

**Міністерство освіти і науки України
Херсонський державний університет
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА
МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО
АНАЛІЗУ**

**ВИВЧЕННЯ РУХІВ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ ЗА
ДОПОМОГОЮ ЦИФРОВИХ ІНСТРУМЕНТІВ**

**Кваліфікаційна робота (проект)
на здобуття ступеня вищої освіти “бакалавр”**

Виконала: студентка 4-го курсу, 12-421
групи

Спеціальності: 014 Середня освіта

Спеціалізація: 014.04 Математика

Освітньо-професійної програми «Середня
освіта (математика)» першого
(бакалаврського) рівня вищої освіти

Нігальчук Єва Романівна

Керівник кандидатка педагогічних наук,
старша викладачка Григор'єва Валентина
Борисівна

Рецензент доцентка кафедри природничо-
наукової підготовки Херсонської державної
морської академії

Спичак Т. С.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1	6
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАЧ	6
1.1. Огляд навчально-методичної літератури з теми дослідження.....	6
1.2. Методи та підходи до розв’язування конструктивних задач.....	10
РОЗДІЛ 2	20
ЦИФРОВІ ТЕХНОЛОГІЇ У РОЗВ’ЯЗУВАННІ КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАЧ	20
2.1. Огляд сучасних цифрових технологій у розв’язуванні конструктивних задач	20
2.2. Використання цифровізації для практичного застосування в конструктивних задачах	23
2.3. Розробка курсу «Динамічна геометрія: створюй, рухай, відкривай!» на платформі GeoGebra	32
ВИСНОВКИ.....	36
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	38

ВСТУП

У шкільному курсі геометрії важливе місце посідає вивчення рухів — перетворень, що зберігають форму та розміри фігур. До таких належать паралельне перенесення, симетрія та обертання. Їх розуміння сприяє розвитку просторового мислення, логіки й умінь розв’язувати задачі на побудову. Сучасні цифрові інструменти, зокрема GeoGebra, відкривають нові можливості для вивчення цих тем, забезпечуючи наочність, інтерактивність та гнучкість у подачі навчального матеріалу.

Актуальність дослідження. У сучасній геометрії вивчення рухів є важливим інструментом для розв’язання різноманітних задач. До таких перетворень належать обертання, паралельне перенесення, симетрія та їхні комбінації. Дослідження цих перетворень дозволяє не лише глибше зрозуміти властивості фігур, а й знаходити нові зв’язки між їхніми елементами після застосування відповідного руху. Розгляд таких задач є актуальним як у теоретичному плані, так і в практичному, оскільки ізометрії широко застосовуються в комп’ютерній графіці, робототехніці, інженерних розрахунках та фізичних моделях руху.

Таким чином, **метою дослідження** є аналіз і застосування рухів для розв’язання геометричних задач, зокрема, дослідження їх впливу на геометричні фігури та можливості використання цих методів для знаходження невідомих координат точок та відрізків.

Предметом дослідження виступають властивості рівносторонніх трикутників та інших геометричних фігур при застосуванні таких перетворень, як обертання, паралельне перенесення та симетрія, а **об’єктом дослідження** є геометричні перетворення, що зберігають відстань між точками.

Основні **методи дослідження** включають аналітичний підхід, що передбачає використання координатного методу для визначення

положення точок після перетворень, а також синтетичний метод, який базується на побудовах та аналізі геометричних властивостей фігур. Графічний метод використовується для візуалізації процесу перетворень та кращого розуміння отриманих результатів.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі **завдання**:

- дослідити властивості основних рухів: обертання, симетрії та паралельного перенесення;
- розглянути приклади задач, що містять різні види рухів;
- застосувати отримані знання для знаходження невідомих координат точок та довжини відрізків;
- розробити авторський мінікурс на платформі GeoGebra, що дозволяє інтегрувати вивчення геометричних рухів із сучасними цифровими технологіями навчання.

Практичне значення дослідження полягає у можливості застосування отриманих результатів у навчальному процесі, підготовці до олімпіад та глибшому розумінні властивостей геометричних перетворень. Використання цих знань може бути корисним у математичному моделюванні, програмуванні алгоритмів для комп'ютерної графіки та інженерних розрахунках.

Структура роботи. Кваліфікаційна робота складається зі вступу, двох основних розділів, висновків та списку використаних джерел. У першому розділі розглянуто теоретичні основи розв'язування конструктивних задач із використанням геометричних рухів: паралельного перенесення, симетрії та обертання. У другому розділі проаналізовано можливості сучасних цифрових інструментів, зокрема

застосунку GeoGebra, для візуалізації та практичного засвоєння теми.
Завершується робота узагальнюючими висновками.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАЧ

1.1. Огляд навчально-методичної літератури з теми дослідження

У сучасному світі цифрові технології стали основною частиною нашого життя. Зараз людство використовує найсучасніші інформаційні технології у різних галузях: медицина, політика, фізичні, хімічні та біологічні науки тощо. Математика, також не стала винятком і стала значно краще розвиватися у сфері технологій.

Цифровізація освіти в Україні, спрямована на якість підготовки спеціалістів та на ефективне засвоєння знань учнів. Покращення освітнього процесу завдяки інноваційним технологіям забезпечує можливість адаптивного керування освітнім процесом. Крім того, цифрові технології сприяють індивідуалізації навчання, даючи можливість кожному учню навчатися у власному темпі, а вчителям – ефективніше відстежувати прогрес та коригувати навчальний процес відповідно до потреб класу. Як наслідок, навчальний матеріал стає більш наочним, інформація засвоюється швидше, а рутинні процеси, що не потребують глибокого аналізу чи складних розумових зусиль, такі як виконання обчислень, підбір можливих варіантів або пошук правильного рішення, автоматизуються.

Огляд на побудову конструктивних задач зробила авторка статті «Задачі на побудову з використанням циркуля та лінійки та їх вплив на учнів у середній школі» Марченко Катерина. Авторка розглядає постановку проблеми побудови геометричних задач традиційними методами, які базуються на використанні класичних інструментів, таких як циркуль, лінійка, транспортир, а також алгебраїчних і аналітичних

методів. Протягом багатьох століть ці підходи були основними засобами для навчання та розвитку просторового мислення учнів. Однак, класичні методи мають низку обмежень. Зазвичай це пов'язано з ускладненням візуалізацією просторових об'єктів і їхніх взаємозв'язків. Деякі задачі потребують виконання великої кількості проміжних побудов, що може призводити до помилок у побудові в учнів або при перевірці правильності розв'язку у вчителів. Наразі перед нами стоїть інша задача, опанувати цифровізацію в геометрії для облегшення розв'язку та якісно викладеного матеріалу [1].

У статті « Сучасні підходи до вивчення нарисної геометрії» Іванова Л.С., Ботвіновська С.І., Золотова А.В., Мостовенко О. В. автори розглядають про поєднання типових методів та інформаційних технологій. Сучасний розвиток інформаційних технологій значно впливає на процес викладання геометрії, зокрема у 9 класі, коли учні опановують складніші поняття, пов'язані з теоремами, побудовами та доведеннями. Цифровізація освіти забезпечує нові підходи до подання матеріалу, сприяючи більшій наочності та інтерактивності навчання. Використання технологій дозволяє покращити розуміння просторових об'єктів, оскільки традиційні методи, що базуються лише на рисунках у підручниках або кресленнях на дошці, часто не можуть повністю передати взаємозв'язки між геометричними фігурами. Окрім того, цифрові методи навчання дозволяють учням самостійно досліджувати різні варіанти побудов і перевіряти свої припущення, що сприяє розвитку аналітичного мислення та логічного обґрунтування. Також цифровізація освітнього процесу забезпечує можливість адаптивного навчання, коли кожен учень може працювати у власному темпі, отримуючи зворотний зв'язок щодо правильності своїх дій. Таким чином, інтеграція новітніх інформаційних технологій у вивчення

геометрії в 9 класі сприяє не лише підвищенню ефективності засвоєння матеріалу, а й формуванню дослідницьких компетенцій у школярів [2].

У своїй статті Смаль К. О. та Папач О. І. пишуть, що цифровізація освіти охоплює широкий спектр інноваційних підходів, серед яких інтеграція доповненої, віртуальної та змішаної реальності, активне використання мобільних технологій та онлайн-платформ, розвиток дистанційного навчання, а також впровадження ігрових елементів для підвищення мотивації учнів. Хмарні технології відкривають нові можливості для зберігання та обробки даних у віддаленому доступі, що робить їх незамінними в освітньому процесі. Вони дозволяють застосовувати інтерактивні онлайн-ресурси без необхідності встановлення додаткового програмного забезпечення, окрім веб-браузера. Використання цих технологій сприяє спрощенню організації навчального процесу, дозволяє проводити тестування, моніторинг успішності учнів та забезпечує відкритий доступ до освітніх матеріалів. Перехід на дистанційне навчання, зокрема в період пандемії, показав важливість хмарних сервісів для ефективного забезпечення освітнього процесу та адаптації педагогів до нових цифрових реалій. У шкільному житті вчителі зазвичай використовують класну дошку для пояснення матеріалу, а в дистанційному навчанні вчитель має використовувати інтерактивну дошку. Для цього, авторки стверджують, є декілька застосунків, один з них це Miro. Це інтерактивна дошка яка допомагає вчителям взаємодіяти з групою учнів або з усім класом у режимі реального часу. Віртуальна дошка дозволяє одразу коригувати помилки учнів, перевагою є те, що всі зміни у роботі дитини зберігаються та учень може в будь-який час переглянути свою роботу з коментарями вчителя. Також зазначено що можна знаходити точки на декартовій системі координат, але технічно складно будувати відрізки [3].

