

Міністерство освіти і науки України
Херсонський державний університет
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу



Кузьмич Л.В.,
Мельник І.І.

Геометрія

Навчально-методичний посібник для студентів
спеціальностей: “Інформатика”, “ПМСО. Математика”



Херсон – 2004

Міністерство освіти і науки України
Херсонський державний університет
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

Кузьмич Л.В.,
Мельник І.І.

Геометрія

Навчально-методичний посібник для студентів
спеціальностей: “Інформатика”, “ПМСО. Математика”

Херсон – 2004

Навчально-методичний посібник
розглянуто на засіданні навчально-
методичної комісії факультету
фізико-математичних наук та
інформаційних технологій
(протокол № 22 від 12.01.2003 р.)

Схвалено навчально-методичною
комісією університету
(протокол № 2 від 27.05.2004 р.)

Рекомендовано до видання Вченою радою Херсонського державного
університету (протокол № 9 від 07.06.2004 р.)

Укладачі: **Кузьмич Л.В.** – кандидат педагогічних наук, доцент;
Мельник І.І. – кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рецензенти: **Шиловська О.К.** – кандидат фізико-математичних наук,
доцент;
Самойленко В.Г. – кандидат фізико-математичних наук,
доцент.

ЗМІСТ

Заняття 1.....	5
Заняття 2.....	7
Заняття 3.....	11
Заняття 4.....	15
Заняття 5.....	20
Заняття 6.....	27
Заняття 7.....	32
Заняття 8.....	36
Заняття 9.....	40
Заняття 10.....	43
Заняття 11.....	46
Заняття 12.....	49
Заняття 13.....	53
Заняття 14.....	60
Заняття 15.....	64
Заняття № 16.....	64
Заняття № 17.....	70
Заняття № 18.....	74

Кузьмич Л.В., Мельник І.І.

Геометрія: Навчально-методичний посібник для студентів спеціальностей:
“Інформатика”, “ПМСО. Математика”. – Херсон: Видавництво ХДУ, 2004. –
80 с.

© Кузьмич Л.В., 2004
© Мельник І.І., 2004
© ХДУ, 2004

Курс "Геометрія" має на меті допомогти майбутнім спеціалістам з прикладної математики краще засвоїти програмний матеріал, оволодіти різними математичними методами, навчитися вільно застосовувати їх на практиці. Курс формує просторову уяву у взаємозв'язку з аналітичними методами, з груповою і структурною точками зору на геометрію; дає ґрунтовні загальні уявлення про сучасний аксіоматичний метод, елементи многовимірної геометрії, афінного і евклідового просторів, неевклідових геометрій, топологій, тобто формує достатньо широкий погляд на геометрію та її методи і на елементарну геометрію з точки зору вищої; дає достатні знання і навички для успішного викладання геометрії в школі, кваліфікованого ведення факультативних занять, причому виробляє здатність здійснювати це на базі довідкового навчального посібника або підручника. Завдання, що запропоновані для самостійного розв'язування, доступні кожному студентові.

Даний посібник входить у серію видань методичних посібників для студентів по курсу "Геометрія". Тут збережено основні методичні установки: головна увага надається суті питань, що розглядаються, природничим, геометричним витокам понять, важлива роль також відводиться техніці розв'язування задач. Така методична установка сприяє розв'язанню важливої задачі — давати глибокі та міцні знання основ науки, виробляти вміння та навички застосовувати їх на практиці.

Книга складається з окремих параграфів у вигляді занять, які розбиті на пункти. Нумерація означень, теорем, формул, прикладів, задач дається в межах параграфа. Кожен параграф містить, крім теоретичного матеріалу, детально розв'язані приклади. В кінці кожного параграфу наводяться вправи для самоперевірки та домашньої роботи.

Заняття 1.

Тема: Прямокутні Декартові координати на площині.

Література: (1), ч. I, §§1-7. Р.1; (2), §8.

Основні питання теми:

- 1) Відстань між точками $A_1(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$ виражається через координати цих точок за формулою $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.
- 2) Поділ відрізка у даному відношенні полягає в тому, що необхідно знайти координати x та y точки A , яка ділить відрізок $A_1 A_2$ у відношенні $\lambda_1 : \lambda_2$, і виражається формулами: $x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$.
- 3) Рівняння кола записується у виді $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$, де $A(x_0, y_0)$ — довільна точка кола, її відстань від центра $A_0(x_0, y_0)$ дорівнює R .

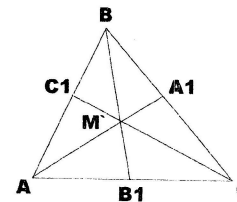
Приклад 1. Знайти координати точки, яка симетрична точці $A(x, y)$ відносно осі Ox , осі Oy , відносно початку координат.

Розв'язування. Використовуючи формули поділу відрізка навпіл $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ і позначаючи координати симетричної точки $A'(x', y')$, отримаємо $x = \frac{x' + x}{2}$, $0 = \frac{y' + y}{2}$ — координати $(x, 0)$ точки перетину відрізка AA' з віссю Ox . Звідси отримаємо: $x' = x$, $y' = -y$. Отже, координати точки A' , яка симетрична точці $A(x, y)$ відносно осі Ox , будуть x та $-y$: $A'(x, -y)$.

Нехай точка A'' , симетрична A відносно осі Oy має координати $A''(x'', y'')$. Аналогічно до попереднього отримаємо: $0 = \frac{x + x''}{2}$, $y = \frac{y + y''}{2}$, звідки $x'' = -x$, $y'' = y$. Отже, точка $A''(-x, y)$.

Координати точки $A'''(x''', y''')$, симетричної відносно початку координат, обчислюються аналогічно: $0 = \frac{x + x'''}{2}$, $0 = \frac{y + y'''}{2}$, звідки $x''' = -x$, $y''' = -y$. Отже, точка $A'''(-x, -y)$.

Відповідь: $A'(x, -y)$, $A''(-x, y)$, $A'''(-x, -y)$.



Приклад 2. Дано координати вершин трикутника $(x_1; y_1); (x_2; y_2); (x_3; y_3)$. Знайти координати точки перетину медіан.

Розв'язування. Позначимо точку перетину медіан $M'(x', y')$, основу медіани $CS_1(x_1', y_1')$. Тоді $x_1' = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_1' = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Точка M перетину медіан ділить відрізок CS_1 у відношенні $CS_1M : MS_1 = 1 : 2$. За формулою поділу відрізка у даному

відношенні отримаємо: $x' = \frac{2 \cdot x_1' + 1 \cdot x_3}{2 + 1} = \frac{2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + x_3}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$,

$$y' = \frac{2 \cdot y_1' + 1 \cdot y_3}{2 + 1} = \frac{2 \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} + y_3}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Відповідь: $M(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$

Приклад 3. Які особливості є у розташуванні кола $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$, де $a^2 + b^2 - c > 0$, відносно системи координат, якщо: а) $a = 0$; б) $b = 0$; в) $c = 0$; г) $a = 0$; б) $b = 0$; д) $a = 0$; с) $c = 0$; е) $b = 0$; с) $c = 0$?

Розв'язування. Зведемо рівняння кола $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ до виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0$. Це можна зробити, виділивши повні квадрати

$$(x^2 + 2ax + a^2) + (y^2 + 2by + b^2) - (a^2 + b^2 - c) = 0,$$

або $(x + a)^2 + (y - b)^2 - (\sqrt{a^2 + b^2 - c})^2 = 0$. Таким чином, отримали рівняння кола з центром у точці $(-a; -b)$ і радіусом $\sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

а) Якщо $a = 0$, то центр кола має координати $(0; -b)$ і лежить на осі Oy , радіус кола дорівнює $\sqrt{b^2 - c}$.

б) Якщо $b = 0$, то центр кола має координати $-a(0)$ і лежить на осі Ox .

с) Якщо $c = 0$, то центр кола має координати $(-a; -b)$, радіус кола дорівнює $\sqrt{a^2 + b^2}$ – коло проходить через початок координат.

д) Якщо $a = 0, b = 0$, то центр кола має координати $(0; 0)$, радіус кола дорівнює $\sqrt{-c}$; при цьому, якщо $c = 0$, то радіус дорівнює нулю, і коло вироджується в точку (початок координат); якщо $c > 0$, то радіус – уявне число, і кола не існують.

е) Якщо $a = 0, c = 0$, то центр кола має координати $(0; -b)$ і лежить на осі Oy , радіус кола дорівнює $\sqrt{b^2} = b$, коло проходить через початок координат.

ф) Якщо $b = 0, c = 0$, то центр кола лежить на осі Ox , коло проходить через початок координат.

Задачі для самостійного розв'язування

1. З точки $A(2; 3)$ опущено перпендикуляр на вісь Ox . Знайти координати основи перпендикуляра.

$[(2; 0)]$.

2. Через точку $A(2; 3)$ проведена пряма, паралельна до осі Ox . Знайти координати точки перетину цієї прямої з віссю Oy

$[(0; 3)]$.

3. Знайти геометричне місце точок (ГМТ) площини XY , для яких абсциса $x = 3$.

[Пряма, паралельна осі Oy , що проходить через точку $x = 3$].

4. Знайти відстань від точки $(-3; 4)$ до осі Ox (осі Oy).

$[4; 3]$.

5. Знайти ГМТ площини XY , для яких $x = y$.

[Бісектриса I та II координатних кутів].

6. Знайти ГМТ площини XY , для яких абсциса $x = -y$.

7. Довести, що точки $A(4; -2)$, $B(1; 2)$, $C(-2; 6)$ лежать на одній прямій. Яка з цих точок лежить між двома іншими?

Вказівка. Скористатися співвідношенням $AC = AB + BC$ для точок, що лежать на одній прямій.

8. Знайти на осі Ox точку, яка рівновіддалена від точок $(1; 2)$ та $(2; 3)$.

$[(4; 0)]$

9. Відомий один кінець відрізка $(1; 1)$ та його середина $(2; 2)$. Знайти другий кінець відрізка.

$[(2; 3)]$

10. Дано координати середини сторін трикутника $(x_1; y_1); (x_2; y_2); (x_3; y_3)$. Знайти координати вершин трикутника.

$$\begin{bmatrix} (x_1 - x_2 + x_3; y_1 - y_2 + y_3); \\ (x_1 + x_2 - x_3; y_1 + y_2 - y_3); \\ (x_2 + x_3 - x_1; y_2 + y_3 - y_1) \end{bmatrix}$$

Заняття 2.

Тема: Вектори на площині.

Література: (1), ч. I, §§1-8. Р.1; (2), §10.

Основні питання теми:

1) Паралельне перенесення: задається формулами $x' = x + a$; $y' = y + b$, де $(x; y)$ – координати даної точки A ; $(x'; y')$ – координати точки A' , яка отримана з точки A за допомогою паралельного перенесення; a, b – постійні величини, які залежать від вибору системи координат.

2) Координати вектора: обчислюються за формулами: $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, де $(a_1; a_2)$ – координати вектора $\vec{AB}$, $(x_1; y_1)$ – координати точки A , $(x_2; y_2)$ – координати точки B . Координати вектора $\vec{a}$ позначаються так:

$\vec{a}(a_1; a_2)$. Вектор $\vec{a}$ можна позначати також $(a_1; a_2)$. Координати нульового вектора $\vec{0}$ дорівнюють нулю, тобто $\vec{0}(0;0)$. Із формули відстані між двома точками випливає, що модуль (абсолютна величина) вектора $\vec{a}$ з координатами $(a_1; a_2)$ дорівнює $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

3) Додавання векторів, заданих своїми координатами, проводиться за формулою:

$$\vec{a}(a_1, a_2) + \vec{b}(b_1, b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

Які б не були точки А, В, С, має місце векторна рівність (правило трикутника):

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

Різниця векторів обчислюється так: $\vec{a}(a_1, a_2) - \vec{b}(b_1, b_2) = \vec{c}(a_1 - b_1, a_2 - b_2)$.

Множення вектора на число проводиться за формулою:
 $\vec{a}(a_1, a_2) \cdot \lambda = \vec{b}(a_1 \lambda, a_2 \lambda)$.

Модуль (абсолютна величина) вектора $\lambda \vec{a}$ обчислюється за формулою:

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|.$$

При цьому напрям вектора $\lambda \vec{a}$ збігається з напрямом вектора $\vec{a}$ (вектори співнаправлені), якщо $\lambda > 0$, і протилежний напрямку вектора $\vec{a}$ (вектори протилежно напрямлені), якщо $\lambda < 0$.

4) Колінеарними називаються вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

У колінеарних векторів відповідні координати пропорційні, і, навпаки, якщо у двох векторів відповідні координати пропорційні, то вектори колінеарні.

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ відмінні від нульового і неколінеарні, то будь-який вектор $\vec{c}$ можна представити, причому єдиним способом, у виді рівності:

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}.$$

Це представлення називається розкладанням вектора за двома неколінеарними векторами.

5) Скалярним добутком векторів $\vec{a}(a_1, a_2) \cdot \vec{b}(b_1, b_2)$ називається число, що дорівнює сумі добутків відповідних координат: $a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Скалярний добуток векторів має розподільну (дистрибутивну) властивість:
 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ можна також визначити за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Приклад 1. Знайти величини a та b у формулах $x' = x + a$, $y' = y + b$, якщо відомо, що точка (1;2) переходить у точку (3;4).

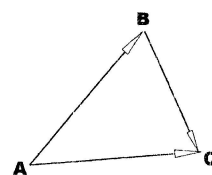
Розв'язування. Маємо: $x = 1, y = 2, x' = 3, y' = 4$. Тоді за формулами паралельного перенесення отримаємо: $3 = 1 + a, 4 = 2 + b$, звідки $a = 2, b = 2$.

Відповідь: $a = 2, b = 2$.

Приклад 2. Чи існує паралельне перенесення, при якому точка (1;2) переходить у точку (3;4), а точка (1;0) – у точку (-1;0)?

Розв'язування. З прикладу 1 бачимо, що паралельне перенесення, яке точку (1;2) переводить у точку (3;4), має вид: $x' = x + 2, y' = y + 2$. Запис паралельного перенесення, при якому точка (1;0) переходить у точку (-1;0), знаходиться аналогічно: $-1 = 0 + a, 0 = 0 + b$, звідки $a = -1, b = -1$. Тоді отримуємо формули паралельного перенесення $x' = x - 1, y' = y - 1$. Отримані записи паралельного перенесення різні, тому що у них різні величини a та b . Отже, одного паралельного перенесення, при якому точки (1;2) та (1;0) переходять відповідно у точки (3;4) та (-1;0), не існує.

Приклад 3. Довести, що для векторів $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AC}$ має місце нерівність $|\vec{AB}| + |\vec{BC}| \geq |\vec{AC}|$.



Розв'язування. З трикутника ABC бачимо, що $|\vec{AB}|, |\vec{BC}|, |\vec{AC}|$ – це довжини сторін цього трикутника.

Тому, якщо точки А, В, С лежать на одній прямій (точка В між А та С), то $|\vec{AB}| + |\vec{BC}| = |\vec{AC}|$. Якщо точки А, В, С не лежать на одній прямій, то $|\vec{AB}| + |\vec{BC}| > |\vec{AC}|$. Для обох випадків має місце нерівність: $|\vec{AB}| + |\vec{BC}| \geq |\vec{AC}|$.

Приклад 4. Модуль вектора $\lambda \vec{a}$ дорівнює 5. Знайти λ , якщо $\vec{a}(-6;8)$.

Розв'язування. Маємо: $|\vec{a}| = 5, |\vec{a}| = \sqrt{36 + 64} = 10$. За формулою $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ отримаємо: $5 = |\lambda| \cdot 10, |\lambda| = \frac{1}{2}, \lambda = \pm \frac{1}{2}$.

Відповідь: $\lambda = \pm \frac{1}{2}$.

Приклад 5. Знайти модуль вектора $\vec{a} + \vec{b}$, якщо $\vec{a}(1; -4); \vec{b}(-4; 8)$.

Розв'язування. Дано: $\vec{a}(1; -4); \vec{b}(-4; 8)$. Знайти: $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Знайдемо координати вектора $\vec{a} + \vec{b}$: $\vec{a} + \vec{b}(1-4; -4+8) = \vec{a} + \vec{b}(-3; 4)$. Знайдемо модуль (довжину) вектора $\vec{a} + \vec{b}$: $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{9+16} = 5$.

Відповідь: $|\vec{a} + \vec{b}| = 5$.

Приклад 6. При якому значенні λ вектор $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ перпендикулярний до вектора $\vec{b}$, якщо $\vec{a}(1; 0); \vec{b}(1; 1)$.

Розв'язування. Знайдемо координати вектора $\vec{a} + \lambda \vec{b}$. Використовуючи означення суми двох векторів і добутку вектора на число, отримуємо: $\vec{a} + \lambda \vec{b}(1 + \lambda; 0 + \lambda)$. Оскільки вектори $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ та $\vec{b}$ за умовою перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю. Використовуючи означення скалярного добутку, запишемо:

$$(1 + \lambda) \cdot 1 + \lambda \cdot 1 = 0; \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Приклад 7. Вектори $\vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярні. Довести, що $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Розв'язування. Тому що вектори $\vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$. Використовуючи розподільний закон скалярного добутку, отримаємо: $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$, звідки $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ або $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, що і треба було довести.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Довжина вектора $(5; m)$ дорівнює 13. Знайти m .

$$[m = \pm 12]$$

2. Дано вектор $\vec{a}(3; 4)$. Знайти вектор $\vec{b}$, довжина якого вдвічі більша і напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$.

Розв'язування. Нехай координати вектора $\vec{b}(b_1; b_2)$. Тоді вектори співнаправлені (колінеарні), отже, їх координати пропорційні: $3 = \lambda b_1, 4 = \lambda b_2 (\lambda > 0)$. Маємо: $b_1 = \frac{3}{\lambda}, b_2 = \frac{4}{\lambda}$. Знаходимо довжини векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{9+16} = 5, |\vec{b}| = \sqrt{\frac{9}{\lambda^2} + \frac{16}{\lambda^2}} = \frac{5}{\lambda}. \text{ За умовою задачі } |\vec{b}| = 2|\vec{a}|. \text{ Тому } \frac{5}{\lambda} = 10, \lambda = \frac{1}{2}.$$

Знаходимо координати вектора $\vec{b}$: $b_1 = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6; b_2 = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$.

$$[\vec{b}(6; 8)]$$

3. Три вектори мають спільний початок O , а кінці у вершинах трикутника ABC . Показати, що $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ тоді і тільки тоді, коли O є точкою перетину медіан трикутника.

Вказівка. На векторах $\vec{OA}, \vec{OB}$ побудувати паралелограм зовні трикутника ABC .

4. Дано чотири точки $A(0; 0), B(-1; 1), C(0; 2), D(1; 1)$. Довести, що $ABCD$ — квадрат.

5. Довести, що вектори $\vec{a}(1; 2), \vec{b}(0.5; 1)$ співнаправлені, а вектори $\vec{c}(-1; 2), \vec{d}(0.5; -1)$ протилежно напрямлені.

6. Дано вектори із спільним початком $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$. Довести, що $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$.

7. Знайти абсолютну величину вектора $\vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{a}(1; 4); \vec{b}(-4; 8)$.

$$[13]$$

8. При якому значенні n вектори $\vec{a}(n; 1); \vec{b}(4; n)$ будуть колінеарні і однаково напрямлені?

$$[n = 2]$$

9. Довести за допомогою векторів, що діагоналі ромба перпендикулярні.

10. Знайти кут між векторами $\vec{a}(1; 2); \vec{b}(1; -\frac{1}{2})$.

$$[90^\circ]$$

Заняття 3.

Тема: Пряма на площині.

Література: (1), р. III, §§1-5. (3), р. II; §17-22.

Основні питання теми:

1. Загальний вид рівняння прямої: $Ax + By + C = 0$, де x, y — поточні (змінні) координати будь-якої точки прямої, A, B, C — постійні.

Якщо $A_0(x_0; y_0)$ – точка на прямій, $\vec{n}(a; b)$ – вектор з координатами $a; b$, то рівняння прямої, яка проходить через точку A_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$, матиме вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Отже, коефіцієнти A та B рівняння прямої є координатами вектора, який перпендикулярний до цієї прямої.

2. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $(x_1; y_1)$ та $(x_2; y_2)$, має вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

3. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y = kx + q$.

Коефіцієнт k з точністю до знака дорівнює тангенсу гострого кута α , який утворює пряма з віссю Ox : $k = \operatorname{tg} \alpha$. Коефіцієнт k у рівнянні прямої називається кутовим коефіцієнтом прямої.

4. Умова паралельності двох прямих: а) якщо прямі задано загальними рівняннями

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0, \end{aligned} \quad \text{то вони паралельні, якщо } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2};$$

б) якщо прямі задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + q_1$, $y = k_2x + q_2$, то $k_1 = k_2$.

