

Міністерство освіти і науки України
Херсонський державний університет
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА
МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО
АНАЛІЗУ

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ПОНЯТТЯ ІНВАРІАНТА НА
ЕЛЕКТИВНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ У 10 КЛАСІ

Кваліфікаційна робота (проект)
на здобуття ступеня вищої освіти “магістр”

Виконала: студентка 2-го курсу, 12-221М групи
Спеціальності: 014 Середня освіта
Спеціалізація: 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта
(Математика)» другого (магістерського) рівня
вищої освіти

Лимаренко Анастасія Вячеславівна

Керівник доктор фізико-математичних наук,
професор Савченко Олександр Григорович

Рецензент докторка педагогічних наук,
кандидатка фізико-математичних наук,
професорка кафедри інформаційних технологій та
фізико-математичних дисциплін Херсонського
навчально-наукового інституту Національного
університету кораблебудування імені адмірала
Макарова

Літвінова М.Б.

Івано-Франківськ – 2025

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ I. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПОНЯТТЯ ІНВАРІАНТА У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ	8
1.1 Поняття інваріанта, історична довідка	8
1.2 Типологія інваріантів. Лінія ознайомлення з інваріантами у межах шкільного курсу математики	10
1.3 Особливості формування абстрактного математичного мислення в учнів старших класів.....	13
1.4 Можливості вивчення поняття інваріанта на елективному курсі математики у 10 класі.....	15
РОЗДІЛ II. МЕТОДИЧНИЙ ПОТЕНЦІАЛ ГРИ «15» У ФОРМУВАННІ ПОНЯТТЯ ІНВАРІАНТА.....	19
2.1 Математичний зміст гри «15».....	19
2.2 Поняття інваріанта у грі «П'ятнашки».....	26
2.3 Методика введення поняття інваріанта учням 10 класу за допомогою гри «15».....	29
РОЗДІЛ III. РОЗРОБКА ЕЛЕКТИВНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ УЧНІВ 10 КЛАСУ З ТЕМИ «ІНВАРІАНТИ – МАТЕМАТИКА НЕЗМІННОГО В ЗМІННОМУ»	34
3.1 Вимоги та загальне наповнення елективних курсів	34
3.2 Програма елективного курсу «Інваріанти – математика незмінного в змінному».....	39
3.2.1 Пояснювальна записка	39
3.2.2 Тематичне планування та вимоги щодо навчальних досягнень учнів	42

3.2.3 Огляд науково-методичної літератури для застосування на елективному курсі	45
3.3 Педагогічний експеримент на впровадження елективного курсу з вивчення інваріантів.....	46
ВИСНОВКИ	50
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	53
Додаток А.....	57
Додаток Б	62
Додаток В.....	65

ВСТУП

Розвиток є найістотною рисою всіх явищ і процесів, він охоплює надзвичайно різноманітне життя природи і суспільства, усі сфери людського буття [21].

Зі входом освіти України в безперервний вирій реформ і змін, перед вчителями, перш за все, стоїть завдання на поєднання традиційних методів, форм та підходів до навчання з інноваційними, які спрямовані не тільки на глибоке розуміння матеріалу, а й на розвиток мотивації до навчання та формування критичного мислення, адже зі слів Альберта Ейнштейна: «Освіта – це не вивчення фактів, освіта – це навчити розум мислити».

Проблема впровадження ігрового підходу в освіту пронизує велику частину робіт педагогів та методистів різних часів. Наприклад, угорський математик і педагог Золтан Діенеш був прихильником ідеї щодо того, що спочатку дітям необхідно взаємодіяти з конкретними об'єктами через гру, щоб в подальшому перейти до абстрактних математичних концепцій. Схожі ідеї пропагував також і Фрідріх Фребель, роблячи акцент на тому, що гра сприяє спрощенню розуміння переходу від конкретного до абстрактного, що є ключовим в математиці. На важливості використання ігор наголошував також і швейцарський психолог Жан Піаже.