У статті Титаренко Н.Є. та Муртазієв Е.Г. «Застосування GeoGebra на уроках геометрії» автори детально розглядають застосунок GeoGebra для використання його в конструктивних задачах. У публікації розглядається використання електронних освітніх ресурсів як інструментів комп'ютерної підтримки навчання математики для підготовки компетентних фахівців у сфері середньої освіти з математики. Акцентується увага на важливості якісної підготовки педагогів, здатних впроваджувати інноваційні методи та засоби навчання, спрямовані на розвиток дослідницьких компетенцій. Досліджується застосування інтерактивного геометричного середовища GeoGebra для візуалізації математичних концепцій, проведення експериментів і досліджень під час розв'язування математичних задач. Розглядаються можливості GeoGebra для ознайомлення, перевірки, закріплення та повторення властивостей геометричних фігур. Наводяться приклади базових та альтернативних способів побудови квадрата, прямокутника, паралелограма, рівностороннього та рівнобедреного трикутників, бісектриси кута, серединного перпендикуляра відрізка, правильного шестикутника, а також центрів вписаного та описаного кіл на основі їхніх властивостей [4].

Стаття Олега Коношевського «Підготовка майбутніх учителів математики до застосування цифрових технологій в освітньому процесі закладів загальної середньої освіти» присвячена актуальним питанням цифровізації освіти та ролі цифрових технологій у підготовці майбутніх вчителів математики. Автор наголошує, що сучасна освіта неможлива без цифрової компетентності педагогів, оскільки технологічні зміни, пандемія прискорила процес переходу до цифрових методик навчання. Він аналізує основні виклики, пов'язані із запровадженням цифрових технологій, серед яких недостатня конкретизація цифрових компетентностей у державних освітніх стандартах, формальне

використання цифрових засобів без реального підвищення якості навчання та необхідність адаптації до нових поколінь учнів, які звикли до цифрового середовища. У статті розглядаються різні методи цифровізації освіти. Автор наводить конкретні інструменти, які можуть покращити викладання математики. Програмне забезпечення такі як GeoGebra, Mathcad, GRAN, DERIVE та онлайн-сервіси Google Classroom, месенджери, а також технології гейміфікації та віртуальної реальності, що допомагають зробити навчальний процес більш інтерактивним. Важливим аспектом є не лише використання цифрових засобів, а й формування у вчителів критичного мислення, медіаграмотності та навичок безпечної роботи в цифровому просторі. Дослідження, проведене серед студентів педагогічного університету, підтвердило високу зацікавленість у цифрових технологіях, 94% опитаних вважають, що сучасний вчитель математики повинен володіти цифровими компетенціями, а 86% погоджуються, що цифрові інструменти покращують навчальний процес. Найбільш популярними серед студентів є мультимедійні презентації, освітні веб-квести та онлайн-опитування. У висновках автор зазначає, що цифровізація освіти є необхідною умовою покращення викладання математики, однак її реалізація має бути продуманою та орієнтованою на якість навчання. Підготовка майбутніх учителів повинна включати не лише освоєння цифрових інструментів, а й розуміння методик їхнього ефективного використання для підвищення результативності освітнього процесу [5].

1.2. Методи та підходи до розв'язування конструктивних задач

Паралельне перенесення

У геометрії одним із найважливіших перетворень є паралельне перенесення. Воно дозволяє зміщувати фігури на заданий вектор, зберігаючи їх форму та розміри. Це перетворення вивчається у 9 класі в

курсі планіметрії та має широке застосування як у шкільних задачах, так і в реальному житті, наприклад, у комп'ютерній графіці, кресленні та фізиці.

Розглянемо, що таке паралельне перенесення, як воно виконується та які властивості має.

Нехай на площині задано вектор α .

Якщо кожній точці X фігури D ставиться у відповідність точка X_1 фігури D_1 , що є її образом і для якої виконується рівність $\overrightarrow{XX_1} = \vec{\alpha}$, таке перетворення називається *паралельним перенесенням* [6].

1. При паралельному перенесенні :
 - а. кожна точка A переходить у точку A_1 ;
 - б. кожна пряма b переходить у пряму b_1 , яка є паралельною до неї;
 - в. кожен відрізок перетворюється на рівний йому відрізок, що залишається паралельний початковому [6].
2. Якщо дана фігура D , то для побудови його образу D_1 достатньо перенести кілька характерних точок, наприклад вершин многокутника, а потім з'єднати їх у тому ж порядку (рис.1.1.1) [6].

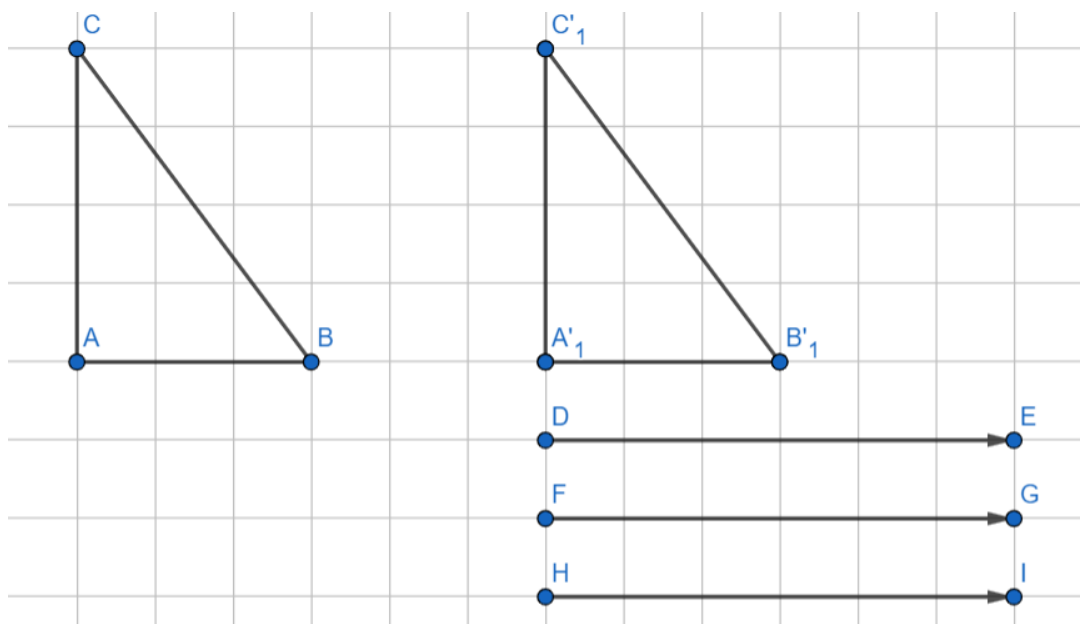


Рис.1.1.1

3. Щоб побудувати образ кола під час паралельного перенесення, необхідно перемістити його центр на заданий вектор, а потім провести коло з таким самим радіусом.

Метод паралельного перенесення застосовується для розв'язування геометричних задач на побудову. Його суть полягає в тому, що разом із початковими та шуканими фігурами аналізуються їхні образи, отримані в результаті перенесення на заданий вектор. Це дозволяє спростити розв'язання задач, використовуючи властивості паралельного перенесення [6].

Метод паралельного перенесення широко застосовується для побудови чотирикутників, визначення оптимального розташування фігур у просторі, а також для знаходження найкоротших відстаней між об'єктами.

Осьова симетрія

У геометрії одним із ключових перетворень є осьова симетрія, або відображення відносно прямої. Це перетворення відіграє важливу роль у вивченні властивостей фігур, зокрема у визначенні їхньої симетрії, побудові відображень та аналізі інваріантних характеристик.

Осьова симетрія розглядається у курсі геометрії 9 класу в межах вивчення рухів на площині. Це поняття має широке застосування не лише в математиці, а й у фізиці, інженерній графіці, мистецтві та природничих науках.

Розглянемо детально означення та властивості осьової симетрії.

Точки B і B_1 називаються *симетричними* відносно EF , якщо ця пряма перпендикулярна до відрізка BB_1 і ділить його навпіл (рис.1.1.2). Прямую EF називають *віссю симетрії* [6].

Осьовою симетрією (або *відображенням відносно прямої*) називають таке перетворення, при якому кожна точка фігури переходить

у свою симетричну точку, розташовану на протилежному боці відносно заданої осі, на однаковій відстані від неї.

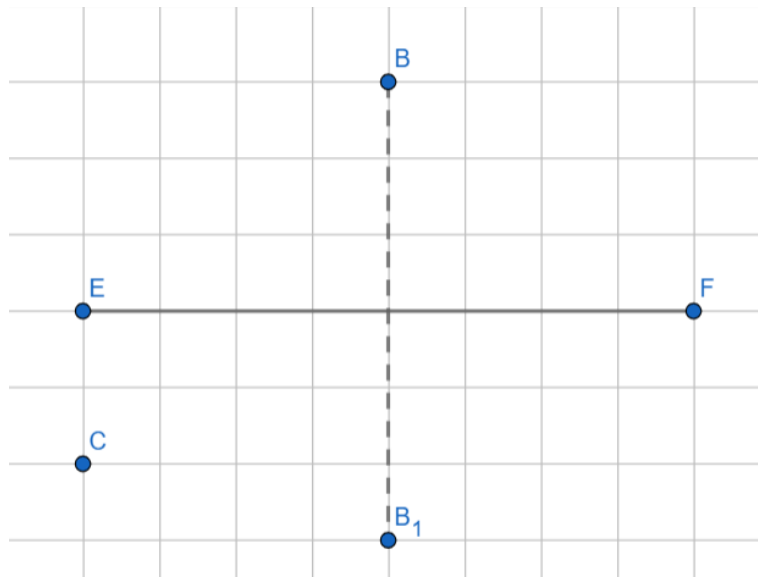


Рис.1.1.2

Властивості осьової симетрії:

1. Фігури, що є симетричними відносно прямої α , є конгруентними. (рис.1.1.3).