5. Умова перпендикулярності двох прямих: а) $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$;

$$\text{б) } k_1 \cdot k_2 = -1 \quad (k_1 = -\frac{1}{k_2}).$$

6. Розташування прямої відносно системи координат залежить від коефіцієнтів A, B, C у загальному рівнянні прямої. Можуть бути такі випадки:

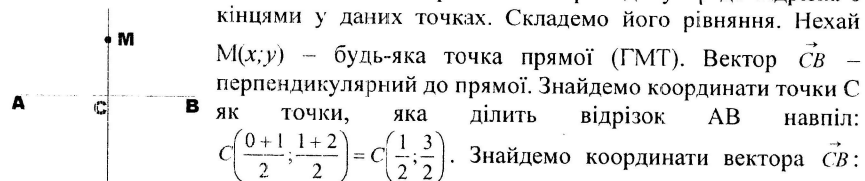
а) $A=0$ – пряма паралельна осі Ox ; якщо і $C=0$, то пряма співпадає з віссю Ox ;

б) $B=0$ – пряма паралельна осі Oy , або співпадає з нею, якщо і $C=0$;

в) $C=0$ – пряма проходить через початок координат.

Приклад 1. Скласти рівняння геометричного місця точок (ГМТ), рівновіддалених від двох даних точок $(0;1)$ та $(1;2)$.

Розв'язування. Шуканим ГМТ є серединний перпендикуляр до відрізка з кінцями у даних точках. Складемо його рівняння. Нехай



$M(x; y)$ – будь-яка точка прямої (ГМТ). Вектор $\vec{CB}$ – перпендикулярний до прямої. Знайдемо координати точки C як точки, яка ділить відрізок AB навпіл: $C(\frac{0+1}{2}; \frac{1+2}{2}) = C(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$. Знайдемо координати вектора $\vec{CB}$:

$\vec{CB}(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}) = \vec{CB}(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Запишемо рівняння прямої, яка проходить через дану точку $C(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ перпендикулярно до даного вектора $\vec{CB}(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$:

$$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(y - \frac{3}{2}) = 0; \quad \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}y - \frac{3}{4} = 0; \quad x + y - 2 = 0.$$

Відповідь: Шукане ГМТ – пряма $x + y - 2 = 0$.

Приклад 2. Довести, що три прямі $x + 2y = 3$; $2x - y = 1$; $3x + y = 4$ перетинаються в одній точці.

Розв'язування. Тому що координати точки перетину даних прямих задовольняють трьом даним рівнянням, то знайдемо розв'язок системи трьох рівнянь з двома змінними:

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x - y = 1, \\ 3x + y = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y, \\ x = \frac{1+y}{2}, \\ x = \frac{4-y}{3}, \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 1.$$

Отриманий розв'язок задовольняє трьом рівнянням, отже, $(1;1)$ – точка перетину трьох даних прямих.

Приклад 3. Скласти рівняння сторін правильного трикутника із стороною 1, взявши за осі координат одну із сторін і висоту, яка опущена на цю сторону.

Розв'язування. Оскільки довжина сторони A_1A_2 дорівнює одиниці, то легко обчислити координати вершин трикутника $A_1A_2A_3$. Маємо:

$$A_1(\frac{1}{2}; 0); A_2(0; \frac{\sqrt{3}}{2}); A_3(-\frac{1}{2}; 0).$$

Сторона A_1A_3 співпадає з віссю Ox , тому $y=0$ і є її рівнянням.

Рівняння двох інших сторін складемо, використовуючи рівняння прямої, яка проходить

через дві точки: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

$$\text{Для сторони } A_1A_2: \frac{x - \frac{1}{2}}{0 - \frac{1}{2}} = \frac{y - 0}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0}; \quad \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0; \quad 2\sqrt{3}x + 2y - \sqrt{3} = 0.$$

$$\text{Аналогічно для сторони } A_2A_3: 2\sqrt{3}x - 2y + \sqrt{3} = 0.$$

$$\text{Відповідь: } y = 0; \quad 2\sqrt{3}x + 2y - \sqrt{3} = 0; \quad 2\sqrt{3}x - 2y + \sqrt{3} = 0.$$

Приклад 4. Знайти внутрішні кути трикутника, який обмежений прямими $x + 2y = 0$, $2x + y = 0$, $x + y = 1$.

Розв'язування. Кутом між прямими називається один із кутів, який менший розгорнутого. Кут між прямими дорівнює куту між перпендикулярними до них векторами. Тоді відповідно отримуємо вектори, перпендикулярні до даних

прямих: $\vec{n}_1(1;2); \vec{n}_2(2;1); \vec{n}_3(1;1)$. Кути будемо обчислювати за формулою $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$.

Кут φ_1 між прямими $x+2y=0, x+y=1$ обчислюється так:

$$\cos \varphi_1 = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_3|} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}; \quad \varphi_1 = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Кут φ_2 між прямими $2x+y=0, x+y=1$ обчислюється аналогічно:

$$\cos \varphi_2 = \frac{\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3}{|\vec{n}_2| |\vec{n}_3|} = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{3}{\sqrt{10}}; \quad \varphi_2 = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Кут φ_3 між прямими $2x+y=0, x+2y=0$ знайдемо, як різницю $\varphi_3 = \pi - (\varphi_1 + \varphi_2) = \pi - 2 \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}.$

$$\text{Відповідь: } \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}; \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}; \pi = 2 \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Приклад 5. Знайти кут між прямими, які задані рівняннями в параметричній формі

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 t + a_1, & x &= \alpha_2 t + a_2, \\ y &= \beta_1 t + b_1, & y &= \beta_2 t + b_2. \end{aligned}$$

Розв'язування. Рівняннями прямої у параметричній формі називаються рівняння виду:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 t, \\ y &= y_0 + a_2 t, \end{aligned} \quad (*)$$

де x, y — змінні координати довільної точки M прямої, x_0, y_0 — координати фіксованої точки M_0 цієї прямої, a_1, a_2 — координати вектора $\vec{a}$, що паралельний до прямої. Вектор $\vec{a}$ називають *направляючим вектором прямої*. Буква t називається параметром; кожному значенню t відповідає певна точка M цієї прямої.

З першого рівняння (*) знайдемо значення t і підставимо його у друге рівняння (вилучимо параметр t), тоді отримаємо рівняння шуканої прямої уже в іншій формі, яке називається *канонічним рівнянням прямої*:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

Розглянемо тепер дану задачу. З рівнянь прямих виділимо координати направляючих векторів цих прямих: для першої прямої $\vec{p}(\alpha_1, \beta_1)$, для другої

прямої $\vec{q}(\alpha_2, \beta_2)$. Кут між двома прямими дорівнює куту між їх направляючими векторами, тому кут між прямими обчислимо за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}},$$

$$\text{звідки } \varphi = \arccos \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}.$$

$$\text{Відповідь: } \arccos \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}.$$

Приклад 6. Знайти умову паралельності (перпендикулярності) прямих, якщо одна з них задана рівнянням $Ax + By + C = 0$, а інша — рівняннями у параметричній формі $x = \alpha t + \beta$, $y = \gamma t + \delta$.

Розв'язування. Вектор $\vec{n}(a, b)$ перпендикулярний до прямої $Ax + By + C = 0$, а $x = \alpha t + \beta$,

вектор $\vec{p}(\alpha, \gamma)$ паралельний прямій $y = \gamma t + \delta$. Тому умовою паралельності цих прямих є перпендикулярність векторів $\vec{n}$ та $\vec{p}$, а це означає, що їх скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{n} \cdot \vec{p} = 0$ або у координатах $a\alpha + b\gamma = 0$.

Умовою перпендикулярності прямих є паралельність (колінеарність) векторів $\vec{n}$ та $\vec{p}$, тобто їх координати відповідно пропорційні: $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\gamma}$.

Відповідь: умова паралельності $a\alpha + b\gamma = 0$, умова перпендикулярності $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\gamma}$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $(-1;1)$ та $(1;1)$.
2. Чому дорівнює коефіцієнт C у рівнянні прямої $x + y + C = 0$, якщо вона проходить через точку $(1;2)$?

[3]

3. Скласти рівняння прямої, знаючи, що вона проходить через початок координат і точку $(2;3)$.

$[y - 3 = 0]$

4. При якій умові пряма $Ax + By + C = 0$ перетинає додатну піввісь X ?

$[\frac{C}{A} < 0]$

5. Показати, що прямі $Ax + By + C = 0$ та $Ax - By - C = 0$ розташовані симетрично відносно початку координат.

6. Показати, що прямі $Ax + By + C = 0$ та $Bx - Ay + C = 0$ перетинаються під прямим кутом.

7. Знайти умову паралельності (перпендикулярності) прямих, які задано рівняннями в параметричній формі:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 t + a_1, & y &= \alpha_2 t + a_2, \\ x &= \beta_1 t + b_1, & y &= \beta_2 t + b_2. \end{aligned}$$

8. Показати, що рівнянням $a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 - c^2 = 0$ задається пара прямих. Знайти рівняння кожної прямої окремо.

Вказівка: Скористуватися формулами скороченого множення.

9. Показати, що три точки $(x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3)$ тоді і тільки тоді лежать на одній прямій, якщо

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вказівка: В означенні замінити координати однієї з точок поточними координатами і дослідити отримані рівняння.

10. Довести, що прямі $x + 2y = 3$ та $2x + 4y = 3$ не перетинаються.

Заняття 4.

Тема: В'язка прямих.

Література: (1), р. III, §4-5. (3), §23.

Основні питання теми:

Рівняння в'язки прямих: $\lambda(ax + by + c) + \mu(a_1x + b_1y + c_1) = 0$. (*)

Це рівняння можна переписати у більш простому виді, якщо обидві частини рівняння поділити на λ , при умові, що $\lambda \neq 0$.

Позначимо $\frac{\mu}{\lambda} = \alpha$, тоді $ax + by + c + \alpha(a_1x + b_1y + c_1) = 0$ — рівняння в'язки прямих, еквівалентне рівнянню (*).

У рівнянні в'язки прямих (*) числа λ та μ мають простий геометричний зміст: це координати направляючого вектора прямої (*), яку це рівняння і визначає.

1. Умовою того, що три прямі

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ належать одній в'язці, буде:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Як вже було сказано вище, умовою колінеарності (належності одній

прямій) трьох точок $(x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3) \in$: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ або $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

2. Рівняння прямої в *нормальній формі* називається рівняння $ax + by + c = 0$, якщо $a^2 + b^2 = 1$. Щоб загальне рівняння прямої звести до нормальної форми, достатньо поділити його на $\pm\sqrt{a^2 + b^2}$. Рівняння прямої в нормальній формі має такий геометричний зміст: якщо в його ліву частину підставити координати будь-якої точки площини, то отримається число, що дорівнює з точністю до знаку відстані від цієї точки до прямої.

Приклад 1. В сімействі (в'язці) прямих, які задано рівняннями $a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ (λ — параметр сімейства), знайти пряму, паралельну (перпендикулярну) до прямої $ax + by + c = 0$.

Розв'язування. Рівняння в'язки $a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ при деякому значенні параметра λ задає шукану пряму. Отже, для розв'язування задачі необхідно знайти таке значення λ , при якому шукана пряма $a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ паралельна (перпендикулярна) до даної прямої $ax + by + c = 0$. Для цього рівняння шуканої прямої представимо у загальному виді:

$$a_1x + b_1y + c_1 + \lambda a_2x + \lambda b_2y + \lambda c_2 = 0,$$

$$\text{або} \quad (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + (c_1 + \lambda c_2) = 0. \quad (**)$$

Тепер використаємо умову паралельності двох прямих: (**) і $ax + by + c = 0$, які задані у загальному виді:

$$\frac{a_1 + \lambda a_2}{a} = \frac{b_1 + \lambda b_2}{b}.$$

З отриманої рівності знайдемо λ :

$$a_1b + \lambda a_2b = b_1a + \lambda ab_2, \quad \lambda(a_2b - b_2a) = b_1a - a_1b, \quad \lambda = \frac{b_1a - a_1b}{a_2b - b_2a}.$$

Підставимо отримане значення параметра λ у рівняння в'язки (шуканої прямої) (**) або в одне із еквівалентних йому:

$$\left(a_1 + \frac{b_1a - a_1b}{a_2b - b_2a} \cdot a_2\right)x + \left(b_1 + \frac{b_1a - a_1b}{a_2b - b_2a} \cdot b_2\right)y + c_1 + \frac{b_1a - a_1b}{a_2b - b_2a} \cdot c_2 = 0,$$

отримаємо рівняння прямої, що паралельна прямій $ax + by + c = 0$.

Тепер знайдемо пряму, що перпендикулярна до даної прямої $ax + by + c = 0$. Використовуючи умову перпендикулярності двох прямих (**) та $ax + by + c = 0$, отримаємо $a(a_1 + \lambda a_2) + b(b_1 + \lambda b_2) = 0$. З отриманої рівності знайдемо λ :

$$a_1a + \lambda a_2a + b_1b + \lambda b_2b = 0, \quad \lambda(a_2a + b_2b) = -a_1a - b_1b, \quad \lambda = -\frac{a_1a + b_1b}{a_2a + b_2b}.$$

Значення λ підставимо у рівняння (**):

$$\left(a_1 - \frac{a_1 a - b_1 b}{a_2 a - b_2 b} \cdot a_2\right)x + \left(b_1 - \frac{a_1 a - b_1 b}{a_2 a - b_2 b} \cdot b_2\right)y + c_1 - \frac{a_1 a - b_1 b}{a_2 a - b_2 b} \cdot c_2 = 0,$$

отримаємо рівняння прямої, що перпендикулярна даній прямій $ax + by + c = 0$.

Приклад 2. Не обчислюючи координат вершин трикутника ABC, сторони якого задано рівняннями $5x - 2y + 6 = 0$, $4x - y + 3 = 0$, $x + 3y - 7 = 0$, написати рівняння прямої, що проходить через вершину A паралельно до протилежних сторін.

Розв'язування. Нехай у вершині A перетинаються сторони $5x - 2y + 6 = 0$, $4x - y + 3 = 0$. Рівняння в'язки з центром A буде мати вид:

$$5x - 2y + 6 = \lambda(4x - y + 3) = 0.$$

В цій в'язці необхідно знайти пряму, паралельну до прямої $x + 3y - 7 = 0$.

Запишемо рівняння шуканої прямої (рівняння в'язки) у виді загального рівняння (аналогічно до попереднього прикладу): $(5 + 4\lambda)x - (2 + \lambda)y + 6 + 3\lambda = 0$.

Використаємо умову паралельності:

$$\frac{5 + 4\lambda}{1} = \frac{-(2 + \lambda)}{3}, \quad 15 + 12\lambda = -2 - \lambda, \quad 13\lambda = -17, \quad \lambda = -\frac{17}{13}.$$

$$\text{Підставимо у рівняння в'язки: } 5x - 2y + 6 - \frac{17}{13}(4x - y + 3) = 0,$$

$$65x - 26y + 78 - 68x + 17y - 51 = 0,$$

$$\text{звідки остаточно отримаємо: } x + 3y - 9 = 0.$$

$$\text{Відповідь: } x + 3y - 9 = 0.$$

Приклад 3. Вияснити, що являє собою ГМТ, рівновіддалених від двох даних прямих, що перетинаються.

Розв'язування. Нехай $ax + by + c = 0$, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ – рівняння даних прямих в нормальній формі. Підставляючи координати будь-якої точки в ліву частину такого рівняння, отримаємо з точністю до знаку відстань цієї точки до прямої. Так як за умовою задачі кожна точка шуканого ГМТ рівновіддалена від двох даних прямих, які перетинаються, то $|ax + by + c| = |a_1x + b_1y + c_1|$. Це рівняння еквівалентне двом рівнянням прямих (після розкриття модуля): $ax + by + c = a_1x + b_1y + c_1$ та $ax + by + c = -(a_1x + b_1y + c_1)$. Очевидно, це прямі, що містять бісектриси кутів між двома прямими $ax + by + c = 0$ та $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, що перетинаються.

Приклад 4. Скласти рівняння бісектрис кутів між прямими $3x - 4y - 7 = 0$, $5x + 12y - 1 = 0$. (Частинний випадок прикладу 3).

Розв'язування. Зведемо рівняння до нормальної форми. Для цього поділимо перше на $\sqrt{9 + 16} = 5$, друге – на $\sqrt{25 + 144} = 13$.

Так як бісектриси – це ГМТ, рівновіддалених від сторін кута, тобто від прямих $3x - 4y + 7 = 0$, $5x + 12y - 1 = 0$, то відстані кожної точки бісектриси від цих

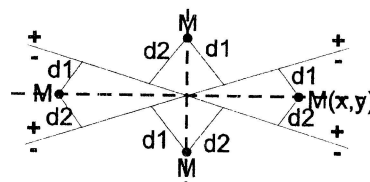
прямих рівні між собою: $\frac{|3x - 4y + 7|}{5} = \frac{|5x + 12y - 1|}{13}$. Це рівняння еквівалентне

двом рівнянням:

$$\frac{3x - 4y + 7}{5} = \frac{5x + 12y - 1}{13}, \text{ яке є рівнянням однієї із бісектрис, і}$$

$$\frac{3x - 4y + 7}{5} = -\frac{5x + 12y - 1}{13}, \text{ що є рівнянням другої бісектриси.}$$

Отримані рівняння бісектрис дозволяють відзначити важливу обставину, а саме:



для всіх точок $M(x, y)$ однієї із бісектрис функції $3x - 4y + 7 = 0$, $5x + 12y - 1 = 0$ мають однакові знаки (і перетворюються в нуль в точці перетину прямих); для всіх точок $M(x, y)$ іншої бісектриси ці функції різних знаків.

Після нескладних перетворень остаточно отримуємо рівняння шуканих бісектрис:

$$4x - 51y + 48 = 0, \quad 32x + 9y + 43 = 0.$$

Приклад 5. Скласти рівняння бісектриси того кута між двома прямими $x + y + 2 = 0$, $x + 7y + 3 = 0$, в якому лежить точка $A(2; -1)$.

Розв'язування. Підставимо координати точки A у ліві частини даних прямих, отримаємо: $2 - 1 + 2 = 3 > 0$, $2 - 7 + 3 = -2 < 0$. Значить, точка A лежить у тих півплощинах від даних прямих, для координат точок яких $x + y + 2 > 0$, $x + 7y + 3 < 0$. Шукана бісектриса проходить, отже, у тих областях між прямими, для координат точок яких функції $x + y + 2$, $x + 7y + 3$ мають різні знаки. Тому рівняння шуканої бісектриси (див. приклад 4) $\frac{x + y + 2}{\sqrt{2}} = -\frac{x + 7y + 3}{\sqrt{50}}$, або $6x + 12y + 13 = 0$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. У пучку $x + 2y - 3 + \lambda(x - y + 1) = 0$ знайти пряму, яка проходить через точку $M(4; 1)$.

$$[x + 11y - 15 = 0].$$

2. У пучку $\lambda(x - 2y + 1) + \mu(x - 3y) = 0$ знайти пряму, яка паралельна осі Ox .

$$[y - 1 = 0].$$

3. Дано рівняння сторін трикутника $x + 2y - 1 = 0$, $5x + 4y - 17 = 0$, $x - 4y + 11 = 0$. Скласти рівняння висоти трикутника до сторони $5x + 4y - 17 = 0$.

$$[4x - 5y + 22 = 0].$$

4. Вияснити, які із таких трійок прямих утворюють трикутник:

a) $3x - y = 0$, $x + 2y - 1 = 0$, $2x + 2y - 3 = 0$;

b) $2x - y + 1 = 0$, $3x + 3 + 1 = 0$, $x + 4y = 0$;

c) $x + 2 = 0$, $y + 3 = 0$, $x + y = 0$.

[a) та b)].

Вказівка: Використати умову належності трьох прямих одній в'язці.

5. Показати, що відстань між паралельними прямими $ax + by + c_1 = 0$,

$$ax + by + c_2 = 0 \text{ дорівнює } \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

6. Дано дві прямі $2x - y + 1 = 0$ і $x - 3y + 3 = 0$. Скласти рівняння бісектриси того кута між прямими, в якому лежить початок координат.

$$[(2\sqrt{2} - 1)x + (3 - \sqrt{2})y + \sqrt{2} - 3 = 0].$$

7. Знайти проекцію точки $(-5; 6)$ на пряму $7x - 13y - 105 = 0$.

$$[(2; -7)].$$

8. Знайти точку, симетричну точці $(-2; 9)$ відносно прямої $2x - 3y + 18 = 0$.

$$[(2; 3)].$$

9. Скласти рівняння прямих, які перпендикулярні до прямої $2x + 6y - 3 = 0$ і віддалені від точки $(5; 4)$ на відстань $\sqrt{10}$.

$$[3x - y - 21 = 0, 3x - y - 1 = 0].$$

10. Скласти рівняння бісектриси внутрішнього кута А трикутника, сторони якого BC, CA, та AB задано відповідно такими рівняннями: $x + y = 0$, $x - y = 0$, $x + 2y + 1 = 0$.

$$[(\sqrt{2} + \sqrt{5})x + (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})y + \sqrt{2} = 0].$$

Заняття 5.

Тема: Перетворення координат.

Література: (1), р. III, §6. (3), §13.

Основні питання теми:

1. Координати будь-якої точки $x'; y'$ відносно системи координат $x'Oy'$ виражаються через координати $x; y$ тієї ж точки в системі xOy за формулами:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1; \quad y' = a_2x + b_2y + c_2,$$

де $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ — рівняння осей x' та y' у нормальній формі в системі координат xOy .