Безумовно, питанням впровадження ігрового підходу в освіті займалися і вітчизняні педагоги. Зокрема, Василь Сухомлинський наголошував на тому, що гра дозволяє розвивати логічне мислення та краще засвоювати матеріал. Роботи Зінаїди Слєпкань пронизані рекомендаціями щодо використання ігрових підходів на уроках математики, які орієнтовані на тренування уваги та пам'яті учнів. Василь Онищук систематизував ігрові технології у навчанні, зосереджуючи увагу на їх практичній значущості у формуванні знань, умінь та навичок. Прус Алла у своїй роботі «Прикладна спрямованість шкільного курсу

стереометрії» зазначає, що «... концепція загальної середньої освіти спрямовують педагогічну науку на пошук нових принципів та критеріїв вибору змісту освіти, нових технологій, які ведуть до формування високого рівня практичних компетентностей учня, орієнтованих на розвиток його особистості.» [23].

Тому, інтеграція ігрових технологій в освіту є однією із найбільших перспектив сучасної педагогіки саме з огляду проблеми більш доступного пояснення великої кількості абстрактних понять у математиці, одним із яких є поняття інваріанта. Інваріанти – властивості об'єктів, які, незважаючи на певні перетворення, залишаються незмінними. Їх вивчення є основою для розв'язання багатьох математичних задач і сприяє розвитку логічного мислення учнів [13].

Крім того, провідне місце в сучасній освіті займає впровадження елективних курсів як одного із засобів реалізації варіативної складової навчальних планів. Дані курси спрямовані на можливість поглиблення знань з окремих тем з урахуванням освітніх потреб та інтересів учнів. Введення елективних курсів у викладання математики дозволяють зосередитись на більш складних або менш формалізованих поняттях, які не входять в рамки стандартного змісту програми, але є необхідними складовими розвитку аналітичного, алгоритмічного та логічного мислення.

Елективний курс математики у 10 класі, який спрямований на глибоке дослідження поняття інваріанта, має на меті ознайомити учнів із глибокими математичними ідеями в спрощеній, більш доступній до сприйняття, формі, використовуючи при цьому практичні і ігрові моделі, зокрема гру «15». Гра «15» - головоломка, яка ґрунтується на логічних перестановках, дозволяючи надати інтерактивне представлення поняття інваріанта. Через універсальність та доступність дана гра може бути

використана для формування і подальшого розвитку інтелектуальних здібностей учнів.

Актуальність роботи полягає у потребі переходу від алгоритмічного оволодіння знаннями до більш ефективної методики вивчення математичних понять, яка відповідатиме сучасним вимогам до розвитку учнів.

Мета роботи полягає у розробці методики вивчення поняття інваріанта на елективному курсі математики у 10 класі, використовуючи гру «15» та певні геометричні конструкції; розгляді можливих ризиків чи наслідків введення ігрового підходу в освітній процес.

Виходячи з поставленої мети, **завданнями роботи** можна зазначити наступні пункти:

1. Проаналізувати психолого-педагогічну літературу з питань впровадження ігрових технологій та елективних курсів у процесі навчання математики.
2. Дослідити теоретичну складову поняття інваріанта.
3. Окреслити дидактичні особливості гри «15» у використанні під час пояснення математичних понять (зокрема, поняття інваріанта).
4. Створити розробку елективного курсу з математики для 10 класу на вивчення поняття інваріанта.
5. Зробити висновки.

Об'єктом дослідження, насамперед, є процес вивчення математичних понять на елективному курсі в 10 класі.

Предметом дослідження є методика використання гри «15» під час вивчення поняття інваріанта на елективному курсі математики в 10 класі.

Задля досягнення поставленої мети та виконання завдань кваліфікаційної роботи були використані **теоретичні методи**

дослідження (аналіз, синтез, систематизація та узагальнення відомостей з літератури відповідно до теми; моделювання змісту елективного курсу та підходів до вивчення інваріантів).

Наукова новизна магістерської роботи полягає у розробці методики вивчення поняття інваріанта на елективному курсі математики у 10 класі з базою на основі гри «15».

Практична значущість роботи полягає у тому, що результати дослідження можуть бути використані вчителями закладів загальної середньої освіти, ліцеїв, гімназій або викладачами математичних гуртків задля підвищення ефективності навчання старшокласників. Крім того, матеріали дослідження можуть бути використані під час підготовки майбутніх вчителів математики для знайомства з інноваційними методиками викладання.

Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел (30 найменувань) та додатків до роботи (додаток А, додаток Б, додаток В). Загальний обсяг магістерської роботи становить 65 сторінок.

Апробація результатів дослідження. Виходячи з отриманих результатів дослідження, написано і опубліковано статтю для «Магістерські студії» Херсонського державного університету, датовані 2025 роком.

Публікації:

1. Лимаренко А.В. Використання ігрових технологій на елективних курсах з математики у старшій школі/ Лимаренко А.В. // Магістерські Студії Херсонського державного університету – 2025 (стаття у друці).

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПОНЯТТЯ ІНВАРІАНТА У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

1.1 Поняття інваріанта, історична довідка

Одним із фундаментальних понять сучасної математики є поняття *інваріанта*, вивчення якого сприяє розумінню основних принципів збереження та симетрії.

«Інваріант – величина, яка не змінюється в результаті деяких операцій.» [18]

Перші згадки відносно поняття сягають у давнину: деякі історичні довідки свідчать про, хоч і не пряме, використання Евклідом елементів інваріантності (мова йде про кути та довжини, які зберігаються, незважаючи на рух).

Однак, великого розповсюдження поняття набуло починаючи з XVIII – XIX століття. У 1795 році термін «інваріант» вперше було вжито як прикметник, що дослівно означав «той, що залишається незмінним» [5]. З 1798 року німецький математик Карл Фрідріх Гаус працює над теорією квадратичних форм, а у 1801 році на світ з'явилась його праця «Арифметичні дослідження» [4], в якій автор зосереджується на вивченні інваріантів квадратичних форм. Саме завдяки цьому Карла Гауса вважають одним із перших математиків, які поклали початок вивчення інваріантів у алгебраїчному контексті.

На початку 1840-х років англійський математик і логік Джордж Буль в своїй праці «Виклад загальної теорії лінійних перетворень» представляє інваріантність як математичну властивість.

Надихнувшись працею Буля, Артур Кейлі у роботі «Теорія лінійних перетворень» вперше розглядає задачі з теорії інваріантів, а трохи згодом робить неоціненний вклад у розвиток сучасної теорії груп, відкривши те, що інваріанти слід вивчати як об'єкти, які зберігаються під дією лінійних

груп. Слід зауважити, що одночасно з Кейлі вагомий внесок у розвиток теорії інваріантів зробив Джеймс Джозеф Сильвестр. Окрім розробки «символічного методу» – техніки запису інваріантів поліномів – англійський математик офіційно вводить у використання термін «інваріант» шляхом публікацій своїх робіт у 1850-х роках [6].

Наприкінці XIX століття теорії інваріантів присвячує себе Давид Гільберт. Під час виступу на Другому міжнародному конгресі математиків у Франції у 1900 році, ним було сформовано 23 математичні проблеми. Третя за списком проблема вирізнялась з-поміж інших геометричним спрямуванням, оскільки стосувалась рівноскладеності многогранників, а саме можливості розрізання многогранника на частини таким чином, щоб із цих частин була можливість скласти інший многогранник того ж об'єму, але який матиме іншу форму. Поява даної проблеми беззаперечно пов'язана з тим, що на площині довільні два многокутники рівної площі рівноскладені (теорема Бойяї – Гервіна [12]) – таким чином, площа є повним інваріантом відносно рівноскладеності у двовимірному просторі.

А чи працює це в тривимірному просторі?

Над вирішенням цієї проблеми працював учень Давида Гільберта – Макс Ден. Він вже через рік після математичного конгресу навів приклад нерівноскладених тетраедрів, які мали однаковий об'єм [9], увівши у використання поняття «інваріант Дена» - числова характеристика, яка показує неможливість рівноскладеності многогранників у тривимірному просторі. Даний інваріант демонструє суттєву відмінність між геометрією просторів, а саме той факт, що у тривимірному просторі існують тіла однакового об'єму, які не можна розкласти і скласти до купи один з одного, використовуючи лише рухи.