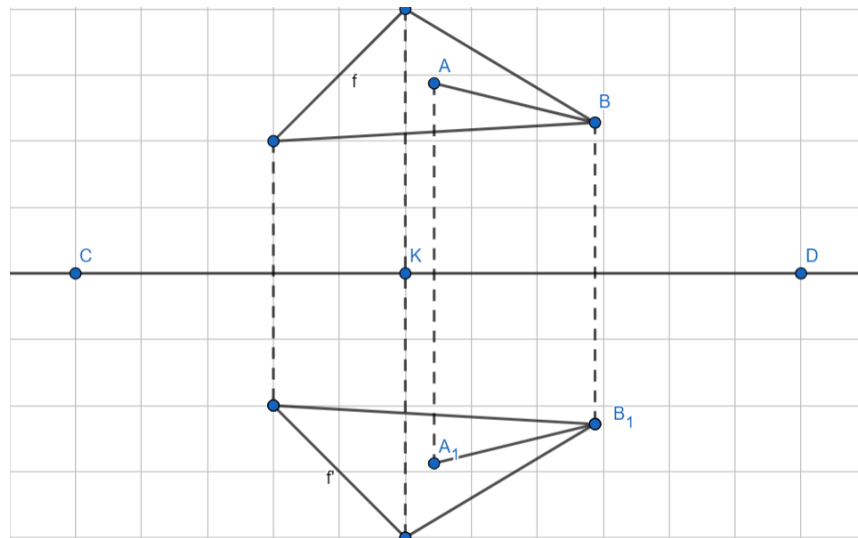


Рис.1.1.3

2. Образом відрізка при осьовій симетрії є відрізок такої ж довжини.
3. Образом кола при відображенні відносно осі симетрії є коло з таким самим радіусом.

4. Дві прямі, симетричні відносно осі α , можуть бути або паралельними та рівновіддаленими від неї, або ж перетинати її в одній точці, утворюючи рівні кути з віссю α (рис.1.1.4, 1.1.5).

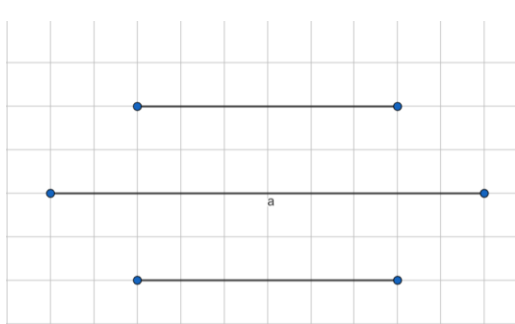


Рис.1.1.4

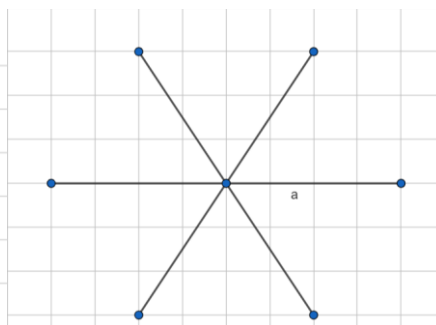


Рис.1.1.5

5. Якщо прямі a і b перетинаються у точці A , то їхні симетричні образи a_1 і b_1 , відносно осі c , також перетинаються, але в точці A_1 , що є симетричною до A відносно c (рис.1.1.6) [6].

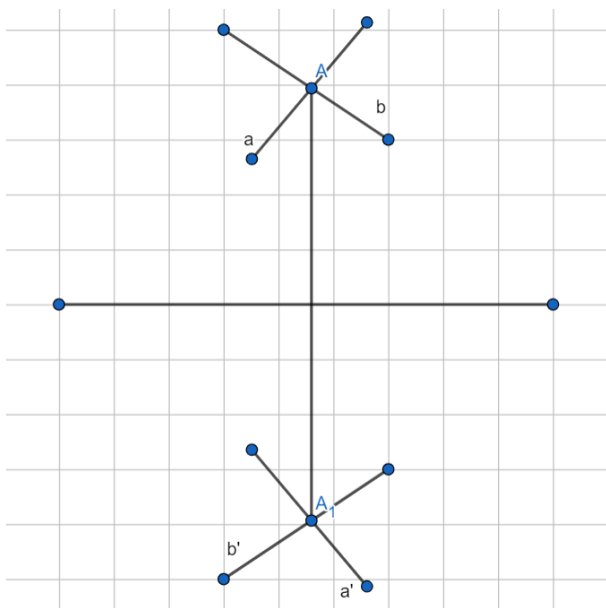


Рис.1.1.6

Метод симетрії використовується для розв'язування геометричних задач на побудову. Його суть полягає в тому, що разом із даними та шуканими фігурами розглядають також їхні симетричні образи відносно певної осі. Цей метод широко застосовується для знаходження найбільших і найменших величин, а також для відновлення форми фігур.

Обертання

У геометрії одним із основних рухів на площині є обертання. Це перетворення відіграє важливу роль у вивченні симетрії, побудові фігур та розв'язуванні багатьох геометричних задач. Обертання використовується не лише в математиці, а й у фізиці, інженерії, комп'ютерній графіці та природничих науках.

Обертання розглядається у курсі геометрії 9 класу в межах вивчення рухів на площині. У цьому розділі ми розглянемо означення обертання, його основні властивості, способи побудови образів фігур після обертання та застосування цього перетворення у розв'язуванні геометричних задач.

Припустимо, що в площині задано точку A та орієнтований кут α , який називають кутом повороту. Оберемо точку O як центр обертання. Побудуємо точку A_1 так, щоб виконувалися умови $OA = OA_1$ і кут $AOA_1 = \alpha$. У такому випадку кажуть, що точка A обертається на кут α (рис.1.1.7) [6].

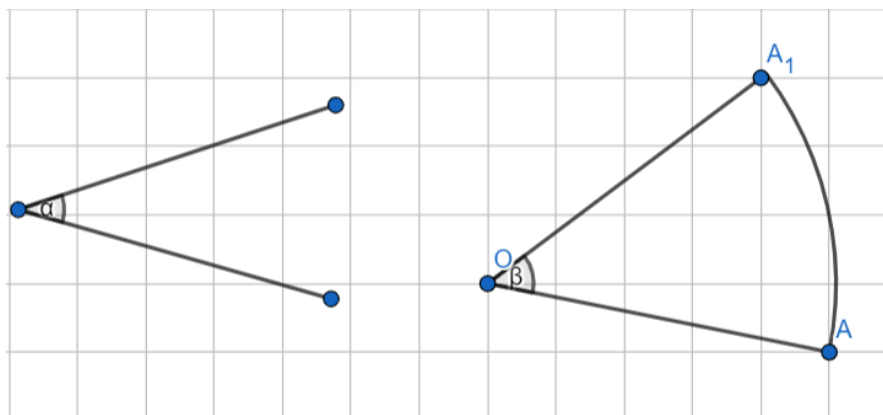


Рис.1.1.7

Перетворення, при якому кожній точці A фігури F відповідає точка A_1 , що задовольняє умови $OA = OA_1$ та кут $AOA_1 = \alpha$, називається *обертанням на кут α* .

Обертання можна розглядати як результат двох симетрій відносно осей, які перетинаються. Наприклад, якщо точку A обернути на кут 2γ ,

це еквівалентно послідовному виконанню двох симетрій відносно осей, що утворюють кут δ (рис.1.1.8).

Часто обертання на 180° виділяється як окреме перетворення. У цьому випадку точки A і A_1 розташовуються на одній прямій по різні боки від точки O та на однаковій відстані від неї (рис. 1.1.9). Такі точки називають симетричними відносно точки O . Фігура F_1 , утворена всіма точками, симетричними до точок фігури F відносно O , називається симетричною відносно точки O .

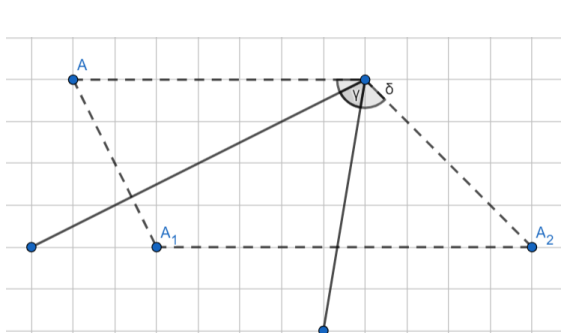


Рис.1.1.8

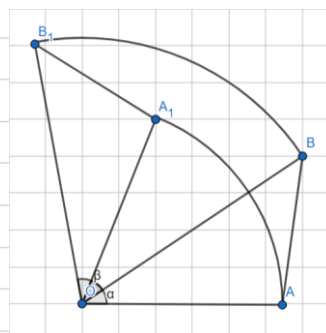


Рис.1.1.9

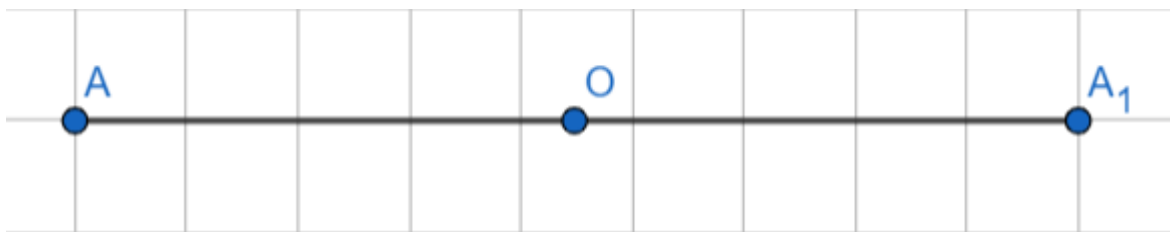


Рис.1.1.10

Розглянемо такі властивості центральної симетрії.

1. Фігури, симетричні відносно точки O , є рівними (рис.1.1.11).