Зведені формули перетворення координат еквівалентні формулам:

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + c_1; \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + c_2.$$

Знак “+” береться, якщо системи орієнтовані однаково, знак “-”, якщо системи орієнтовані протилежно. У цих формулах величини $\alpha; c_1; c_2$ мають такий геометричний зміст:

α — з точністю до 2π — кут, що утворений віссю x' з віссю Ox , а c_1, c_2 — координати старого початку в новій системі координат $x'y'$.

2. Якщо початок нової системи координат співпадає з початком старої системи координат і обидві системи мають однакову орієнтацію (обидві системи праві або обидві системи ліві), то формули перетворення координат будуть такими:

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha,$$

таким чином, перехід від однієї системи координат до іншої відбувається за допомогою повороту осей координат на кут α .

Якщо ж системи орієнтовані протилежно, то формули перетворення мають вид:

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad y' = x \sin \alpha - y \cos \alpha,$$

тобто перехід від однієї системи до іншої відбувається за допомогою повороту і осевої симетрії.

Перетворення однієї системи в іншу може відбуватись за допомогою паралельного перенесення. Тоді формули перетворення координат будуть такими:

$$x' = x + c_1; \quad y' = y + c_2.$$

Приклад 1. На площині xu введена нова система координат $x'u'$. Осі координат нової системи в старій системі xu задаються рівняннями $3x + 4y + 10 = 0$; $-4x + 3y - 15 = 0$. Знайти формули переходу від координат x, y до координат x', y' , якщо відомо, що старий початок координат належить першому квадранту в новій системі.

Розв'язування. Перш за все рівняння осей нової системи приведемо до нормальної форми:

$$\frac{3x + 4y + 10}{\sqrt{9 + 16}} = 0; \quad \frac{-4x + 3y - 15}{\sqrt{16 + 9}} = 0; \quad \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 2 = 0; \quad -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3 = 0.$$

Тепер формули перетворення в загальному вигляді можна записати так:

$$x' = \pm \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 2 \right); \quad y' = \pm \left(-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3 \right).$$

Необхідно вирішити питання про те, який знак “+” чи “-” необхідно взяти в кожній із формул. Так як за умовою задачі старий початок знаходиться в першому квадранті системи $x'y'$, то координати старого початку (c_1, c_2) мають бути додатними. В даному випадку повинно бути $c_1 = 2$, $c_2 = 3$. Для цього необхідно у першій формулі взяти знак “+”, а в другій — знак “-”. Тоді формули перетворення координат матимуть остаточно вид:

$$x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 2; \quad y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3.$$

Приклад 2. Лінія визначається рівнянням $y = \frac{k}{x}$ в старій системі координат. Знайти рівняння цієї лінії в новій системі координат $x' y'$, яка отримана із старої системи $x y$ за допомогою повороту навколо початку O на кут $\frac{\pi}{4}$.

Розв'язування. Формули повороту мають вид

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha,$$

при $\frac{\pi}{4}$ формули наберуть виду: $x' = x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad y' = -x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (*)$

Щоб записати рівняння лінії $y = \frac{k}{x}$ в новій системі, необхідно замість x, y у це рівняння підставити їх значення, які знайдемо із формул перетворення (*). Для цього розв'яжемо систему двох рівнянь з двома невідомими x, y способом алгебраїчного додавання:

$$\begin{cases} x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = x'; \\ -x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = y'; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}; \\ y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Отримані значення x, y підставимо у рівняння лінії $y = \frac{k}{x}$: $\frac{x' + y'}{\sqrt{2}} = \frac{k \cdot \sqrt{2}}{x' - y'}$ або $(x')^2 - (y')^2 = 2k$.

Відповідь: Рівняння лінії в нових координатах $(x')^2 - (y')^2 = 2k$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. У системі координат $x y$ лінія задана рівнянням $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0$. Знайти рівняння цієї ж лінії у новій системі координат, яка отримується із даної системи поворотом на 45° .

$$[(x')^2 + 9(y')^2 - 9 = 0].$$

2. Систему координат $x y$ повернемо навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{6}$.

Знайти рівняння: а) нових координатних осей у старій системі;

б) старих координатних осей у новій системі.

а) вісь x' : $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$,

вісь y' : $y = -\sqrt{3}x$;

б) вісь x : $y' = -\frac{\sqrt{3}}{3}x'$,

вісь y : $y' = \sqrt{3}x'$.

3. Дано дві різні системи координат, причому друга система отримана з першої перенесенням початку в точку $O'(5; \sqrt{11})$ без зміни напрямку осей. Знайти відстань d між точками A та B , якщо B має ті ж координати у другій системі, що і A у першій.

$[d=6]$.

4. Дано формули перетворення координат. Вияснити, в яких із випадків нова система $x' y'$ є прямокутною:

а) $x = x' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + y' \cdot \frac{1}{2} + 1; \quad y = -x' \cdot \frac{1}{2} + y' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 5;$

б) $x = \sqrt{3}x' + \frac{1}{2}y' - 1; \quad y = -\frac{1}{2}x' + y' - 2;$

в) $x = -y' + 1; \quad y = x';$

г) $x = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 1; \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'.$

$[a), в), г)].$

Приклад 2. Через точку $M(1;5;-1)$ провести пряму, яка перпендикулярна до прямих $\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}; \quad y = -1+t; \quad z = -2t.$

Розв'язування. Рівняння шуканої прямої складемо у вигляді $\frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{l_2} = \frac{z-z_0}{l_3}$ (канонічне рівняння прямої). Напрямний вектор $\vec{p}(l_1; l_2; l_3)$ знайдемо як векторний добуток напрямних векторів $(-1; 3; -1)$ та $(-3; 1; -2)$ заданих прямих. Знайдемо його координати: $\vec{p} \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-5; 1; 8).$ Отже,

рівняння шуканої прямої $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{8}.$

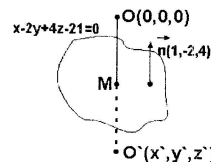
Відповідь: $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{8}.$

Приклад 3. Знайти точку, яка симетрична початку координат відносно площини $x - 2y + 4z - 21 = 0$.

Розв'язування. Координати шуканої точки O' позначимо через $(x'; y'; z').$

Ці координати можна вирахувати, якщо знайти координати точки M — середини відрізка OO' . Координати точки M знайдемо як розв'язок системи рівнянь площини і прямої OO' .

Розв'язування задачі зводиться до складання рівняння прямої OO' , знаходження координат точки M . Пряма проходить через точку $O(0;0;0)$ і має напрямний вектор $\vec{n}(1; -2; 4)$. Отримаємо рівняння прямої: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{4}$.



Складаємо систему трьох рівнянь:
$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{-2}; \\ \frac{y}{-2} = \frac{z}{4}; \\ x - 2y + 4z - 21 = 0 \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0; \\ 2y + z = 0; \\ x - 2y + 4z - 21 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = -2; \\ z = 4. \end{cases}$$

Точка M має координати $(1; -2; 4)$. За формулою ділення відрізка навпіл,

$$1 = \frac{x' + 0}{2};$$

вирахуємо координати шуканої точки O' : $-2 = \frac{y' + 0}{2}; \Rightarrow x' = 2; y' = -4; z' = 8.$

$$4 = \frac{z' + 0}{2};$$

Відповідь: $O'(2; -4; 8)$.

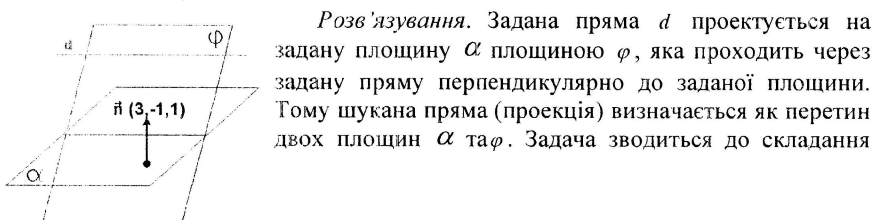
Приклад 4. Знайти відстань від точки $P(7; 9; 7)$ до прямої $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$.

Розв'язування: Відстань від точки P до прямої можна знайти як висоту паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{MP}$ і $\vec{p}$. Для знаходження висоти необхідно знати площу паралелограма, яку можна обчислити як модуль векторного добутку векторів $\overrightarrow{MP}$ і $\vec{p}$: $S = \left| [\overrightarrow{MP}, \vec{p}] \right|$. Тоді відстань від точки P до прямої, або висоту h , можна знайти із співвідношення: $\rho(P; d) = h = \frac{\left| [\overrightarrow{MP}, \vec{p}] \right|}{|\vec{p}|}$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{MP}$:

$$\overrightarrow{MP} = (7-2; 9-1; 7-0) = (5; 8; 7); \quad \rho(P; d) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{638}}{\sqrt{29}} = \sqrt{22}$$

Відповідь: $\rho(P; d) = \sqrt{22}$.

Приклад 5. Скласти рівняння проекції заданої прямої $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0; \\ x + y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ на задану площину $3x - y + z - 4 = 0$.



Розв'язування. Задана пряма d проектується на задану площину α площиною ϕ , яка проходить через задану пряму перпендикулярно до заданої площини. Тому шукана пряма (проекція) визначається як перетин двох площин α та ϕ . Задача зводиться до складання

рівнянь площин α та ϕ , які і визначають рівняння шуканої проекції. Площина α має рівняння $3x - y + z - 4 = 0$. Для складання рівняння площини ϕ маємо вектор $\vec{n}(3; -1; 1)$ з рівняння площини α . З рівняння заданої прямої отримуємо точку M_0 цієї прямої, яка належить площині ϕ , а також напрямний вектор прямої, яка паралельна площині ϕ . Отже, будемо мати точку і два паралельних вектори площини ϕ .

Знаходимо точку M_0 з системи $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0; \\ x + y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$ Нехай $z = 0$, тоді

розв'язуємо систему двох рівнянь з двома невідомими $\begin{cases} 2x - y = 3; \\ x + y = -1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}; \\ y = -\frac{5}{3}; \end{cases}$

Отже, точка M_0 має координати $(\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}; 0)$.

Знаходимо напрямний вектор заданої прямої

$$\vec{p} \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-3; -3; 3).$$

Напряним буде також вектор, що колінеарний вектору $(-3; -3; 3)$. Тому спростимо його, скоротивши всі координати на -3 (поділимо на -3). Отримаємо $\vec{p}(-1; -1; 1)$.

Складаємо рівняння площини ϕ : $\begin{vmatrix} x - \frac{2}{3} & y + \frac{5}{3} & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Після обчислення

визначника отримаємо $3y + 3z + 5 = 0$ – рівняння площини ϕ .

Складаємо рівняння шуканої прямої (проекції) $\begin{cases} 3y + 3z + 5 = 0; \\ 3x - y + z - 4 = 0. \end{cases}$

Відповідь: $\begin{cases} 3y + 3z + 5 = 0; \\ 3x - y + z - 4 = 0. \end{cases}$

Задачі для самостійного розв'язування і для домашнього завдання:

1. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2; -3; 3)$ і перпендикулярна до площини $x - 3y + 4z - 1 = 0$.

$$\left[\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-3}{4} \right].$$

2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2; 3; -1)$, перетинає пряму $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{3}$ і перпендикулярна до неї.

$$\left\{ \begin{aligned} 3x + 4y + 3z - 15 &= 0; \\ 7x - 6y + z + 5 &= 0. \end{aligned} \right.$$

3. Через точку $M(1;5;-1)$ провести пряму, яка перпендикулярна до прямих

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0; \\ -x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x - y - z + 1 = 0; \\ 2x + y + 4z = 0. \end{cases}$$

$$\left[\frac{x-1}{-1} = \frac{y-5}{5} = \frac{z+1}{9} \right].$$

4. Знайти точку, яка симетрична точці $(1;5;2)$ відносно площини $2x - y - z + 11 = 0$.

5. Скласти рівняння проекції прямої $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0; \\ x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$ на координатну площину XU .

$$\begin{cases} 5x + 2y + 14 = 0; \\ z = 0. \end{cases}$$

6. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $M(-1;1;3)$ і паралельна до прямої $3x - 2y = 0$.

$$[2x + 3y - 5z + 14 = 0].$$

7. Знайти відстань між мимобіжними прямими $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ та

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{-3}.$$

Вказівка: Використати формулу $d = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2}}$, де

$M_1(x_1; y_1; z_1)$ $M_2(x_2; y_2; z_2)$ – точки відповідно першої та другої прямих; $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ та $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ – напрямний вектор першої і другої прямої.

8. Обчислити кут між прямими $\begin{cases} y + 1 = 0; \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ та $\begin{cases} x = 0; \\ z = 1. \end{cases}$

9. Обчислити кут між прямою $\frac{x}{2} = \frac{y+12}{3} = \frac{z-4}{6}$ і площиною $6x + 15y - 10z = 0$.

$$[\varphi = \arcsin \frac{3}{133}].$$

10. Дано дві прямі $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$ та $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{0}$. а) Довести, що вони перетинаються; б) написати рівняння площин, які проходять через кожну з них паралельно другій прямій; в) знайти відстань між мимобіжними прямими і між площинами; переконалися у тому, що ці відстані рівні.

[а) $2x - 3y - 6z - 7 = 0; 2x - 3y - 6z + 14 = 0$; б) 3].

Заняття 6.

Тема: Рух на площині. Інверсія.

Література: (1), р. III, §7-8. (2), §9. (3), §26-30, 33. (4), р. 1, §18.

Основні питання теми:

1. Будь-який рух у площині XU задається формулами:

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + c_1,$$

$$y' = \pm(-x \sin \alpha + y \cos \alpha + c_2).$$

Частинними випадками руху є:

а) поворот площини навколо початку координат; задається формулами:

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha;$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha;$$

б) симетрія відносно деякої прямої, що проходить через початок координат; задається формулами:

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha;$$

$$y' = x \sin \alpha - y \cos \alpha;$$

в) паралельне перенесення; задається формулами:

$$x' = x + c_1,$$

$$y' = y + c_2.$$

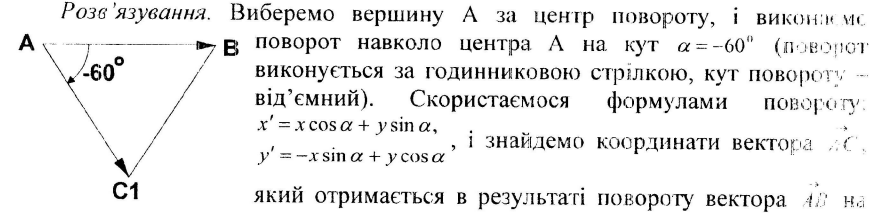
2. При інверсії коло, яке не проходить через центр інверсії, переходить в коло; коло, яке проходить через центр інверсії, переходить у пряму, що не проходить через центр інверсії; пряма, яка не проходить через центр інверсії, переходить в коло, що проходить через центр інверсії; пряма, яка проходить через центр інверсії, переходить у себе.

Інверсія на площині задається формулами:

$$x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2}; \quad y' = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2},$$

де R – радіус кола інверсії.

Приклад 1. Дано дві вершини рівностороннього трикутника $A(-3;2)$, $B(1;4)$. Знайти третю вершину.



кут $\alpha = -60^\circ$. Обчислимо спочатку координати вектора $\vec{AB}$: $\vec{AB}(1+3; 4-2) = \vec{AB}(4; 2)$. Підставляючи у формули повороту $x=4; y=2; \alpha=-60^\circ$, одержимо:

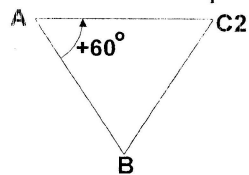
$$x' = 4 \cos(-60^\circ) + 2 \sin(-60^\circ) = 2 - \sqrt{3},$$

$$y' = -4 \sin(-60^\circ) + 2 \cos(-60^\circ) = 1 + 2\sqrt{3},$$

тобто координати вектора $\vec{AC}_1(2 - \sqrt{3}; 1 + 2\sqrt{3})$.

Знайдемо координати точки $C_1(u; v)$. Через них координати вектора $\vec{AC}$ можна записати так: $\vec{AC}(u+3; v-2)$. Порівнюючи два записи координат вектора $\vec{AC}$, отримаємо: $u+3 = 2 - \sqrt{3}; v-2 = 1 + 2\sqrt{3};$ тобто точка C_1 має координати $C_1(-1 - \sqrt{3}; 3 + 2\sqrt{3})$. Якщо врахувати, що вершини трикутника мають інше розташування, то задача має інший розв'язок.

Нехай вершини трикутника розташовані інакше. Тоді відмінність у розв'язуванні буде в тому, що поворот необхідно виконати на кут $\alpha = +60^\circ$ (проти годинникової стрілки). Обчислення будуть такими:



$$x' = 4 \cos 60^\circ + 2 \sin 60^\circ = 2 + \sqrt{3},$$

$$y' = -4 \sin 60^\circ + 2 \cos 60^\circ = 1 - 2\sqrt{3},$$

$$\vec{AC}_2(2 + \sqrt{3}; 1 - 2\sqrt{3}), \vec{AC}_2(u+3; v-2),$$

$$u+3 = 2 + \sqrt{3}; v-2 = 1 - 2\sqrt{3};$$

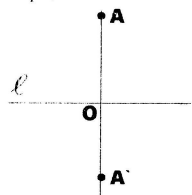
$$u = -1 + \sqrt{3}; v = 3 - 2\sqrt{3},$$

тобто точка C_2 має координати $C_2(-1 + \sqrt{3}; 3 - 2\sqrt{3})$.

Відповідь: Задача має два розв'язки: $C_1(-1 - \sqrt{3}; 3 + 2\sqrt{3}), C_2(-1 + \sqrt{3}; 3 - 2\sqrt{3})$.

Приклад 2. Написати формули осової симетрії за координатами двох симетричних точок $A(1; -2), B(3; 4)$.

Розв'язування. Нехай пряма l – вісь симетрії точок A та B . Позначимо координати точки $A(x; y)$, а точки $A'(x'; y')$. Знаючи числові значення цих координат, обчислимо координати точки O – перетину осі симетрії з відрізком AA' : $O\left(\frac{1+3}{2}; \frac{-2+4}{2}\right) = O(2; 1)$. З іншого боку, $\frac{x+x'}{2} = 2; \frac{y+y'}{2} = 1$, звідки отримуємо шукані формули: $x' = 4 - x; y' = 2 - y$.



Приклад 3. У системі координат xu дана точка $S(x_0; y_0)$ та кут $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Написати формули повороту площини навколо точки S на кут α .

Розв'язування. Візьмемо на площині довільну точку M з координатами x, y . Координати точки M' , яка отримується з точки M за допомогою вказаного повороту, позначимо x', y' : $M(x'; y')$. Тоді вектори: $\vec{SM}$ має координати $(x - x_0; y - y_0)$,

$\vec{SM'}$ має координати $(x' - x_0; y' - y_0)$.

За формулами повороту навколо центра S отримуємо:

$$x' - x_0 = (x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha;$$

$$y' - y_0 = -(x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha$$

$$\text{або} \quad \begin{aligned} x' &= (x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha + x_0; \\ y' &= -(x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha + y_0. \end{aligned}$$

Отже, отримали формули повороту площини навколо довільного центра $S(x_0; y_0)$ на кут α .

Приклад 4. Обчислити координати центра повороту, який задано формулами $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1; y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$.

Розв'язування. Задані формули аналітично визначають поворот площини. При цьому змінюються координати всіх точок площини за виключенням однієї точки – центра повороту (у даному випадку центр повороту не співпадає з початком координат). Координати центра повороту залишаються ті ж, оскільки центр повороту переходить у себе. Тому $x' = x; y' = y$, і формули повороту приймають вид $x = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1; y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$. Розв'язок отриманої системи буде координатами центра повороту. Розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y = 1; \\ -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y = -2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{5}y + \frac{2}{5}y = 0; \\ -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y = -2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0; \\ x = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: Координати центру повороту $S\left(\frac{5}{2}; 0\right)$.

Приклад 5. Написати формули ковзної симетрії, яка задана віссю l та направляючим вектором $\vec{a}$:

- 1) $l: x - 2 = 0; \vec{a}(0; 3);$
- 2) $l: x + y - 3 = 0; \vec{a}(-1; 1);$

$$5) \quad y+5=0; \quad \vec{a}(2;0);$$

Розв'язування. Якщо вісь (пряма) задана рівнянням $ax+by+c=0$, то вектор $\vec{n}(a;b)$ перпендикулярний до цієї прямої, вектор $\vec{a}(-b;a)$ є направляючим вектором цієї прямої (паралельний до неї). Вектор, координати якого пропорційні координатам вектора $\vec{a}$, колінеарний до вектора $\vec{a}$, тобто також є направляючим вектором цієї прямої.

Для розв'язування задачі скористаємося формулами ковзної симетрії відносно прямої $ax+by+c=0$:

$$x' = x - \frac{2a}{a^2+b^2}(ax+by+c) - b; \quad y' = y - \frac{2b}{a^2+b^2}(ax+by+c) + a$$

(див. (4), р. 1, §18).