Після становлення топології як окремого розділу математики в кінці XIX – початку XX століття, справедливо зазначити, що і поняття

інваріанта набуло більшого значення, крім того, відбулось розширення сфер його застосування. Класична геометрія окреслювала поняття як числову незмінну величину попри будь-які перетворення, в той час як топологічні дослідження вивели ідею інваріантів під безперервними деформаціями. Одним із напрямів досліджень у цьому напрямі можна зазначити Ейлерову характеристику, яка є прикладом гомотопічного інваріанту – зберігається при гомотопічній еквівалентності просторів.

1.2 Типологія інваріантів. Лінія ознайомлення з інваріантами у межах шкільного курсу математики

Сьогочасна психологічна і методична література містять неймовірно малу кількість інформації стосовно більшості понять, які вивчаються у математиці. А тому і питання класифікації розкрито досить примітивно.

Перш ніж перейти до конкретної класифікації інваріантів, орієнтованих на вивчення у межах шкільних курсів, на наш погляд, доцільно зосередити увагу на загальній класифікації понять. Відповідно до окремих розділів математики існують наступні типи інваріантів:

1. *Алгебраїчні інваріанти* – величини, які залишаються незмінними при певних алгебраїчних операціях чи дії груп симетрії.

Приклад 1. «На дошці записані числа 1, 2, 3, 4, 5. Дозволяється витерти будь-які два записані числа x , y , і замість них записати число $xy + x + y$. Доведіть, що після чотирьох таких кроків завжди отримуватиметься число 719.» [27]

Під час ознайомлення з даним типом інваріантів, найчастіше використовують поняття детермінанту та рангу матриць.

2. *Геометричні інваріанти* – величини чи властивості, які залишаються без змін у випадку геометричних перетворень. Даний розділ математики досить багатий на інваріанти: сума кутів трикутника;

величина вписаних кутів, що спираються на одну дугу; суми протилежних кутів у вписаному чотирикутнику; суми довжин протилежних сторін в описаному чотирикутнику [27].

Приклад 2. Трикутник ABC задано на деякій площині. На довільних точках кожної зі сторін сидять комахи. У довільний момент часу одна з комах переповзає площиною вздовж прямої, яка паралельна до тієї, на якій знаходяться інші дві нерухомі комахи. Після її зупинки, аналогічне переповзання виконує інша комаха, і так кожна наступна. Чи зможуть усі три комахи після декількох переповзань одночасно опинитись у вершинах трикутника ABC ?

Найяскравішим прикладом можна зазначити раніше згаданий інваріант Дена [3].

3. Інваріанти в *теорії чисел і комбінаториці* відіграють не менш важливу роль, оскільки охоплюють великий спектр тем та напрямків, до яких можна застосувати поняття. Найбільш поширеним інваріантом є парність за умови, коли виконуються операції, які змінюють числа без зміни їх парності. Крім того, інваріантом при певних перетвореннях є остача від ділення на задане число. Наряду з цими поняттями, важливим інструментом аналізу з перетворень чисел є найбільший спільний дільник (далі – НСД) та найменше спільне кратне (далі – НСК), які здатні виступати як інваріанти. Якщо говорити конкретно про НСД, то основною властивістю є те, що НСД двох чисел залишається незмінним при певних операціях (до прикладу – алгоритм Евкліда). НСК, у порівнянні з НСД, рідше виступає у ролі інваріанта, однак його взаємозв'язок з НСД дозволяє використовувати добуток чисел $a \cdot b$ як потенційний інваріант.

Приклад 3. Кенгуру стрибає уздовж прямої, а довжина кожного стрибка рівна 1 метру. Чи вдасться кенгуру, будучи в деякій точці прямої, за 101 стрибок повернутися в цю ж саму точку? [7]

4. *Топологічні інваріанти* є властивостями топологічних просторів, яким властива незмінність при гомеоморфізмах. Провідною метою використання інваріантів у даному розділі математики є розрізнення просторів: за умови, коли ми можемо віднайти інваріант, який має різне значення для двох просторів, це означає, що вони не є гомеоморфними. У подальшому це дозволяє довести, наприклад, той факт, що сфера та тор не є топологічно еквівалентними. Прикладами інваріантів, які відносять до топологічних, вважають розмірність, зв'язність, компактність. Як ми раніше зазначали, до типових прикладів інваріантів з цього розділу можна віднести Ейлерову характеристику, яка дозволяє класифікувати поверхні, визначаючи їх топологічну еквівалентність.

