

**Міністерство освіти і науки України**  
**Херсонський державний університет**  
**ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА**  
**МАТЕМАТИКИ**  
**КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО**  
**АНАЛІЗУ**

**ФРАКТАЛЬНІ МНОЖИНИ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ**  
**МАТЕМАТИКИ**

**Кваліфікаційна робота (проект)**  
на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

**Виконала:** студентка 2-го курсу, 12-221М групи

Спеціальності: 014 Середня освіта

Спеціалізація: 014.04 Математика

Освітньо-професійної програми «Середня освіта  
(Математика)» другого (магістерського) рівня  
вищої освіти

Матвеева Оксана Анатоліївна

**Керівник** доктор фізико-математичних наук,  
професор Савченко Олександр Григорович

**Рецензент** докторка педагогічних наук, кандидатка  
фізико-математичних наук, професорка кафедри  
інформаційних технологій та фізико-математичних  
дисциплін Херсонського навчально-наукового  
інституту Національного університету  
кораблебудування імені адмірала Макарова  
Літвінова М. Б.

**Івано-Франківськ – 2025**

## ЗМІСТ

|                                                                                                                             |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>ВСТУП .....</b>                                                                                                          | <b>4</b>  |
| <b>РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ФРАКТАЛЬНИХ МНОЖИН .....</b>                                                        | <b>8</b>  |
| 1.1. Генеза поняття «фрактал»: історичні витoki та наукові інтерпретації .....                                              | 8         |
| 1.2. Математичні властивості та класифікація фрактальних множин.....                                                        | 11        |
| 1.3. Роль фрактальної геометрії в сучасній науці та її міждисциплінарний потенціал.....                                     | 18        |
| 1.4. Освітнє значення фрактальних структур у формуванні наукового світогляду учнів.....                                     | 21        |
| <b>РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО ВИКЛАДАННЯ ФРАКТАЛЬНИХ МНОЖИН У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ .....</b>                      | <b>25</b> |
| 2.1. Дидактичні принципи та методичні умови введення фрактальної геометрії у шкільну програму .....                         | 25        |
| 2.2. Фрактальні моделі як засіб розвитку просторової уяви та логіко-математичного мислення .....                            | 29        |
| 2.3. Використання інтерактивних технологій і цифрових ресурсів під час вивчення фрактальних множин.....                     | 33        |
| 2.4. Методика побудови навчальних занять із тематики «фрактали» у шкільному курсі математики.....                           | 35        |
| <b>РОЗДІЛ 3. ПРАКТИЧНА РЕАЛІЗАЦІЯ ВИВЧЕННЯ ФРАКТАЛЬНИХ МНОЖИН У ШКОЛІ .....</b>                                             | <b>37</b> |
| 3.1. Досвід інтеграції елементів фрактальної геометрії в навчальні програми з математики в Україні та за кордоном .....     | 37        |
| 3.2. Аналіз педагогічних ефектів вивчення фрактальних структур (мотивація, креативність, пізнавальна активність учнів)..... | 41        |

|                                                                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.3. Практичні завдання, проєкти та дослідницькі роботи<br>школярів із використанням фрактальних моделей..... | 43        |
| 3.4. Перспективи розширення шкільного курсу математики за<br>рахунок тематики фрактальної геометрії.....      | 46        |
| <b>ВИСНОВКИ .....</b>                                                                                         | <b>50</b> |
| <b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....</b>                                                                        | <b>53</b> |

## ВСТУП

**Актуальність теми дослідження** обумовлена необхідністю інтеграції сучасних математичних концепцій у шкільний курс для забезпечення розвитку ключових компетентностей учнів середніх і старших класів відповідно до стандартів НУШ. Нами було виконано аналіз переваг впровадження вивчення фрактальних множин у шкільний курс математики, з огляду на їхню роль у розвитку учнів середніх і старших класів загальноосвітньої школи. Так, фрактали є унікальними математичними об'єктами, які поєднують елементи класичної геометрії та сучасних математичних концепцій, таких як самоподібність і нескінченна складність. На відміну від традиційної геометрії, яка вивчає об'єкти з гладкими й ідеальними формами (лінії, кола, трикутники), фрактальна геометрія пропонує інструменти для опису складних і нерівних форм, які часто зустрічаються у природі.

Фрактальні множини відкривають учням доступ до нових концепцій, які не входять до стандартного шкільного курсу, зокрема, до елементів математичного аналізу, топології та числових алгоритмів. Вивчення фракталів сприяє розвитку просторового й абстрактного мислення, адже процес їхнього аналізу включає роботу з нескінченними послідовностями, самоподібними структурами та складними взаємозв'язками. Багато об'єктів у природі мають фрактальну структуру: форма хмар, дерева, гірських хребтів, сніжинок чи річкових басейнів є прикладами таких об'єктів. Наприклад, у дослідженні берегових ліній (зокрема, «Фрактальність берегової лінії Азовського моря») показано, як фрактальні методи допомагають вимірювати довжину складних форм [10]. Аналіз таких природних структур за допомогою фракталів дає учням змогу побачити приклади практичного застосування математики, що, своєю чергою, підвищує мотивацію до вивчення предмету.

Робота з фракталами передбачає вміння будувати математичні моделі, працювати з комп'ютерними програмами для візуалізації й аналізу даних (наприклад, програмування множини Мандельброта чи сніжинки Коха) [12; 13]. Це дозволяє учням не лише вивчати теоретичні аспекти, але й розвивати навички самостійного дослідження та аналізу.

**Виявити протиріччя теми дослідження.** Було визначено, що протиріччя, які виникають у контексті вивчення фрактальних множин у шкільному курсі математики, демонструють розрив між сучасними досягненнями математичної науки та можливостями їх реалізації в освітньому процесі. Фрактальні множини базуються на концепціях, які вимагають знань математичного аналізу, топології та розуміння ітераційних алгоритмів. Ці теми переважно не входять до стандартного шкільного курсу математики, що ускладнює їхнє викладання. Ефективне засвоєння абстрактних понять можливе лише за умови використання сучасних технологій, зокрема комп'ютерних програм. Однак, це вимагає суттєвих змін у підходах до викладання та методичних матеріалах.

Навчальні плани часто розраховані на мінімально необхідну кількість годин для базового засвоєння матеріалу. Інтеграція нових тем, таких як фрактали, вимагає перегляду структури навчальних програм і виділення додаткового часу, що створює дилему: розширювати програму чи скорочувати інші розділи. Це протиріччя часто стає ключовим аргументом на користь невключення складних тем, попри їхню значущість.

Викладання фракталів вимагає високого рівня кваліфікації вчителів, які повинні володіти не лише знаннями з математики, але й навичками роботи з програмними засобами моделювання фрактальних множин. У шкільній практиці часто бракує педагогів, які мають відповідну підготовку, що підтверджує потребу в додаткових програмах підвищення кваліфікації вчителів.

**Метою дослідження** є теоретичне та емпіричне дослідження методичних підходів до впровадження фрактальних множин у шкільний курс математики.

Для досягнення мети передбачається виконання наступних **завдань**:

**Завдання дослідження:**

- дослідити історико-наукову генезу поняття «фрактал» і його математичні властивості;
- охарактеризувати типологію фрактальних структур та їхній пізнавальний потенціал у міждисциплінарному полі;
- обґрунтувати значення фрактальної геометрії для формування наукового світогляду та розвитку мислення школярів;
- проаналізувати дидактичні можливості та методичні підходи до впровадження фрактальної тематики в освітній процес;
- оцінити ефективність інтерактивних технологій і педагогічний вплив фрактальної тематики на мотивацію учнів

**Об'єктом дослідження** є процес навчання математики у закладах загальної середньої освіти.

**Предметом дослідження** є методичні підходи та дидактичні можливості впровадження фрактальних множин у шкільний курс математики.

**Методи дослідження.** У дослідженні застосовано методи порівняльного аналізу для вивчення досвіду різних країн щодо інтеграції фрактальної тематики в освіту, структурно-логічний метод для аналізу типології фрактальних структур, метод систематизації для побудови дидактичної моделі навчання, педагогічне спостереження для оцінки ефектів впровадження фракталів у навчальний процес. Також використано елементи експертного опитування для збору думок вчителів щодо доцільності включення цієї теми до шкільного курсу, а також аналіз

цифрових інструментів (геометричні конструктори, генератори фракталів), що дають змогу урізноманітнити форми навчальної взаємодії.

**Апробація результатів дослідження.** Отримані результати дослідження висвітлено в статті для «Магістерські студії» (Херсонський державний університет, 2025 рік).

**Публікації:**

1. Матвєєва О.А. Фрактальні множини у шкільному курсі математики / Матвєєва О.А. // Магістерські Студії Херсонського державного університету – 2025 (стаття друкується).

**Структура роботи.** Робота складається з трьох розділів, дванадцяти параграфів, висновків і списку використаних джерел.

## РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ФРАКТАЛЬНИХ МНОЖИН

### 1.1. Генеза поняття «фрактал»: історичні витoki та наукові інтерпретації

Формування уявлення про фрактали є одним із найвиразніших прикладів того, як еволюціонувала геометрична інтуїція в науці, перетворюючись із суто абстрактних спостережень на концептуально насичену математичну категорію. Ще задовго до того, як у лексиконі науковців з'явився термін «фрактал», уявлення про нескінченну самоподібність, дробову складність і топологічну неокласичність уже проростали в окремих побудовах математиків XIX – початку XX століття. Однією з перших таких конструкцій стала крива, запропонована Хельге фон Кохом 1904 року, яка, хоч і визначалася рекурсивно простим алгоритмом, демонструвала парадоксальну поведінку: обмежена фігура з нескінченною довжиною межі. Саме цей приклад, відомий як «сніжинка Коха», виявив аналітичну неспроможність класичної евклідової геометрії охопити форми з подібною ірраціональною поведінкою. Ще раніше Георг Кантор 1883 року сконструював множину, позбавлену континуальності, але нескінченну, без інтервалів, проте з чіткою внутрішньою симетрією. Його «драбина Кантора» стала одним із перших прикладів множин, що мали вимірність, відмінну від цілих чисел [11, с. 25].

Ці експерименти, хоч і трактувалися як патології, насправді слугували провісниками формалізації принципово нових уявлень про геометричну природу простору. У цьому ж річищі слід згадати про трикутник С'єрпінського, створений 1915 року - ще одну структуру, яка поєднувала елегантну симетрію та рекурсивну нескінченність. Всі ці побудови створювали теоретичний ґрунт, на якому в другій половині XX століття сформувалося уявлення про фрактал як об'єкт, що характеризується самоподібністю, незалежно від масштабу, а також

дробовою топологічною розмірністю, не представленою класичною лінійною, плоскою чи об'ємною формою. Ці властивості ставили під сумнів лінійність і гладкість реального простору, дозволяючи замість цього описувати структури природи - від гірських ландшафтів до бронхіального дерева - в термінах, які враховували їхню внутрішню хаотичність і ієрархічну складність.

Поняття фрактала набуло строгої математичної форми лише в другій половині XX століття, завдяки наполегливій праці Бенуа Мандельброта, який зміг не просто узагальнити розпорошені приклади передфрактальної геометрії, а й вибудувати цілісну парадигму мислення про простір, що відображає природні та соціальні феномени значно точніше, ніж евклідова геометрія. Його праця «The Fractal Geometry of Nature», опублікована 1982 року, фактично переозначила геометрію як дисципліну, здатну моделювати нерегулярні, розгалужені, самоподібні структури. Мандельброт не просто ввів термін «фрактал» (від лат. fractus - зламаний, нерівний), а й запропонував базову характеристику: фрактал - це об'єкт, чия фрактальна (Гаусдорфова) розмірність перевищує топологічну. Це означало, що простір об'єкта не може бути описаний традиційною розмірністю - наприклад, лінією (розмірність 1) чи площиною (розмірність 2), - оскільки він охоплює щось проміжне, між цими рівнями, вказуючи на складнішу топологічну поведінку [9, с. 22].

Поняття самоподібності, яке раніше розглядалося як цікава властивість окремих побудов, стало центральною характеристикою нової геометричної мови. Крім того, Мандельброт запропонував функціональні критерії визначення фракталів, серед яких: нескінченна деталізація на кожному масштабі, незалежність властивостей від абсолютного масштабу, рекурсивність у будові тощо. Саме завдяки цій парадигмі стало можливим не лише досліджувати нерівні структури, а й моделювати їх у прикладних науках - у фізиці турбулентності, фінансовій аналітиці, біологічній морфогенезі, геоморфології тощо. Мандельброт, опираючись

як на історичну спадщину Кантора, Коха, С'єрпінського, так і на числову теорію, гармонійно поєднав аналітичну математику з комп'ютерною візуалізацією, створивши новий підхід до опису динамічних систем, хаосу та порядку, прихованого у випадковості.