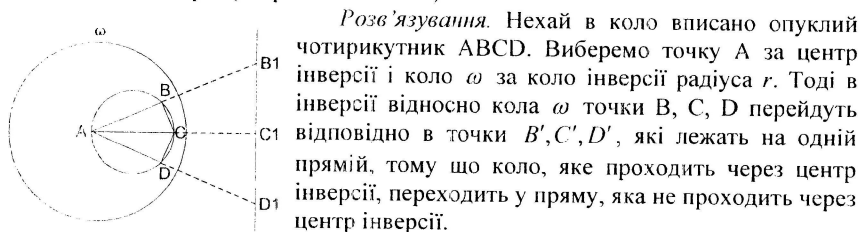
У випадку 1) маємо:

$$x' = x - \frac{2 \cdot 1}{1}(x-2) - 0 = -x+4; \quad y' = y - \frac{2 \cdot 0}{1}(x-2) + 1 = y+1$$

і формули ковзної симетрії будуть такими: $x' = -x+4$; $y' = y+1$.

Аналогічно знаходяться формули у випадках 2) та 3).

Приклад 6. Довести, що добуток довжин діагоналей вписаного в коло опуклого чотирикутника ABCD дорівнює сумі добутків довжин його протилежних сторін (теорема Птолемея).



Розв'язування. Нехай в коло вписано опуклий чотирикутник ABCD. Виберемо точку A за центр інверсії і коло ω за коло інверсії радіуса r . Тоді в інверсії відносно кола ω точки B, C, D перейдуть відповідно в точки B', C', D' , які лежать на одній прямій, тому що коло, яке проходить через центр інверсії, переходить у пряму, яка не проходить через центр інверсії.

З властивостей інверсії відомо, що відстань між двома точками B', D' можна визначити за формулою $B'D' = BD \cdot \frac{r^2}{AB \cdot AD}$ (див. (3), §32).

$$\text{Відстань між точками } B', C' \text{ буде } B'C' = BC \cdot \frac{r^2}{AB \cdot AC}$$

$$\text{Відстань між точками } C', D' \text{ буде } C'D' = CD \cdot \frac{r^2}{AC \cdot AD}.$$

Підставляємо у рівність $B'D' = B'C' + C'D'$ отримані значення, тоді матимемо:

$$BD \cdot \frac{r^2}{AB \cdot AD} = BC \cdot \frac{r^2}{AB \cdot AC} + CD \cdot \frac{r^2}{AC \cdot AD}.$$

Помноживши обидві частини цього виразу на $\frac{AB \cdot AC \cdot AD}{r^2}$, наразі

отримаємо:

$$BD \cdot AC = BC \cdot AD + CD \cdot AB,$$

що треба було довести.

Задачі для самостійного розв'язування і для домашнього завдання

1. Дано дві протилежні вершини квадрата A(-1;4), C(7;-2). Знайти дві інші вершини.

$$[B(3;-4), D(-3;-4)].$$

2. Поворот навколо точки M(2;1) відображає точку A в точку B. Обчислити координати точки B, якщо $\alpha = 45^\circ$, A(1; -2).

$$[B(2-2\sqrt{2}; 1-2\sqrt{2})].$$

3. Написати рівняння образу прямої l при повороті навколо точки M на кут φ :

$$a) M(0; 0), \varphi = \frac{\pi}{2}, l: x+y-2=0;$$

$$b) M(-2; 1), \varphi = \frac{\pi}{6}, l: x-y+1=0.$$

$$[x-y-2=0; x(\sqrt{3}-1)+y(1+\sqrt{3})-4=0].$$

4. Дано точку M(5;1) – перетину медіан рівностороннього трикутника ABC та рівняння прямої AB: $2x-y=0$. Написати рівняння прямих AC та BC.

$$[BC: x(\sqrt{3}-2)+y(1+2\sqrt{3})+27-7\sqrt{3}=0;$$

$$AC: x(\sqrt{3}+2)+y(2\sqrt{3}-1)-27-7\sqrt{3}=0].$$

5. Написати формули ковзної симетрії, яка задана віссю $2x-y+1=1$ і вектором $\vec{a}(2;4)$.

6. Знайти координати образу точки A(2;1) при ковзній симетрії, яка задана віссю $\square$ і вектором $\vec{a}(0;2)$.

$$[(-12;3)].$$

7. Написати формули перетворення осьової симетрії, якщо вісь симетрії задана рівнянням $ax+by+c=0$.

$$[x' = x - 2a(ax+by+c) \cdot \frac{1}{a^2+b^2};$$

$$y' = y - 2b(ax+by+c) \cdot \frac{1}{a^2+b^2}].$$

8. Вісь l симетрії задана рівнянням $x+y+1=0$. Написати рівняння прямої m' , яка симетрична прямій $m: 2x-y-2=0$ відносно осі l .

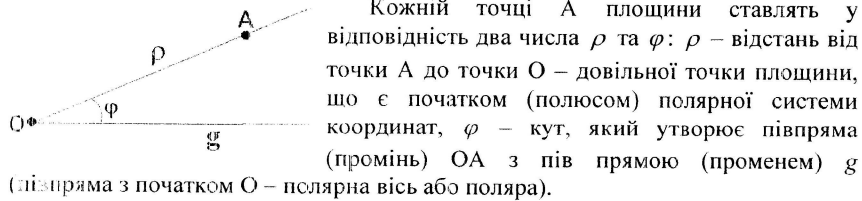
Заняття 7.

Тема: Конічні перерізи в полярних координатах.

Література: (1), р. IV, §§ 1-3. (3), р.2, §§ 14, 15.

Основні питання теми:

1. Полярні координати точки.



Кожній точці А площини ставлять у відповідність два числа ρ та φ : ρ – відстань від точки А до точки О – довільної точки площини, що є початком (полюсом) полярної системи координат, φ – кут, який утворює півпряма (промінь) ОА з пів прямою (променем) g (півпряма з початком О – полярна вісь або поляр).

Якщо φ вимірюють від полярної осі до променя, який отримується від продовження променя ОА за точку О, то вважають $\rho < 0$. Тоді координати ρ, φ називають узагальненими полярними координатами.

2. Зв'язок між полярними і декартовими координатами встановлюється за формулами:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

За цими формулами можна скласти рівняння лінії в полярних координатах.

Знаючи декартові координати точки, можна отримати її полярні координати за формулами:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Формули $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ правильні і для узагальнених полярних координат (тобто для радикала $\sqrt{x^2 + y^2}$ у всіх формулах $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$;

$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ можна брати і від'ємні значення).

3. Рівняння $f(\rho, \varphi) = 0$ називається рівнянням кривої в полярних координатах, якщо полярні координати кожної точки кривої його задовольняють. І навпаки, будь-яка пара чисел ρ, φ , яка задовольняє це рівняння, є полярними координатами однієї з точок кривої.

4. Конічним перерізом називається крива, по якій перетинає круговий конус довільна площина, яка не проходить через його вершину.

Основна властивість конічних перерізів: кожний конічний переріз, крім кола, є геометричне місце точок площини, відношення λ відстаней яких від деякої точки F і деякої прямої δ постійне. Точка F називається фокусом конічного перерізу, а пряма δ – директрисою.

В залежності від того, яке відношення λ відстаней довільної точки конічного перерізу від фокуса і директриси, крива називається *еліпсом* ($\lambda < 1$), *параболою* ($\lambda = 1$) або *гіперболою* ($\lambda > 1$). Число λ називається *ексцентриситетом* конічного перерізу.

5. Конічні перерізи еліпс, парабола задаються рівнянням $\frac{\rho}{\rho - \rho \cos \varphi} = \lambda$,

де ρ – відстань довільної точки А конічного перерізу від фокуса;

ρ – відстань фокуса від директриси;

$\rho - \rho \cos \varphi$ або $\rho \cos \varphi - \rho$ – відстань довільної точки А конічного перерізу від директриси.

6. Гіпербола задається рівнянням: $\frac{\rho}{\rho - \rho \cos \varphi} = \pm \lambda$,

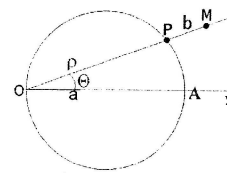
При цьому знак “+” відповідає одній вітці гіперболи, а знак “-” – іншій вітці.

Розв'язавши це рівняння відносно ρ , можна його записати в іншому виді:

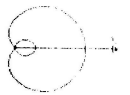
$$\rho = \frac{\lambda p}{1 + \lambda \cos \varphi} \text{ – рівняння еліпса чи параболи,}$$

$$\rho = \frac{\pm \lambda p}{1 \pm \lambda \cos \varphi} \text{ – рівняння гіперболи.}$$

Приклад 1. Дано коло діаметра $OA = a$. Навколо точки О обертається промінь ОТ. Нехай пряма, на якій лежить цей промінь, перетинає коло в точці Р. На цій прямій від точки Р у напрямку променя відкладений відрізок $PM = b$. Скласти рівняння лінії, яку описує точка М.

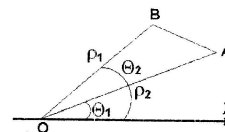


Розв'язування. Нехай О – полюс, промінь ОА – полярна вісь Ох. Нехай ρ, φ – узагальнені полярні координати точки М, а ρ_1, φ – узагальнені полярні координати точки Р. Тоді $\rho = \rho_1 + b$. Але $\rho_1 = a \cos \varphi$, де φ – кут від осі Ох до променя ОМ. Тому полярне рівняння даної лінії буде $\rho = b + a \cos \varphi$. Ця лінія називається *слимак Паскаля*.



Приклад 2. Виразити відстань між точками через полярні координати цих точок.

Розв'язування. Нехай $A(\rho_1; \varphi_1); B(\rho_2; \varphi_2)$ – дані точки. Розглянемо $\triangle OAB$, в якому відомі дві сторони $OA = \rho_1, OB = \rho_2$ і кут $\angle AOB = \varphi_2 - \varphi_1$ між ними. Для знаходження відстані АВ



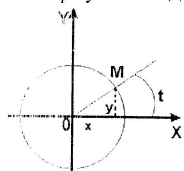
знайдемо AB^2 з цього трикутника за теоремою косинусів:

$$AB^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

звідки отримаємо шукану відстань:

$$AB = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Приклад 3. Розглянемо коло радіуса a з центром в початку координат – точці O . Введемо полярну систему координат, прийнявши точку O за полюс, а за полярну вісь – додатну піввісь Ox . Скласти рівняння цього кола.



Розв'язування. Нехай x та y – Декартові координати довільної точки M кола, а a та t – полярні координати цієї ж точки. Тоді $x = acost$; $y = asint$, де t приймає всі значення від 0 до 2π . Отримали *параметричне рівняння* кола (t – параметр).

Приклад 4. Розглянемо на площині дві системи координат: декартову і полярну в такому ж відношенні, як і в прикладі 3.

Спіраль Архімеда є лінія, рівняння якої в узагальненій полярній системі координат має вид

$$\rho = at,$$

де a – деяке число, відмінне від нуля, а ρ, t – полярні координати точки (ρ – полярний радіус, t – амплітуда).

Параметр t приймає всі дійсні значення.

Параметричне рівняння спіралі Архімеда в декартовій системі координат має вид:

$$x = a + \cos t; \quad y = a + \sin t.$$

Параметричне рівняння спіралі Архімеда в полярних координатах мають вид:

$$\rho = vt; \quad \varphi = \omega t,$$

де ω – кутова швидкість обертання променя l , v – швидкість руху точки M по променю l .

Приклад 5. Скласти рівняння довільної прямої в полярних координатах, якщо рівняння прямої в декартових координатах має вид $ax + by + c = 0$.

Розв'язування. Введемо в це рівняння ρ та φ замість x та y за формулами:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Отримаємо:

$$a\rho \cos \varphi + b\rho \sin \varphi + c = 0 \quad \text{або} \quad \rho(a \cos \varphi + b \sin \varphi) + c = 0.$$

Зведемо рівняння прямої $ax + by + c = 0$ до нормальної форми, тобто поділимо обидві частини його на $\sqrt{a^2 + b^2}$ і отримаємо:

$$\rho \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \varphi + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \varphi \right) + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

З курсу аналітичної геометрії відомо, що рівняння прямої в нормальній формі має вид:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \rho_0 = 0$$

(див. будь-який курс аналітичної геометрії на площині). Тоді, вважаючи

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi; \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi; \quad \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\rho_0,$$

отримуємо $\rho(\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi) - \rho_0 = 0$,

або остаточно $\rho \cos(\alpha - \varphi) = \rho_0$.

Це є рівняння довільної прямої в полярних координатах.

Задачі для самостійного розв'язування і для домашнього завдання

1. Показати, що рівняння будь-якого кола в полярних координатах можна записати у формі $\rho^2 + 2a\rho \cos(\alpha + \varphi) + b = 0$.

Вказівка: У рівняння довільного кола $x^2 + y^2 - ax + by + c = 0$ замість x, y побудувати їх вирази в полярних координатах і далі, як у прикладі 5.

2. Який геометричний смисл мають α та ρ_0 у рівнянні прямої в полярних координатах $\rho \cos(\alpha - \varphi) = \rho_0$?

Вказівка: Див. приклад 5.

3. Показати, що крива, яка задана рівнянням $\rho = \frac{c}{1 + a \cos \varphi + b \sin \varphi}$, є кінцевим перерізом. При якій умові крива є еліпсом; гіперболою; параболою?

4. Трикутник ABC заданий полярними координатами вершин $A\left(5; \frac{\pi}{2}\right), B\left(8; \frac{5\pi}{6}\right), C\left(3; \frac{7\pi}{6}\right)$. Довести, що даний трикутник рівнобедрений.

$$[AB=BC=7].$$

5. Знайти полярні координати точок, які симетричні точкам $M_1\left(2; \frac{\pi}{4}\right), M_2\left(3; -\frac{\pi}{3}\right)$

а) відносно полюса;

б) відносно полярної осі.

$$[a) M_1'\left(2; -\frac{3\pi}{4}\right), M_2'\left(3; \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$6) M_1''\left(2; -\frac{\pi}{4}\right), M_2''\left(3; \frac{\pi}{3}\right).$$

6. Визначити полярні координати точок $M_1(0;6), M_2(\sqrt{3};1)$.

$$[M_1'\left(6; \frac{\pi}{2}\right), M_2'\left(2; \frac{\pi}{6}\right)].$$

7. Вивести формулу для обчислення площі трикутника OA_1A_2 , вершина O якого співпадає з полюсом, а дві інші задані своїми полярними координатами: $A_1(\rho_1; \varphi_1), A_2(\rho_2; \varphi_2)$.

$$[S = \frac{1}{2} \rho_1 \rho_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)].$$

8. Вершини трикутника знаходяться в точках

$$A\left(2\sqrt{3}; \frac{\pi}{3}\right), B\left(\sqrt{3}; \frac{2\pi}{3}\right), C\left(4+\sqrt{3}; \frac{2\pi}{3}\right).$$

Довести, що трикутник ABC прямокутний.

Заняття 8.

Тема: Конічні перерізи в декартових координатах в канонічній формі.

Література: (1), р. IV, §§ 4-5. (3), р.4, §§ 36-39.

Основні питання теми:

Канонічним рівнянням конічних перерізів мають вид:

еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$

гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$

парабола $y^2 = 2px.$

Параметри $a; b$ називаються півосями еліпса (гіперболи).

Для еліпса справедливі формули:

$$a^2 - c^2 = b^2,$$

де $2c$ – відстань F_1F_2 між фокусами еліпса F_1, F_2 ;

$$\lambda = \frac{c}{a},$$

де λ – ексцентриситет еліпса ($\lambda < 1$).

Для гіперболи справедливі формули:

$$c^2 - a^2 = b^2,$$

де $2c$ – відстань F_1F_2 між фокусами еліпса F_1, F_2 ;

$$\lambda = \frac{c}{a},$$

де λ – ексцентриситет гіперболи ($\lambda > 1$).

Для параболи $\lambda = 1$, величина p називається фокальним параметром параболи.

Приклад 1. Визначити півосі, фокуси та ексцентриситет еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$.

Розв'язування. Зведемо дане рівняння еліпса до канонічного виду. Для цього обидві частини рівняння розділимо на 225:

$$\frac{9}{225}x^2 + \frac{25}{225}y^2 = 1; \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Безпосередньо з отриманого рівняння знаходимо $a = 5; b = 3; c = \sqrt{25 - 9} = 4$.

За формулами координат фокусів еліпса $F_1(c;0); F_2(-c;0)$ знаходимо $F_1(4;0); F_2(-4;0)$. Ексцентриситет $\lambda = \frac{4}{5} = 0,8$.

Відповідь: $a = 5; b = 3; c = 4; F_1(4;0); F_2(-4;0); \lambda = 0,8$.

Приклад 2. Визначити координати фокуса та скласти рівняння директриси параболи $y^2 = 6x$.

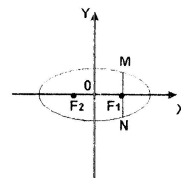
Розв'язування. Для розв'язування задачі використаємо загальний вид рівняння параболи $y^2 = 2px$ і рівняння директриси параболи $x + \frac{p}{2} = 0$. З рівняння параболи бачимо, що $2p = 6$, тоді $p = 3$. Отже, рівняння директриси отримаємо у виді $x + \frac{3}{2} = 0$ або $2x + 3 = 0$.

Фокус F параболи має координати $F(\frac{p}{2};0)$, тоді $F(\frac{3}{2};0)$.

Приклад 3. Через фокус F проведена хорда еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ паралельно до осі Oy . Визначити довжину цієї хорди.

Розв'язування. Для знаходження довжини хорди MN необхідно обчислити ординату точки M . Тоді довжина хорди буде рівна подвоєній ординаті точки M . Оскільки фокус F має координати $(c;0)$ і $c^2 = a^2 - b^2$, то точка M має координати $(\sqrt{a^2 - b^2}; y)$. Підставивши ці координати точки

M у рівняння еліпса, отримаємо $\frac{a^2 - b^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Звідси знаходимо у:



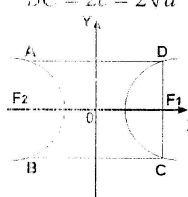
$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - a^2 + b^2}{a^2}; y^2 = \frac{b^4}{a^2}; y = \frac{b^2}{a}.$$

$$\text{Довжина хорди } MN = 2y = \frac{2b^2}{a}.$$

$$\text{Відповідь: } MN = \frac{2b^2}{a}.$$

Приклад 4. Знайти площу прямокутника, вершини якого лежать на гіперболі $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, а дві сторони проходять через фокуси паралельно до осі Oy .

Розв'язування. Площа $S_{ABCD} = AB \cdot BC$. Для гіперболи $c^2 = a^2 + b^2$, тоді $BC = 2c = 2\sqrt{a^2 + b^2}$. Довжину AB знаходимо аналогічно тому, як це було зроблено у прикладі 3: $\frac{a^2 + b^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;



$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 + b^2 - a^2}{a^2}; y^2 = \frac{b^4}{a^2}; y = \frac{b^2}{a}; AB = \frac{2b^2}{a}.$$

$$\text{Площа } S_{ABCD} = \frac{2b^2}{a} \cdot 2\sqrt{a^2 + b^2} = 4b^2 \cdot \frac{c}{a} = 4b^2 \lambda.$$

$$\text{Відповідь: } S_{ABCD} = 4b^2 \lambda.$$

Приклад 5. Написати рівняння парабол $y^2 = 2x$ та $y^2 = 10x$ в полярній системі координат, якщо полюс співпадає з фокусом парабол, а полярна вісь – з віссю Ox .

Розв'язування. Загальне рівняння парабол має вид $y^2 = 2px$ в декартових координатах і $\rho = \frac{\lambda p}{1 + \lambda \cos \varphi}$ – в полярних координатах.

Для парабол $\lambda = 1$, p знайдемо з умови $y^2 = 2x$ або $2 = 2p$; $p = 1$.

Отже, для парабол $y^2 = 2x$ отримуємо $\rho = \frac{1}{1 - \cos \varphi}$.

Далі $10 = 2p$; $p = 5$, і для парабол $y^2 = 10x$ отримуємо $\rho = \frac{5}{1 - \cos \varphi}$.

$$\text{Відповідь: } \rho = \frac{1}{1 - \cos \varphi}; \rho = \frac{5}{1 - \cos \varphi}.$$

Задачі для самостійного розв'язування і для домашнього завдання

1. Визначити координати фокуса і скласти рівняння директрис таких парабол:

a) $2x^2 - 3y = 0$;

b) $y^2 = -2x$;

c) $3y^2 + 16x = 0$.

[a) $F\left(0; \frac{3}{8}\right); 8y + 3 = 0$;

b) $F\left(-\frac{1}{2}; 0\right); 2x - 1 = 0$;

c) $F\left(-\frac{4}{3}; 0\right); 3x + 4 = 0$].

2. Скласти канонічні рівняння парабол, якщо: а) $F(3; 0)$; б) $F(3; 5)$.

[a) $y^2 = 12x$; б) $x^2 = 20y$].

3. Під гострим кутом до горизонту кинуто камінь, який, рухаючись по параболі, упав на відстані 24 м від початкового положення. Визначити параметр траєкторії, знаючи, що найбільша висота, яку досяг камінь, дорівнює 6 м.

[12].

4. Визначити координати фокуса і скласти рівняння директриси парабол $y^2 = 12x$.

[$F\left(\frac{3}{2}; 0\right); 2x + 3 = 0$].

5. Скласти канонічне рівняння парабол, якщо вона симетрична відносно осі абсцис і проходить через точку $M(1; 2)$.