Якщо детальніше розглянути шкільний курс математики, а конкретно – вивчення поняття інваріанта – то досить очевидним стає той факт, перші згадки про ідеї, які лежать в основі даного математичного поняття, з'являються ще в молодшій школі під час розв'язування логічних задач. У 2 – 4 класах учні знайомляться із задачами на перекладання та групування об'єктів без зміни їх кількості.

Приклад 4: Тарасик і Євген разом мають 15 олівців. Якщо Тарасик віддасть Євгену 3 олівці, то скільки олівців матимуть хлопці разом?

У період навчання у середній школі (5 – 8 класи), учні починають більш усвідомлено використовувати методи розв'язування задач, які пов'язані з інваріантами, оскільки саме в цей період учні починають працювати із закономірностями парності при додаванні та відніманні, множенні. Широкого використання набувають задачі, розв'язання яких націлене на досягнення певного результату при обмеженні у можливостях (задачі на переливання та перекладання). Вводяться також задачі на використання ознак подільності, остачі від ділення.

Приклад 5. Перед господинею стоять 3 посудини з водою: посудина на 8 літрів, яка наповнена водою, і дві пусті посудини – на 3 та 5 літрів. Як господині відміряти рівно 4 літри води?

Вивчення поняття інваріанта у старшій школі (9 – 11 клас), зазвичай, не виноситься як окрема тема з чітким означенням та класифікацією, однак, незважаючи на це, ідея інваріантності слугує для розв’язування різноманітної кількості задач (здебільшого – поглиблений чи олімпіадний рівні (задачі на фішки та шашки), факультативні чи елективні курси), в окремих випадках – вводиться через огляд властивостей, які залишаються незмінними при довільних операціях чи перетвореннях.

Знайомство учнів з поняттям інваріантності в 10 класі починається на рівні сприйняття того, що деякі величини чи властивості можуть залишатись без змін, навіть якщо з ними щось відбувається. Після того, як школярі ознайомились з типовими прикладами незмінних властивостей (парність, сума внутрішніх кутів трикутника), акцент зміщується на виокремлення *алгебраїчних* (сума, добуток величин), *геометричних* (незмінність довжини відрізка; величини кутів; площа фігур; перетворення: перенесення, обертання, відзеркалення), *комбінаторних* (остачі від ділення) інваріантів.

1.3 Особливості формування абстрактного математичного мислення в учнів старших класів

«Компетентісний підхід – це процес навчання, спрямований на формування та розвиток життєво важливих умінь і навичок особистості, що дає змогу адаптуватись у соціумі. Саме розвиток у особистості життєво важливих компетентностей може дати людині можливості орієнтуватись у сучасному суспільстві, інформаційному просторі, подальшому здобутті освіти.» [28]

Тому справедливо зазначити, що однією із основних умов набуття математичної компетентності є розвиток абстрактного і формально-

операційного мислення у учнів, який відбувається саме в період навчання у старшій школі. Однак, не варто знецінювати важливість принципу поступовості у навчанні, оскільки розвиток абстрактного мислення бере початок ще у молодшій школі, де діти більше спираються на дійове та образне уявлення про оточуючий світ, а середня школа характеризується переходом від опори на зорове уявлення до словесно-логічного мислення. Повноцінне опанування усіма видами мисленнєвої активності учнями відкриває можливості аналізувати та узагальнювати інформацію, отриману з навколишнього світу, встановлювати логічні зв'язки та закономірності.

Вивчення поняття інваріанта напряду пов'язане з розвитком абстрактного мислення, оскільки учні повинні не лише засвоїти незмінність величин чи властивостей під час змін, а й зрозуміти на основі чого це відбувається. Розуміння цього потребує високого рівня концентрації, вміння аналізувати та узагальнювати, виокремлювати конкретне із загального.