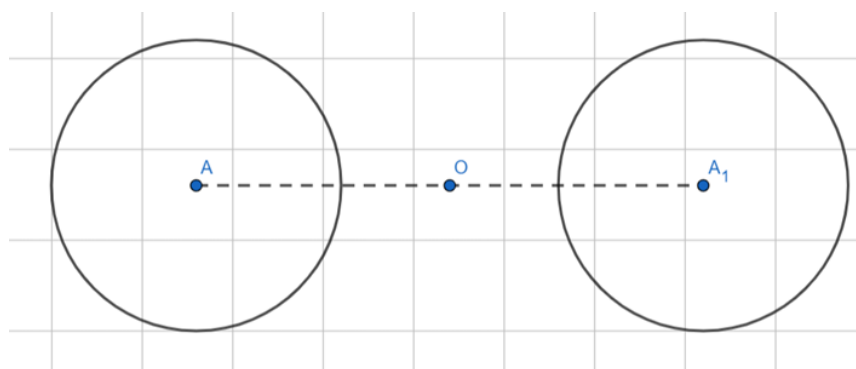


Рис.1.1.11

2. Відрізки AB і A_1B_1 , які є симетричними відносно точки O , або є паралельними, або лежать на одній прямій, що проходить через O (рис.1.1.12, 1.1.13).

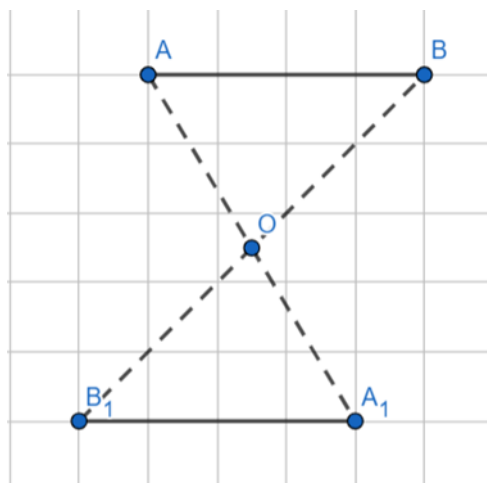


Рис.1.1.12

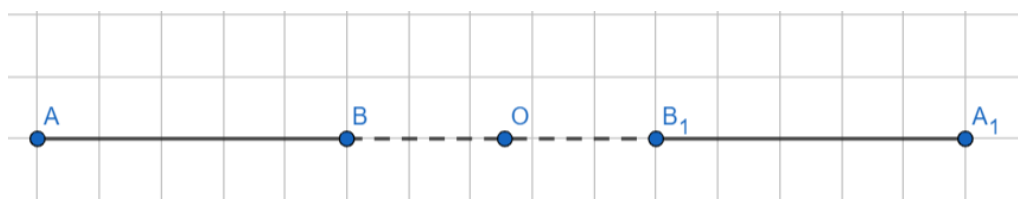


Рис.1.1.13

Застосування обертання до розв'язування задач на побудову називається методом обертання. Його суть полягає у тому, що разом із даними або шуканими фігурами розглядаються їхні образи після обертання навколо певного центру, що дозволяє знайти шукані елементи.

Для ефективного використання методу обертання важливо добре засвоїти розв'язування базових задач, пов'язаних з обертанням прямих та кіл навколо точки.

1. Якщо точка O (рис.1.1.14) не лежить на прямій a , то з O опускають перпендикуляр OA на a , а потім будують кут α при точці O , де одна сторона збігається з OA . На другій стороні кута відкладають відрізок $OA_1 = OA$, після чого через точку A_1 проводять пряму a_1 , яка буде перпендикулярною до другої сторони кута. В результаті a_1 є образом прямої a .

2. Якщо ж точка O належить прямій a (рис.1.1.15), то для обертання прямої на кут α будують кут α з вершиною в точці O таким чином, щоб одна його сторона збігалася з a . Інша сторона кута буде образом прямої a .

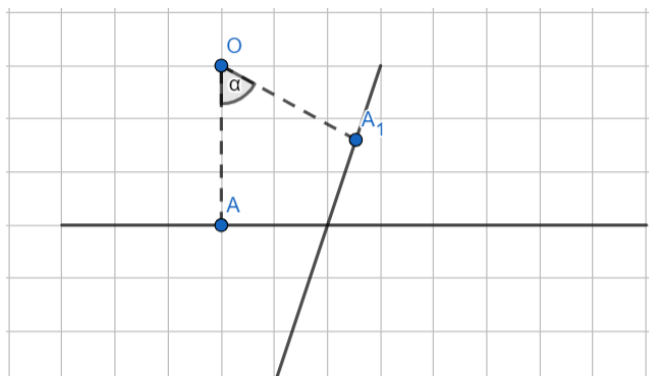


Рис.1.1.14

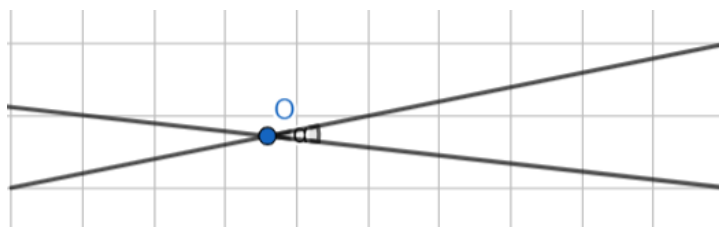


Рис.1.1.15

Для обертання кола необхідно обернути його центр O_1 на кут α , отримавши точку O_2 , а потім провести коло з тим самим радіусом (рис.1.1.16).

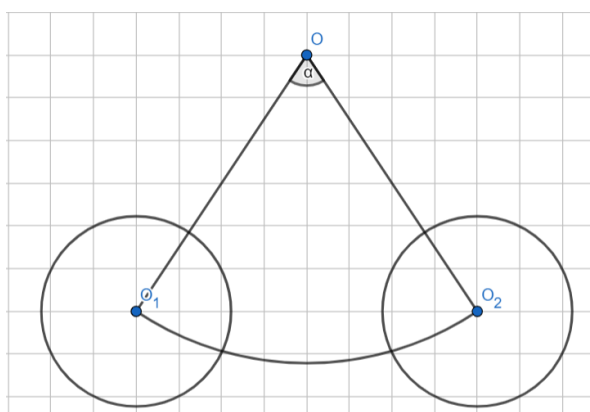


Рис.1.1.16

РОЗДІЛ 2

ЦИФРОВІ ТЕХНОЛОГІЇ У РОЗВ'ЯЗУВАННІ КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАЧ

2.1. Огляд сучасних цифрових технологій у розв'язуванні конструктивних задач

Сучасний розвиток технологій значно вплинув на процес навчання математики, зокрема геометрії. Одним із ключових аспектів шкільного курсу геометрії є вивчення рухів (паралельного перенесення, осьової симетрії, обертання), що відіграють важливу роль у розв'язуванні конструктивних задач. Традиційні методи побудови фігур за допомогою лінійки та циркуля поступово доповнюються використанням цифрових технологій, які дозволяють візуалізувати геометричні перетворення, підвищуючи точність і ефективність навчального процесу.

У шкільній геометрії рухи починають вивчати у 7 класі, коли розглядають паралельне перенесення та осьову симетрію. В 8 класі додається поняття центральної симетрії, а у 9 класі розглядається обертання, яке є більш складним видом руху. Особливу увагу приділяють комбінації кількох перетворень, доведенню тотожності фігур і застосуванню рухів у розв'язуванні геометричних задач.

Використання цифрових інструментів значно спрощує вивчення цих тем, оскільки дозволяє динамічно демонструвати побудови, аналізувати властивості фігур у русі та перевіряти правильність виконаних конструкцій. У цьому розділі буде розглянуто сучасні цифрові технології, які застосовуються у навчанні геометрії, а також їхні можливості для розв'язування конструктивних задач.

Сучасні технології відіграють важливу роль у викладанні математики, зокрема геометрії. Одним із найпотужніших цифрових інструментів для цього є GeoGebra – інтерактивне програмне забезпечення, яке поєднує геометрію, алгебру та інші математичні

розділи. Ця програма є безкоштовною та доступною як у веб-версії, так і у вигляді мобільного додатка, що робить її зручною для використання в класичному та дистанційному навчанні. GeoGebra пропонує широкий набір можливостей, серед яких створення геометричних конструкцій, виконання трансформацій фігур (паралельне перенесення, осьова симетрія, обертання), аналіз властивостей геометричних об'єктів та будівлення динамічних моделей. Програма дозволяє змінювати параметри об'єктів у режимі реального часу, що сприяє глибшому розумінню математичних взаємозв'язків та розвитку просторового мислення. У шкільному курсі геометрії GeoGebra використовується на різних етапах навчання. У 7-8 класах вона допомагає візуалізувати основні геометричні поняття та виконувати побудови, у 9 класі застосовується для моделювання рухів, таких як паралельне перенесення, симетрія та обертання, а в 10-11 класах використовується для розв'язання складніших задач, зокрема у стереометрії та аналітичній геометрії. Серед основних переваг GeoGebra можна виділити інтерактивність, що дозволяє змінювати параметри фігур і спостерігати їхні перетворення; доступність, оскільки програма безкоштовна та підтримується на різних платформах; зручність у навчанні, яка дає змогу швидко перевіряти побудови та експериментувати з задачами; а також розвиток просторового мислення, оскільки динамічні моделі допомагають учням краще уявляти геометричні об'єкти та їхні взаємозв'язки [10].