Однією з особливостей концепції фракталів у трактуванні Мандельброта стала її міждисциплінарна експансія. Тоді як класична геометрія залишалася у сфері чистої математики, фрактальна геометрія стрімко інтегрувалася в інші галузі, зокрема в комп'ютерні науки, де структура фрактала стала основою для процедурної генерації природних об'єктів: дерев, хмар, берегових ліній. У медицині вона використовується для опису розгалужень судинної системи, у геології - для аналізу тріщин у мінералах, у соціології - для дослідження просторових структур урбанізації. Таким чином, поняття фрактала виросло із суто математичної моделі до універсальної аналітичної форми, що дозволяє фіксувати закономірності в структурі складних і багаторушних систем. Фрактальна розмірність, введена через логарифмічне співвідношення між числом самоподібних частин та масштабом, стала інструментом не лише формального аналізу, а й емпіричного моделювання. У цьому сенсі важливо наголосити, що сама поява терміна «фрактал» не обмежувалася лише номінативним актом - йшлося про становлення нової евристичної рамки, в якій математична краса поєднувалася з емпіричною точністю. Фрактальні структури виявилися здатними описати ті процеси, які раніше здавалися суто стохастичними: зростання кристалів, утворення систем течій, розподіл популяцій. Описати це стало можливо через побудову рекурсивних функцій, що містили елементи детермінованого хаосу, при цьому даючи на виході структури, які зберігали самоподібність навіть при значному збільшенні масштабу. У таких побудовах рівень деталізації ставав не обмеженням, а фундаментом моделі, що дозволяло фрактальній геометрії пояснювати природу хаосу як форми впорядкованої складності.

Своєрідним кульмінаційним моментом у візуалізації фрактальних ідей стало відкриття множини Мандельброта - глибоко геометричної структури, побудованої на основі простого рекурсивного рівняння. Попри елементарність формули, множина, яка виникає внаслідок її чисельного моделювання, має виняткову складність: кожна її межа - нескінченно детальна, самоподібна, з фрагментами, які візуально нагадують інші частини самої множини, але ніколи не повторюються точно. Цей ефект не тільки вражав естетично, а й демонстрував потужність фрактальної ідеї як такої, що здатна об'єднати хаос і порядок, показуючи, як із простої рекурсії виникає нескінченна структурна насиченість. Множина Мандельброта, візуалізована завдяки комп'ютерній графіці, стала символом фрактальної революції в науці - поєднанням математики, мистецтва і алгоритмічного мислення. Зображення цієї множини, із її химерними, нескінченно розгалуженими обрисами, стало об'єктом вивчення не лише математиків, а й фізиків, філософів, митців, оскільки у ній поєднується жорстка формальна логіка та невичерпна візуальна варіативність. Саме ця межова складність між порядком і хаосом стала тим простором, де фрактал перестав бути суто математичним феноменом і перетворився на універсальний образ складності як такої [6, с. 8].

## **1.2. Математичні властивості та класифікація фрактальних множин**

Математична структура фрактала не піддається лінійному чи евклідовому опису - це категорія, що виходить за межі класичних топологічних уявлень. Її серцевиною є властивість самоподібності, яка проявляється в повторенні загальної структури в деталях, незалежно від масштабу розгляду. Це не просто естетичне дублювання, а глибинна структурна інваріантність, що визначає природу фрактального об'єкта. Самоподібність може бути як точною, так і статистичною: у першому випадку мова йде про математичну ідеальність - кожна частина є копією

цілого з певним коефіцієнтом масштабування, у другому - про спостережувану регулярність у межах випадкових флуктуацій, де самоподібність зберігається в середньому. Ця властивість пов'язана з нескінченною деталізацією - кожен рівень розгляду відкриває нову, ще складнішу внутрішню структуру [4, с. 10].

Неможливість описати фрактал через скінченне число параметрів є однією з фундаментальних його рис, і саме це робить фрактали ефективними моделями для опису складних явищ, у яких кожен рівень є продовженням попереднього, а межа між мікро- й макроструктурою розмивається. У таких об'єктах класичні геометричні поняття втрачають своє звичне значення: площа, довжина або об'єм можуть мати неінтуїтивні значення або взагалі не існувати як скінченні величини. Так, крива Коха має нескінченну довжину, незважаючи на скінченну площу, яку вона обмежує. Топологічна складність фракталів полягає в тому, що вони заповнюють простір не повністю, але у спосіб, який не дозволяє описати їх як ні площину, ні лінію. Це виявляється через дробову розмірність - кількісну характеристику, яка описує, скільки простору заповнює фрактал, при цьому розмірність не є цілим числом, а дробовою величиною, що демонструє проміжний статус структури між класичними топологічними категоріями.

Формальне визначення дробової розмірності пов'язане з поняттям розмірності Хаусдорфа - фундаментальної міри, що ґрунтується на покритті множини  $\varepsilon$ -розмірними множинами і визначенні степеня, при якому загальна міра покриття перестає змінюватися. Цей підхід, хоча і теоретично бездоганний, є технічно складним для застосування, особливо у випадках емпіричних чи цифрових структур. Саме тому для практичного обчислення фрактальної розмірності найчастіше використовується так звана коробкова розмірність (box-counting dimension), що базується на підрахунку кількості елементів покриття заданого масштабу, необхідного для повного охоплення структури.

Існують також альтернативні підходи - дімензія Бесиковіча–Успенського, інформаційна розмірність, розмірність за Реньї, кожна з яких акцентує на різних аспектах фрактальності: чи то на частоті повторень, чи то на ентропії розподілу, чи то на мірі покриття з мінімальною ентропією. Вибір методу залежить від природи об'єкта: для математично сконструйованих фракталів точніше застосовувати Хаусдорфову розмірність, а для експериментальних - коробкову або інформаційну. Наприклад, множина Кантора має Хаусдорфову розмірність  $\log(2)/\log(3) \approx 0.6309$ , яка точно описує її фрактальну сутність, незважаючи на те, що топологічно вона є нульвимірною. Так само для кривої Дракона або зміщеної кривої Гілберта, які виглядають як площинні фігури, дробова розмірність свідчить про їхню проміжну природу між лінією та площею [8, с. 41].

Питання класифікації фрактальних множин залишається відкритим, адже існує велика кількість критеріїв, за якими можна розділяти ці структури. Один із базових поділів - на детерміновані та стохастичні фрактали. Детерміновані, або строгі, створюються через чіткі алгоритми - системи ітеративних функцій (IFS), рекурсивні процедури або самоповторювані геометричні трансформації. До них належать класичні фігури, такі як трикутник С'єрпінського, крива Коха, криві Жюліа, множина Мандельброта. Їх можна аналітично описати і побудувати за допомогою нескінченного повторення визначених правил. Стохастичні фрактали, навпаки, описують випадкові структури з фрактальними властивостями: вони включають елементи ймовірнісного вибору, але при цьому зберігають масштабну інваріантність. Прикладами таких є фрактальна геометрія хмар, берегових ліній, розгалужень судин або річкових дельт. Існує також поділ за типом самоподібності: точна, статистична, квазісамоподібна. Точна спостерігається у фігурах з ідеальною структурною інваріантністю, статистична - в об'єктах, де повторення спостерігається в середньому, без жорсткої симетрії, а

квазісамоподібність стосується випадків, де структура лише наближається до фрактальної, не будучи строгою. Ще один тип класифікації пов'язаний із топологією - дискретні фрактали (множини точок), континуальні (неперервні криві), заповнюючі простір (space-filling curves), кожен з яких має свої аналітичні характеристики. У прикладному контексті розрізняють фізичні фрактали - ті, що існують у природі, та математичні - ті, що побудовані формально. Цей поділ особливо важливий для науковців, які працюють із реальними даними, адже ідеальні фрактали рідко зустрічаються в природі, тоді як наближено-фрактальні структури є поширеними, і для них необхідні гнучкіші методи аналізу [13, с. 13].

Фрактальні множини, окрім суто геометричних властивостей, мають також спектральні й ентропійні характеристики, які дають змогу охопити складність їхньої структури в ширшому спектрі. Зокрема, у спектральному аналізі важливим є визначення частотних компонентів, характерних для фрактального сигналу, які вказують на мультифрактальну природу - коли структура має не одну, а цілий спектр локальних розмірностей. Мультифрактальний аналіз дозволяє побудувати функцію спектру розмірностей  $f(\alpha)$ , яка описує частоту появи локальних фрагментів із певною розмірністю  $\alpha$ . Це дає змогу оцінити ступінь неоднорідності структури, що особливо цінно для сигналів біологічного або фінансового походження. У системах, де динаміка залежить від багатьох взаємодіючих чинників, класичний підхід через одну фрактальну розмірність стає недостатнім, і лише мультифрактальна характеристика дозволяє відтворити повну картину складності. Це актуально в аналізі флуктуацій серцевого ритму, рентгенівських знімків кісткової тканини, метеорологічних рядів або нейрофізіологічних сигналів. У таких випадках фрактал є не просто моделлю структури, а інструментом декодування динаміки, що згортається в геометричну форму, яку можна досліджувати математичними методами. Таким чином,

фрактальна множина - це не лише геометричний феномен, а й носій інформації, що втілює в собі закономірності, масштабну організацію, ентропійний спектр та функціональну топологію складних систем, які тільки частково розкриваються через класичні математичні інструменти.

Фрактальні множини становлять окремий клас геометричних структур, які вирізняються самоподібністю, нерівномірною щільністю розподілу в просторі та відсутністю цілочисельної топологічної розмірності. Саме ці ознаки стали підґрунтям для математичного опису таких об'єктів, які неможливо вписати в класичну евклідову геометрію. Конструкції, які мають фрактальну природу, зазвичай будуються ітеративно. Кожен крок генерації породжує складнішу структуру шляхом заміни початкових геометричних елементів більш деталізованими, що повторюють загальний мотив.

Однією з найбільш інтуїтивно сприйнятних моделей такої побудови є так звана «Сніжинка Коха». Ця крива, яка належить до класичних фракталів, формально конструюється із рівностороннього трикутника, на сторонах якого ітеративно створюються нові виступи у вигляді менших трикутників. На кожному наступному кроці до кожної сторони додається ще по одному фрагменту, що повторює фрагмент попереднього рівня. Формально процес описується за допомогою афінних перетворень, які зменшують розмір фрагментів у певному масштабі й розташовують їх за суворо визначеним алгоритмом. Після нескінченного числа ітерацій отримується лінія, яка має нескінченну довжину, але обмежену площу, якщо розглядати фігуру як замкнену криву. Цей парадокс між нескінченною складністю та скінченною обмеженістю простору, який вона займає, є ознакою фрактальної структури. Саме завдяки цій властивості «Сніжинка Коха» стала класичним прикладом фракталу у викладанні теорії множин, топології та диференціальної геометрії. Вона ілюструє, як з елементарних правил може виникнути складна морфологія, що виявляється стабільною щодо масштабування. Візуально це створює

ефект самоподібності: будь-яка частина контуру, незалежно від рівня наближення, повторює загальну структуру фігури. Геометрично така властивість відповідає фундаментальній ідеї масштабної інваріантності, яку пізніше було узагальнено у фрактальних вимірах та застосовано до аналізу складних систем у фізиці, біології та інформатиці.

Окрему увагу привертає сам алгоритм побудови цього об'єкта. Починаючи з рівностороннього трикутника, кожна сторона поділяється на три рівні частини. Центральну частину замінюють на два відрізки, які утворюють рівносторонній трикутник із відсутньою основою. Таким чином, кожна пряма лінія трансформується в ламану з чотирьох сегментів, довжина кожного з яких становить третину від початкової. Цей процес повторюється для кожної нової сторони, створеної на попередньому етапі.