На думку швейцарського психолога Піаже, який присвятив життя дослідженню теорії когнітивного розвитку, набуття дитиною п'ятнадцятирічного віку означає те, що відбувся перехід від конкретно-операційного мислення до формально-операційного, яке дає можливість учням старшої школи працювати з абстрактними поняттями [2].

До найбільш розповсюджених прийомів, які спрямовані на формування абстрактного мислення, можна віднести наступні:

- постановка проблемної ситуації, яка повинна вмотивувати школяра на пошук закономірностей;
- використання у навчанні математики нестандартних задач, спрямовані на використання уяви та логіки задля отримання результату;
- використання у навчальному процесі ігрового підходу до навчання;

- використання індуктивного та дедуктивного методів для встановлення і перевірки гіпотез;
- використання дослідницького підходу і методу моделювання;
- створення групових дискусій для висловлювання учнями власних тверджень, підкріплених аргументами;
- використання міжпредметної інтеграції.

1.4 Можливості вивчення поняття інваріанта на елективному курсі математики у 10 класі

«Концепція модернізації української освіти передбачає введення профільного навчання на старшому щаблі школи.» [24] Тоді справедливо відзначити, що метою профільного навчання є створення якісних умов для отримання освіти старшокласниками, враховуючи їх здібності відповідно до інтересів і намірів на продовження здобуття освіти в майбутньому. Важливим елементом профільного навчання є введення *елективних предметних курсів*.

Для того, щоб сучасне профільне навчання було справді ефективним, необхідне ретельне обґрунтування теоретичних і практичних засад допрофільного і профільного напрямку (праці О. Барановської, Н. Бібік, М. Бурди, Г. Вороніної, В. Кизенка). Це вимагає розробки чіткої методики формування зацікавленості учнів до обраного профілю. Тому і побутує думка, що старшокласникам необхідна спеціалізована підготовка, основною ціллю якої є полегшення здобуття освіти в подальшому (С. Бондар, О. Ляшенко, О. Петунін, М. Фірсова).

Таким чином, питання впровадження профільного навчання в систему освіти є досить актуальною темою.

О. Й. Рудаківська зазначає, що «*профільне навчання* – вид диференційованого навчання старшокласників відповідно до їх освітніх потреб, зумовлених на орієнтацією на майбутню професію.» [26]

Основними *цілями профільного навчання* є:

- глибоке вивчення профільних предметів для того, аби учні не лише отримали міцну базу для вступу до вищих навчальних закладів, а й мали якісну підготовку до майбутньої професійної діяльності;
- розвиток у підростаючого покоління гнучкості та вміння адаптуватись до стрімких змін у інформаційному суспільстві;
- гарантовано рівний і справедливий доступ до якісної освіти для усіх, незалежно від соціального статусу та місця проживання.

Основними *принципами профільного навчання* можна зазначити наступні:

- принцип поділу учнів відповідно до рівня їх освітньої підготовки, інтересів, потреб, здібностей і нахилів;
- принцип різноманітності вибору освітніх програм, технологій навчання та навчально-методичних матеріалів;
- принцип наступності і безперервності між допрофільною підготовкою, профільним навчанням і професійною освітою;
- принцип гнучкого підходу до змісту та форм організації профільного навчання;
- принцип діагностично-прогностичної ефективності – виявлення здібностей учнів для обґрунтування вибору профілю навчання.

Структура і напрямки профільного навчання мають формуватися з урахуванням позиції кожної із зацікавлених сторін – учнів, батьків учнів, педагогічного колективу – відповідно до матеріально-технічних ресурсів та навчально-методичного забезпечення закладу освіти.

Кожен профіль поєднує в собі базові, профільні і *елективні курси*.

«*Елективні курси* – це курси профільного доповнення, які поглиблюють та розширюють межі профільних предметів, розвивають і доповнюють їх зміст (деякі з них інтегрують зміст).» [24] Незважаючи на

обов'язковість вивчення курсу, спрямування курсу школярі обирають самостійно. Крім того, курс не повинен дублювати програму базової освіти.

Загалом, елективні курси передбачають вивчення учнями тих тем, які їм найбільше імпонують, при цьому увага концентрується на проведенні лабораторно-практичних досліджень, збільшується кількість творчих та проєктних робіт.