[$y^2 = 4x$].

6. Хорда еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ділиться в точці $M(x_0; y_0)$ навпіл. Знайти кутовий коефіцієнт хорди.

[$k = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$].

7. Знайти гіперболу, яка має спільні фокуси з рівносторонньою гіперболою $x^2 - y^2 = 8$ і проходить через точку $(-5; 3)$.

$$\left[\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1\right].$$

8. Визначити кут між асимптотами гіперболи, знаючи її ексцентриситет λ .

$$[\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{\lambda^2 - 1}}{2 + \lambda^2}].$$

9. Скласти рівняння гіперболи, ексцентриситет якої дорівнює 3, а фокуси знаходяться в точках $F_1(0; -2), F_2(6; -2)$.

$$[(x - 3)^2 - \frac{(y + 2)^2}{8} = 1].$$

10. Написати рівняння директрис еліпса $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$ і знайти відстань між ними.

$$[x - 15 = 0; x + 15 = 0; d = 30].$$

Заняття 9.

Тема: Дотична до конічного перерізу. Фокальні властивості конічних перерізів.

Література: (1), р. IV, §§6-8.

Основні питання теми:

1. У загальному випадку, якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$, то рівняння дотичної до цієї кривої має вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

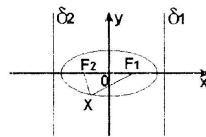
2. Рівняння дотичних до конічних перерізів:

$$\text{у випадку еліпса} \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1;$$

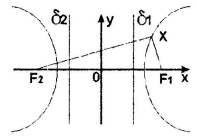
$$\text{у випадку гіперболи} \quad \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1, \text{ де } (x_0; y_0) - \text{координати точки дотику};$$

$$\text{у випадку параболи} \quad yy_0 - p(x + x_0) = 0.$$

3. Фокальні властивості еліпса: сума відстаней довільної точки еліпса від його фокусів постійна.



4. Фокальні властивості гіперболи: різниця відстаней довільної точки еліпса від його фокусів постійна.



Приклад 1. Знайти необхідну і достатню умову дотикання даної прямої $y = kx + x_0$ до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Розв'язування. Поставимо умову, щоб дана пряма перетинала гіперболу у двох точках, які співпадають. Абсциса точок перетину даної прямої і гіперболи визначається з умови: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(kx + x_0)^2}{b^2} = 1$.

$$\text{Після спрощення} \quad (b^2 - a^2 k^2)x^2 - 2a^2 kx_0 x - a^2 x_0^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Оскільки дана пряма не паралельна асимптотам гіперболи, то $b^2 - a^2 k^2 \neq 0$. Тому, прирівнявши дискримінант отриманого рівняння відносно x до нуля, отримаємо

$$4a^4 k^2 x_0^2 + 4(b^2 - a^2 k^2)(a^2 x_0^2 + a^2 b^2) = 0 \Rightarrow a^2 k^2 - b^2 - x_0^2 = 0.$$

Відповідь: Необхідна і достатня умова дотикання прямої і гіперболи $a^2 k^2 - b^2 - x_0^2 = 0$.

Приклад 2. На параболі $x^2 = -12y$ знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 9.

Розв'язування. Із рівняння параболи знаходимо $2p = -12$; $p = -6$. Так як $F(0; \frac{p}{2})$, то маємо $F_2(0; -3)$. Позначимо координати точки $M(x; y)$.

Знаходимо відстань FM:

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y + 3)^2} = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 + 6y + 9 = 81 \Rightarrow y^2 - 6y - 72 = 0$$

(підставимо $x^2 = -12y$).

Розв'язуючи отримане квадратне рівняння, маємо:

$$y_1 = 12; y_2 = -6.$$

Тому що $x^2 = -12y$, то цій умові задовольняє лише значення $y = -6$. Тоді $x^2 = 72$; $x_1 = 6\sqrt{2}$; $x_2 = -6\sqrt{2}$. Отримаємо дві точки: $M_1(6\sqrt{2}; -6)$; $M_2(-6\sqrt{2}; -6)$, фокальний радіус яких дорівнює 9.

Відповідь: $(6\sqrt{2}; -6)$; $(-6\sqrt{2}; -6)$.

Приклад 3. Знайти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{27} = 1$, які паралельні до прямої $y = 3x$.

Розв'язування. Шукані дотичні знаходяться серед прямих $y = 3x + d$ (прямі $y = 3x + d$ паралельні прямій $y = 3x$).

Знайдемо точки перетину цієї прямої $y = 3x + d$ з еліпсом. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{27} = 1; \\ y = 3x + d; \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{(3x + d)^2}{27} = 1; \Rightarrow 2x^2 + 6dx + d^2 - 27 = 0.$$

Розв'язавши останнє рівняння відносно x при деякому певному значенні параметра d , отримаємо координати точок перетину всіх прямих, які паралельні шуканим дотичним, з даним еліпсом. Для шуканих дотичних точки перетину співпадають, а рівняння мають корені, що збігаються.

Задачі для самостійного розв'язування і для домашнього завдання

1. Скласти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, які проходять через точку (10;4).

$$[y = 4; 6x - 15y - 100 = 0].$$

2. Знайти необхідну і достатню умову дотикання даної прямої $ax + by + c = 0$ до еліпса $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$.

$$[a^2m^2 + b^2n^2 - c^2 = 0].$$

3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого (-3;0) та (3;0) і який дотикається до прямої $x + y - 5 = 0$.

$$[\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1].$$

4. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, які проходять через точку M(1;4).

$$[x = 1; 5x - 2y + 3 = 0].$$

5. Обчислити фокальний радіус FM точки M параболі $y^2 = 8x$, якщо її абсциса дорівнює 8 (F – фокус параболі).

$$[FM = 10].$$

6. Скласти рівняння тих дотичних до еліпса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$, які паралельні до прямої $x + y - 4 = 0$.

7. Обчислити довжини півосей і відстані між фокусами еліпса, який задано в полярній системі координат рівнянням $\rho = \frac{3\sqrt{2}}{2 - \cos\varphi}$. За полюс прийняти один із фокусів еліпса, а за полярну вісь – напрямлену пряму F_1F_2 , де F_1, F_2 – фокуси еліпса.

$$[a = 2\sqrt{2}; b = \sqrt{6}; 2c = 2\sqrt{2}].$$

Заняття 10.

Тема: Декартові координати і вектори у просторі.

Література: (1), р. V, §§1-4. (2), §17. (3), р. 2, §§1-3.

Основні питання теми:

1. Декартові прямокутні координати у просторі.
2. Відстань між двома точками $A_1(x_1; y_1; z_1)$ та $A_2(x_2; y_2; z_2)$ виражається через координати цих точок за формулою:

$$A_1A_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

3. Координати x, y, z точки C, яка ділить відрізок AB у відношенні $\lambda : \mu$, виражаються через координати точок A та B за формулами:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\lambda + \mu}; y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\lambda + \mu}; z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\lambda + \mu}.$$

4. Паралельне перенесення у просторі задається формулами:

$$x' = x + a; y' = y + b; z' = z + c,$$

де a, b, c – постійні.

5. Вектори у просторі; координати вектора $\overline{AB}$ визначаються як числа $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$, де $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$. Операції і властивості векторів у просторі такі ж, як і на площині.

6. Компланарні вектори у просторі: три ненульових вектори називаються компланарними, якщо рівні їм вектори із спільним початком лежать в одній площині.

Будь-який вектор розкладається за трьома некомпланарними векторами, причому цей розклад єдиний: $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$. Числа λ, μ, ν називаються коефіцієнтами розкладу.

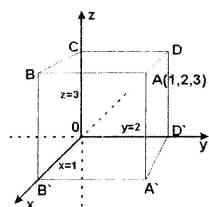
Одиничні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, які мають напрямок координатних осей, називаються *ортами*. Для будь-якого вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ має місце розклад $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$.

Приклад 1. Дана точка $A(1;2;3)$. Знайти основу перпендикуляра, який опущений з цієї точки на координатні осі і координатні площини.

Розв'язування. В прямокутній просторовій системі координат побудуємо прямокутний паралелепіпед з вершиною $A(1;2;3)$ (будувати не обов'язково за координатами $(1;2;3)$).

Тоді безпосередньо за рисунком бачимо, що перпендикуляр, який опущений з точки A на координатну вісь Ox , це діагональ AB' у грані паралелепіпеда $(ABB'A')$, основою перпендикуляра є точка B' з координатами $(1;0;0)$. Аналогічно знаходимо основу перпендикуляра на вісь Oy : $D'(0;2;0)$, на вісь Oz : $C(0;0;3)$.

Основою перпендикуляра на координатну площину XY є точка $A'(1;2;0)$. Аналогічно на координатну площину XZ : $B(1;0;3)$, на YZ : $D(0;2;3)$.



Приклад 2. Скласти рівняння ГМТ простору, які рівновіддалені від точки $A(1;2;3)$ і початку координат.

Розв'язування. Точка A має координати $(1;2;3)$, початок координат – точка $O(0;0;0)$. Нехай $M(x;y;z)$ – довільна точка шуканого ГМТ, тоді $MA^2 = MO^2$:

$$(1-x)^2 + (2-y)^2 + (3-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Після спрощень отримаємо: $x + 2y + 3z - 7 = 0$.

Відповідь: Шукане ГМТ – площина $x + 2y + 3z - 7 = 0$.

Приклад 3. При паралельному перенесенні точка $A(2;1;-1)$ переходить у точку $A'(1;-1;0)$. В яку точку перейде початок координат?

Розв'язування. Нехай точка O переходить в точку $O'(x';y';z')$. Тоді, використовуючи формули паралельного перенесення:

$$x' = x + a; \quad y' = y + b; \quad z' = z + c$$

і знаючи координати точок A та A' , отримаємо: $1 - 2 = a; -1 - 1 = b; 0 - (-1) = c$, звідки $a = -1; b = -2; c = 1$.

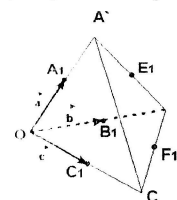
Далі, за формулами паралельного перенесення для початку координат:

$$x' = 0 - 1 = -1; \quad y' = 0 - 2 = -2; \quad z' = 0 + 1 = 1.$$

Відповідь: $O'(-1;-2;1)$.

Приклад 4. Довести, що відрізок, який з'єднує середини протилежних сторін тетраедра, перетинається в одній точці і ділиться в ній навпіл.

Розв'язування. Нехай $OABC$ – даний тетраедр, а $A_1, B_1, C_1, G_1, F_1, E_1$ – середини ребер відповідно OA, OB, OC, CA, CB, AB . Нехай $OA_1 = \vec{a}; OB_1 = \vec{b}; OC_1 = \vec{c}$, виразимо радіуси-вектори середин відрізків A_1F_1, B_1G_1, C_1E_1 через $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ (точку O приймемо за початок координат). Якщо середини відрізків A_1F_1, B_1G_1, C_1E_1 позначити відповідно через R, S, T , а їх радіуси-вектори через $\vec{r}_R; \vec{r}_S; \vec{r}_T$, то отримаємо:



$$\vec{r}_R = \frac{\vec{OA}_1 + \vec{OF}_1}{2} = \frac{\vec{a} + \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2};$$

$$\vec{r}_S = \frac{\vec{OB}_1 + \vec{OG}_1}{2} = \frac{\vec{b} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2};$$

$$\vec{r}_T = \frac{\vec{OC}_1 + \vec{OE}_1}{2} = \frac{\vec{c} + \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2}.$$

Отже, $\vec{r}_R = \vec{r}_S = \vec{r}_T$, а це означає, що точки R, S, T співпадають, що і треба було довести.

Приклад 5. Вияснити, які з пар векторів, що задані своїми координатами в прямокутній системі координат, є взаємно перпендикулярними: $\vec{a}(3; -1; 2); \vec{b}(1; 1; 0); \vec{c}(0; 0; 3); \vec{d}(1; 0; -\frac{3}{2})$.

Розв'язування. Обчислимо попарно скалярні добутки даних векторів:

$$\vec{a}\vec{b} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2, \quad \vec{b}\vec{c} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0,$$

$$\vec{a}\vec{c} = 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6, \quad \vec{b}\vec{d} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-\frac{3}{2}) = 1,$$

$$\vec{a}\vec{d} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-\frac{3}{2}) = 0, \quad \vec{c}\vec{d} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot (-\frac{3}{2}) = -\frac{9}{2}.$$

Звідси видно, що $\vec{a} \perp \vec{d}$ і $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Задачі для самостійного розв'язування і для домашнього завдання

1. Дано точки $A(1;2;3), B(0;1;2), C(0;0;3), D(1;2;0)$. Які з цих точок лежать: а) в площині XY ; б) на осі Z ; в) в площині YZ ?

2. Знайти відстань від точки $(1;2;-3)$ до: а) координатних площин; б) осей координат; в) початку координат.

3. На осі Ox знайти точку $C(x; 0; 0)$, рівновіддалену від двох точок $A(1; 2; 3)$, $B(-2; 1; 3)$.

$$[0; 0; 0].$$

4. Дано один кінець відрізка $A(2; 3; -1)$ та його середина $C(1; 1; 1)$. Знайти другий кінець відрізка $B(x; y; z)$.

$$[B(0; -1; 3)].$$

5. Дано точки $(1; 2; 3)$, $(0; -1; 2)$, $(1; 0; -3)$. Знайти точки, які симетричні даним відносно координатних площин.

[Для точки $(1; 2; 3)$: відносно XY : $(1; 2; -3)$;

YZ : $(-1; 2; 3)$;

XZ : $(1; -2; 3)$].

6. Дано вектори $\vec{a}(2; n; 3)$ та $\vec{b}(3; 2; m)$. При яких m та n ці вектори колінеарні?

$$[n=4/3; m=9/2].$$

7. Дано вектори $\vec{a}(2; -1; 3)$ та $\vec{b}(1; 3; n)$. При якому значенні n ці вектори перпендикулярні?

$$[n=1/3].$$

8. Дано точки $A(1; 0; 1)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(0; 2; -1)$. Знайти на осі Oz таку точку $D(0; 0; c)$, щоб вектори $\vec{AB}$ та $\vec{CD}$ були перпендикулярні.

9. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут 60° , а вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до них. Знайти абсолютну величину вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

$$\left[\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right].$$

10. Знайти умову, при якій точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ лежать на одній прямій (ні одна із координат не дорівнює нулю).

$$\left[\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right].$$

Заняття 11.

Тема: Векторний добуток векторів.

Література: (1), р. V, §5. (3), р. 2, §4.

Основні питання теми:

1. Векторним добутком векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ та $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ називається вектор $\vec{c}(a_1 b_3 - a_3 b_1; a_3 b_2 - a_2 b_3; a_2 b_1 - a_1 b_2)$. Позначення векторного добутку: $[\vec{a}, \vec{b}]$; $\vec{a} \wedge \vec{b}$ та інші (надалі будемо користуватись позначенням $[\vec{a}, \vec{b}]$).

2. Векторний добуток колінеарних векторів дорівнює нульовому вектору.

$$3. [\vec{a}, \vec{b}] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi.$$

4. Площа трикутника $A_1 A_2 A_3$ $S_\Delta = \frac{1}{2} |[\vec{A_1 A_2}, \vec{A_1 A_3}]|$ в координатах на площині XY :

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix};$$

$$\text{в просторі: } S_\Delta = \frac{1}{2} \left\{ \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

5. Якщо $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$ – розклади векторів за трьома координатними векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, то

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 - \text{розклад векторного добутку}$$

векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ за координатними векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

6. Властивості векторного добутку векторів:

а) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$ – анти комутативність;

б) $[\alpha \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \alpha \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}]$ – асоціативність відносно скалярного множника $\alpha \in R$;

в) $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{b}'] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{b}']$, $[\vec{a} + \vec{a}', \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}', \vec{b}]$ – дистрибутивність.

З цих властивостей слідує, що лінійна комбінація векторів перемножується векторно на лінійну комбінацію векторів за правилом множення многочленів, але з обов'язковим збереженням порядку слідування множників.

7. $[\vec{a}, \vec{b}] = S_0$ паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}$.

Приклад 1. Перетворити вираз $[(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})]$.

Розв'язування. Скористаємося властивостями дистрибутивності і антикомутативності векторного добутку:

$$[\vec{a}, \vec{a}] - [\vec{b}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{b}] - [\vec{b}, \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{b}] - [\vec{b}, \vec{b}].$$

Так як векторний добуток колінеарних векторів дорівнює нуль-вектору, то $[\vec{a}, \vec{a}] = [\vec{b}, \vec{b}] = \vec{0}$. В результаті отримуємо: $[(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})] = 2[\vec{a}, \vec{b}]$.

Приклад 2. Визначити координати і модулі векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо $\vec{a}(0;1;0), \vec{b}(2;-1;3), \vec{c}(0;5;-2)$.

Розв'язування. З формули розкладу векторного добутку за координатними векторами випливає, що вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ має координати $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Тоді координати вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$, де $\vec{a}(0;1;0), \vec{b}(2;-1;3)$, обчислюються як визначники другого порядку, які складено з координат векторів $\vec{a}, \vec{b}$:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (3; 0; -2).$$

Довжину вектора (модуль, абсолютну величину) знаходимо за звичайною формулою $||\vec{a}, \vec{b}|| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

Відповідь: $(3; 0; -2); \sqrt{13}$.

Приклад 3. Користуючись векторним добутком векторів, обчислити площу ΔABC , якщо $A(2;1;0), B(-3;-6;3;4), C(-2;4;1)$.

Розв'язування. Згідно з властивістю 7 площа паралелограма ABCD дорівнює модулю векторного добутку векторів $[\vec{AB}, \vec{AD}]$: $S_{\Delta ABCD} = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$.

Тоді для трикутника ABC $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$. Знайдемо координати векторів $\vec{AB}, \vec{AC}$: $\vec{AB}(-5;-4), \vec{AC}(-4;3;1)$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -6 & -7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(-19)^2 + (-11)^2 + (-43)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2331}.$$

Відповідь: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{2331}$.

Задачі для самостійного розв'язування і для домашнього завдання

1. Перетворити вираз $[\vec{a}, (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})]$.

$$[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}].$$

2. Визначити координати і модуль вектора $[\vec{a}, \vec{d}]$, якщо $\vec{a}(0;1;0), \vec{d}(1;2;-3)$.

$$[(-3; 0; -1); \sqrt{10}].$$

3. Визначити координати вектора $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$, якщо $\vec{a}(1;1;0), \vec{b}(0;3;1), \vec{c}(2;0;1)$.

$$[(-6; 6; -1)].$$

4. Користуючись векторним добутком векторів, обчислити площу ΔABC , якщо $A(4;2;3), B(5;7;0), C(2;8;-1)$.

$$[3\sqrt{10}].$$

5. Обчислити площу паралелограма ABCD, якщо $\vec{AB} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{AC} = \vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 12$, $\angle A = 30^\circ$.

$$[150].$$

6. Довести, що якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не колінеарні, то $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0 \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$.

Вказівка. Розглянути рівності $[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a}] = 0; [\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{b}] = 0$.

7. A, B, C, D і відповідно A', B', C', D' – вершини куба. Ребро куба дорівнює a.

а) Якими будуть довжини векторів $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AC'}$?

б) Серед векторів, що утворені парами вершин куба, назвати декілька пар рівних векторів, пару колінеарних, але не рівних векторів.

в) Визначити скалярні добутки $\vec{AB} \cdot \vec{A'B'}, \vec{AA'} \cdot \vec{B'B'}, \vec{A'C'} \cdot \vec{CA'}$.

г) Визначити числове значення проєкцій на вісь AB векторів: $\vec{A'B'}, \vec{A'D'}, \vec{A'C'}, \vec{CA'}$.

д) Побудувати векторні добутки: $[\vec{AB}, \vec{AD}], [\vec{AB}, \vec{C'D'}], [\vec{AD'}, \vec{B'C'}], [\vec{AA'}, \vec{CB'}]$.

8. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{u} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{v} = \vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$, де $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

9. Довести, що якщо $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – одиничні координатні вектори і $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$

$$\text{та } \vec{b}(x_2; y_2; z_2), \text{ то } [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Заняття 12.

Тема: Мішаний добуток векторів.

Література: (1), р. V, §6. (3), р. 2, §§5,6.

Основні питання теми:

1. Мішаним добутком векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$ називається число $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$. Мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

позначається: $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

2. Властивості мішаного добутку:

1) $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}]$, тобто мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$;

2) мішаний добуток в координатах:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1);$$

3) мішаний добуток $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ змінює знак при перестановці місцями двох будь-яких множників, а при циклічній перестановці множників – не змінюється, тобто:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c}) = -(\vec{a}\vec{c}\vec{b}) = -(\vec{c}\vec{b}\vec{a}), \text{ але } (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = (\vec{c}\vec{a}\vec{b}).$$

4) з представлення $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}]$ видно, що мішаний добуток векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із векторів дорівнює нульовому, або вектори компланарні (якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, то скалярний добуток $\vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}] = 0$);

5) геометричний зміст мішаного добутку: якщо відмінні від нульового не компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ мають спільний початок, то їх мішаний добуток з точністю до знаку дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах:

$$|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})| = SH,$$

де S – площа основи паралелепіпеда, H – висота паралелепіпеда;

6) об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{A_1A_2}$, $\vec{A_1A_3}$, $\vec{A_1A_4}$, дорівнює 1/6 частини об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих же векторах:

$$V = \frac{1}{6}(\vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_3}, \vec{A_1A_4});$$

в координатах:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix},$$

або в іншій формі:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix};$$

7) при множенні одного із векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ на число $\alpha \in R$ на те ж число множиться мішаний добуток цих векторів;

8) мішаний добуток має властивість дистрибутивності відносно кожного співмножника.