Після першої ітерації виникає зіркоподібна фігура з 12 відрізками замість 3, а вже після другого рівня деталізації - 48 відрізків. Кількість елементів зростає геометрично за формулою  $3 \cdot 4^n$ , де  $n$  - рівень ітерації. Довжина кривої при цьому також зростає експоненційно, наближаючись до нескінченності. При цьому сама фігура не виходить за межі початкової обмеженої площі, що математично фіксується через границю відповідної послідовності. Кожне нове доповнення збільшує периметр, але не змінює площу в лімітному переході. У цьому виявляється глибока особливість фрактальних множин: зростання складності не тягне за собою розширення простору. Така властивість має надзвичайне значення у побудові моделей природних форм - від контурів берегових ліній до структури сніжинок чи кристалів. Багато фізичних систем, які виявляють нерівномірну щільність або неоднорідну структуру, можуть бути апроксимовані фрактальними моделями. Сніжинка Коха, попри свою простоту, дає точне уявлення про механізм ітераційної побудови, демонструючи, як математична абстракція здатна адекватно моделювати

фізичні й біологічні процеси, у яких присутня повторювана структура на різних масштабах.

Іншим еталонним прикладом фрактальної множини є трикутник Серпінського, відомий також як решітка або килим Серпінського в різних варіаціях. Ця структура, як і попередня, будується за принципом рекурсивного видалення, а не додавання. Початковою фігурою тут виступає рівносторонній трикутник, усередині якого на кожному етапі ітерації видаляється центральний трикутник, який має вершини в середині сторін початкового. В результаті кожна ітерація створює три менші трикутники, що повторюють загальну форму, а сам процес нескінченного видалення призводить до множини, в якій площа прямує до нуля, проте кількість елементів зростає експоненційно. Кожна наступна фігура зменшується втричі по кожній стороні, створюючи дев'ять підобластей, з яких видаляється центральна. Цей принцип можна поширити й на інші багатокутники, зберігаючи фрактальну природу структури. Особливістю трикутника Серпінського є те, що кожна його частина, незалежно від масштабу, містить три копії самого себе [18, с. 16].

Утворення таких фігур, як сніжинка Коха чи трикутник Серпінського, спирається на ключовий принцип - повторення простого правила, яке генерує складну картину. Математично це реалізується через системи ітеративних функцій, які на кожному кроці застосовують один і той самий набір трансформацій до вхідної множини. У таких системах визначаються афінні оператори, що задають масштабування, обертання й переміщення фрагментів у просторі. Якщо ці оператори задовольняють умову зменшення, то згідно з теоремою Хатчинсона існує єдина фіксована множина, яка є атрактором цієї системи. Вона й утворює фрактал. При цьому весь процес побудови може бути реалізований алгоритмічно, що дозволяє легко візуалізувати фрактальні об'єкти навіть у дискретних середовищах, таких як комп'ютерні зображення. Висока формалізованість таких процедур робить їх придатними для чисельного

аналізу, моделювання складних середовищ, обробки зображень. Багато сучасних методів генерації текстур або природних ландшафтів у комп'ютерній графіці спираються на ідеї фрактальної генерації, де кожна точка зображення формується згідно з локальними параметрами, отриманими внаслідок рекурсивних функцій.

### **1.3. Роль фрактальної геометрії в сучасній науці та її міждисциплінарний потенціал**

В сучасній науці фрактальна геометрія перестала бути суто математичним конструктом і трансформувалася в універсальну дослідницьку парадигму, що застосовується в аналізі складних, самоорганізованих, нерівноважних систем. Її сила полягає не лише в абстрактній моделі, а в здатності відображати природну архітекτονіку - з її повторюваними, масштабно інваріантними і водночас варіативними структурами. Фрактали забезпечують інструментальний підхід до виявлення прихованих закономірностей у явищах, які здавалися або надто хаотичними, або надто складними для класичного аналізу. У фізиці вони використовуються для опису турбулентних течій, розподілу частинок у плазмі, флуктуацій у квантових системах, геометрії пористих середовищ і структурних характеристик фазових переходів. Наприклад, у гідродинаміці виявлено, що турбулентний потік має не просто випадкову структуру, а ієрархію вириїв, які організовані фрактально. Енергетичний спектр цих потоків не є рівномірним, а підпорядковується законам масштабної інваріантності - саме це дозволяє застосовувати фрактальні моделі в чисельних розрахунках, які враховують багато масштабів одночасно. У плазмодинаміці також спостерігаються фрактальні структури - так звані флуктуаційні каскади, що свідчать про нестабільність і саморегулювання систем на мікроскопічному рівні. Крім того, у фізиці твердого тіла фрактали виникають у дослідженнях перколяції та кластерних структур, зокрема в провідних полімерних

матеріалах, де провідність зростає не лінійно, а за законами, характерними для фрактального заповнення простору. Ці результати мають практичне значення - від створення нових матеріалів до оптимізації наноструктур у пристроях новітнього покоління [5, с. 15].

У біології фрактальна геометрія виявилася здатною відтворювати морфогенез і структуру живих організмів із точністю, недосяжною для класичних геометричних моделей. Структура бронхіального дерева, капілярної сітки, нервових волокон, а також мікроархітектоніка кори головного мозку демонструють властивості самоподібності і рекурсивного розгалуження. Ці системи не просто адаптуються до умов існування, а формуються відповідно до закономірностей енергоефективності, які реалізуються через фрактальні закономірності - мінімізацію поверхні, оптимізацію потоку речовин і імпульсів, зменшення затримок сигналу. У цьому розумінні фрактали описують не лише форму, а функцію: збереження однакової ефективності незалежно від масштабу, здатність локальних змін впливати на глобальні характеристики системи. Наприклад, дослідження кардіоелектричної активності засвідчили, що нормальний серцевий ритм має фрактальний характер, тоді як порушення гомеостазу спричиняє його деградацію до регулярної або хаотичної форми, втрачаючи самоподібність. Це дало змогу створити фрактальні індекси стану серцево-судинної системи, що мають вищу прогностичну здатність, ніж класичні біомаркери. Так само в нейрофізіології фрактальні патерни виявлено в електроенцефалографічній активності - різні ділянки мозку демонструють складну координацію на основі мультифрактальних коливань. Навіть на рівні ДНК-структури виявлено закономірності повторюваності, які не є регулярними, але проявляють фрактальну автокореляцію, що дозволяє описати генетичну інформацію в термінах складності, а не лише послідовності.

Географія й геоморфологія також скористалися фрактальною методологією для аналізу ландшафтів, рельєфу, руслових систем та берегових ліній. Класичний приклад - вимірювання довжини берегової лінії Британії, де чим менший масштаб вимірювання, тим більша загальна довжина через нескінченну деталізацію контуру. Це так званий парадокс Річардсона, що став одним із мотивів для розробки фрактального підходу Мандельброта. Географічні інформаційні системи (GIS) наразі активно впроваджують фрактальний аналіз у картографічну інтерпретацію простору - зокрема, для моделювання ерозійних процесів, динаміки зсувів, оцінки структур лісових масивів, прогнозування поширення пожеж. Системи руслових потоків описуються через розгалужені фрактальні графи, які враховують не лише топологію, а й гідрологічну динаміку - з урахуванням накопичення, фільтрації, часу затримки [7, с. 46].

У прикладних галузях фрактальна геометрія поступово витісняє класичні евклідові підходи через свою здатність моделювати гнучкі, адаптивні, динамічні структури. У медицині, зокрема в діагностиці, фрактальні індекси використовуються для аналізу зображень - МРТ, КТ, УЗД - де фрактальна розмірність певних структур (наприклад, мозкових звивин, легневих альвеол, кісткової тканини) може свідчити про патологічні зміни, ще не видимі при візуальному розгляді. Такі підходи дали змогу створити комп'ютеризовані фрактальні скринінги онкопатологій, хвороб Альцгеймера, остеопорозу. Крім того, у біомедичній інженерії фрактальні структури використовуються при проєктуванні імплантів, зокрема судинних протезів або нейроелектродів, які мають вищу біосумісність завдяки геометрії, що повторює природні патерни організму. В економіці фрактальний підхід застосовується до моделювання фінансових ринків, де традиційні лінійні моделі виявляються надто грубими. Фрактальна динаміка індексів, ціноутворення, розподілу ризиків описується через моделі з пам'яттю,

мультифрактальні каскади, гетерогенну волатильність. Теорія фрактального ринку Мандельброта пропонує бачити ринок не як систему раціональних очікувань, а як складну самоподібну структуру поведінки, де періоди турбулентності й стабільності організовані фрактально. Це стало підґрунтям для створення алгоритмічних стратегій торгівлі, що враховують багатомасштабну структуру цін.

Таким чином, фрактальна геометрія сьогодні є не просто розділом математики, а повноцінною міждисциплінарною методологією, що пропонує нові принципи мислення про структуру, складність і організацію. Вона долає межі між формою й функцією, між статистикою і геометрією, між абстракцією і матеріальністю. Саме тому її потенціал продовжує зростати - як у науках про природу, так і в гуманітарних, технічних, інженерних дисциплінах, де все більше уваги приділяється моделям, здатним відтворювати складне життя в його природному, нелінійному, багаторівневому вигляді. Фрактал у такому прочитанні - це не просто візерунок чи крива, а логіка буття, яка розгортається не в часі, а в структурі простору, що змінюється, але не втрачає своєї внутрішньої впорядкованості.

#### **1.4. Освітнє значення фрактальних структур у формуванні наукового світогляду учнів**

Фрактальні структури мають виняткову здатність бути інтелектуальними посередниками між чуттєвою наочністю та глибокою абстракцією, що робить їх особливо цінними в освітньому середовищі, де ключовою метою є формування наукового світогляду та розвиток мислення, здатного оперувати складними поняттями без втрати інтуїтивного зв'язку з реальністю. Візуальна природа фракталів дозволяє розгорнути перед учнями складні математичні ідеї в естетично сприйнятній формі: рекурсія, нескінченність, дробова розмірність, ітерація - усі ці концепти, які зазвичай важко сприймаються в

традиційному навчанні, набувають конкретної, яскравої форми, яку можна спостерігати, модифікувати, досліджувати. Самоподібність, яка лежить в основі фрактальної структури, є не лише математичним інваріантом, а й засобом розвитку просторової інтуїції: учні вчаться бачити загальне в частковому, моделювати масштабні переходи, усвідомлювати зв'язки між елементами на різних рівнях організації. Це формує нову здатність до мислення в категоріях ієрархій, що надзвичайно цінно для розуміння складних систем у фізиці, біології, географії, соціології. Крім того, сама ідея нескінченної деталізації, яку демонструє кожен фрактал, змінює уявлення учнів про межі знання, відкриваючи перспективу пізнання не як досягнення остаточної істини, а як нескінченного заглиблення, кожен рівень якого є водночас новим відкриттям і повторенням структурного принципу. Такий підхід формує антидогматичну установку - здатність мислити гнучко, бачити у складності порядок, розуміти, що істина може бути самоподібною, а не плоскою, аналітичною формулою [3, с. 9].

Окрім впливу на когнітивну сферу, фрактальні візуалізації суттєво змінюють саму дидактичну парадигму навчання математики. Якщо класичний виклад геометрії побудований на евклідових об'єктах із чіткою топологічною розмірністю - точка, пряма, площина, тіло - то введення фракталів дозволяє створити інший образ простору, в якому структура не обмежується гладкими поверхнями, а розгортається у нескінченну складність. Учень, спостерігаючи за побудовою кривої Коха чи трикутника С'єрпінського, бачить, як із простої операції повторення виникає нова форма з властивостями, не передбаченими у вихідному елементі. Це підводить до розуміння того, що складність не завжди є наслідком складних правил - іноді вона виникає з простоти, яка багаторазово застосовується. Така логіка надзвичайно важлива у формуванні причинно-наслідкового мислення в галузях, де складна поведінка впливає з простих базових механізмів - як-от в екології,

економіці, комп'ютерних науках. Візуальне моделювання фракталів за допомогою програмних середовищ (Python, GeoGebra, FractInt, Mandelbrot Explorer) активізує технічне мислення, розвиває навички алгоритмізації, створює природний місток до програмування. Тут учні вже не просто спостерігають, а конструюють структуру - шляхом зміни параметрів, умов, кількості ітерацій, що дає глибше розуміння рекурсії, циклів, умовних операторів. У такий спосіб фрактали стають практичним засобом інтеграції математики, інформатики та технології в одному навчальному середовищі.