Розберемо також актуальну дошку Miro. Це інтерактивна онлайн-дошка, яка може бути ефективно використана для вивчення геометрії в середній школі. Ця платформа дозволяє створювати креслення, виконувати геометричні побудови, працювати зі схемами та взаємодіяти з іншими учасниками в режимі реального часу. Використання Miro у викладанні геометрії відкриває широкі можливості для наочного пояснення матеріалу. Учні можуть будувати відрізки, кути,

многокутники, досліджувати їхні властивості та застосовувати різні геометричні перетворення, такі як паралельне перенесення, осьова симетрія та обертання. Вчителі можуть додавати анотації, позначки та коментарі, що сприяє кращому розумінню навчального матеріалу. Одна з основних переваг Miro — можливість одночасної роботи кількох учасників. Це дозволяє організовувати колективне розв'язування геометричних задач, обговорення побудов і перевірку правильності виконаних дій. Крім того, інтеграція з іншими цифровими інструментами, такими як GeoGebra, дає змогу використовувати готові моделі та розширювати можливості платформи. Miro є особливо корисним у дистанційному та змішаному навчанні, оскільки дозволяє вчителям організовувати інтерактивні уроки, а учням — працювати над завданнями у зручному цифровому середовищі. Це покращує засвоєння геометричних понять, підвищує рівень мотивації школярів і сприяє розвитку аналітичного мислення [11].

Також застосунок Kig можна використовувати для вивчення геометрії. Це інтерактивне програмне забезпечення для вивчення та викладання геометрії, яке дозволяє створювати точні геометричні побудови та досліджувати їхні властивості. Цей додаток особливо корисний у навчанні школярів, оскільки поєднує в собі зручність класичних інструментів для креслення та можливості динамічної геометрії. Програма підтримує побудову основних геометричних фігур, таких як точки, відрізки, прямі, кола, багатокутники, а також дозволяє виконувати відображення, обертання та інші геометричні перетворення. Учні можуть взаємодіяти з побудовами в режимі реального часу: змінювати параметри фігур, спостерігати, як змінюються їхні властивості, та робити висновки на основі спостережень. Kig може використовуватися для викладання геометрії в середній школі, починаючи з 7 класу, коли учні знайомляться з основними поняттями, такими як паралельність, перпендикулярність, симетрія та прості

побудови. У 8–9 класах програма допомагає досліджувати складніші поняття, зокрема рухи на площині, доведення теорем та аналітичну геометрію. Однією з головних переваг Kig є можливість інтеграції з іншими математичними програмами, а також використання його для створення інтерактивних уроків і самостійної роботи учнів. Програма має зручний інтерфейс і дозволяє експортувати креслення для подальшого використання у навчальних матеріалах. Завдяки своїм функціональним можливостям Kig сприяє розвитку просторового мислення, покращує розуміння геометричних концепцій та підвищує зацікавленість учнів у вивченні математики [12].

2.2. Використання цифровізації для практичного застосування в конструктивних задачах

У цьому підрозділі ми розглянемо практичне застосування цифрових технологій для розв’язання конструктивних задач, пов’язаних із паралельним перенесенням, осьовою симетрією та обертанням. Ці геометричні перетворення є ключовими у вивченні рухів та широко використовуються в математиці, інженерії, архітектурі та комп’ютерній графіці. Для виконання побудов та аналізу задач ми будемо використовувати GeoGebra – один із найефективніших цифрових інструментів для вивчення геометрії. Ця програма дозволяє не лише точно виконувати геометричні побудови, а й динамічно змінювати параметри фігур, що значно покращує розуміння геометричних перетворень. Завдяки інтуїтивному інтерфейсу та широкому набору функцій GeoGebra є ідеальним інструментом для інтерактивного навчання та самостійного дослідження геометричних властивостей фігур. Ми проаналізуємо конкретні приклади задач, які можна розв’язати за допомогою GeoGebra, та покажемо, як цифрові технології допомагають учням краще засвоїти матеріал і застосовувати отримані знання на практиці.

Розглянемо основні задачі з використанням паралельного перенесення, які розглядаються в 9 класі.

Задача 2.2.1 [7(20.14)]. Знайдіть координати образів точок $A(-2; 3)$ і $B(1; -4)$ після паралельного перенесення на вектор $\vec{a}(-1; -3)$.

В даній задачі можемо застосувати формулу паралельного перенесення $(x_1; y_1) = (x + p; y + q)$, де x, y – координати початкової точки, x_1, y_1 – координати образу точки, p, q – координати вектора.

Знайдемо образ точки A . $A_1(-2 + (-1); 3 + (-3)) = (-3; 0)$.

Далі шукаємо образ точки B . $B_1 = (1 + (-1); -4 + (-3)) = (0; -7)$ (рис.2.2.1).

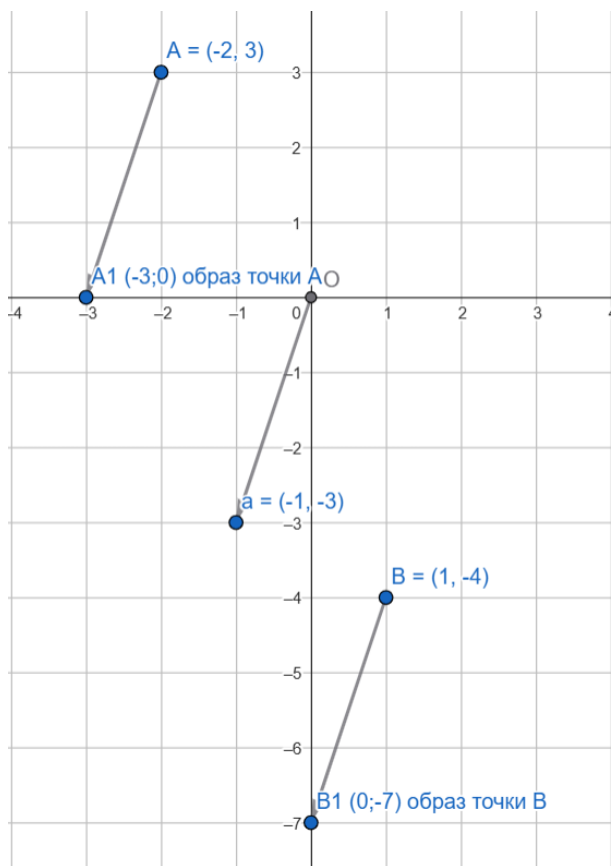


Рис.2.2.1

Розглянемо задачу на побудову за допомогою паралельного перенесення.

Задача 2.2.2 [7(20.24)]. Побудуйте трапецію, якщо задані довжини її основ і діагоналей.

Нехай трапеція $ABCD$ вже побудована. Проведемо з вершини C пряму BB_1 паралельну діагоналі AC , до продовженої основи DB_1 . Так як DB – діагональ за умовою, ABB_1C – паралелограм, $\angle DOC = \angle DBB_1$, як відповідні кути при паралельних прямих, тоді отримаємо трикутник DBB_1 за двома сторонами і кутом між ними (рис.2.2.2).

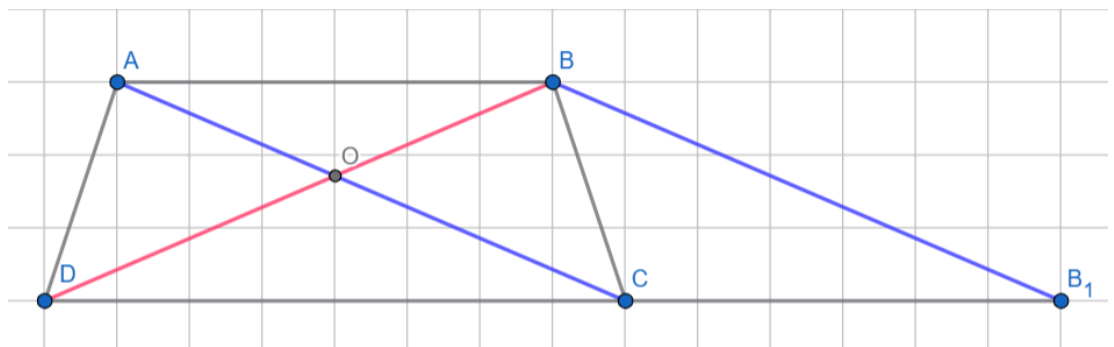


Рис.2.2.2

Задача 2.2.3 [7(20.31)]. Два кола з радіусом R мають точку дотику M . На одному позначили точку A , на другому – точку B так, що $\angle AMB = 90^\circ$. Довести, що $AB = 2R$.

Спочатку побудуємо два кола з радіусом R . Перше коло з центром O , радіусом R , друге з центром O_1 і радіусом R_1 ($R = R_1$). За допомогою застосування GeoGebra будуємо наші кола так, щоб вони дотикалися в точці M (за умовою). Тепер маємо позначити точки A, B , таким чином, щоб $\angle AMB = 90^\circ$. Проведемо ще один радіус в кожному з кіл, таким чином, щоб $\angle BOM = \angle AO_1M = 90^\circ$. Далі з'єднаємо точки A і M та B і M . Бачимо, що утворилися два однакові рівнобічні трикутники. Знаючи, що $\angle BOM = \angle AO_1M = 90^\circ$ можемо знайти в кожному трикутнику два інші кути за формулою: $(180^\circ - 90^\circ):2 = 45^\circ$. Далі показуємо, що дійсно $\angle AMB = 90^\circ$. Знаючи два сусідні кути можемо це показати $\angle AMB = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$. З'єднаємо точки A і B утворивши таким

чином прямокутник AO_1OB . Можемо побачити, що протилежні сторони попарно паралельні та рівні, тому так як сторона $O_1O = R_1 + R = 2R$ то і сторона $AB = 2R$, бо O_1O паралельна AB . Отже, задачу доведено (рис.2.2.3).