Приклад 1. Обчислити об'єм тетраедра ABCD, вершини якого знаходяться в точках A(2;-1;-1); B(5;-1;2); C(3;0;-1); D(6;0;-1).

Розв'язування. Для обчислення об'єму тетраедра ABCD скористаємося

$$\text{формулою } V_t = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Підставляючи відповідні координати, отримуємо: } V_t = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Визначник 3-го порядку розкладемо за елементами першого рядка:

$$V_t = \frac{1}{6} \left(3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{6} (6 + 3 - 12) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Відповідь: } V_t = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2. Знайти довжину висоти AH тетраедра ABCD, вершини якого знаходяться в точках A(2;-4;5); B(-1;-3;4); C(5;5;-1); D(1;-2;2).

Розв'язування. Для розв'язування задачі використаємо формулу для об'єму тетраедра $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H$, звідки $H = \frac{3V}{S}$. Об'єм V тетраедра знаходимо

$$\text{аналогічно до попередньої задачі: } V_t = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 1 & 9 & 2 \\ -1 & -6 & -3 \end{vmatrix} = \frac{15}{2}.$$

Для знаходження площі основи S використаємо формулу

Задачі для самостійного розв'язування і для домашнього завдання

1. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}(2;-3;1)$; $\vec{b}(1;1;2)$; $\vec{c}(3;1;-1)$.

$$[(\vec{a}\vec{b}\vec{c})] = -29.$$

2. Обчислити $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ і $\vec{b} \cdot [\vec{a}, \vec{c}]$, якщо $\vec{a}(2;-3;1)$; $\vec{b}(1;1;2)$; $\vec{c}(3;1;-1)$.

$$[(\vec{a}\vec{b}\vec{c})] = -29; \vec{b} \cdot [\vec{a}, \vec{c}] = 29.$$

3. Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – довільні вектори, а α, β, γ – довільні числа. Довести, що вектори $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}; \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}; \beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$; – компланарні.

Розв'язування. Щоб довести, що вектори $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}; \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}; \beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$; – компланарні. Треба показати, що їх мішаний добуток дорівнює нулю (властивість 4). Мішаний добуток представимо у вигляді скалярного добутку вектора $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$ на векторний добуток $[\gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}, \beta\vec{c} - \gamma\vec{a}]$, і матимемо:

$(\alpha\vec{a} - \beta\vec{b} | \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c} \ \beta\vec{c} - \gamma\vec{a}) = (\alpha\vec{a} - \beta\vec{b} | [\gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}, \beta\vec{c} - \gamma\vec{a}]) =$
скористаємося властивостями дистрибутивності векторного і скалярного добутків, а також асоціативності множення на скалярний множник:

$$= (\alpha\vec{a} - \beta\vec{b} | ([\gamma\vec{b}, \beta\vec{c}] - [\alpha\vec{c}, \beta\vec{c}] - [\gamma\vec{b}, \gamma\vec{a}] + \alpha\vec{c}, \gamma\vec{a})) =$$

$$= \alpha\beta\gamma(\vec{a}|\vec{b}\vec{c}) - \alpha\gamma^2(\vec{a}|\vec{b}\vec{a}) + \alpha^2\gamma(\vec{a}|\vec{c}\vec{a}) - \beta^2\gamma(\vec{b}|\vec{b}\vec{c}) + \beta\gamma^2(\vec{b}|\vec{b}\vec{a}) - \alpha\beta\gamma(\vec{b}|\vec{c}\vec{a}) =$$

$$= \alpha\beta\gamma(\vec{a}|\vec{b}\vec{c}) - \alpha\beta\gamma(\vec{a}|\vec{b}\vec{c}) = 0.$$

Тут ми використали такі властивості: векторний добуток компланарних векторів дорівнює нулю; циклічна перестановка співмножників мішаного добутку не змінює знаку мішаного добутку.

4. Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ – довільні вектори. Перевірити тотожності:

$$1) [\vec{a}, \vec{b}]^2 + (\vec{a}\vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2; \quad 2) [(\vec{a} - \vec{b}) | (\vec{a} + \vec{b})] = 2[\vec{a}, \vec{b}].$$

5. Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(0;0;0); B(3;4;-1); C(2;3;5); D(6;0;-3)$.

[22,5].

6. Дано паралелепіпед $ABCD A' B' C' D'$, який побудовано на векторах $\vec{AB}(4;3;0); \vec{AD}(2;1;2); \vec{AA'}(-3;-2;5)$. Знайти: 1) об'єм паралелепіпеда; 2) площі граней; 3) довжину висоти, яка проведена з вершини A' на грань $ABCD$; 4) косинус кута φ_1 між ребром AB та діагоналлю $B'D$; 5) косинус кута φ_2 між гранями $ABCD$ та $ADD'A'$.

$$[1] V=12; 2) S_{ABCD} = 2\sqrt{26}; S_{ABB'A'} = \sqrt{626}; S_{ADD'A'} = \sqrt{338};$$

$$3) h = \frac{6}{\sqrt{26}}; 4) \cos \varphi_1 = \frac{4}{5\sqrt{10}}; 5) \cos \varphi_2 = \frac{46}{13\sqrt{13}}.]$$

7. Дано тетраедр, який побудовано на векторах $\vec{AB}(2;0;0); \vec{AC}(3;4;0); \vec{AD}(3;4;2)$. Знайти: 1) об'єм тетраедра; 2) площі граней; 3) довжину висоти h , яка проведена з вершини D .

8. Дано трикутник з вершинами $A(-1;1;2); B(1;1;0); C(2;6;-2)$. Знайти: а) площу трикутника; б) косинуси внутрішніх кутів; в) довжину висоти BH і координати вектора $\vec{BH}$; г) вектор $\vec{a}$, колінеарний бісектрисі кута A ; д) координати центра маси трикутника.

$$[a) S = \sqrt{51}; б) \cos A = \frac{7}{10}; \cos B = -\frac{3}{2\sqrt{15}}; \cos C = \frac{18}{5\sqrt{5}};$$

$$в) \vec{BH}(-\frac{29}{25}; \frac{12}{5}; \frac{22}{25}); г) \vec{a}(8;5;-9); д) M(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}; 0).]$$

9. Чотирикутник $ABCD$ задано координатами своїх вершин: $A(2;-3;1); B(-1;1;1); C(-4;5;6); D(2;-3;6)$. Довести, що $ABCD$ – плоский випуклий чотирикутник. Знайти: а) площу чотирикутника; б) косинуси його кутів; в) вектор $\vec{a}$, колінеарний бісектрисі кута A ; в) вектор $\vec{BH}$; де H – основа перпендикуляра, який опущено з вершини B на пряму AC ; д) координати центра маси трикутника.

$$[a) S = \frac{75}{2}; б) \cos A = 0; \cos B = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \cos C = \frac{1}{\sqrt{2}}; \cos D = 0;$$

$$в) \vec{a}(-3;4;5); г) \vec{BH}(6;-\frac{28}{3};-\frac{10}{3}); д) M(-\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{2}).]$$

Заняття 13.

Тема: Площина у просторі.

Література: (1), р. VI, §§ 1-4. (2), § 17. (3), р. 2, §§ 7-10.

Основні питання теми:

1. Різні задання площини:

а) канальне рівняння площини: $ax + by + cz + d = 0$; коефіцієнти a, b, c – координати вектора, який перпендикулярний до площини;

б) параметричне рівняння площини: $x = x_0 + ul_1 + vm_1$;

$$y = y_0 + ul_2 + vm_2;$$

$$z = z_0 + ul_3 + vm_3,$$

де $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – деяка фіксована точка площини, $\vec{l}(l_1; l_2; l_3)$, $\vec{m}(m_1; m_2; m_3)$ – не колінеарні вектори, паралельні площині; u, v – параметри.

в) інший вид рівняння площини, яка проходить через дану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, яка паралельна не колінеарним векторам $\vec{l}, \vec{m}$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0;$$

г) рівняння площини, яка проходить через три дані точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$; $M_1(x_1; y_1; z_1)$; $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0;$$

д) рівняння площини у відрізках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$,

де $M_0(a; 0; 0)$; $M_1(0; b; 0)$; $M_2(0; 0; c)$ – точки, в яких площина перетинає осі координат при цьому $abc \neq 0$;

е) рівняння площини, яка проходить через дану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0;$$

є) взаємне розташування площини відносно системи координат (площина задана рівнянням $ax + by + cz + d = 0$):

1) $a = 0, b = 0$ – площина, паралельна площині xy ; співпадає з нею, якщо $d = 0$;

2) $b = 0, c = 0$ – площина, паралельна площині yz ; співпадає з нею, якщо $d = 0$;

3) $a = 0, c = 0$ – площина, паралельна площині xz ; співпадає з нею, якщо $d = 0$;

4) $a = 0, b \neq 0; c \neq 0$ – площина, паралельна осі x ; проходить через неї, якщо $d = 0$;

5) $a \neq 0, b = 0; c \neq 0$ – площина, паралельна осі y ; проходить через неї, якщо $d = 0$;

6) $a \neq 0, b \neq 0; c = 0$ – площина, паралельна осі z ; проходить через неї, якщо $d = 0$;

7) $d = 0$ – площина проходить через початок координат.

Якщо рівняння площини записане у виді $z = px + qy + r$ (в загальному рівнянні коефіцієнти при z відмінні від нуля), то коефіцієнти p та q називаються *кутовими коефіцієнтами*;

ж) рівняння площини в *нормальній формі*: якщо в рівнянні $ax + by + cz + d = 0$ площини $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, то тоді площина задана в *нормальній формі*. Вираз $ax + by + cz + d$ в такому випадку з точністю до знаку дорівнює відстані точки від площини. Щоб отримати рівняння площини в *нормальній формі*, достатньо розділити обидві частини рівняння на $\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$;

з) умови паралельності і перпендикулярності для двох площин $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$:

умова паралельності $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$;

умова перпендикулярності $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$;

2. Кут між двома площинами визначається за формулою:

$$\cos \theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Приклад 1. Визначити координати деяких точок, що лежать в площині $3x - 2y + z - 12 = 0$.

Розв'язування. Дане рівняння площини переписемо у вигляді $3x + 2y + 12$. Будемо змінним x та y надавати довільних значень, наприклад, $x = 0, y = 0$. Знайдемо з отриманого рівняння z : $z = 12$. Отримаємо одну точку $A_1(0; 0; 12)$. Її координати $0; 0; 12$ задовольняють рівняння площини. Точка A_1 лежить в площині $3x - 2y + z - 12 = 0$. Аналогічно знаходимо: $A_2(2; 3; 12), A_3(2; -1; 4)$ і т.д.

Приклад 2. Вказати особливості розташування таких площин відносно до системи координат: 1) $x - z + 1 = 0$; 2) $x + 2y + 3z = 0$; 3) $x - y = 0$; 4) $z = 0$.

Розв'язування. 1) В цьому рівнянні $b = 0; a \neq 0; c \neq 0; d \neq 0$. Площина паралельна осі Oy .

2) Тут тільки $d = 0$. Площина проходить через початок координат.

3) У цьому рівнянні $b = 0; c = 0$. Площина паралельна координатній площині YZ .

4) Тут $a = b = d = 0$. Площина співпадає з площиною XY , тобто є координатною площиною XY .

Приклад 3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $A(0; 0; 1)$ і паралельна векторам $\vec{p}_1(2; 1; 5); \vec{p}_2(1; 0; 1)$.

Розв'язування. Використаємо рівняння в):

1-й спосіб:
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0,$$

підставимо значення коефіцієнтів:
$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник третього порядку:
$$x \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Після обчислення отримуємо рівняння шуканої площини $x + 3y - z + 1 = 0$.

2-й спосіб: Знайдемо координати $a; b; c$ як координати вектора $\vec{n}$, який перпендикулярний до шуканої площини. Так як вектори $\vec{p}_1; \vec{p}_2$ лежать в площині і не колінеарні, то вектор $\vec{n} \in$ їх векторним добутком: $\vec{n} = [\vec{p}_1, \vec{p}_2]$. Знайдемо координати вектора $\vec{n} = [\vec{p}_1, \vec{p}_2]$:

$$\vec{n} = [\vec{p}_1, \vec{p}_2] = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1; -3; -1).$$

Скористаємося рівнянням площини (е), яка проходить через дану точку $A(0;0;1)$ і перпендикулярна до вектора: $\vec{n}(1; -3; -1)$. Маємо: $1(x-0) - 3(y-0) - 1(z-1) = 0$, або $x + 3y - z + 1 = 0$.

Відповідь: $x + 3y - z + 1 = 0$.

Приклад 4. Дано вершини тетраедра $A(4;0;2); B(0;5;1); C(4;-1;3); D(3;-1;5)$. Написати рівняння площини, яка проходить через вершину A і паралельна грані BCD .

Розв'язування. Складемо рівняння грані BCD . Для цього скористаємося рівнянням площини, що проходить через три точки B, C, D :

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-5 & z-1 \\ 4-0 & -1-5 & 3-1 \\ 3-0 & -1-5 & 5-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y-5 & z-1 \\ 4 & -6 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x + 5y + 3z - 28 = 0.$$

Оскільки шукана площина паралельна грані BCD , то вона має перпендикулярний вектор, що і площина грані BCD , тобто $\vec{n}(6;5;3)$. Шукана площина проходить через точку $A(4;0;2)$. Використасмо рівняння

$$\begin{aligned} a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) &= 0; \\ 6(x-4) + 5(y-0) + 3(z-2) &= 0; \\ 6x + 5y + 3z - 30 &= 0. \end{aligned}$$

Відповідь: $6x + 5y + 3z - 30 = 0$.

Приклад 5. Скласти рівняння площини, якщо задано дві симетрично розташовані відносно неї точки $M_1(x_1; y_1; z_1); M_2(x_2; y_2; z_2)$.

Розв'язування. Шукана площина проходить через точку K , яка ділить відрізок M_1M_2 навпіл і має перпендикулярний вектор $\vec{M_1M_2}$. Знайдемо координати вектора $\vec{M_1M_2}$ і точки K .

$$\vec{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1); K\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Для складання рівняння шуканої площини знайдені координати підставимо в рівняння $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$. Маємо:

$$(x_2 - x_1)\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + (y_2 - y_1)\left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) + (z_2 - z_1)\left(z - \frac{z_1 + z_2}{2}\right) = 0.$$

Це і є рівняння шуканої площини.

Приклад 6. Показати, що площина, яка проходить через три дані точки $(x_i; y_i; z_i), i = 1; 2; 3$, задається рівнянням

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язування. Використаємо властивості визначників: віднімемо від першого, третього, четвертого рядків другий рядок, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 & 0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

А це і є рівняння площини, що проходить через три точки.

Приклад 7. Написати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-1;0;1); M_2(1;1;2)$ і знаходиться від початку координат на відстані $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Розв'язування. Нехай $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ – шукане рівняння. Оскільки площина не проходить через початок координат, то $d' \neq 0$; тому розділимо рівняння на $d' \neq 0$ і введемо позначення: $a = \frac{a'}{d'}; b = \frac{b'}{d'}; c = \frac{c'}{d'}$. Отримаємо $ax + by + cz + 1 = 0$ – також рівняння шуканої площини.

Шукані коефіцієнти a, b, c задовольняють таким умовам:

$$a \cdot (-1) + c \cdot 1 + 1 = 0, \text{ бо точка } M_1 \text{ належить шуканій площині;}$$

$$a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 2 + 1 = 0, \text{ бо точка } M_2 \text{ теж належить шуканій площині.}$$

Так що маємо два рівняння для знаходження коефіцієнтів a, b, c . Третє рівняння отримаємо з умови, що шукана площина знаходиться від початку на відстані $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Для цього рівняння площини $ax + by + cz + 1 = 0$ зведемо до

нормальної форми і підставимо замість x, y, z координати точки, від якої знаходимо відстань до площини, тобто від початку координат. Отримаємо:

$$\frac{a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ або } \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Отже, маємо третє рівняння. Розв'язуємо систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} -a+c=-1; \\ a+b+2c=-1; \\ \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь знайдемо: $c = a - 1$;
 $b = -a - 2c - 1 = -a - 2(a - 1) - 1 = -3a + 1$.

Підставляючи отримані значення b, c в третє рівняння, отримаємо:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{a^2 - (1 - 3a)^2 + (a - 1)^2} = \sqrt{11a^2 - 8a + 2} \text{ або } 44a^2 - 32a + 5 = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, матимемо: $a_1 = \frac{5}{22}; a_2 = \frac{1}{2}$.

Тоді відповідно отримуємо: $b_1 = \frac{7}{22}; b_2 = -\frac{1}{2}; c_1 = -\frac{17}{22}; c_2 = -\frac{1}{2}$.

Отже, система має два розв'язки, а, отже, існує дві площини, які задовольняють умови задачі: $\frac{5}{22}x + \frac{7}{22}y - \frac{17}{22}z + 1 = 0$, або $5x + 7y - 17z + 22 = 0$,
і $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 1 = 0$, або $x - y - z + 2 = 0$.

Приклад 8. Дано дві паралельні площини $ax + by + cz + d_1 = 0$ та $ax + by + cz + d_2 = 0$, де $d_1 \neq d_2$. Визначити відстань між ними.

Розв'язування. Дві дані площини дійсно паралельні, тому що перпендикулярні одному і тому ж вектору $\vec{n}(a, b, c)$ і не співпадають ($d_1 \neq d_2$). Для знаходження відстані між цими площинами візьмемо на одній із них (наприклад, на першій) точку, і обчислимо відстань від цієї точки до другої площини. Нехай точка А має координати $\left(-\frac{d_1}{a}; 0; 0\right)$. Легко перевірити, що вона лежить в першій площині. Знайдемо відстань від цієї точки А до другої площини. Для цього координати точки А підставимо в рівняння другої площини.

$$d = \frac{\left| a \cdot \left(-\frac{d_1}{a}\right) + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d_2 \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(рівняння звели до нормальної форми), звідки нарешті отримаємо:

$$d = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ (взята за модулем – відстань – додатне число).}$$

Задачі для самостійного розв'язування і для домашнього завдання

1. Написати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1; 2; -3); M_2(0; 1; 0)$ і паралельна до осі Ox .

$$[3y + z - 3 = 0].$$

2. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $M(1; 2; 3)$ і паралельна до координатної площини XY .

$$[z + 3 = 0].$$

3. Вияснити, які з даних векторів $\vec{a}_1(0; 5; 4); \vec{a}_2(1; 1; 1); \vec{a}_3(5; 0; -3); \vec{a}_4(1; 2; 1); \vec{a}_5(4; \sqrt{2}; -1)$ паралельні до площини $3x - 4y + 5z - 1 = 0$.

$$[\vec{a}_1; \vec{a}_3; \vec{a}_4 - \text{паралельні}; \vec{a}_2; \vec{a}_5 - \text{не паралельні площині}].$$

4. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $M(2; -3; 1)$ і паралельна до площини $3x - 4y + z + 15 = 0$.

Вказівка. Використати рівняння в'язки площин, яка визначається даною площиною $3x - 4y + z + \lambda = 0$, вимагаючи, щоб точка $M(2; -3; 1)$ лежала в цій площині.

$$[3x - 4y + z - 19 = 0].$$

5. Написати нормальне рівняння площини, яка задана рівнянням $3x + 4y - \sqrt{11}z - 5 = 0$.

6. Обчислити відстань між паралельними площинами $2x - 3y + \sqrt{3}z - 4 = 0, 2x - 3y + \sqrt{3}z - \frac{11}{\sqrt{3}} = 0$.

$$\left[\frac{11 - 4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\right].$$

7. Визначити кути між площинами $2x + 2\sqrt{3}y - 2\sqrt{2}z + 15 = 0, \sqrt{3}x + y - 3 = 0$.

$$[45^\circ; 135^\circ].$$

8. Через точки $M(-3; 1; 0); N(2; 1; -1)$ провести площину, яка перпендикулярна до площини $2x - 5y + 2z - 6 = 0$.

$$[5x + 12y + 25z + 3 = 0].$$

9. Обчислити відстань від початку координат до площини $15x + 10y - 6z + 18 = 0$.

$$\left[\frac{18}{\sqrt{361}}\right].$$

10. Знайти рівняння площин, які паралельні до площини $6x + 3y + 2z = 0$ і знаходиться від точки $(0; -1; 2)$ на відстані 3.

$$[6x + 3y + 2z + 28 = 0; 6x + 3y + 2z - 14 = 0].$$

Заняття 14.

Тема: Пряма в просторі.

Література: (1), р. VI, §§ 5-6. (3), р. 2, §§11-15.

Основні питання теми:

1. Різні задання прямої:

а) $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ – пряма задана як перетин двох площин;

б) $\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{l} = \frac{z-z_0}{m}$ – рівняння прямої в канонічній формі.