Інтеграція фрактальної тематики в навчальні курси відкриває численні можливості для міжпредметної координації. У шкільному курсі математики фрактали можуть бути включені до тем про координатну площину, масштаб, симетрію, розмірність, побудову графіків функцій. Навіть у межах традиційного навчального плану існує простір для ознайомлення з простими фрактальними конструкціями, зокрема через завдання на побудову кривої Дракона, сніжинки Коха або дерева Піфагора. В інформатиці тема фракталів органічно лягає у вивчення рекурсії, графіки, структур даних. Написання фрактальних алгоритмів дає змогу учням зрозуміти, як можна описати нескінченну структуру скінченним кодом, і як зміна одного параметра в програмі змінює всю форму структури. У природознавстві - в курсах географії, біології, екології - фрактальна тематика може бути подана через аналіз природних форм: листя, дерев, річкових систем, берегів. Учні можуть збирати емпіричні дані - фотографії, карти, зображення - і аналізувати їхню фрактальну структуру за допомогою доступного програмного забезпечення. Це сприяє не лише розвитку дослідницьких навичок, а й формує уявлення про закономірності природи як про структури, що мають внутрішню геометричну логіку. Фрактали дозволяють перейти від описового до аналітичного мислення навіть у предметах, де формальна мова не домінує. Крім того, фрактальна методика сприяє розвитку

естетичного сприйняття - її візуальна насиченість резонує з художньою уявою, тому вона може бути включена в інтегровані курси на перетині математики та мистецтва. Створення фракталів у графічних редакторах або шляхом параметричного моделювання сприяє розвитку композиційного мислення, що є ключовим для дизайнерських і архітектурних спеціальностей [10, с. 12].

## **РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО ВИКЛАДАННЯ ФРАКТАЛЬНИХ МНОЖИН У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ**

### **2.1. Дидактичні принципи та методичні умови введення фрактальної геометрії у шкільну програму**

Ідея інтеграції елементів фрактальної геометрії до шкільного курсу математики пов'язана насамперед із загальною тенденцією до оновлення змісту математичної освіти у напрямку її зближення з сучасною наукою, зокрема з геометричними уявленнями, які адекватніше відображають природні, техногенні та інформаційні структури. Традиційна евклідова геометрія, що домінувала в навчальному курсі протягом століть, втратила здатність охопити ті форми й структури, з якими сучасна людина стикається у повсякденному житті. Візуальне середовище, графіка, комп'ютерне моделювання, цифрова обробка зображень, природні форми - усе це містить морфології, які не піддаються опису за допомогою прямої лінії, круга чи правильної призми. Фрактальні множини, як геометричні моделі з властивістю самоподібності, апроксимують саме такі форми [28, с. 14].

Включення цієї тематики у шкільний курс не є просто доповненням до вже наявного змісту, а створює можливість якісно інакшого погляду на поняття складності, безкінечності, межі, структури. Важливо те, що фрактали, попри свою математичну глибину, мають виразну візуальну привабливість і можуть слугувати засобом розвитку інтуїції. У цьому сенсі вони стають природною опорою для формування цілісного математичного мислення, що поєднує аналітичний і візуальний компоненти. Методичне обґрунтування такої інтеграції має опиратись на аналіз внутрішніх зв'язків фрактальної геометрії з діючим змістом програми. Поняття масштабного перетворення, симетрії, нескінченних процесів, ітерацій, функцій, границь, наближень - усе це вже присутнє в

навчанні, і фрактальні об'єкти можуть відігравати роль наочних моделей, які пояснюють ці абстрактні ідеї. Таким чином, фрактальна тематика не суперечить, а органічно продовжує й розширює вже знайомі учням поняття, переводячи їх на інший рівень узагальнення, що відповідає сучасним науковим уявленням і потребам цифрової епохи.

Ефективність впровадження фрактальної геометрії в шкільний курс значною мірою залежить від дотримання системи дидактичних принципів, які забезпечують відповідність між складністю матеріалу й рівнем розвитку учнів, а також між абстрактністю понять і конкретністю їх подання. Принцип наочності набуває тут особливого змісту, оскільки фрактальні множини мають чітко виражену візуальну структуру, яка не тільки сприяє засвоєнню, а й стимулює інтерес. Базова форма сніжинки Коха, трикутника Серпінського, дерева Піфагора або квадрата Кантора може бути відтворена вручну, за допомогою паперу, геометричних інструментів або навіть графічних редакторів, що дозволяє залучити візуально-просторову інтелектуальну складову. Паралельно реалізується принцип доступності: об'єкти будуються за простими правилами, які не потребують високого рівня формалізації, проте породжують результат, що викликає когнітивне здивування - і це створює педагогічний ефект. Учень бачить, як зі знайомих дій, наприклад поділу відрізка чи трикутника, постає складна форма, яку не можна описати звичайними словами [23, с. 11].

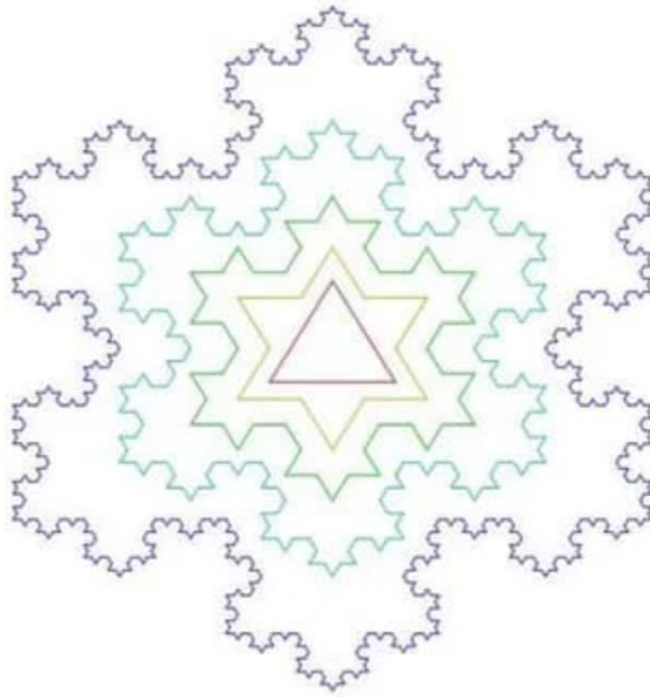


Рис. 2.1 Сніжинка Коха

Це водночас розвиває уяву, аналітичне мислення, вміння формулювати правила та стратегії побудови. Застосування принципу поетапності вимагає поступового ускладнення: спочатку - графічне конструювання, потім - вербальний опис, далі - аналіз властивостей, співвіднесення з відомими поняттями. У такий спосіб складна тема перетворюється на доступну через послідовне занурення, що відповідає психолого-педагогічній природі навчання. Надзвичайно важливо уникати передчасного формалізму, натомість слід розпочинати з інтуїтивних, зорових моделей, які створюють основу для глибшого розуміння. Через це фрактальна геометрія є унікальною в тому сенсі, що вона не лише допускає, а й потребує такої побудови: форма первинна, аналітика - вторинна.

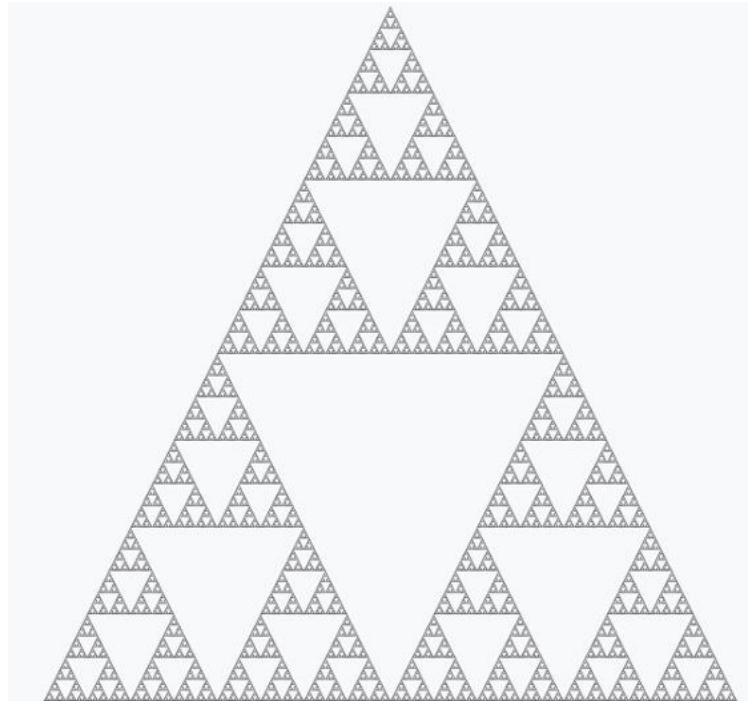


Рис. 2.2 Трикутник Серпінського

Ще одним вирішальним елементом методичного впровадження фракталів є врахування психологічних механізмів сприйняття складності. Учень середньої та старшої школи вже здатен оперувати абстрактними поняттями, але часто не має уявлення про їхній зв'язок з реальністю. Фрактальні структури виступають тут як своєрідні мости: вони поєднують у собі формальні правила й живі, природні форми. Важливо, щоб учень не лише побачив фрактал як красиву картинку, а зрозумів, як він виникає з послідовності дій. Саме тому доцільно вводити елементи алгоритмізації - учні самостійно складають правила побудови, обчислюють кількість елементів на кожному етапі, аналізують закономірності. Така діяльність вимагає аналітичного мислення, логіки, комбінаторних навичок. Водночас важливо не зводити вивчення лише до сухого обчислення. Через створення фракталів учень може виявити несподіване: довжина зростає безмежно, площа зникає, а кількість фрагментів виходить за межі уявлення. У цьому виявляється педагогічний парадокс, який може бути використаний як евристичний засіб. Учні

мають спробувати пояснити це, зіставити з відомими законами, зрозуміти межі застосування класичних понять.

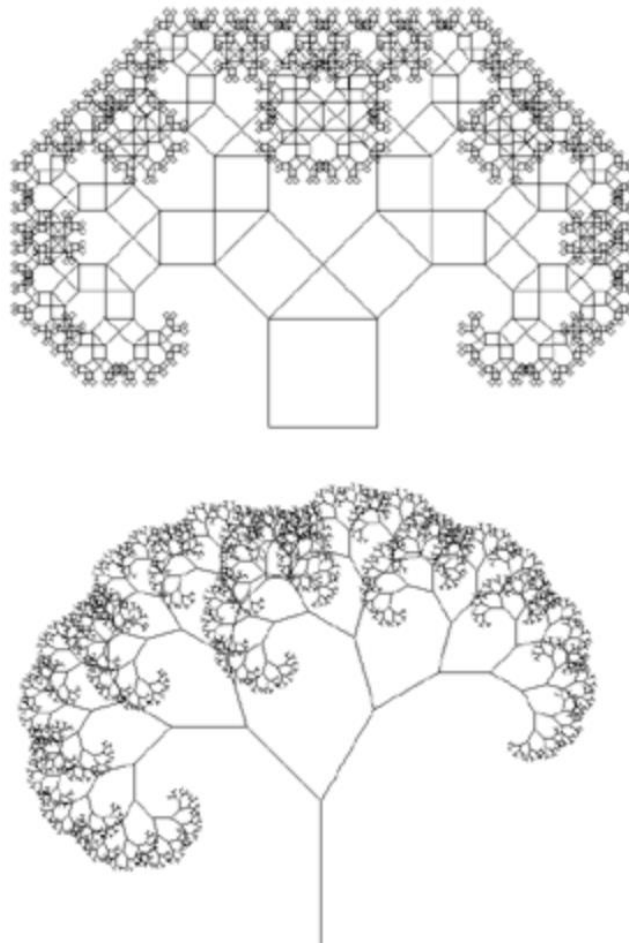


Рис. 2.3 Дерево Піфагора

Методично це потребує створення проблемних ситуацій, де фрактал є не об'єктом запам'ятовування, а джерелом пізнавального виклику. Через таке подання виникає мотивація до дослідження, до пошуку нових способів мислення. У результаті навчання виходить за межі простого засвоєння фактів - воно набуває дослідницького характеру. Фрактальна тема дає змогу зруйнувати рутинність шкільного курсу математики, не втрачаючи при цьому змістовності й логічної послідовності [29, с. 132].