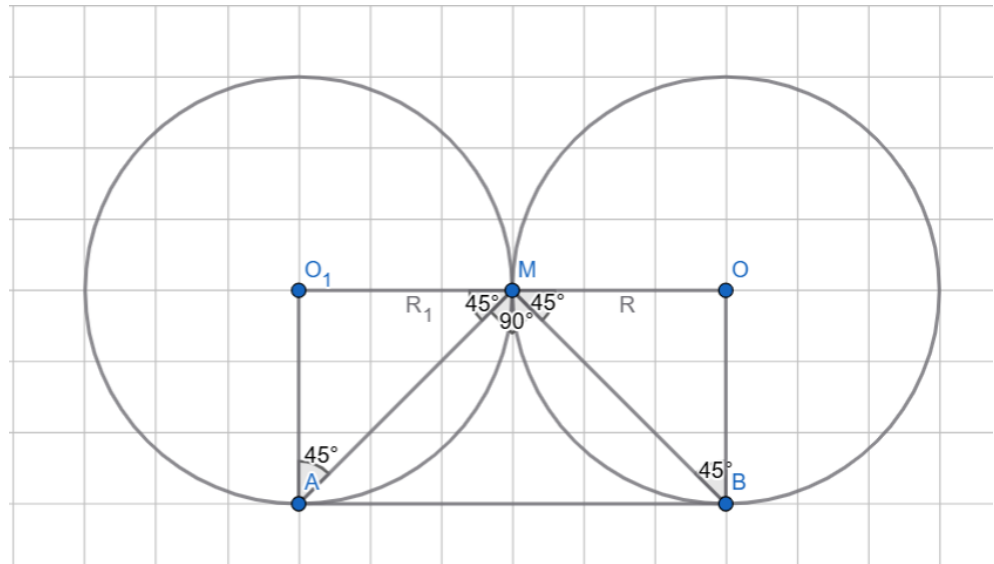


Рис.2.2.3

Розглянемо задачі на застосування осьової симетрії які розглядаються в 9 класі.

Задача 2.2.4 [8(928)]. Дано пряму l і точку M , яка не лежить на цій прямій. Побудувати точку, що є симетричною до точки M відносно прямої l .

Проведемо перпендикуляр із точки M до прямої l . Позначимо точку перетину цього перпендикуляра з прямою як O . Відкладемо відстань MO у протилежний бік відносно прямої l , тобто знайдемо точку M_1 , яка буде симетричною до M . Точка M_1 — це відображення точки M відносно прямої l , тому O є серединою відрізка MM_1 . Точка M_1 є образом точки M при осьовій симетрії відносно прямої l і розташована на такій самій відстані від прямої, що й M , але з протилежного боку (рис.2.2.4).

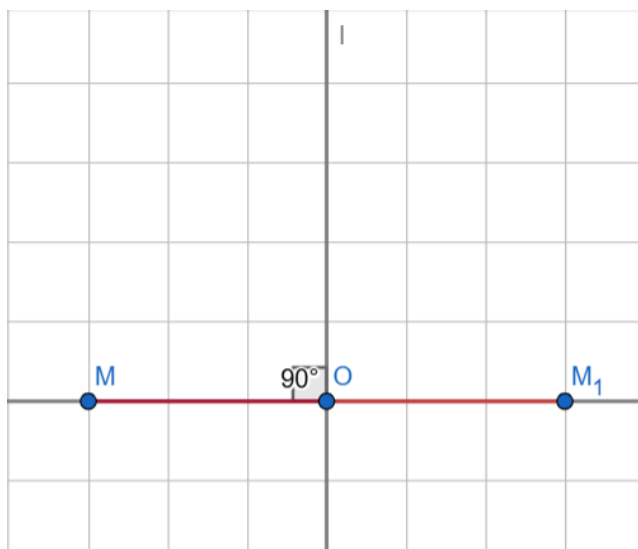


Рис.2.2.4

Задача 2.2.5 [8(934)]. Задано трикутник ABC . Побудуйте трикутник, який є симетричним до трикутника ABC відносно прямої BC .

Нехай дано трикутник ABC та його сторону BC , відносно якої потрібно побудувати симетричний трикутник.

Відобразимо вершину A відносно прямої BC . Для цього проведемо перпендикуляр з точки A до прямої BC і продовжимо його на таку саму довжину в протилежний бік. Отримаємо точку A_1 , яка є симетричною до A .

Оскільки точки B і C лежать на осі симетрії, вони залишаються незмінними.

Таким чином, симетричний трикутник A_1BC має вершини A_1, B, C і є дзеркальним відображенням трикутника ABC відносно прямої BC (рис.2.2.5).

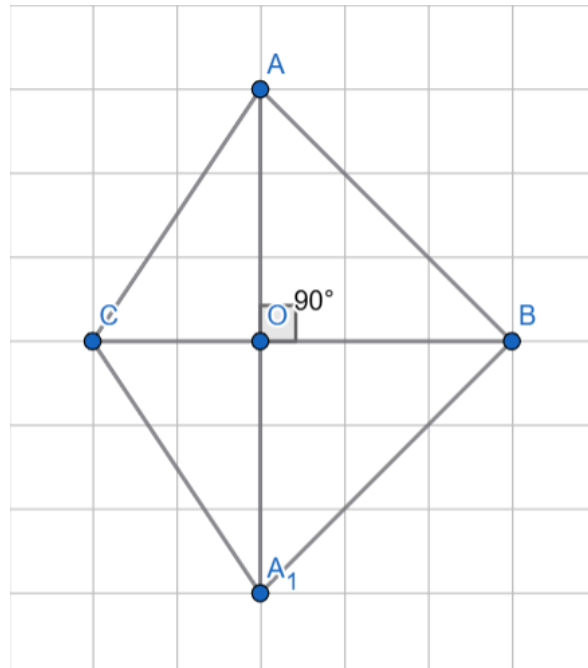


Рис.2.2.5

Задача 2.2.6 [8(948)]. Знайдіть координати точок, які є симетричними до точок $A(-2; 0)$ і $B(3; -1)$ відносно прямих:

$y = x$ (бісектриса першого та третього координатних кутів);

$y = -x$ (бісектриса другого та четвертого координатних кутів).

Симетрія відносно прямої $y = x$:

Формула для відображення точки (x, y) відносно бісектриси $y = x$ виглядає так: $(x_1, y_1) = (y, x)$. Для точки $A(-2; 0)$, $A_1(0; -2)$. Для точки $B(3; -1)$, $B_1(-1; 3)$.

Симетрія відносно прямої $y = -x$:

Формула для відображення точки (x, y) відносно бісектриси $y = -x$:

$(x_1, y_1) = (-y, -x)$. Для точки $A(-2; 0)$, $A_2 = (0; 2)$. Для точки $B(3; -1)$, $B_2 = (1; -3)$ (рис.2.2.6).

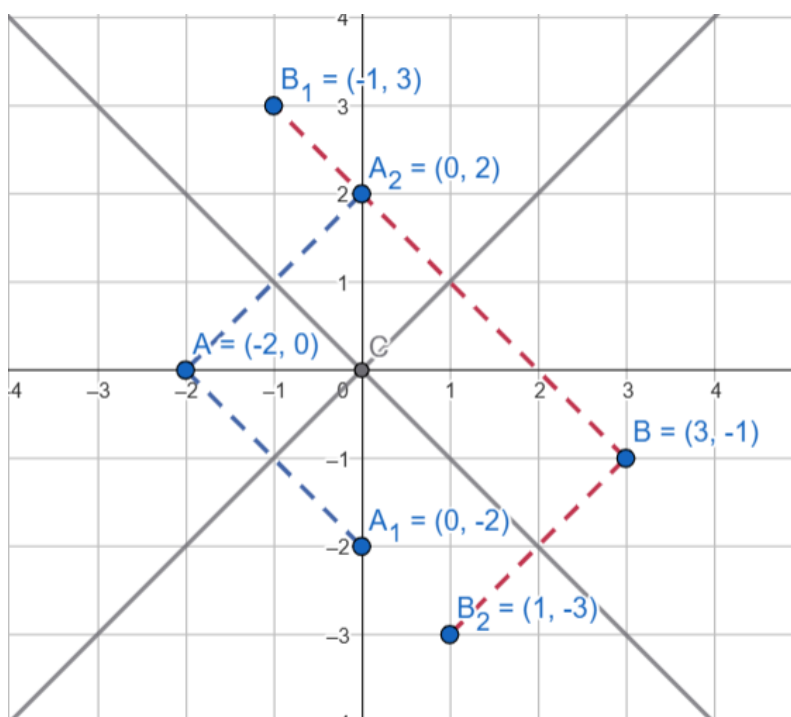


Рис.2.2.6

Розглянемо задачі з курсу геометрії 9 класу, що стосуються обертання фігур.

Задача 2.2.7 [8(964)]. Знайдіть координати точки A_1 , яка є образом точки $A(2; 0)$ після повороту навколо початку координат на 45° за годинниковою стрілкою.

При повороті точки A навколо початку координат на кут α за годинниковою стрілкою її нові координати обчислюються за формулами:

$$x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$y_1 = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

Для точки $A(2; 0)$ та кут 45° підставимо значення:

$$x_1 = 2 \cos 45^\circ + 0 \sin 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$y_1 = -2 \sin 45^\circ + 0 \cos 45^\circ = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

Отже, після повороту точка A перейде в точку $A_1(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ (рис.2.2.7).

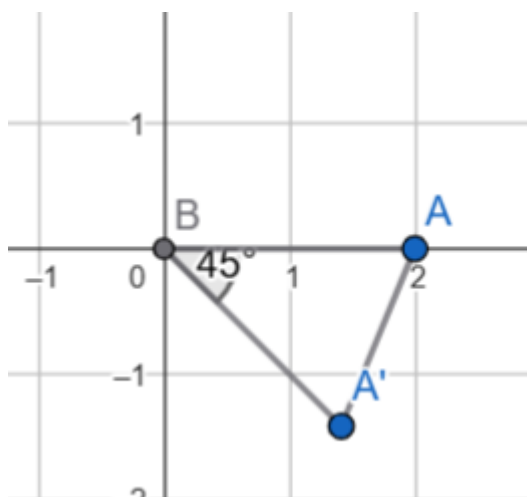


Рис.2.2.7

Задача 2.2.8 [7(23.11)]. Вершина A рівностороннього трикутника ABC є центром повороту на кут 120° . Знайдіть відрізок BC_1 , де точка C_1 – образ точки C при заданому повороті, якщо $AB=1$ см.