$(\vec{k}; \vec{l}; \vec{m})$ – направляючий вектор прямої, $(x_0; y_0; z_0)$ – точка M_0 , яка належить прямій.

в) параметричне рівняння площини: $x = kt + x_0$;

$y = lt + y_0$;

$z = mt + z_0$.

г) якщо пряма задана рівняннями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, то її

направляючий вектор має координати $\vec{p} = \begin{pmatrix} b_1c_2 - c_1b_2 \\ c_1a_2 - a_1c_2 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix}$.

2. Взаємне розташування прямої і площини:

$$x = t + x_0,$$

якщо пряма задана рівняннями $y = lt + y_0$, і площина задана

$$z = mt + z_0,$$

рівнянням $ax + by + cz + d = 0$, то пряма і площина:

перетинаються, якщо $al_1 + bl_2 + cl_3 \neq 0$;

не мають спільних точок, якщо $al_1 + bl_2 + cl_3 = 0$;

якщо $ax_0 + by_0 + cz_0 + d_2 \neq 0$;

пряма лежить у площині, якщо $al_1 + bl_2 + cl_3 = 0$;

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d_2 = 0.$$

3. Кут між прямою і площиною: $\sin \theta = \frac{|al_1 + bl_2 + cl_3|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}}$.

4. Кут між двома прямими: $\cos \varphi = \frac{l_1l_1' + l_2l_2' + l_3l_3'}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \cdot \sqrt{l_1'^2 + l_2'^2 + l_3'^2}}$.

$$5. \text{ Умова мимобіжності двох прямих: } \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

де $M_1(x_1; y_1; z_1); M_2(x_2; y_2; z_2)$; $\vec{p}_1(m_1; n_1; p_1); \vec{p}_2(m_2; n_2; p_2)$.

Приклад 1. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2; -3; 4)$ і паралельна до осі Ox .

Розв'язування. Оскільки вісь Ox паралельна вектору $\vec{e}_1(1; 0; 0)$, то цей вектор є направляючим вектором прямої, тому рівняння прямої можна записати так:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-4}{0} \text{ (канонічне рівняння)}$$

або $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{0}$, і $\frac{y+3}{0} = \frac{z-4}{0}$, і $\frac{x-2}{1} = \frac{z-4}{0}$, і, нарешті, $y+3=0$; $z-4=0$.

Приклад 2. Написати рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(3; -4; 5); M_2(-1; 2; 0)$.

Розв'язування. Скористуємося рівнянням прямої, яка проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Підставивши координати даних точок в це рівняння, отримуємо:

$$\frac{x-3}{-1-3} = \frac{y+4}{2+4} = \frac{z-5}{0-5} \text{ або } \frac{x-3}{-4} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-5}{-5}.$$

$$\left[\frac{x-3}{-4} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-5}{-5} \right].$$

Приклад 3. Пряма задана загальними рівняннями $x - y + 2z - 3 = 0$; $2x + y - z + 6 = 0$.

Написати канонічне рівняння цієї прямої.

Розв'язування. Для складання канонічних рівнянь $\frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{l_2} = \frac{z-z_0}{l_3}$ необхідно обчислити координати $x_0; y_0; z_0$ точки M_0 (початкової точки) цієї прямої, і координати направляючого вектора прямої. Враховуючи, що

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \text{ надамо } z \text{ довільного значення, наприклад, } z=0, \text{ і}$$

обчислимо $x_0; y_0$ із системи $\begin{cases} x-y=3; \\ 2x+y=-6. \end{cases}$ Розв'язуючи систему, отримуємо:
 $x_0 = -1; y_0 = -4$.

Тепер обчислимо координати направляючого вектора:

$$\vec{p} \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \text{ або } \vec{p}(-1; 5; 3).$$

$$\text{Канонічне рівняння має вид: } \frac{x+1}{-1} = \frac{y+4}{5} = \frac{z}{3}.$$

Приклад 4. Показати, що прямі $l_1: \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{1}$ та

$l_2: x=1+2t, y=-3-t, z=2+6t$ – мимобіжні.

Розв'язування. З рівнянь видно, що пряма l_1 проходить через точку $M_1(2; -3; 0)$ і паралельна вектору $\vec{p}_1(5; -2; 1)$, а пряма l_2 – через точку $M_2(1; -3; 2)$ і паралельна вектору $\vec{p}_2(2; -1; 6)$. Вектор $\overline{M_1M_2}$ має координати $(-1; 0; 2)$.

Використаємо умову мимобіжності двох прямих: $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$ (див.

Атанасян А.С., Аналитическая геометрия, ч. II, 1970). Отже, прямі мимобіжні.

Приклад 5. Обчислити кут між прямими $l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$ та $l_2: \begin{cases} x+y+z=0; \\ x-z=0. \end{cases}$

Розв'язування. Обчислимо координати направляючого вектора цих прямих l_1 та l_2 : $\vec{p}_1(2; -1; -1)$; $\vec{p}_2 \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)$ або $\vec{p}_2(-1; 2; -1)$. Кут між прямими обчислимо за формулою $\cos \varphi = \frac{-2-2+1}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{1+4+1}} = -\frac{1}{2}$. Таким чином, один із кутів між прямими дорівнює 120° . Решта кутів дорівнюють $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ$.

Задачі для самостійного розв'язування і для домашнього завдання

1. Визначити координати точки, яка лежить на прямій $\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{5}$ і має:

а) абсцису, що дорівнює 3; б) ординату, яка дорівнює -1.

2. Через точку $M(1; -3; 4)$ провести пряму, яка паралельна до прямої $\begin{cases} 2x-y+z-3=0; \\ x+3y-z-1=0. \end{cases}$

$$\left[\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{7} \right].$$

3. Довести, що прямі $x=2+4t, y=-6t, z=-1-8t$ та $x=4-8t, y=2+9t, z=12t$ лежать в одній площині, і написати рівняння цієї площини.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x+5}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{2}$ і паралельна до прямої $\begin{cases} 2x-y+z-3=0; \\ x+2y-3z+5=0. \end{cases}$
 $[2x-y+z+12=0].$

5. Вияснити взаємне розташування прямих $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$ та $\begin{cases} y+z-1=0; \\ x+y-2z+7=0. \end{cases}$

[Прямі співпадають].
 6. Показати, що прямі $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+10}{8}$ та $\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+1}{7}$ перетинаються. Знайти координати точки їх перетину.

7. Знайти точку перетину прямої $\begin{cases} 3x-y+2z-1=0; \\ 6x+y-z+7=0 \end{cases}$ з площиною $x+3y+z-8=0$.
 $[(-1; 2; 3)].$

8. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки перетину двох прямих $\begin{cases} x+y-z+6=0; \\ 2x-y+3z-25=0 \end{cases}$ та $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+9}{5}$ з площиною $x+4y+2z+3=0$.

$$\left[\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+4}{9} \right].$$

9. Через точку перетину площини $x-2y+3z+5=0$ з віссю Ox провести пряму так, щоб вона лежала в даній площині і була паралельна до площини YZ .

10. Дано площину $x-y+2z-5=0$ і пряма $x=3+\sqrt{5}t, y=-1+\sqrt{5}t, z=\sqrt{6}t$. Обчислити кут між прямою і площиною.
[$\varphi = 30^\circ$].

Заняття 15.

Тема: Задачі на взаємне розташування прямих і площин.

Література: Див. Заняття № 13, 14.

Приклад 1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1, -3, 4)$ і перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0; \\ x + y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Рівняння площини, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і яка має перпендикулярний вектор $\vec{n}(a; b; c)$, має вид

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Для розв'язування задачі необхідно знайти вектор, який перпендикулярний площині. Таким вектором є направляючий вектор заданої прямої. Цей вектор (його координати) знаходяться із співвідношення $\vec{p} \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$,

таким чином $\left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2; 5; 3)$. Отримуємо рівняння шуканої площини $-2(x-1) + 5(y+3) + 3(z-4) = 0$ або $2x - 5y - 3z - 5 = 0$.

Відповідь: $2x - 5y - 3z - 5 = 0$.

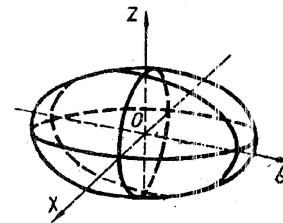
Заняття 16.

Тема. Поверхні другого порядку. Еліпсоїд. Гіперboloїд. Параболоїд.

Література: (1), р. 7, § 1-5; (3), р.2; р.3, §§ 19-21.

Основні питання теми:

1) **Еліпсоїд.** Рівняння еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.



Додатні числа a, b, c називаються *півосями* еліпсоїда.

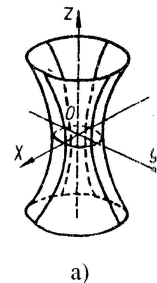
Якщо a — більша з півосей еліпсоїда, то він може бути отриманий із сфери $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 = 0$ стисненням до площини XY з коефіцієнтом стиску $\frac{c}{a}$ та до площини XZ з коефіцієнтом стиску $\frac{b}{a}$.

Якщо $a=b$, то отримуємо *еліпсоїд обертання*. Його рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

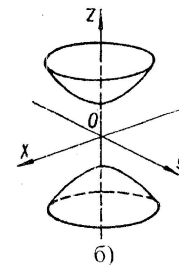
В перетині еліпсоїда з площиною $z=h$, яка паралельна площині XY , отримаємо коло з центром на осі Z , рівняння якого $\begin{cases} x^2 + y^2 = \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)a^2; \\ z = h. \end{cases}$ Таким чином, у цьому випадку еліпсоїд утворюється при обертанні еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, що лежить у площині XZ , навколо осі Z .

Якщо всі три півосі еліпсоїда рівні, то він являє собою *сферу*. Лінії перетину еліпсоїда з довільною площиною є еліпси.

2) **Гіперboloїд.** Існує два види гіперboloїдів: *однопорожнинний гіперboloїд*, рівняння якого $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ (рис. а), та *двопорожнинний гіперboloїд*, рівняння якого $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ (рис. б).



а)



б)

При перетині гіперboloїдів довільною площиною отримуються різні конічні перерізи. Для однопорожнинного гіперboloїда:

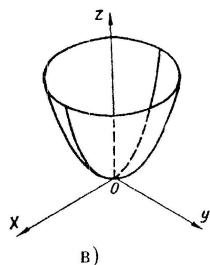
площини $z=h$, які паралельні площині XY , перетинають гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ по еліпсах $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} - 1 = 0; \\ z = h, \end{cases}$ а площини $y=h$ ($|h| \neq b$), які

паралельні площині XZ , – по гіперболах $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0; \\ y = h. \end{cases}$ Площина $y=b$ перетинає гіперболоїд по двох прямих $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0; \\ y = b. \end{cases}$

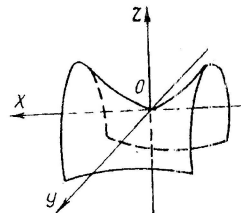
3) *Параболоїди.* Існує два види параболоїдів:

еліптичний параболоїд, рівняння якого $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (рис. в)

та гіперболічний параболоїд, рівняння якого $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ (рис. г).



в)



г)

Площини, паралельні площині XY , крім самої площини XY , перетинають еліптичний параболоїд по еліпсу, а гіперболічний – по гіперболі. Площина XY перетинає гіперболічний параболоїд по двох прямих.

4) Якщо поверхня утворена обертанням навколо осі OZ лінії, яка лежить у площині OYZ і задана рівнянням $F(y, z) = 0$, то рівняння поверхні обертання має вид $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.

Якщо ж поверхня утворена обертанням лінії $F(y, z) = 0$ і не симетрична відносно осі OZ , то рівняння поверхні обертання буде $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.

Приклад 1. Скласти рівняння поверхні, яка утворена обертанням параболи $z^2 - 2py = 0$, $x = 0$ навколо осі OZ .

Розв'язування. В даному випадку крива не симетрична відносно осі обертання OZ , але ординати всіх точок цієї кривої невід'ємні, тому рівняння поверхні обертання має вид: $z^2 - 2p\sqrt{x^2 + y^2} = 0$ або $z^2 = 2p\sqrt{x^2 + y^2}$.

Позбавляючись від радикалу, отримаємо: $z^4 = 4p^2(x^2 + y^2)$. Поверхня обертання є поверхнею четвертого порядку.

Приклад 2. Скласти рівняння поверхні обертання, яка утворена обертанням еліпса $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \\ y = 0 \end{cases}$ навколо осі OZ .

Розв'язування. Так як змінні входять у рівняння кривої лише у парних степенях, то крива, яка розташована в площині OXZ , симетрична відносно осі OZ , тому користуємося рівнянням $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$. У рівнянні еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ замість x підставимо $\sqrt{x^2 + y^2}$, отримаємо: $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Поверхня, що отрималась, називається еліпсоїдом обертання. Якщо $a = c$, то отримаємо сферичну поверхню $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Приклад 3. В площині OYZ дано коло з центром в точці $(0; 4; 0)$ радіуса $r = 1$. Написати рівняння поверхні, яка утворена обертанням даного кола навколо осі OZ .

Розв'язування. Запишемо рівняння кола з центром у точці $(x_0; y_0; z_0)$ радіуса r , яке розташоване у площині OYZ :

$$\begin{cases} (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0; \\ x = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y - 4)^2 + z^2 = 1; \\ x = 0. \end{cases}$$

Замість y підставляємо $\sqrt{x^2 + y^2}$, отримуємо:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 = 1 &\Rightarrow x^2 + y^2 - 8\sqrt{x^2 + y^2} + 16 + z^2 = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2 + 15)^2 = 64(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Отримана поверхня називається *тором*.

Приклад 4. Написати рівняння поверхні, що утворена обертанням синусоїди $z = \sin y$ навколо осі OZ .

Розв'язування. $\begin{cases} z = \sin y; \\ x = 0; \end{cases} \quad y = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad z = \sin \sqrt{x^2 + y^2};$

$z^2 = \sin^2 \sqrt{x^2 + y^2}$ – рівняння шуканої поверхні обертання.

Приклад 5. Написати рівняння еліпсоїда, осі якого співпадають з осями координат і який проходить через точку $M(2; 0; 1)$ і перетинають площину XY по еліпсу $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Розв'язування. З умови $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1$ можна визначити значення півосей a, b еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Тоді рівняння еліпсоїда набуде вигляду $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Так як еліпсоїд проходить через точку $M(2;0;1)$, то $\frac{4}{8} + \frac{0}{1} + \frac{1}{c^2} = 1 \Rightarrow c^2 = 2; c = \sqrt{2}$. Остаточно отримуємо рівняння шуканого еліпсоїда $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{2} = 1$.

Приклад 6. Визначити переріз однопорожнинного гіперboloїда $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - z^2 = 1$ з площиною, яка проведена через точку $M(0;0;1)$ паралельно до площини XU .

Розв'язування. Так як переріз однопорожнинного гіперboloїда площиною є лінія, то її рівняння буде розв'язком системи, яка складається із рівнянь однопорожнинного гіперboloїда і площини, що задовольняють умові задачі. Ця

площина має рівняння $z = 1$. Отримуємо систему
$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - z^2 = 1; \\ z = 1, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, одержимо рівняння шуканого перерізу:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - 1 = 1; \\ z = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 2; \\ z = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1; \\ z = 1. \end{cases}$$

Отже, шуканий переріз – еліпс, його рівняння
$$\begin{cases} \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1; \\ z = 1. \end{cases}$$

Приклад 7. Знайти переріз еліпсоїда $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ координатними площинами.

Розв'язування. Знайдемо переріз площиною XU . Тому що рівняння площини XU : $z = 0$, то розв'язуємо систему
$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1; \\ z = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1; \\ z = 0 \end{cases}$$
 – отримуємо рівняння перерізу еліпсоїда площиною XU .

Аналогічно отримуємо переріз площиною YZ :
$$\begin{cases} \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1; \\ x = 0. \end{cases}$$

$$\text{переріз площиною } XZ: \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1; \\ y = 0. \end{cases}$$

Задачі для самостійного розв'язування і для домашнього завдання:

1. Написати рівняння еліпсоїда, осі якого співпадають з осями координат і який проходить через точку $N(1; \sqrt{3}; \sqrt{3})$ та перетинає площину OYZ по еліпсу $\frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{20} = 1$.

$$\left[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{20} = 1 \right].$$

2. Довести, що площина $ax + by + cz + d = 0$ дотикається еліпсоїда $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$, якщо $a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 = d^2$.

3. Визначити переріз однопорожнинного гіперboloїда $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - z^2 = 1$ з площиною, яка проведена через точку $K(0;0;1)$ паралельно до площини XU .

$$[\text{Еліпс } \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1].$$

4. Написати рівняння двопорожнинного гіперboloїда, якщо точки $M_1(3;1;2), M_2(2; \sqrt{11}; 3), M_3(6;2; \sqrt{15})$ лежать на даній поверхні.

$$[x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 1 = 0].$$

5. Осі симетрії однопорожнинного гіперboloїда служать осями координат і гіперboloїд проходить через еліпс $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1; \\ z = 0 \end{cases}$ і гіперболу $\begin{cases} \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{5} = 1; \\ x = 0. \end{cases}$

Написати рівняння однопорожнинного гіперboloїда.

$$\left[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{5} = 1 \right].$$

6. Знайти необхідні і достатні умови того, що площина $Ax + By + Cz + D = 0$ дотикається параболоїда $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$.

$$[pA^2 + qB^2 = 2CD].$$

7. Дослідити методом перерізів поверхні другого порядку, які задані такими рівняннями: а) $4x^2 + y^2 - 16z = 0$; б) $2x^2 + 2y^2 - 4z + 5 = 0$.

[а) Еліптичний параболоїд з вершиною в початку координат, $p = 2; q = 8$;

б) еліптичний параболоїд з вершиною $(0;0;\frac{5}{4})$, $p = q = 1$].

8. Написати рівняння однопорожнинного гіперболоїда, якщо поверхня проходить через точку $(\sqrt{5};3;2)$ і перетинає площину XZ по гіперболі $\frac{x^2}{5} - \frac{z^2}{4} = 1$.

$$[\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1].$$

9. Знайти радіуси кругових перерізів еліпсоїда $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{2} = 1$, які проходять через точку $(2;1;0)$ цієї поверхні.

10. Скласти рівняння поверхні, яка отримується від обертання еліпса $\frac{x^2}{5} + \frac{z^2}{9} = 1$ навколо осі Oz .

$$[\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{4} = 1].$$

Заняття 17.

Тема: Конус і циліндри.

Література: (1), р. 7, § 6; (3), ч.2; р.3, §§ 16,17.

Основні питання теми:

1) Рівняння конуса і циліндрів мають вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad - \quad \text{конус};$$

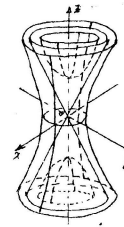
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad - \quad \text{еліптичний циліндр};$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad - \quad \text{гіперболічний циліндр};$$

$$\frac{x^2}{a^2} - py = 0 \quad - \quad \text{параболічний циліндр}.$$

Циліндри еліптичний, гіперболічний, параболічний перетинають площину XU по еліпсу, гіперболі, параболі і утворюються прямими, які паралельні осі Oz і перетинають вказані криві.

2) 3 однопорожнинними і двопорожнинними гіперболоїдами $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \pm 1 = 0$ природно зв'язаний конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, який називається *асимптотичним конусом* (див. рис.).



3) Кожна площина, яка проходить через вісь Oz , перетинає гіперболоїди по гіперболі, а конус – по двох твірних, які є асимптотами цих гіпербол. Наприклад, площина XZ ($y=0$) перетинає гіперболоїди по гіперболах $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} \pm 1 = 0$, конус – по двох прямих $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, які є асимптотами цих гіпербол.

Приклад 1. Скласти рівняння кругової циліндричної поверхні, якщо відомі рівняння її осі $x = 7 - 3t; y = 1 + 4t; z = 3 + 2t$ координати однієї з її точок $M_1(2;-1;0)$.

Розв'язування. З параметричних рівнянь осі кругового циліндра знаходимо, що початкова точка осі циліндра $M_0(7;1;3)$, напрямний вектор осі $\vec{p}(3;4;2)$.

Щоб скласти рівняння поверхні, треба ввести поточні координати x, y, z . Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка циліндричної поверхні. Всі точки поверхні знаходяться на однаковій відстані від її осі. Ця відстань обчислюється як висота паралелограма, який побудовано на векторах $\overline{M_0M_1}$ та $\vec{p}$, тобто за формулою

$$\rho = \frac{|\overline{[p, M_0M_1]}|}{|\vec{p}|}.$$

Можна також побудувати паралелограм на векторах $\overline{M_0M}$ та $\vec{p}$ і обчислювати його висоту – це буде одне і те ж число. На цьому і базується складання рівняння шуканої кругової циліндричної поверхні.

Отже, $M_0M_1(-5;-2;-3)$, $\vec{p}(3;4;2)$,

$$\rho = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{9+16+4}} = \frac{\sqrt{261}}{\sqrt{29}} = 3.$$

$$\overline{M_0M}(x-x_0; y-y_0; z-z_0); \overline{M_0M}(z-7; y-1; z-3).$$

$$\text{Складемо рівняння: } 3 = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ y-1 & z-3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ z-3 & x-7 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x-7 & y-1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{9+16+4}}.$$

Після перетворення одержимо:

$$20x^2 + 13y^2 + 25z^2 - 24xy - 12xz - 16yz - 200x + 190y - 50z + 641 = 0.$$

Приклад 2. Скласти рівняння циліндричної поверхні, напрямна якої лежить в площині XY і має рівняння $x^2 + 3y^2 + 2xy - x = 0$, а твірна паралельна вектору $(1;0;1)$.