## **2.2. Фрактальні моделі як засіб розвитку просторової уяви та логіко-математичного мислення**

Фрактальні моделі в навчальному процесі не лише ілюструють сучасні геометричні концепції, а й утворюють середовище для розвитку фундаментальних когнітивних здібностей учнів. Саме завдяки властивості геометричної самоподібності фрактальні структури здатні актуалізувати процеси візуального аналізу, просторової реконструкції, абстрактного перетворення форм. У педагогічному сенсі фрактал постає не як суто математичний об'єкт, а як когнітивний стимул, що провокує спостерігача на внутрішню реконструкцію структури, уявне масштабування, порівняння фрагментів із цілим. Через таку ментальну активність активізуються не лише візуально-просторові механізми, а й аналітико-синтетичні функції мислення, що мають пряме відношення до формування математичної компетентності. Здатність побачити у фрагменті цілісну структуру - це не лише акт зорового впізнавання, а й складний процес інтелектуальної реконструкції, що вимагає оперування з гіпотетичними моделями, послідовностями перетворень, відношеннями між рівнями структури. Учень, який працює з фракталом, вимушений одночасно утримувати в полі уваги кілька масштабних шарів, і це формує здатність до багаторівневого аналізу. Такий досвід є унікальним у порівнянні з традиційною геометрією, де переважають однорівневі фігури з обмеженим числом взаємозв'язків. Завдяки ієрархічній природі фракталів формується розуміння структурності як принципу побудови реальності, а не лише окремих геометричних фігур. Це закладає основу для системного мислення, яке є ключовим у науковій діяльності, інженерних задачах, моделюванні природних і технічних процесів. Фрактальна самоподібність дає змогу ввести учня у нову епістемологічну парадигму, де істина не міститься на поверхні, а витягується через розгортання внутрішньої логіки структури, повторення, відображення, масштабування [25, с. 19].

Однією з провідних особливостей фрактальних моделей є їхня здатність провокувати формування внутрішнього механізму зорової

інтерпретації, який не ґрунтується на безпосередньому спостереженні, а розвивається через уявне моделювання. Візуальна складність, характерна для фракталів, не спрощується при наближенні, що суперечить типовим очікуванням учня щодо структури. Така когнітивна невідповідність провокує пошук нового способу сприйняття: потрібно не просто «побачити», а зрозуміти принцип, за яким побудовано фігуру. У цьому процесі розвивається те, що можна окреслити як динамічне зорове мислення - здатність оперувати уявними трансформаціями, передбачати наступні етапи побудови, уявляти результат ітерації. У поєднанні з геометричним аналізом це формує вміння працювати з об'єктами, які не піддаються фіксованому опису. Через це фрактальні фігури виявляються педагогічно значущими не лише як ілюстрації, а як інструменти розвитку операційного апарату просторового уявлення.

Особливо ефективним є метод побудови фракталів за етапами, коли кожна ітерація конструюється вручну або у віртуальному середовищі. Така діяльність ускладнює типову модель «завчання» й переводить учня в активний режим мислення. Крім того, ітераційність як структурна характеристика фракталів вводить учня у логіку рекурсії - поняття, яке має глибоке значення не лише в математиці, а й у програмуванні, алгоритмах, фізичних теоріях. Учень поступово привчається до циклічної логіки: кожен крок не є унікальним, але продовжує попередній за визначеним принципом. Така логіка формується не через вербальне пояснення, а через пряму діяльність, що робить її внутрішньо засвоєною. Це сприяє формуванню не просто знань, а стійких інтелектуальних структур, які можна надалі транслювати на інші предметні галузі. Саме тут фрактали реалізують свою функцію як мультидисциплінарний інструмент для формування гнучкого, адаптивного мислення [20, с. 39].

Фрактальна самоподібність легко переводиться у формальний апарат і дає учневі відчутні обчислювані орієнтири. Для прикладу, кривина Коха з початковим рівностороннім трикутником зі стороною  $s$

має на  $n$ -й ітерації довжину периметра  $P_n = 3s(\frac{4}{3})^n$ , а площа сніжинки сходиться до границі  $A_\infty = \frac{8}{5}A_0$ , де  $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ . Проміжна формула площі дає крокову динаміку:  $A_n = A_0(\frac{8}{5} - \frac{3}{5}(\frac{4}{9})^n)$ . Учень бачить нетривіальну комбінацію: довжина прямує до нескінченності, а площа стабілізується.

Однією з найсильніших сторін фрактальних моделей є можливість задати будову строгою граматикою або системою відображень, що переводить зорову складність у керовану алгоритмічну схему. Для прикладу, L-система для кривини Коха: аксіома  $F$ , правило  $F \rightarrow F + F - -F + F$ , кут  $60^\circ$ . Це одразу дає рекурсію для числа відрізків  $a_0 = 3$ ,  $a_{n+1} = 4a_n$ , довжину сегмента  $\ell_n = s \cdot 3^{-(n+1)}$  і сумарну довжину  $P_n = a_n \ell_n$ . Інший формат – ітераційна система відображень (IFS). Для трикутника Серпінського беруться три стискання на площині:  $w_1(x) = \frac{1}{2}x + (\frac{0}{0})$ ,  $w_2(x) = \frac{1}{2}x + (\frac{1/2}{0})$ ,  $w_3(x) = \frac{1}{2}x + (\frac{1/4}{\sqrt{3}/4})$ . Інваріантна множина  $S$  задовольняє  $S = w_1(S) \cup w_2(S) \cup w_3(S)$ , що читається як рівняння на множину. Розмірність тут  $d = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,585$ . Площа на  $n$ -му кроці дорівнює  $A_n = A_0(1 - \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{4})^k \cdot \frac{1}{4}) = A_0(1 - \frac{1-(1/4)^n}{3})$ , і прямує до нуля, тоді як довжини меж зростають. Так, для килима Серпінського при  $\varepsilon = 3^{-n}$  маємо  $N(\varepsilon) = 8^n$ , отже  $D = \frac{\log 8}{\log 3}$ . Учень бачить, як формальні параметри системи зумовлюють морфологію фігури, а алгоритм будови переходить у числові інваріанти.

У навчальному процесі фрактальні множини функціонують як прозорі об'єкти логічного аналізу, де структура невіддільна від процедури породження. Конструкція за моделлю «правило  $\rightarrow$  дія  $\rightarrow$  геометрія» дисциплінує міркування про сталі параметри та змінні. Для прикладу, у графіці Леві відношення подібності  $\{r_i\}$  не рівні, тому розмірність розв'язується з рівняння Морена: знайти єдине  $d > 0$ , що задовольняє  $\sum_i r_i^d = 1$ . Це веде до чисельних методів: бісекція або

Ньютона, що переносяться на задачі програмування. У множині Мандельброта тренується причинно-наслідкове міркування через динаміку ітерації  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ . Запитання «що змінюється на кроці?» формалізується метрикою втечі  $E(c) = \min\{n: |z_n| > R\}$  та рівнями  $\{E(c) = k\}$ , які дають контури з чіткою алгоритмічною природою.

### **2.3. Використання інтерактивних технологій і цифрових ресурсів під час вивчення фрактальних множин**

Застосування інтерактивних технологій у викладанні фрактальної геометрії відкриває абсолютно нову парадигму дидактичного опрацювання складних концепцій, які в традиційній формі залишаються або абстрактними, або візуально малодоступними. У випадку фрактальних множин мова йде не просто про зображення геометричних об'єктів, а про моделювання їхніх ітераційних перетворень у реальному часі, з можливістю масштабування, аналізу, маніпуляції параметрами. Цифрові платформи дають змогу показати процес побудови фракталу не статично, а як динамічний алгоритм, що змінюється перед очима учня. Програмні засоби на кшталт FractalNow, XaoS, Apophysis, а також онлайн-інтерфейси GeoGebra чи Desmos дозволяють не лише візуалізувати готові фігури, а й створювати власні фрактальні моделі з початкових умов. Це надає учню змогу змінювати параметри, бачити ефект кожної трансформації, експериментувати з алгоритмами.

Такий рівень взаємодії формує в учнів відчуття контролю над об'єктом, розвиває інтуїцію щодо масштабованих структур, а також активізує аналітичне мислення через безперервне порівняння результату з початковим припущенням. Ці середовища дають змогу реалізувати повноцінний алгоритмічний підхід до побудови фігур, де учень виступає не спостерігачем, а безпосереднім конструктором. Окрім графічних редакторів, фрактальні структури можуть бути створені за допомогою простих мов програмування, як-от Python у середовищі Turtle, що

дозволяє комбінувати математику з елементами інформатики, формуючи міждисциплінарні компетентності. У цьому контексті цифрова візуалізація не є доповненням до викладу, а перетворюється на основний інструмент осмислення ітеративної природи фракталів, залучаючи когнітивні ресурси учня через багатоканальну інтеракцію з матеріалом [26, с. 73].

Впровадження цифрових ресурсів у процес вивчення фрактальних множин має потенціал не лише у плані візуалізації, а й у дієвому стимулюванні навчальної мотивації. Абстрактна природа фракталів часто викликає у школярів або нерозуміння, або відсторонення, оскільки без конкретного образу важко уявити структуру, яка не піддається класичним евклідовим характеристикам. Саме тут на допомогу приходить цифрове середовище, що здатне не лише показати кінцевий результат, а й створити ефект залученості. Учень бачить, як з елементарного правила - наприклад, поділ відрізка на три частини - постає складна, витончена фігура.

Цей ефект «народження складності» з простоти виявляється надзвичайно потужним у плані мотивації: він викликає інтерес, захоплення, прагнення дослідити глибше. Платформи, які дозволяють створювати фрактали крок за кроком, з динамічним відображенням змін, формують у школяра відчуття причетності до процесу відкриття. Учень не просто вивчає вже створений об'єкт, а власноруч бере участь у його творенні, що створює досвід дослідницької діяльності навіть у межах простого уроку. Такий підхід значною мірою змінює саму структуру навчального заняття: вчитель стає фасилітатором, а учень - активним учасником, здатним впливати на хід і результат уроку. Використання фрактальних генераторів із налаштуванням параметрів не лише розширює арсенал дидактичних засобів, а й розвиває у школярів навички формулювання гіпотез, проведення порівняльного аналізу, рефлексії щодо ефективності алгоритму. Таке навчання перестає бути лінійним і фронтальним: воно набуває рис індивідуалізованого й адаптивного.

Особливо в умовах змішаного навчання або дистанційного формату, де цифрові інструменти стають не допоміжним елементом, а основним засобом формування змісту й взаємодії.

#### **2.4. Методика побудови навчальних занять із тематики «фрактали» у шкільному курсі математики**

Методика побудови навчального заняття з теми «фрактали» у шкільному курсі математики передбачає створення такої дидактичної послідовності, яка дозволяє органічно вводити складний математичний зміст, формуючи при цьому цілісне розуміння й інтерес до пізнання. Вихідним пунктом є вибір концептуального ядра заняття, навколо якого вибудовується не лише теоретичний матеріал, а й активні форми роботи, способи візуалізації, практичні задачі та рефлексивні елементи. Початкове знайомство з фрактальними структурами доцільно реалізувати через візуальний шок - демонстрацію кількох яскравих прикладів фракталів із коментарем про їхню нескінченну складність при обмеженій геометричній побудові. Це створює початкову мотивацію та формує в учня зацікавленість у поясненні парадоксу. Далі слід перейти до простих ітеративних алгоритмів, зокрема побудови сніжинки Коха чи квадрата Кантора, використовуючи графічні інструменти або паперові аплікації. Це дозволяє перейти від абстракції до конкретної дії. Формулювання правил побудови має відбуватися в діалозі з учнями: вони самі мають спробувати передбачити, як змінюється структура на кожному кроці. У цьому контексті методично доцільно використати принцип конструктивної складності - кожен наступний крок вводить новий елемент, але спирається на вже сформовану інтуїцію. Важливою є поетапність: спочатку візуальне сприйняття, потім - опис алгоритму, далі - аналіз властивостей, і тільки після цього постановка складніших задач. Така структура забезпечує розвиток усіх рівнів пізнавальної активності: від сенсорного й операційного до рефлексивного й евристичного. Крім

того, диференціація завдань дозволяє адаптувати глибину опрацювання до вікових особливостей: учні молодшої ланки зосереджуються на побудові та візуальному аналізі, старші - на логіці алгоритмів, формалізації, пошуку узагальнень [27, с. 5].

Ефективність засвоєння фрактальної тематики багато в чому залежить від форми організації навчального процесу. Індивідуальна робота дає змогу учневі заглибитися у власний темп мислення, самостійно відтворити алгоритм побудови, зробити припущення, що особливо корисно на етапі первинного ознайомлення з матеріалом. Саме тут виникає глибше осмислення логіки трансформації структури, особливо коли йдеться про геометричні ітерації з числовими характеристиками. Водночас групова взаємодія забезпечує розвиток комунікативних компетентностей і дозволяє створити поле колективного конструювання знань. Наприклад, під час створення фрактального дерева одна група може відповідати за побудову стовбура, інша - за гілки, третя - за розгалуження останнього рівня, а згодом усі фрагменти поєднуються в єдиний об'єкт. Така структура співпраці активізує здатність координувати дії, узгоджувати алгоритми, аналізувати проміжні результати [17, с. 15].