За умовою задачі дано рівносторонній трикутник зі сторонами $AB = BC = CA = 1$ см. Точка A є центром повороту на 120° , але невідомо за годинниковою стрілкою чи проти годинникової стрілки. Тому, ми розглянемо два випадки.

- 1) Перший випадок. Повернемо вершину A проти годинникової стрілки на 120° , таким чином отримуємо образ точки C , позначимо точку C_1 . З'єднаємо точку C_1 , A та C_1 , B . Таким чином бачимо, що відстань від точки B до точки C_1 дорівнює 1 см.
- 2) Другий випадок. Повернемо точку A за годинниковою стрілкою на 120° . Отримаємо образ точки C , позначимо точку C_2 , з'єднаємо точку C_2 і точку A . Бачимо, що відстань між точками C_2 і A дорівнює 1 см, бо при повороті відстань між точками не змінюється, тому в сумі відрізок $C_2B = 2$ см.

Отже, відповідь в першому випадку $BC_1 = 1$ см, в другому випадку $BC_2 = 2$ см (рис.2.2.8).

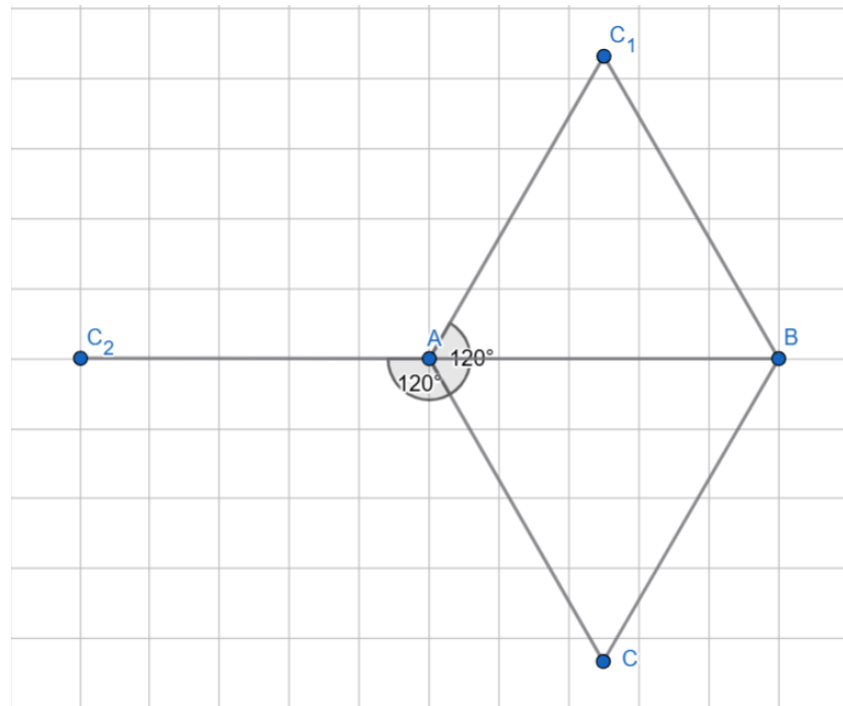


Рис.2.2.8

Задача 2.2.9 [7(23.31)]. У рівносторонньому трикутнику ABC позначено точку M так, що $\angle AMB = 120^\circ$, відстань від M до A дорівнює 1 см, а $MB = 2$ см. Знайдіть відрізок MC .

Для розв'язання даної задачі ми маємо скористатися обертанням. Спочатку зробимо обертання відносно точки A на 60° за годинниковою стрілкою, тоді точка M переходить в точку M_1 , тоді отримали трикутник AMM_1 який є рівностороннім, це була головна наша ціль отримати саме рівносторонній трикутник, крім того, відрізок CM_1 є поворотом із відрізка BM , тому $BM = CM_1 = 2$.

Оскільки, $\angle AMM_1 = 60^\circ$ є доповненням $\angle AMB$ і точки M_1, M, B лежать на одній прямій. $\angle CAM$ доводить $\angle MAB$ і $\angle MAM_1$ до 60° , тому $\angle MAB = \angle M_1AC$. Аналогічно можна довести, що $\angle MAB = \angle CAM_1 = \angle MBC$, $\angle CAM_1 = \angle M_1BC$.

Оскільки $\angle CAM_1 = \angle M_1BC$, то чотирикутник $ABCM_1$ є вписаним. Це означає, що його протилежні кути рівні: $\angle BM_1C = \angle CAB = 60^\circ$, тому що вони вписані та спираються на одну дугу. Далі розглянемо поворот

точки C відносно M_1 на 60° . Вона перейде в точку C_1 , і оскільки $\angle BM_1C = 60^\circ$, то ми отримати трикутник M_1CC_1 рівносторонній.

Оскільки $MC_1 = M_1C - 1 = 1$, то також $M_1C = MM_1 = 1$. Отже, відрізок CM є медіаною рівностороннього трикутника M_1CC_1 . Оскільки в рівносторонньому трикутнику медіана є також бісектрисою і висотою, вона ділить протилежний бік навпіл. Тоді за теоремою Піфагора $MC^2 = 2^2 - 1^2$, $MC^2 = 3$, $MC = \sqrt{3}$ (рис.2.2.9).

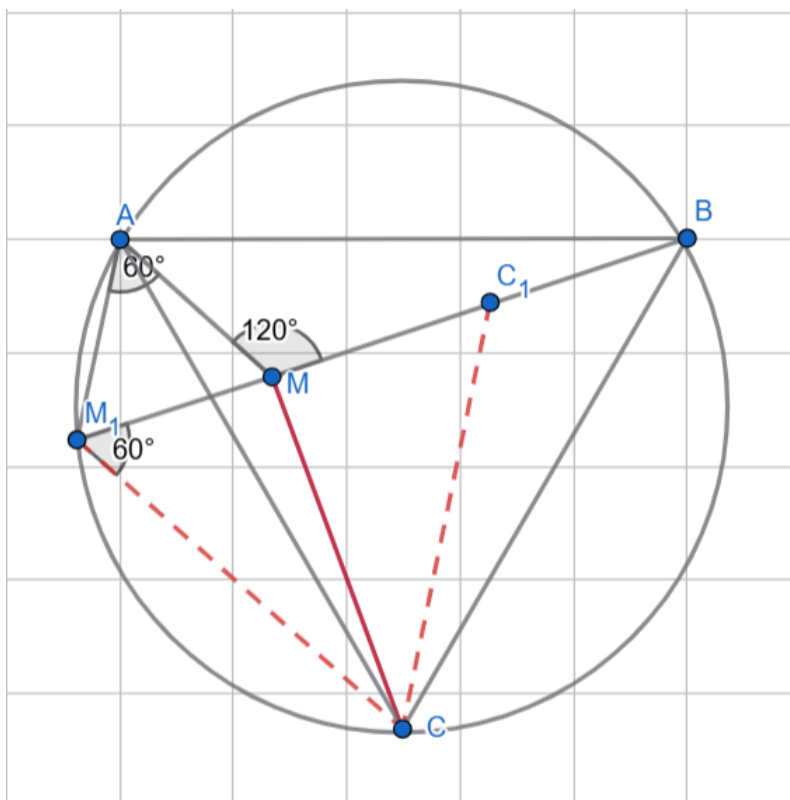


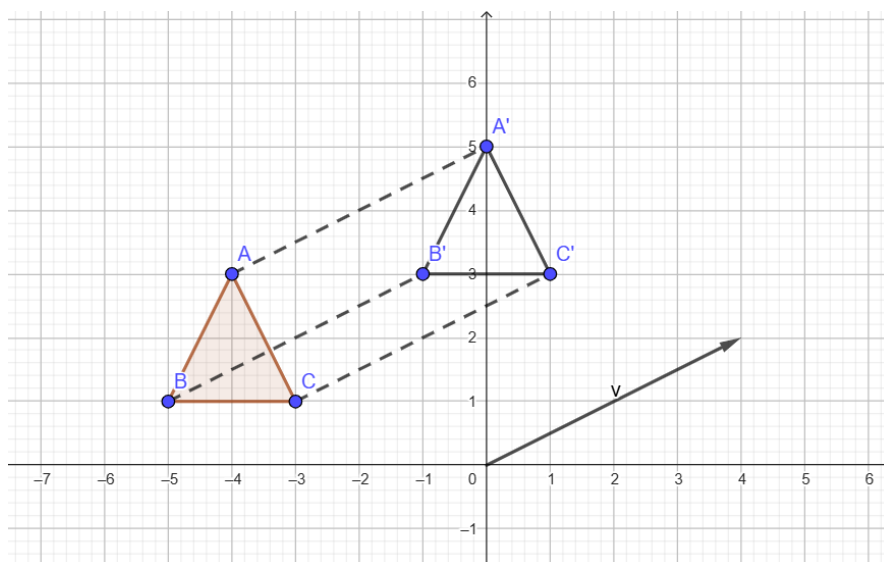
Рис.2.2.9

2.3. Розробка курсу «Динамічна геометрія: створюй, рухай, відкривай!» на платформі GeoGebra

У процесі розробки курсу «Динамічна геометрія: створюй, рухай, відкривай!» було реалізовано ідею поєднання класичного змісту шкільної геометрії з інноваційними цифровими технологіями. Основним середовищем для побудов та вивчення властивостей геометричних рухів обрано GeoGebra, що дає змогу створювати динамічні моделі, змінювати