Розв'язування. Візьмемо на поверхні довільну твірну, на ній будь-яку точку $M(x; y; z)$. Нехай твірна перетинає напрямну в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (напрямна лежить в площині XY), отже, $z_0 = 0$. Складемо параметричні рівняння твірної, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і має напрямний вектор $(1;0;1)$:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + 1 \cdot t; & x &= x_0 + t; & x_0 &= x - t; \\ y &= y_0 + 0 \cdot t; \Rightarrow y = y_0; & \Rightarrow y_0 &= y; \\ z &= z_0 + 1 \cdot t; & z &= z_0 + t; & z_0 &= z - t. \end{aligned}$$

$$x_0 = x - z;$$

Оскільки $z_0 = 0$, то $z - t = 0 \Rightarrow z = t$. Підставимо $y_0 = y$; у рівняння $z_0 = 0$

(тотожність) $x_0^2 + 3y_0^2 + 2x_0y_0 - x_0 = 0$ (рівняння напрямної $x^2 + 3y^2 + 2xy - x = 0$ задовольняють координати точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$), отримаємо рівняння шуканої циліндричної поверхні $(x - z)^2 + 3y^2 + 2(x - z)y - (x - z) = 0$.

Приклад 3. Скласти рівняння кругової конічної поверхні, вершина якої знаходиться в точці $S(1;2;3)$, вісь перпендикулярна до площини $2x + 2y - z + 1 = 0$, а твірна утворює з віссю кут, що дорівнює 30° .

Розв'язування. Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка поверхні. Напряmnий вектор твірної $\overline{SM}$ має координати $(x - 1; y - 2; z - 3)$. Вісь кругового циліндра має напрямний вектор $\vec{n}(2;2;-1)$ (з рівняння площини $2x + 2y - z + 1 = 0$). Таким чином, кут між твірною і віссю визначається за формулою $\cos \varphi = \frac{\vec{n} \cdot \overline{SM}}{|\vec{n}| \cdot |\overline{SM}|}$.

Оскільки $\varphi = 30^\circ$, то

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2(x-1) + 2(y-2) - 1(z-3)}{\sqrt{4+4+1} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}}.$$

Після перетворень отримуємо шукане рівняння кругової конічної поверхні $27((x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2) = 4(2x + 2y - z - 3)^2$.

Приклад 4. Знайти рівняння конічної поверхні з центром у початку координат, яка проходить через лінію перетину еліпсоїда $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$ і площини $2x - y + 4z - 2 = 0$.

Розв'язування. Лінія перетину еліпсоїда і площини є напрямною конічної поверхні. Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка будь-якої твірної поверхні. $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка перетину твірної з напрямною. Складемо канонічне рівняння твірної:

$$\frac{x-0}{x_0-0} = \frac{y-0}{y_0-0} = \frac{z-0}{z_0-0}; \begin{cases} \frac{x}{x_0} = \frac{z}{z_0}; \\ \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{xz_0}{z}; \\ y_0 = \frac{yz_0}{z}. \end{cases}$$

Оскільки $2x_0 - y_0 + 4z_0 - 2 = 0$, то

$$z_0 = \frac{2z}{2x - y + 4z}; \quad x_0 = \frac{2x}{2x - y + 4z}; \quad y_0 = \frac{2y}{2x - y + 4z}.$$

Так як координати точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ задовольняють рівняння еліпсоїда, то

$$\frac{\left(\frac{2x}{2x-y+4z}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{2y}{2x-y+4z}\right)^2}{4} + \left(\frac{2z}{2x-y+4z}\right)^2 = 1.$$

Після перетворень отримаємо рівняння шуканої поверхні

$$\frac{x^2}{2} + 3z^2 + 4xz - xy - 2zy = 0.$$

Задачі для самостійного розв'язування і для домашнього завдання:

1. Написати рівняння кругової циліндричної поверхні, якщо відомі рівняння її осі $x = t; y = 1 + 2t; z = -3 - 2t$ і координати однієї з її точок $N_0(1; -2; 1)$.

$$[8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 8yz + 4xz + 16x + 14y + 22z - 39 = 0].$$

2. Скласти рівняння циліндричної поверхні, якщо її напрямна лежить у площині YZ і має рівняння $y^2 - yz + 5 = 0$, а твірна паралельна осі Ox .

$$[y^2 - yz + 5 = 0].$$

3. Написати рівняння циліндричної поверхні обертання, якщо вісь обертання співпадає з віссю Oz , а радіус $r = 5$.

$$[x^2 + y^2 = 25].$$

4. Написати рівняння циліндричної поверхні обертання, якщо вісь обертання проходить через початок координат і паралельна вектору $(0; -1; 1)$, а $r = 3$.

$$[2x^2 + (y+z)^2 - 18 = 0].$$

Вказівка. Див. приклад 1.

5. Скласти рівняння конічної поверхні, якщо напрямна у площині XU задана рівнянням $x^2 + y^2 - y = 0$, а вершина має координати $(1;0;1)$.

$$[(x-z)^2 + y^2 - y(1-z) = 0].$$

6. Написати рівняння конічної поверхні з центром у початку координат, яка проходить через лінію перетину гіперboloїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - z^2 = 1$ та сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

$$\left[\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} - \frac{6z^2}{5} = 0 \right].$$

7. Скласти рівняння циліндричної поверхні, напрямною якої є коло $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1; \\ x + y + z = 0, \end{cases}$ а твірні паралельні вектору $(1;1;1)$.

$$[x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz - \frac{3}{2} = 0].$$

8. Написати рівняння циліндра, якщо напрямний вектор $\vec{a}(5;3;-2)$ його твірних і рівняннями його напрямної є: а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2 - z^2 = 4; \\ x = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 = 2z; \\ y = 0. \end{cases}$

$$[a) \left(x + \frac{5}{2}z\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}z\right)^2 = 25; б) \left(y - \frac{3}{5}x\right)^2 - \left(z + \frac{2}{5}x\right)^2 = 4;$$

$$в) \left(x - \frac{5}{3}y\right)^2 - 2\left(z + \frac{2}{3}y\right)^2 = 0].$$

9. Написати рівняння конуса з вершиною $(1;0;1)$, який проходить через лінію $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1; \\ x + y = 0. \end{cases}$

$$[36(x+y+z)^2 + 144(x-1y)^2 - 25y^2 = 0].$$

Заняття 18.

Тема: Прямолинійні твірні на поверхнях другого порядку. Дотична площина до поверхні другого порядку.

Література: (1), р. 7, § 7-9; (3), р. 2, гл. 3, §§ 22, 23.

Основні питання теми:

1. Прямолинійні твірні однопорожнинного гіперboloїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. На однопорожнинному гіперboloїді розташовуються дві сім'ї прямолинійних твірних:

$$g_\lambda: \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right), \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{y}{b}\right);$$

$$g'_\lambda: \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda \left(1 + \frac{y}{b}\right), \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (I)$$

2. Прямолинійні твірні гіперbolічного параболоїда: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. На гіперbolічному параболоїді розташовуються дві сім'ї прямолинійних твірних:

$$g_\lambda: z = \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right), 1 = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right);$$

$$g'_\lambda: z = \lambda \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right), 1 = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right). \quad (II)$$

3. В обох випадках (однопорожнинного гіперboloїда, гіперbolічного параболоїда) прямолинійні твірні однієї сім'ї не перетинаються, а прямолинійні твірні різних сімей перетинаються.

4. Для знаходження рівнянь твірних однопорожнинного гіперboloїда, які проходять через дану точку $(x_0; y_0; z_0)$, треба у рівняння двох сімей прямолинійних твірних (I) підставити $x_0; y_0; z_0$ замість $x; y; z$. Тоді будуть знайдені λ та $\frac{1}{\lambda}$.

Наприклад, можна отримати рівняння твірних, які проходять через будь-яку точку $(x_0; y_0; z_0)$ горлового еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; z = 0$ однопорожнинного гіперboloїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$:

$$\left(1 - \frac{y_0}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \frac{x_0}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right);$$

$$\left(1 + \frac{y_0}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \frac{x_0}{a} \left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

та

$$\left(1 + \frac{y_0}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \frac{x_0}{a} \left(1 + \frac{y}{b}\right);$$

$$\left(1 - \frac{y_0}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \frac{x_0}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

5. Рівняння дотичної площини до еліпсоїда, конуса та інших поверхонь другого порядку в точці $(x_0; y_0; z_0)$:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1 - \text{рівняння дотичної площини до еліпсоїда};$$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z_0 z}{c^2} = 0 - \text{рівняння дотичної площини до конуса і т.д.}$$

Приклад 1. Знайти прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, які паралельні площині $6x + 4y + 3z - 17 = 0$.

Розв'язування. Складемо рівняння двох сімей прямолінійних твірних даного однопорожнинного гіперболоїда:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{z}{4} = \lambda_1 \left(1 - \frac{y}{3}\right), & \frac{x}{2} + \frac{z}{4} = \frac{1}{\lambda_1} \left(1 + \frac{y}{3}\right); \\ \frac{x}{2} - \frac{z}{4} = \lambda_2 \left(1 + \frac{y}{3}\right), & \frac{x}{2} + \frac{z}{4} = \frac{1}{\lambda_2} \left(1 - \frac{y}{3}\right). \end{cases}$$

Щоб з отриманих двох сімей прямолінійних твірних виділити ті прямолінійні твірні, які паралельні площині $6x + 4y + 3z - 17 = 0$, необхідно рівняння кожної з двох сімей записати у такому виді, щоб можна було знайти вираз для напрямних їх векторів. Після найпростіших тотожних перетворень рівняння першої сім'ї набудуть вигляду:

$$\begin{cases} 6x + 4\lambda_1 y - 3z - 12\lambda_1 = 0; \\ 6\lambda_1 x - 4y + 3\lambda_1 z - 12 = 0. \end{cases}$$

Знаходимо координати напрямного вектора

$$\vec{p} \begin{vmatrix} 4\lambda_1 & -3 & 6 \\ -4 & 3\lambda_1 & 6\lambda_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 4\lambda_1 \\ 6\lambda_1 & -4 \end{vmatrix} = (12\lambda_1^2 - 12; -18\lambda_1 - 18\lambda_1; -24 - 24\lambda_1^2) =$$

$$= (\lambda_1^2 - 1; -3\lambda_1; -2 - 2\lambda_1^2) = (1 - \lambda_1^2; 3\lambda_1; 2 + 2\lambda_1^2)$$

Отже, отримали $\vec{p}(1 - \lambda_1^2; 3\lambda_1; 2 + 2\lambda_1^2)$ (всі координати розділили на -12). Тепер необхідно знайти те значення λ_1 , при якому прямолінійна твірна з першої сім'ї паралельна даній площині. Це можна зробити, використовуючи умову, що вектор $\vec{p}$ і вектор $\vec{n}$ площини перпендикулярні. Їх скалярні добутки дорівнюють нулю. Запишемо цю умову в координатах: $6(1 - \lambda_1^2) + 4 \cdot 3\lambda_1 + 3(2 + 2\lambda_1^2) = 0$; $6 - 6\lambda_1^2 + 12\lambda_1 + 6 + 6\lambda_1^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$.

Підставляємо значення $\lambda_1 = -1$ у рівняння першої сім'ї:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{z}{4} = -1 \left(1 - \frac{y}{3}\right); \\ \frac{x}{2} + \frac{z}{4} = \frac{1}{-1} \left(1 + \frac{y}{3}\right); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{z}{4} = -1 + \frac{y}{3}; \\ \frac{x}{2} + \frac{z}{4} = -1 - \frac{y}{3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - z = -4 + \frac{4y}{3}; \\ 2x + z = -4 - \frac{4y}{3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 4y - 3z + 12 = 0; \\ 6x - 4y + 3z + 12 = 0. \end{cases}$$

Таким чином, рівняння однієї з прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда має вид:

$$\begin{cases} 6x - 4y - 3z + 12 = 0; \\ 6x - 4y + 3z + 12 = 0. \end{cases}$$

Аналогічно для прямолінійної твірної другої сім'ї, яка паралельна даній площині, отримуємо $\lambda_2 = 1$, і відповідно рівняння другої з прямолінійних твірних:

$$\begin{cases} 6x - 4y - 3z - 12 = 0; \\ 6x + 4y + 3z - 12 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } \begin{cases} 6x - 4y - 3z + 12 = 0; \\ 6x - 4y + 3z + 12 = 0 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} 6x - 4y - 3z - 12 = 0; \\ 6x + 4y + 3z - 12 = 0. \end{cases}$$

Приклад 2. Переконавшись, що точка $M(1; 3; -1)$ лежить на гіперболоїдному параболоїді $4x^2 - z^2 = y$, скласти рівняння його прямолінійних твірних, які проходять через точку M .

Розв'язування. Переконаємось, що точка $M(1; 3; -1)$ лежить на гіперболоїдному параболоїді $4x^2 - z^2 = y$. Для цього підставимо координати точки M у дане рівняння: $4 \cdot 1^2 - (-1)^2 = 3$; $4 - 1 = 3$; $3 = 3$. Отже, координати точки M задовольняють рівняння параболоїда, тому точка M лежить його поверхні.

Складемо рівняння прямолінійних твірних:

$$\lambda_1 \left(\frac{x}{\frac{1}{2}} - \frac{z}{1} \right) = y, \quad \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{1} \right) = 1 \quad \text{і} \quad \lambda_2 \left(\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{1} \right) = y, \quad \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{x}{\frac{1}{2}} - \frac{z}{1} \right) = 1.$$

Так як шукані прямолінійні твірні проходять через точку $M(1; 3; -1)$, то, підставивши її координати у рівняння прямолінійних твірних двох сімей, отримаємо значення λ_1 та λ_2 шуканих прямих:

$$\lambda_1(2 + 1) = 3, \quad \frac{1}{\lambda_1}(2 - 1) = 1 \quad \text{і} \quad \lambda_2(2 - 1) = 3, \quad \frac{1}{\lambda_2}(2 + 1) = 1, \quad \text{звідки} \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 3.$$

Підставимо ці значення у рівняння двох сімей прямо лінійних твірних, отримаємо рівняння двох прямолінійних твірних:

$$\begin{cases} 2x - z = y; \\ 2x + z = 1 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3(2x + z) = y; \\ \frac{1}{3}(2x - z) = 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2x - y - z = 0; \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 6x - y + 2z = 0; \\ 2x - z - 3 = 0. \end{cases}$$

Ці рівняння можна записати в іншому виді – канонічними рівняннями. Для цього з отриманих рівнянь виразимо x через y : $x = \frac{1+y}{4}$ (склали перше та друге

рівняння) та x через z : $x = \frac{1-z}{2}$. Можна записати: $x = \frac{1+y}{4} = \frac{1-z}{2}$ або

$\frac{x}{1} = \frac{1+y}{4} = \frac{1-z}{2}$ – отримали канонічне рівняння першої прямолінійної твірної.

Аналогічно отримуємо канонічні рівняння другої прямолінійної твірної $\frac{x}{1} = \frac{9+y}{12} = \frac{3+z}{2}$ гіперболоїдному параболоїда.

$$\text{Відповідь: } \frac{x}{1} = \frac{1+y}{4} = \frac{1-z}{2}, \quad \frac{x}{1} = \frac{9+y}{12} = \frac{3+z}{2}.$$

Приклад 3. Скласти рівняння дотичних площин двопорожнинного

гіперboloїда $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = -1$, які паралельні до площини $3x - 2y - 7z - 2 = 0$.

Розв'язування. Запишемо рівняння дотичної площини до двопорожнинного

гіперboloїда в точці $(x_0; y_0; z_0)$: $\frac{x_0 x}{16} + \frac{y_0 y}{9} - \frac{z_0 z}{4} = -1$. Так як дотична площина паралельна даній площині $3x - 2y - 7z - 2 = 0$, то коефіцієнти в її рівняннях при

змінних $x; y; z$ пропорційні, тобто: $\frac{x_0}{16} = \frac{y_0}{9} = \frac{-z_0}{-4}$ або $\frac{x_0}{48} = \frac{y_0}{-18} = \frac{z_0}{28}$ або

$$\frac{x_0}{24} = \frac{y_0}{-9} = \frac{z_0}{14}.$$

Складемо систему рівнянь з невідомими $x_0; y_0; z_0$:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{9} - \frac{z_0^2}{4} = -1; \\ \frac{x_0}{48} = \frac{y_0}{-18} = \frac{z_0}{28} = t; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 48t; \\ y_0 = -18t; \\ z_0 = 28t; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 24t; \\ y_0 = -9t; \\ z_0 = 14t; \end{cases}$$

$$\frac{576t^2}{16} + \frac{81t^2}{9} - \frac{196t^2}{4} = -1; \quad 36t^2 + 9t^2 - 49t^2 = -1; \quad -4t^2 = -1; \quad t = \pm \frac{1}{2};$$

$$\frac{x_0}{48} = \pm \frac{1}{2}; \quad \frac{y_0}{-18} = \pm \frac{1}{2}; \quad \frac{z_0}{28} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = \pm 24; y_0 = \pm 9; z_0 = \pm 14.$$

Отже, точки дотику симетричні відносно початку координат, і їх координати будуть такими: $M_1(24; -9; 14)$, $M_2(-24; 9; -14)$.

Нарешті отримуємо рівняння дотичних площин:

$$\frac{24x}{16} - \frac{9y}{9} + \frac{14z}{4} = -1 \quad \text{або} \quad 3x - 2y - 7z + 2 = 0;$$

$$\frac{-24x}{16} + \frac{9y}{9} + \frac{14z}{4} = -1 \quad \text{або} \quad 3x - 2y - 7z - 2 = 0.$$

Відповідь: $3x - 2y - 7z + 2 = 0$; $3x - 2y - 7z - 2 = 0$.

Задачі для самостійного розв'язування і для домашнього завдання:

1. Написати рівняння двох сімей прямолінійних твірних однопорожнинного гіперboloїда $x^2 + 9y^2 - z^2 = 9$ і визначити ті із них, які проходять через точку $\left(3; \frac{1}{3}; -1\right)$.

$$\begin{cases} x + 3\lambda y - z = 3\lambda; \\ \lambda x - 3y + z = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3\mu y - z = 3\mu; \\ \mu x + 3y + z = 3. \end{cases}$$

2. На гіперболоїдному параболоїді $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 2z$ знайти прямолінійні твірні, які паралельні площині $6x + 4y - 8z + 1 = 0$.

$$\left[\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}; \quad \frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2} \right].$$

3. Знайти рівняння прямолінійних твірних поверхні $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, які проходять через точку $M_0(3; 3; 2)$.

$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1; \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{3} - \frac{z}{2} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 5y = 0; \\ z = 2. \end{cases}$$

4. Знайти прямолінійні твірні поверхні $x^2 + y^2 = 2(z^2 + 1)$, які проходять через точку $(1; 1; 0)$.

$$\left[\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}; \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1} \right].$$

5. Скласти рівняння дотичної площини до поверхні $x^2 + y^2 = 2z$ в точці $P(-2; 1; 4)$.

$$[2x - 4y + z + 4 = 0].$$

6. Знайти дотичну площину до еліптичного параболоїда $x^2 + \frac{y^2}{4} = 2z$, яка паралельна площині $2x - y + 2z - 17 = 0$.

$$[2x - y + 2z + 2 = 0].$$

Вказівка. Рівняння дотичної площини до даної поверхні записати у виді $x_0 x + \frac{y_0 y}{4} = z_0 + z$. З умови паралельності площин отримуємо $2x_0 = -y_0 = -2$, звідки $x_0 = -1$; $y_0 = 2$; z_0 знаходимо з умови, що координати точки дотику $M_0(x_0; y_0; z_0)$ задовольняють рівняння поверхні.

7. Скласти рівняння дотичної площини до однополого гіперboloїда $x^2 + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$, яка перпендикулярна до вектора $\vec{n}(6; 1; 3)$.

$$[6x + y + 3z - 3 = 0; \quad 6x + y + 3z + 3 = 0].$$

8. Довести, що площина $4x - 5y - 10z - 20 = 0$ перетинає однополий гіперboloїд $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ по прямолінійним твірним. Скласти рівняння цих твірних.

$$\begin{cases} y + 2z = 0; \\ x - 5y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 5z = 0; \\ y + 4 = 0. \end{cases}$$

*Коректори – Роменська Т.М., Федіна О.І.
Технічний редактор – Блах Е.І.
Головний редактор – Беляєва О.Ю.*

Підписано до друку 25.02.2004. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Друк цифровий. Гарнітура Times New Roman.
Умовн. друк. арк. 5. Наклад 100.

Друк здійснено з готового оригінал-макета у Видавництві ХДУ.
Свідоцтво серія ХС №33 від 14 березня 2003 р.
Видано Управлінням у справах преси та інформації облдержадміністрації.
73000. Україна, м. Херсон, вул. 40 років Жовтня, 4. Тел.: (0552) 32-67-95.