### **РОЗДІЛ 3. ПРАКТИЧНА РЕАЛІЗАЦІЯ ВИВЧЕННЯ ФРАКТАЛЬНИХ МНОЖИН У ШКОЛІ**

#### **3.1. Досвід інтеграції елементів фрактальної геометрії в навчальні програми з математики в Україні та за кордоном**

Ідея інтегрування фрактальної геометрії в освітні програми виникла не як естетичне чи суто математичне захоплення, а як відповідь на потребу в розширенні уявлень школярів про просторові структури, алгоритмічні побудови та багаторівневі моделі реальності. У межах українського освітнього простору така тематика ще не закріплена формально в обов'язкових розділах математики, зокрема в модельних програмах Нової української школи для 5–9 класів. На сторінках МОН, де опубліковані типові програми, фрактали не з'являються серед базових понять. Проте структура самої реформи дозволяє впроваджувати авторські модулі, що включають міжпредметні зв'язки, зокрема з інформатикою, природничими науками та мистецтвом [39, с. 33].

У таких умовах фрактальна тематика може бути частиною проєктної діяльності, де учні конструюють візуальні моделі на основі ітераційних процесів, вивчають принципи самоподібності та межових фігур. Багато шкіл використовують для цього мультимедійні матеріали з відкритих платформ або створюють власні цифрові середовища – серед них варто згадати ресурси «На Урок», які пропонують готові уроки з побудовою «сніжинки Коха» чи «трикутника Серпінського» з акцентом на інтердисциплінарність. Авторські мінікурси іноді комбінують геометрію з графічним моделюванням, де учні програмують фрактальні структури за допомогою мови Scratch або Python Turtle. Це свідчить про те, що попри відсутність фракталів у стандартному переліку, фактичне поле застосування цих концепцій набагато ширше, і вчителі активно використовують їх як засіб розвитку алгоритмічного мислення, просторової уяви та здатності до абстрагування. Справжня інтеграція

відбувається не через нормативну примусову присутність, а через методичну ініціативу й відчуття цінності теми з боку освітян.

У старших класах – на рівні 10–11 – ситуація дещо трансформується: фрактальні побудови починають з'являтися в навчальних модулях інформатики, особливо в темах, пов'язаних із комп'ютерною графікою та генеративними алгоритмами. Оскільки сучасна інформатика в школі вийшла за межі простої обробки інформації, вона дедалі більше інтегрується з математиками, технологіями та дизайном. У практичних календарних планах, які використовують учителі, зафіксовані теми, де учні створюють зображення за допомогою рекурсивних алгоритмів, програмують візуальні об'єкти з елементами самоподібності. Такі проєкти дуже часто базуються саме на фрактальних принципах. Вчителі, які керують STEM-гуртками, використовують візуальні середовища на зразок Processing, P5.js або Logo, аби діти будували ітераційні структури [33, с. 25].

І хоча формально ці заняття залишаються поза межами базового змісту математики, вони демонструють глибше проникнення фрактальних ідей у шкільну освітню практику. Роль таких факультативних, напівформальних форм навчання зростає, адже саме тут учні мають змогу експериментувати, шукати закономірності, програмувати, моделювати. Інформатика, у цьому розрізі, постає не лише як технічна дисципліна, а як простір для осмислення концептів, що виходять за межі евклідової геометрії й дозволяють працювати з уявленням про нескінченність, ітеративність, межу. Особливо ефективними є практики, де учні надають геометричним конструкціям цифрової реалізації, трансформуючи класичні математичні поняття в інтерактивні моделі, які можна масштабувати, модифікувати, анімувати. В умовах реформування змісту освіти та переходу до компетентнісного навчання фрактальні теми стають зручним інструментом для розгортання

міждисциплінарних зв'язків, де межа між математикою й мистецтвом або технологією майже стирається.

З погляду методичної підтримки, українські школи дедалі частіше використовують цифрові платформи, які не належать до обов'язкової частини стандарту, але мають державну підтримку – насамперед ідеться про Всеукраїнську школу онлайн (ВШО), що пропонує дистанційні модулі з математики, інформатики, фізики, у яких іноді застосовуються ітеративні побудови. У відеокурсах доречно вводити самоподібні форми через точні співвідношення. Для кривої Коха периметр після  $n$ -ої ітерації:  $P_n = P_0(\frac{4}{3})^n$ , тоді як площа «сніжинки» прямує до границі  $A_\infty = \frac{8}{5}A_0$  за формулою  $A_n = A_0[1 + \frac{3}{5}(1 - (\frac{4}{9})^n)]$ . Для трикутника Серпінського площа після  $n$  ітерацій:  $A_n = A_0(\frac{3}{4})^n$ , а його фрактальна розмірність межі описується  $D = \log 3 / \log 2$ . На інтегрованих уроках (математика + інформатика + мистецтво) корисно поєднувати аналітичні формули з коротким кодом чи покроковими алгоритмами ітерацій. Для прикладу завдання: 1) маємо рівносторонній трикутник зі стороною  $s = 9$  см. Обчислити  $P_5$  сніжинки Коха, якщо  $P_0 = 3s$ . 2) Для того самого трикутника знайти  $A_{10}$  та відсоткове відхилення від  $A_\infty$ . 3) Побудувати рекурентний вираз для довжини лінії після  $k$  ітерацій у моделі «канторової множини» та довести збіжність площі до нуля, якщо стартовий відрізок має площу прямокутної смуги  $S_0$ . 4) Написати псевдокод генератора Серпінського: операція видалення центрального трикутника, глибина рекурсії  $n$ , підрахунок кількості дрібних трикутників  $N_n = 3^n$ . 5) Дослідити, при якому  $n$  для Коха з  $s = 5$  см периметр перевищує 1 км: розв'язати  $3s(\frac{4}{3})^n > 10^5$ . Такі вправи добре підсилюють методичні розробки на «На Урок», де фрактальні побудови поєднуються з графічним моделюванням і числовими серіями [41, с. 18].

У міжнародному середовищі фрактальна тематика вибудовується як цілісна дидактична лінія з чіткими обчислювальними опорами. У ініціативі NRICH (Кембридж) тематичні задачі з «Fractal» поєднують візуальні побудови з формальними інваріантами самоподібності. Для кривої Коха периметр зростає за геометричною прогресією  $P_n = P_0(\frac{4}{3})^n$ , а площа сніжинки збігається до межі  $A_\infty = \frac{8}{5}A_0$ . У множині Кантора після  $n$  кроків кількість інтервалів  $N_n = 2^n$ , довжина кожного  $(1/3)^n$ , сумарна довжина  $L_n = L_0(\frac{2}{3})^n \rightarrow 0$ . Фрактальна розмірність самоподібної структури з масштабом  $r$  і числом копій  $N$  визначається  $D = \frac{\log N}{\log(1/r)}$  для Кантора  $D = \log 2 / \log 3$ , для трикутника Серпінського  $D = \log 3 / \log 2$ . У завданнях Think Maths послідовно вводять ітеративні дерева: при гілкуванні  $b$  і коефіцієнті масштабування довжин  $r$  сумарна довжина нескінченної конструкції збігається, якщо  $br < 1$ , і дорівнює  $L_{\text{tot}} = \frac{L_1}{1-br}$ . На цьому тлі доречні навчальні задачі: обчислити найменше  $n$ , для якого  $P_n$  сніжинки з  $s = 6\text{см}$  перевищує  $2 \cdot 10^4\text{см}$ , розв'язавши  $3s(\frac{4}{3})^n > 2 \cdot 10^4$ ; довести збіжність площі «килимка Серпінського» за схемою  $A_n = A_0(1 - (\frac{1}{9})^0)(\frac{8}{9})^n$  і знайти  $A_8$  при  $A_0 = 81\text{см}^2$ ; для Кантора вивести формулу кількості кінців  $K_n = 2^n$  і визначити  $n$ , коли  $L_n < 10^{-6}L_0$ ; побудувати ітеративний код генератора дерева з параметрами кута  $\theta$ ,  $b = 2$ ,  $r = 0,45$ , оцінити  $L_{\text{tot}}$  та умову збіжності; знайти розмірність довільного самоподібного набору з  $N = 5$  і  $r = 1/4$ , обчислити  $D = \log 5 / \log 4$  і порівняти із фактом незмінності локального масштабу. Така конструкція завдань тримає учня в полі чітких формул і вимірних критеріїв.

Такий підхід забезпечує не просто знайомство з візуальним ефектом самоподібності, а глибше розуміння рекурсивної логіки, алгоритмічного мислення й математичної абстракції. Освітні практики Великої Британії показують, як можна включати фрактали у вже існуючі навчальні теми,

не перебудовуючи кардинально курс, але збагачуючи його завдяки актуалізації складних ідей у доступному форматі. Це створює умови, за яких навіть складні теми можуть бути подані в мотиваційній, креативній формі – як виклик мисленню, як естетичне занурення в природу форми.

Американські освітні моделі значною мірою орієнтуються на стандарти Common Core і водночас мають значний простір для авторської ініціативи. На сайті NCTM (Національної ради вчителів математики) діє платформа Illuminations, яка містить інтерактивні інструменти, зокрема Fractal Tool – візуальний модуль для побудови фракталів у браузері. Його супроводжують навчальні матеріали з поясненням, як через фрактальні структури можна викладати концепти ітерації, подібності, нескінченності. Це дозволяє вчителям легально вбудовувати тему фракталів у навчальні модулі середньої та старшої школи, не порушуючи вимог стандарту.

### **3.2. Аналіз педагогічних ефектів вивчення фрактальних структур (мотивація, креативність, пізнавальна активність учнів)**

Фрактальні структури, завдяки своїй візуальній парадоксальності й математичній глибині, мають здатність стимулювати пізнавальний інтерес школярів не через подання факту, а через виклик уяві. Їхнє сприйняття не укладається в рамки звичних геометричних об'єктів – відсутність чіткої розмірності, нескінченність повторення, самоподібність на всіх рівнях масштабування формують у свідомості дитини когнітивний конфлікт, який, замість дезорієнтації, породжує інтелектуальну напругу з бажанням її подолати. Саме так проявляється тригерний ефект фракталу як об'єкта, що викликає допитливість. Коли учень спостерігає, що трикутник Серпінського містить у собі нескінченну кількість менших трикутників, але має площу, яка прагне до нуля, це створює відчуття порушення інтуїтивних уявлень [35, с. 27].

Така реакція не просто стимулює емоційний інтерес, а активізує пізнавальні механізми – від включення уяви до формування гіпотези. У фракталі поєднуються візуальна незвичність і структурна глибина, що забезпечує багатоканальне залучення: зорове сприйняття викликає естетичний відгук, логічна складова підштовхує до раціонального аналізу, а динамічна форма формує відчуття процесу. Саме ці якості роблять фрактали потужним чинником залучення навіть у середовищах з низьким рівнем академічної мотивації. Школяр, що не виявляє інтересу до стандартних завдань з геометрії, може несподівано активізуватись, коли отримує завдання побудувати фрактал із заданим алгоритмом або реконструювати ітераційний ряд у графічному редакторі. Фрактальні структури – це не статичні об'єкти, а динамічні процеси, які дозволяють учневі ставати не пасивним спостерігачем, а активним конструктором. У цьому й полягає механізм когнітивного залучення: фрактал не дає готової відповіді, він викликає питання, які неможливо проігнорувати, бо сам об'єкт порушує усталений порядок сприйняття.

Коли мова заходить про розвиток творчого мислення, фрактальні побудови виступають не як ілюстрація, а як відкрита платформа для експериментування. Самоподібність, як ключовий принцип фрактальної геометрії, створює умови для багаторазової інтерпретації: учень може побудувати один і той самий фрактал за різними алгоритмами, змінити глибину ітерації, поєднати геометрію з кольором або рухом. Така варіативність відкриває простір для дослідження не лише геометричних властивостей, а й семантичних, коли фрактал стає метафорою системи, що розвивається, змінюється, має внутрішню логіку й нескінченну структуру. Учитель, який пропонує учням самостійно створити модифікований варіант «сніжинки Коха» з власними правилами розгалуження, автоматично запускає механізм гіпотезування. Учень мусить проаналізувати, як зміниться структура, які збережуться симетрії, чи порушиться самоподібність. Цей процес є класичним прикладом

творчого мислення в дії – учень будує гіпотезу, перевіряє її візуально або через обчислення, фіксує результат, формує узагальнення. Така послідовність дій відповідає основам дослідницького підходу в освіті. Фрактал, у цьому випадку, – це не лише об’єкт навчання, а й контекст для формування дослідницької культури [31, с. 11].