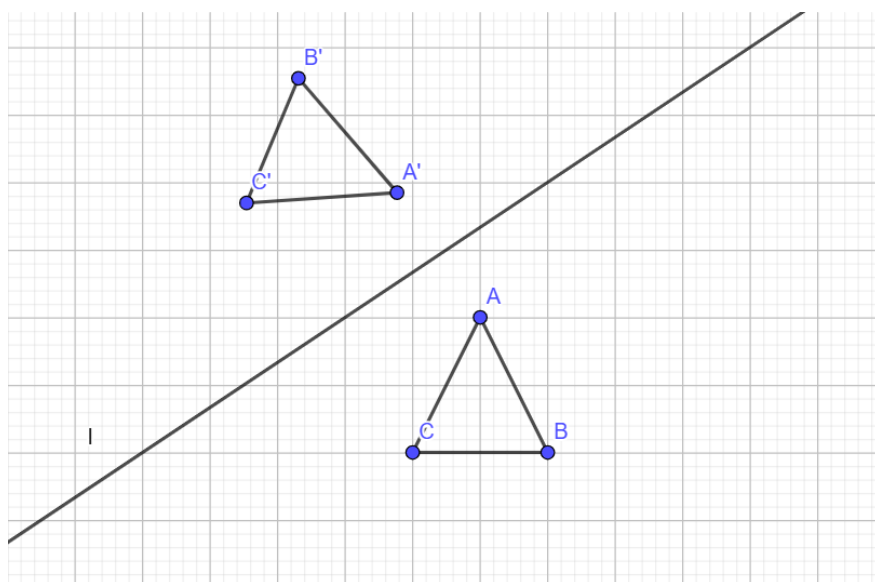
вихідні умови задач у реальному часі та досліджувати, як ці зміни впливають на фігуру.

Курс спрямовано на засвоєння учнями 9 класу основних видів геометричних рухів: паралельного перенесення, осової симетрії та повороту. Теоретичне пояснення кожного перетворення супроводжується інтерактивними побудовами, що реалізуються в GeoGebra. Наприклад, при вивченні паралельного перенесення демонструється, як вершини трикутника зміщуються на заданий вектор, при цьому зберігається форма й розміри фігури (рис.2.3.1).



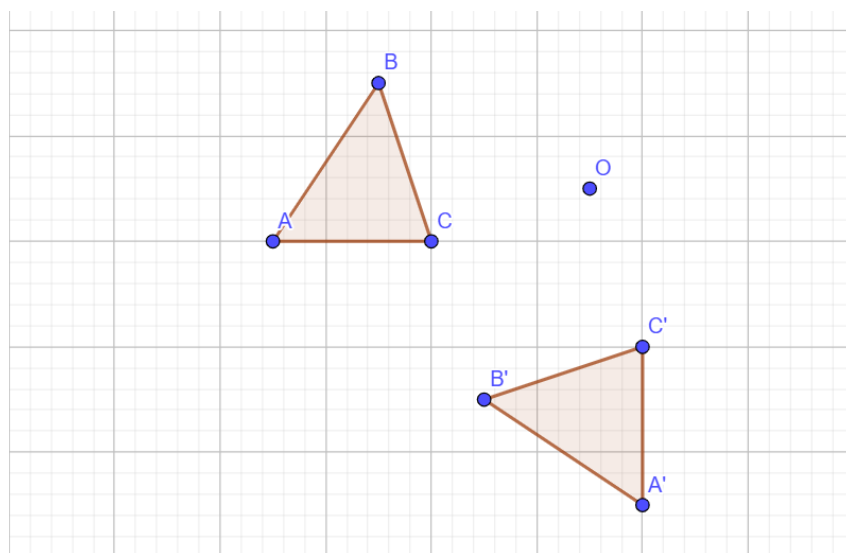
(рис.2.3.1)

Осова симетрія реалізується через побудову симетричних точок відносно заданої прямої, де учні мають змогу спостерігати за зміною положення фігури та перевіряти властивості симетрії — рівність відрізків, паралельність сторін тощо (рис.2.3.2).



(рис.2.3.2)

Під час вивчення обертання особливу увагу приділено практичним задачам — наприклад, побудові точки, яка є образом даної при повороті на 60° або 90° навколо центра обертання. GeoGebra дає змогу чітко візуалізувати рух фігури та перевірити правильність побудови за кутом обертання (рис. 2.3.3).



(рис. 2.3.3)

Таким чином, курс «Динамічна геометрія: створи, рухай, відкривай!» є повноцінним інтерактивним ресурсом, що не тільки сприяє

якісному засвоєнню теми геометричних рухів, але й формує сучасні компетентності учнів, готуючи їх до роботи з цифровими інструментами у математиці та суміжних дисциплінах.

ВИСНОВКИ

У процесі дослідження було проаналізовано застосування геометричних рухів — паралельного перенесення, осьової симетрії та обертання — як важливого інструмента для формування просторового мислення та розв'язування задач шкільного курсу геометрії. Значну увагу приділено не лише теоретичному аспекту вивчення рухів, а й їхній практичній реалізації за допомогою сучасних цифрових застосунків. Одним із ключових напрямів стало впровадження цифровізації у викладання геометрії, що забезпечує нову якість сприйняття навчального матеріалу та підвищує рівень залучення учнів до пізнавального процесу.

Особливе місце у кваліфікаційній роботі посідає аналіз та практичне використання математичних застосунків, таких як GeoGebra, Miro, Kig. У процесі дослідження з'ясовано, що кожен із розглянутих застосунків має власні переваги та сфери доцільного використання, проте саме GeoGebra виявився універсальним і зручним інструментом для вивчення теми геометричних рухів. Завдяки широкому набору інструментів, інтерактивному середовищу та динамічним можливостям візуалізації, GeoGebra дозволяє проводити точні побудови, моделювати задачі та змінювати параметри в реальному часі, що значно покращує засвоєння навчального матеріалу.

У межах створеного курсу «Динамічна геометрія: створи, рухай, відкривай!» реалізовано цілісну дидактичну концепцію поєднання традиційного змісту шкільної програми з інтерактивними цифровими інструментами. Геометричні рухи було подано не лише як окремі теми, а як об'єднуючий елемент, що дозволяє побачити зв'язки між різними типами задач та методами їх розв'язання. Всі побудови, приклади та задачі базуються на використанні GeoGebra, що надає можливість учням проводити самостійні дослідження, працювати над візуалізацією понять і перевіряти свої гіпотези.

Робота підтверджує, що застосування цифрових ресурсів у навчанні геометрії є надзвичайно перспективним напрямом. Зокрема, використання середовища GeoGebra дозволяє поєднувати точність геометричних побудов із гнучкістю дослідницького підходу. Курс, розроблений у ході дослідження, не тільки забезпечує глибше розуміння теми геометричних рухів, а й формує ключові математичні компетентності. GeoGebra виявилася найефективнішим середовищем для викладання теми «Рухи в геометрії» завдяки своїй доступності, багатофункціональності та здатності залучати учнів до активного пізнання. Таким чином, курс «Динамічна геометрія: створи, рухай, відкривай!» може бути рекомендований як сучасний засіб навчання для учнів, орієнтований на практичне засвоєння знань, розвиток просторового мислення та цифрової грамотності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ З ВИКОРИСТАННЯМ ЦИРКУЛЯ ТА ЛІНІЙКИ ТА ЇХ ВПЛИВ НА УЧНІВ У СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ | Марченко | Наукові записки молодих учених. ГОЛОВНА – Факультет математики, природничих наук та технологій.
URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1632/pdf> (дата звернення: 02.04.2025).
2. View of Сучасні підходи до вивчення нарисної геометрії для підготовки архітекторів та інженерів.
URL: <https://archives.interconf.center/index.php/2709-4685/article/view/206/207> (дата звернення: 02.04.2025).
3. Смаль, К. О., & Папач, О. І. (2022). Математична освітня галузь. Цифрова трансформація освітнього процесу. Онлайн-сервіси як інструменти створення навчального контенту. Нова українська школа на засадах єдності цінностей, змісту і форм. Математична освітня галузь, 1–12.
4. Перегляд Застосування Geogebra на уроках геометрії. ВИЩА ОСВІТА УКРАЇНИ У КОНТЕКСТІ ІНТЕГРАЦІЇ ДО ЄВРОПЕЙСЬКОГО ОСВІТНЬОГО ПРОСТОРУ.
URL: <https://osvita.eeipsy.org/index.php/eeip/article/view/556/533> (дата звернення: 02.04.2025).
5. Математика, інформатика, фізика: наука та освіта. Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University: Open Access Journals. URL: <https://intranet.vspu.edu.ua/miph> (дата звернення: 02.04.2025).
6. ІННОВАЦІЙНІ ПЕДАГОГІЧНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЦИФРОВІЙ ШКОЛІ. DSpace HNPU :: Головна.
URL: <https://dspace.hnpu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/4bf31d01-1482-4d18-b0a9-8750d298a218/content> (дата звернення: 02.04.2025).

7. А. Г. Мерзляк В. Б. Полонський М. С. Якір. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 304 с.
8. О. І. Істер. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Генеза, 2017. 240 с.
9. GeoGebra - the world's favorite, free math tools used by over 100 million students and teachers. GeoGebra.
URL: <https://www.geogebra.org/> (дата звернення: 02.04.2025).
10. Miro | The Innovation Workspace.
URL: <https://miro.com/app/dashboard/innovation-workspace> (дата звернення: 02.04.2025).
11. Kig. KDE Applications. URL: <https://apps.kde.org/kig/> (дата звернення: 02.04.2025).
12. Нігальчук Є.Р. Використання цифрових технології при розв'язуванні конструктивних задач. *Формування професійної компетентності майбутніх учителів природничоматематичних дисциплін в умовах цифровізації вищої освіти* : МАТЕРІАЛИ ВСЕУКР. НАУКОВО-ПРАКТ. КОНФ., м. Івано-Франківськ, 17 – 18 жовт. 2024 р. Херсон, 2024. С. 75.