриває перспективи для застосування результатів у сферах робототехніки, логістики, архітектури та ін. Дане дослідження показало, що подібні задачі є ефективними для міжпредметної інтеграції знань з геометрії, алгебри та аналізу. Отримані результати можуть бути корисними для вчителів математики та викладачів інших навчальних закладів.

Робота може стати основою для подальших досліджень, наприклад, вивчення задачі Мозера у двовимірному та тривимірному просторах. Можна стверджувати, що дослідження задачі Мозера в одновимірному випадку дає можливість, не тільки дістати точні аналітичні результати, але

й знайти нові можливості для її застосування в освітній, науковій, практичній діяльності. Робота створює передумови для подальшого поглиблення знань з даної теми.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Учасники проектів Вікімедіа. Задача про переміщення дивана – Вікіпедія. *Bikinedia*.
URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Задача_про_переміщення_дивана
2. Moving Sofa Problem -- from Wolfram MathWorld. *Wolfram MathWorld: The Web's Most Extensive Mathematics Resource*.
URL: <https://mathworld.wolfram.com/MovingSofaProblem.html>
3. Gerver Sofa -- from Wolfram MathWorld. *Wolfram MathWorld: The Web's Most Extensive Mathematics Resource*.
URL: <https://mathworld.wolfram.com/GerverSofa.html>
4. Contributors to Wikimedia projects. Moving sofa problem - Wikipedia. *Wikipedia, the free encyclopedia*.
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Moving_sofa_problem
5. Baek J. Optimality of Gerver's Sofa. Department of Mathematics, Yonsei University, Seoul, Korea., 2024.
6. Hammersley Sofa -- from Wolfram MathWorld. Wolfram MathWorld: The Web's Most Extensive Mathematics Resource. URL: <https://mathworld.wolfram.com/HammersleySofa.html>
7. М.І.Бурда, М.Ф.Городній, Д.А.Номіровський, А.В.Паньков, Н.А.Тарасенкова, М.В.Чемерис, В.О.Швець, М.С.Якір. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів.
8. Підручник Геометрія 8 клас Бевз 2021, 2016. *Шкільні підручники онлайн*. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/859-geometriya-8-klas-bevz-vladmrova-2016.html>
9. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень.

10. Підручник Алгебра Мерзляк 10 клас 2018 профільний рівень. *Шкільні підручники онлайн*.
URL: <https://pidruchnyk.com.ua/430-algebra-proflniy-rven-merzlyak-10-klas.html>
11. Диференціальні рівняння першого порядку та методи їх інтегрування: навчальний посібник / В. Л. Рого, Я. В. Варга – Ужгород: «УжНУ», 2021. – 124 с.
12. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Диференціальні рівняння» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня зі спеціальності 104 – «Фізика і астрономія»
Укладач: Ж.В.Худа – Кам'янське, ДДТУ, 2024. – 50 с.(27-28)
13. Математик знайшов оптимальний спосіб переміщення дивана коридором. nauka.ua. URL: <https://nauka.ua/news/matematik-znajshov-optimalnij-sposib-peremishchennya-divana-koridorom>
14. Jineon Baek. Conditional Upper Bound for the Moving Sofa Problem. https://www.researchgate.net/publication/381485632_A_Conditional_Upper_Bound_for_the_Moving_Sofa_Problem/fulltext/6671025d85a4ee7261ce9fc6/A-Conditional-Upper-Bound-for-the-Moving-Sofa-Problem.pdf.
15. Contributors to Wikimedia projects. Leo Moser - Wikipedia. Wikipedia, the free encyclopedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Leo_Moser
16. Jineon Baek. Optimality of Gerver's Sofa. URL: <https://arxiv.org/pdf/2411.19826>
17. Учасники проєктів Вікімедіа. Астроїда – Вікіпедія. *Вікіпедія*. URL: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Астроїда>
18. Contributors to Wikimedia projects. John Hammersley - Wikipedia. *Wikipedia, the free encyclopedia*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/John_Hammersley
19. TEDx Talks. The Moving Sofa Problem | Serena Devgun | TEDxPittsford Sutherland HS, 2024. *YouTube*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=q0Ef1BBqGtg>

20. The moving sofa problem – Dan Romik’s home page. *Mathematics Home: math.ucdavis.edu*.
URL: <https://www.math.ucdavis.edu/~romik/movingsofa/>
21. Wagner N. R. The Sofa Problem. *The American Mathematical Monthly*. 1976. Vol. 83, no. 3. P. 188. URL: <https://doi.org/10.2307/2977022>