Через зміну параметрів алгоритму, глибини рекурсії чи виду базової фігури школяр отримує інструмент для побудови власної візії геометричного об’єкта. Багато вчителів використовують такі завдання в рамках STEAM-інтеграцій, коли до математичного моделювання додаються елементи кодування, художнього оформлення, а іноді навіть фізичної реалізації (вирізання, лазерне гравірування тощо). Цей багаторівневий підхід формує в учня здатність мислити системно, бачити закономірності, що не лежать на поверхні. Відтак фрактали стимулюють не просто креативність як мистецьке начало, а саме аналітичну, структурну творчість, яка лежить в основі наукового мислення.

### **3.3. Практичні завдання, проєкти та дослідницькі роботи школярів із використанням фрактальних моделей**

У шкільному середовищі моделювання фрактальних структур поступово переходить із категорії демонстраційного матеріалу до самостійного напрямку діяльності, що включає ручні побудови, цифрову графіку, алгоритмічне програмування й елементи математичного аналізу. Найчастіше така робота починається з базових форм – учням пропонують побудувати перші ітерації сніжинки Коха або трикутника Серпінського, використовуючи лише олівець, лінійку, циркуль і аркуш паперу. Візуалізація першого кроку зазвичай викликає інтерес: лінія перетворюється на складену форму, яка повторює себе через кожен ітерацію.

Учитель на цьому етапі пояснює правила генерації – наприклад, що кожен сегмент замінюється на ламану з новими вершинами, або що в

центрі трикутника вирізається менша фігура. Далі вводиться елемент обчислення: підрахунок довжини ламаної, площі залишкової фігури або кількості елементів на певній ітерації. Учні роблять висновок про те, що довжина нескінченно зростає, тоді як площа стабілізується або зменшується. Це відкриває перший міст до абстрактного мислення. Ручна побудова дає змогу не лише зрозуміти геометричну структуру, а й відчутти процес її формування, поринути у світ симетрії, масштабування та рекурсивної логіки. Учень працює не з готовим результатом, а з динамікою побудови, і в цьому полягає найбільша методична цінність. Такі завдання зручно реалізовувати на заняттях із додаткової математики, під час тижнів природничих наук або як частину творчих робіт, спрямованих на дослідження нестандартних фігур. Робота над фракталом на папері – це не просто графічна справа, а форма пізнання, яка вимагає уважності, аналітики й точності, що наближає школяра до справжньої дослідницької практики [40, с. 15].

Коли учні опановують принципи ручного побудування, настає етап переходу до цифрового моделювання. Для цього використовуються графічні редактори, серед яких особливо ефективними є середовища зі скриптовою підтримкою – Scratch, Python Turtle, Logo, P5.js. Такі платформи дозволяють поєднати візуальну побудову з алгоритмічним мисленням. Учень прописує просту функцію, яка на кожному кроці змінює вхідну форму, повторюючи заданий шаблон. Завдяки використанню циклів, умовних операторів і рекурсивних викликів, учні створюють графіку, яка не тільки відображає фрактальні властивості, а й є живим прикладом програмного генерування візуального змісту. Побудова фрактального дерева, де кожна гілка розділяється на дві підгілки під певним кутом, показує, як геометрія взаємодіє з параметрами коду. Коли змінюється кут нахилу, кількість ітерацій або коефіцієнт зменшення довжини гілки, структура фракталу радикально перебудовується. Це дозволяє учню проводити серію експериментів:

запрограмувати кілька моделей, порівняти форми, зафіксувати закономірності. У такому процесі математичне мислення переходить до рівня симулятивного: школяр створює гіпотезу, тестує її через цифрову модель і отримує візуальний результат, який піддається оцінці. У цьому і полягає перевага фрактального моделювання – воно дозволяє миттєво перевіряти ефекти змін, працювати не лише з числами, а з формами, їхніми трансформаціями та візуальним резонансом. Програмування фракталів, зокрема на мові Python з використанням бібліотеки Turtle, відкриває додаткову площину для інтеграції – математичні концепції вбудовуються в структуру коду, і учень усвідомлює зв'язок між алгоритмом і геометрією [37, с. 16].

Канторова досконала множина зручно вводиться через ітераційну процедуру вилучення «середньої третини» відрізка  $[0,1]$ . Учні конструюють послідовності  $C_0 = [0,1]$ ,  $C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n)$ , а потім переходять до перетину  $\mathcal{C} = \bigcap_{n \geq 0} C_n$ . На уроці це робиться візуально: на міліметровому папері або в GeoGebra повторювано позначаються проміжки, що лишаються після кожного кроку. Далі виводиться база-3: точки, що належать  $\mathcal{C}$ , мають тернарні записи без цифри 1; це природно з'єднує тему позиційних систем числення з топологічними властивостями множин. Обговорюють вимірюваність: окрема вправа – сума геометричної прогресії довжин вилучених частин дорівнює 1, тому  $\mathcal{C}$  має міру Лебега 0, але є незліченна. Наприкінці пропонується вводити фрактальну розмірність: за критерієм само-подібності  $\dim_H(\mathcal{C}) = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63093$ . Це дає чіткий міст між поняттями «скільки частин» і «наскільки вони зменшені», та готує до ширшого поля фрактальних розмірностей. Закріплення – коротка робота з картками: учні розпізнають три рівнозначні описи  $\mathcal{C}$  (ітеративний, через тернарний запис, через гомеоморфність Канторового простору) й виконують міні-доказ приналежності довільної точки за її записом у базі-3.

Для прикладу, три лабораторні практикуми демонструють, як закріпити тему фракталів у шкільній програмі. 1) Сніжинка Коха: учні будують 3–5 ітерацій із рівностороннього трикутника, виводять рекурентні формули для кількості сторін і довжини периметра, обчислюють площу через суму геометричної прогресії та роблять висновок: периметр прямує до нескінченності, площа збігається,  $\dim_H = \frac{\ln 4}{\ln 3}$ . Це вправляє в роботі з прогресіями, границями, самоподібністю. 2) Трикутник Серпінського: робота «fold-out» із паперу або модульна збірка з маленьких рівносторонніх трикутників. Учні рахують кількість чорних трикутників на  $k$ -тій стадії, знаходять площу та формулу для числа вершинних «отворів»; за підсумком обговорюють  $\dim_H = \frac{\ln 3}{\ln 2}$ . 3) Творча міні-майстерня «fractal cutout»: групи конструюють просторові паперові фрактали за правилом повтору вирізання-складання й описують власні ітеративні алгоритми мовою інструкцій або псевдокоду. Додатковий трек – дослідження сніжинки Коха в довільному ПЗ з побудовою графіків збіжності площі. За один урок клас отримує три різні механіки самоподібної побудови, три лінії обчислень (рахунок об'єктів, периметр/площа, границі) та завершене відчуття, що «складність із простого правила» – це явище, яке можна власноруч відтворити й кількісно описати.

### **3.4. Перспективи розширення шкільного курсу математики за рахунок тематики фрактальної геометрії**

У сучасних умовах переосмислення змісту шкільної математичної освіти дедалі виразніше постає потреба в оновленні не лише методів викладання, а й самого концептуального наповнення курсу. У цьому сенсі фрактальна геометрія виступає не як екзотичне доповнення, а як повноцінна логічна ланка між класичною геометрією й математичним моделюванням. Її концепти – самоподібність, ітерація, нескінченність,

фрактальна розмірність – формують підґрунтя для побудови структур, які наближені до природних форм і технологічних об’єктів. На відміну від евклідових моделей, що ґрунтуються на простих, лінійно-площинних конструкціях, фрактали дозволяють моделювати нерівні, складні, динамічні системи – від ландшафтів і біологічних структур до процесів фрактального шуму в обробці сигналів. У шкільному курсі це відкриває новий простір: замість абстрактного завдання на побудову трикутника з певними властивостями учень може змодельовати, як змінюється геометрія краю острова при різному масштабі, або як формується крона дерева згідно з алгоритмом розгалуження. Це створює умови для реалізації навчання через моделювання – коли математична задача постає як спроба описати, інтерпретувати чи реконструювати реальний об’єкт засобами формального опису. Такий підхід глибоко резонує з цілями сучасної освіти, орієнтованої на міждисциплінарність, проектність і компетентнісне мислення. Учень, який оперує фрактальними структурами, вчиться не лише будувати фігури – він формує уявлення про динамічні системи, про змінність, про зв’язок між алгоритмом і формою. Це, у свою чергу, створює фундамент для подальшого засвоєння тем із математичного аналізу, теорії графів, обчислювальної геометрії, теорії складності. Вивчення фракталів органічно готує до роботи з моделями, де аналітичний опис переплітається з візуалізацією, а логічне мислення з інтуїтивним [36, с. 26].

У старшій школі актуалізація фрактальної тематики має особливий сенс – саме тут формується уявлення учня про структуру математичних знань як систему, здатну описувати не лише ідеальні об’єкти, а й складну реальність. Фрактали дають змогу створити міст між алгеброю, геометрією, інформатикою, фізикою та навіть біологією. Такі теми, як фрактальна розмірність, лінії без дотичних, функції без похідної, побудова рекурсивних дерев, можуть бути включені в модулі для профільного навчання як факультативні або поглиблені курси. Це

дозволяє розширити межі формального курсу й запропонувати учневі більш складну інтелектуальну гру, у якій математичні поняття перестають бути догмами і стають засобом дослідження. Особливо продуктивним є підхід, коли фрактали вводяться як продовження вже вивчених тем: наприклад, після курсу функцій – як приклади функцій із особливою поведінкою, після геометрії – як форми, що не підлягають класичному опису, після вивчення степеневих залежностей – як моделі масштабування. Таким чином, не руйнуючи структуру навчального курсу, фрактальні теми можуть логічно вплітатися в нього, створюючи ефект збагачення. Варіативні модулі старшої школи – найзручніший формат для такої інтеграції: вони не нав'язують обов'язковості, дозволяють гнучко формувати зміст відповідно до можливостей класу та інтересів учнів. У межах таких модулів фрактали можуть бути використані як основа для проєктної діяльності, для математичних досліджень, для написання міні-наукових робіт. Це забезпечує розвиток навичок аналізу, узагальнення, формулювання гіпотез і перевірки результатів – тобто саме того, що сьогодні вважається серцевиною математичної компетентності.

Потенціал фрактальної геометрії як складника курсу моделювання проявляється й у контексті наближення шкільної освіти до практик наукової діяльності. Сучасне математичне моделювання дедалі частіше використовує саме фрактальні алгоритми – у біомедичних дослідженнях, в аналізі ринкових процесів, у геофізиці. Школа, що прагне готувати учня до участі в наукових проєктах, має ознайомити його хоча б з базовими прикладами таких моделей. Це може бути елементарна симуляція розростання клітин, моделювання ландшафту з фрактальним шумом, генерація фрактальних сіток для аналізу структури зображень. Усі ці задачі мають цілком доступний рівень складності для учнів старших класів, якщо забезпечено належний методичний супровід. Учні вчать не

тільки будувати модель, а й оцінювати її релевантність, точність, межі застосування.

## ВИСНОВКИ

У межах теоретичних підходів, розглянутих у першому розділі, було встановлено, що поняття «фрактал» має як історико-математичну глибину, так і сучасну міждисциплінарну валентність. Генетично воно виникло з проблематики нелінійних процесів, фігур із нерегулярною структурою та алгоритмічних побудов, які не піддаються евклідовому опису. Визначальними характеристиками фрактальних множин є самоподібність, нескінченна деталізація, нерівномірна структура та дробова розмірність. Такі математичні утворення не лише змінюють уявлення про простір, а й знаходять застосування в теорії хаосу, обробці сигналів, біофізиці, графіці. У цьому сенсі фрактальна геометрія функціонує як інструмент міжгалузевого моделювання, що розширює можливості аналізу природних і технологічних систем. Її включення в освітній процес обґрунтовується як потребою в оновленні геометричного мислення, так і необхідністю формування наукового світогляду, здатного оперувати складністю, самоподібністю, нелінійністю.

У другому розділі акцент зроблено на дидактичній реалізації цих ідей у шкільному середовищі. З'ясовано, що «фрактальна тематика не суперечить, а органічно продовжує й розширює вже знайомі учням поняття», будучи вплетеною в існуючу навчальну структуру через поняття симетрії, масштабних перетворень, ітерацій, функцій і границь. Принцип наочності отримує нове втілення, адже «форма первинна, аналітика – вторинна»: візуальна структура фракталу виконує функцію когнітивного тригера, що не лише допомагає у сприйнятті, а й стимулює інтелектуальну активність.

Методично доцільним є впровадження побудов за принципом поетапного занурення: «спочатку – графічне конструювання, потім – вербальний опис, далі – аналіз властивостей». Це дозволяє перетворити навіть складні об'єкти на дидактично доступні, актуалізуючи внутрішню

логіку пізнання. У межах другого підрозділу також підкреслено, що фрактали здатні «актуалізувати процеси візуального аналізу, просторової реконструкції, абстрактного перетворення форм», що прямо пов'язано з розвитком просторової уяви та логіко-аналітичного апарату. У процесі роботи з фракталом учень змушений утримувати кілька рівнів структури в полі одночасного аналізу, що готує до багаторівневого мислення. Ітераційна структура фракталу, зокрема кривини Коха або трикутника Серпінського, дозволяє переходити від емпіричних побудов до формального апарату: «довжина прямує до нескінченності, а площа стабілізується», що є унікальним пізнавальним досвідом.

Залучення цифрових технологій у процес вивчення фрактальних множин, як показано в третьому підрозділі, дозволяє подолати абстрактність теми й надати їй динамічну візуальну форму. Учень працює не з готовим результатом, а з алгоритмом побудови, який змінюється «у реальному часі», з можливістю впливати на параметри, запускати моделі, спостерігати трансформації. Таке навчання створює відчуття причетності до відкриття, формує інтерес до алгоритмічного мислення, розвиває здатність до рефлексії щодо змін. Цифрові середовища – від FractalNow до Scratch чи Python Turtle – створюють умови для міждисциплінарного синтезу: фрактал виступає як математична модель, програмний об'єкт, графічний образ і елемент наукового дослідження. На цьому тлі ефективною стає методика побудови занять, у якій спочатку вводиться візуальний ефект, далі – алгоритмічна логіка побудови, потім – спільне обговорення, індивідуальні або групові експерименти. Це змінює сам характер навчання: учень не є реципієнтом інформації, а стає її генератором, конструктором, інтерпретатором. Зміст навчання перестає бути набором правил – він набуває характеру відкритої системи, яку можна моделювати, змінювати, аналізувати. Такий підхід відкриває нові перспективи для викладання математики в загальноосвітній школі, де фрактальна тематика може виступити не тільки предметною, а й

концептуальною основою для побудови навчального середовища, орієнтованого на дослідження, відкриття й глибоку структурну логіку мислення.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абдуліна Л.Б. Маджуга А.Г. Сініцина І.А. Фрактальна педагогіка. теорія. методологія і практика. монографія. Київ. Університетська книга. 2016. 320 с.
2. Аблаєв Є.В. Мамалига Р.Ф. Пропедевтика формування поняття фракталу у учнів шкіл. Освіта і наука. 2017. №9(88). С.123–133
3. Атфак М. Фрактал-ОГО! Дидактична казка. Тернопіль. Галич-ЮрВидат. 2019. 64 с.
4. Ачкан В.В. Використання творчої спадщини вітчизняних математиків у позашкільній роботі в старшій школі. Педагогічні науки. реалії і перспективи. Бердянськ. Науковий часопис НПУ ім. М.П.Драгоманова. 2018. №45. С.7–11
5. Бабкін А.А. Вивчення елементів фрактальної геометрії як засіб інтеграції знань з математики та інформатики. Дис. канд. пед. наук. Вінниця. 2017. 202 с.
6. Барановський О. М., Працьовитий М. В. Про один клас неперервних функцій зі складними локальними властивостями. Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання: матеріали конф., 18–20 січня 2023 р. С. 7–9.
7. Бобилєв Д. Є. Фрактальна геометрія як основа міждисциплінарної інтеграції в процесі підготовки вчителів математики та інформатики. Актуальні проблеми теорії та методики навчання математики: до 75-річчя кафедри методики навчання математики: матеріали VI Міжнародної наукової конференції, 6–7 жовтня 2023 р., м. Київ. Київ: УДУ імені Михайла Драгоманова, 2023. С. 45–46.
8. Брюхович М., Жерновникова О. Використання комплексних чисел у вивченні та аналізі фракталів. VI Міжнародна науково-практична конференція молодих учених «Інноваційні педагогічні технології в цифровій школі», 15-16 травня 2024 р. С. 240–242.

9. Брюхович М., Жерновникова О. Використання комплексних чисел у вивченні та аналізі фракталів. Інноваційні педагогічні технології в цифровій школі : зб. тез доп. учасників VI Міжнар. наук.-практ. конф. молод. учених, м. Харків, 15–16 трав. 2024 р. Харків, 2024. С. 240–242.

10. Горшков О.О. Вивчення елементів фрактальної геометрії як засіб естетичного виховання учнів. Педагогіка і психологія. Київ. Вістник КГУ ім. М.О.Некрасова. 2018. №1. С.181–185

11. Грабіна В. В. Розробка додатку для впровадження в учбовий процес вальдорфської школи курсу фрактальної геометрії: бакалаврська кваліфікаційна робота за спеціальністю 122 Комп'ютерні науки. – Одеса: Одеський державний екологічний університет, 2020. 48 с.

12. Десятський С. П., Антоненко Є. О. Про методи побудови фракталів та чисельного обчислення їх розмірності. Education and science of today: intersectoral issues and development of sciences. Cambridge, UK, 9 грудня 2022 р. С. 140–144. DOI 10.36074/logos-09.12.2022.37

13. Дудка О. М., Власій О. О., Ікавець Н. В. STEAM-проекти для школярів з теми «Фрактали». Теорія і практика використання інформаційних технологій в умовах цифрової трансформації освіти: матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції, 29 червня 2023 року, м. Київ. Київ: Вид-во УДУ імені Михайла Драгоманова, 2023. С. 141–144.

14. Дудка О. М., Ікавець Н. В., Кульчицька Н. В. Елементи STREAM-освіти у розвитку математичної компетентності. Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2019), м. Черкаси, 11–12 квітня 2019 р. Черкаси: Вид. ФОП Гордієнко Є. І., 2019. С. 247–248.

15. Жданова Ю. Д., Спасітелєва С. О., Шевченко С. М. Застосування фракталів в інформаційній та кібернетичній безпеці. Математика в сучасному технічному університеті: матеріали VIII

Міжнар. наук.-практ. конф., Київ, 27–28 грудня 2019 р. Вінниця: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2020. С. 67–70.

16. Жуков Д.С. Лямін С.К. Варіанти використання методів фрактальної геометрії в соціальних і політичних дослідженнях. Ineternum. 2018. №2(3). С.17–35

17. Журба К., Калашник Н. І. Фрактальність берегової лінії Азовського моря. Обласна науково-практична конференція учнівської молоді «Біологічні дослідження та винахідництво», секція «Винахідницькі та раціоналізаторські проекти еколого-натуралістичного напрямку». Слов'янськ: Департамент освіти і науки Донецької облдержадміністрації, 2019. 15 с.

18. Карвацький Д. М. Суми мультигеометричних послідовностей та канторвали. Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання: матеріали конф., 18–20 січня 2023 р. С. 16–18.

19. Кобилинська Ю. Л., Королюк О. М. Геометричні фрактали та їх застосування. Науковий пошук молодих дослідників: зб. наук. пр. Вип. XII. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2019. С. 165–167.

20. Кобилинська Ю. Л., Кривонос О. М. Фрактальна графіка: її застосування. Науковий пошук молодих дослідників: зб. наук. пр. Вип. XII. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2019. С. 39–41.

21. Коваль Р. Ю., Новіцька Г. В., Гречана В. В. Фрактали та їх практичне застосування. Відділення: математика, секція: математика. Гайворон: Кіровоградська Мала академія наук учнівської молоді, Гайворонська філія Кіровоградської МАН учнівської молоді, 2015. С. 29.

22. Коваль Р.Ю., Новіцька Г.В. Фрактали та їх практичне застосування, 2015. URL: <https://naurok.com.ua/fraktali-ta-h-praktichne-zastosuvannya-naukova-robota-285896.html>

23. Котова О. В. Тополого-метричні та фрактальні властивості множин розв'язків рівнянь, які містять фрактальні функції: дис. ... канд.

фіз.-мат. наук: 01.01.06; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. К., 2010. 113 с.

24. Котова, О. В. Фрактали і сучасна математика. Київ: Інститут математики НАН України, 2009. Режим доступу: <https://www.imath.kiev.ua/~baranovskyi/fmm2009/fmm2009book.pdf>

25. Кривошия Р. В. Про одну множину чисел, заданих в термінах частоти нуля  $s$ -кової системи числення. Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання: матеріали конф., 18–20 січня 2023 р. С. 19–20.

26. Кронін Г.В. Побудова фракталів. Навчальна майстерня. Комп'ютерні інструменти в освіті. 2017. №5. С.73–80

27. Мазуренко, Н. І. Фрактальна геометрія. Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2010. 65 с. Режим доступу: [https://katg.pnu.edu.ua/wp-content/uploads/sites/97/2020/02/book\\_maz\\_fractal\\_geom\\_2010.pdf](https://katg.pnu.edu.ua/wp-content/uploads/sites/97/2020/02/book_maz_fractal_geom_2010.pdf)

28. Малова Ю. П. Метод координат і його можливості. Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», 26–27 червня 2013 р. К.: НУХТ, 2013. С. 146–148.

29. Мамчур М. Деякі факти про математичні формули. Математика, що нас оточує: минуле, сучасне, майбутнє: матеріали ІХ Всеукраїнської конференції курсантів та студентів. Львів: Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, 2023. С. 132–133.

30. Мартинюк О. В., Працьовитий М. В., Правіцка Н. С. Геометричні перетворення в математичній освіті школярів і майбутніх учителів математики. Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання: матеріали конф., 18–20 січня 2023 р. С. 141–143.

31. Мартинюк О. В., Працьовитий М. В., Правіцка Н. С. Геометричні перетворення в математичній освіті школярів і майбутніх

учителів математики. Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання: матеріали конференції, 18–20 січня 2023 року. Київ: УДУ імені Михайла Драгоманова, 2023. С. 141–143.

32. Миськів О. В. Математика та мистецтво. Математика, що нас оточує: минуле, сучасне, майбутнє: матеріали ІХ Всеукраїнської конференції курсантів та студентів. Львів: Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, 2023. С. 47–48.

33. Нестеренко О. Б., Арендар К. М. Краса і сила фракталів. Платформа 2. Інноватика в науці: матеріали І Всеукраїнської конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених «Інноватика в освіті, науці та бізнесі: виклики та можливості», 2023. Київ, 2023. С. 295–301.

34. Працьовитий М. В., Гетьман Б. І., Задніпряний М. В. Ряди Сільвестера і Енгеля. Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», 26–27 червня 2013 р. – К.: НУХТ, 2013. – С. 52–54.

35. Працьовитий М. В., Головій М. С., Симоненко Ю. О. Системи зображення дійсних чисел. Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання: матеріали конф., 18–20 січня 2023 р. С. 27–29.

36. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. К: Видавництво НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998. 296 с.

37. Ткаченко А. В., Бурдело Є. В., Кушлик-Дивульська О. І. Фрактали та геометрія природи. Теорія і практика використання інформаційних технологій в умовах цифрової трансформації освіти: матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції, 29 червня 2023 року, м. Київ. Київ: Вид-во УДУ імені Михайла Драгоманова, 2023. С. 126–129.

38. Трушина А. А. Фрактальні властивості множини неповних сум числових рядів: кваліфікаційна робота на здобуття освітнього

ступеня магістра за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика). Суми: Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, 2021. – 61 с.

39. Шакірова Л. Інтеграція фракталів у факультативне навчання старшої школи в контексті розвитку професійної освіти в Україні. Актуальні проблеми професійної та технологічної освіти: погляд у майбутнє : матер. Всеукр. студ. наук.-практ. конф. (Умань, 10 жовтня 2024 р.). Умань, 2024. С. 334–336.

40. Шумик О. Фрактал – краса математики. Математика, що нас оточує: минуле, сучасне, майбутнє: матеріали VII Всеукраїнської конференції курсантів та студентів. Львів: Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, 2023. С. 115–117.

41. Яськов Н. В., Завгородній В. В. Дослідження властивостей та галузей практичного застосування фракталів. Інформаційні технології та цифрова економіка: матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції. Київ: Видавничий центр ДУІТ, 2024. С. 187–188.