Основними *функціями елективних курсів* вважають:

- слугують «надбудовою» до профільного курсу, забезпечуючи вивчення основних профільних дисциплін на відповідному рівні шляхом збагачення їх додатковим змістом, що поглиблює та розширює знання з предметів;
- доповнюють зміст одного з базових навчальних предметів;
- сприяють задоволенню пізнавального інтересу учнів.

Елективні курси розробляються, зазвичай, як авторські програми. Перш ніж приступити до створення такої програми, слід ознайомитись з наступними пунктами:

- розробникам слід проаналізувати зміст навчального предмета в межах профілю;
- встановити відмінності від базового чи профільного курсів;
- розробити календарно-тематичне планування курсу;
- проаналізувати можливості матеріально-технічного та методичного забезпечення запропонованого курсу;
- окреслити тему, мету, зміст, цілі, завдання та функції курсу;
- зазначити види діяльності, через які реалізовуватиметься курс;
- спрогнозувати можливі продукти, створені учнями, які можуть бути зараховані як результати прослуханого курсу;

- визначити критерії оцінювання курсу [14].

Важко не погодитись з думкою про те, що введення елективного курсу на вивчення поняття інваріанта у 10 класі має великий вплив на формування та розвиток інтелектуального та аналітичного мислення. Окрім цього, впровадження додаткового розгляду абстрактних понять з математики повинно заповнити можливі прогалини базового курсу, оскільки, хоч поняття інваріанта і не виноситься на вивчення як окрема тема, ідеями його застосування пронизана велика кількість олімпіадних задач, конкурсів, екзаменаційних та вступних програм. Поняття можна інтегрувати в теми, за якими передбачено розв'язок нестандартних задач, розгляд математичних ігор, задач на логіку та побудову стратегій, оскільки це дозволяє формувати глибоке розуміння структури математичних об'єктів; розвивати здатність фокусувати увагу на сталих елементах; мотивувати учнів до самостійної пошукової та творчої роботи.

Серед підходів можна виділити роботу з типовими задачами на виявлення інваріантів (задачі на шахи, шашки, зафарбовування комірок, переміщення та перекладання фігур, парності та перетворення фігур); моделювання ігрових ситуацій; проведення досліджень з теми, присвячених історії появи поняття, сфер застосування та можливості інтеграції в інші дисципліни для формування стійких міжпредметних та міжгалузевих зв'язків.

Окрему увагу можна приділити використанню ігор на елективних курсах, які при правильному уведенні, поясненні та практичному опрацюванні сприятимуть розвитку стратегічного мислення, умінню прогнозувати дії та наслідки. Прикладом гри для застосування на елективному курсі під час вивчення поняття інваріанта можна зазначити гру «15» («П'ятнашки»).

РОЗДІЛ II. МЕТОДИЧНИЙ ПОТЕНЦІАЛ ГРИ «15» У ФОРМУВАННІ ПОНЯТТЯ ІНВАРІАНТА

2.1 Математичний зміст гри «15»

Наприкінці XIX століття на території Сполучених Штатів Америки з'явилась гра, яка базується на певних математичних принципах, які визначають її розв'язність, і яка отримала назву «15» («П'ятнашки»). Початкові версії головоломки з'явилися завдяки поштмейстеру на ім'я Ной Палмер Чепмен, який показував перші нариси гри своїм друзям ще у 70-тих роках. У той час гра складалась із 16 пронумерованих квадратиків, які треба було скласти в рядки по 4 штуки таким чином, щоб сума чисел кожного ряду становила 34 [8].

Гра досить швидко набула поширення серед суспільства – на початок 80-тих років XIX століття «15» активно обговорювали по всій Європі [1], тоді ж і виникла потреба у аналізі гри – у «Американському математичному журналі» було висвітлено дві статті про парні і непарні перестановки, а також їх вплив на вирішення гри. Тому, ми пропонуємо спершу зупинитись саме на поясненні щодо непарних перестановок, які продемонстрував американський математик Вільям Вулсі Джонсон.

У звичному вигляді розглядається головоломка, у якій фішки переміщуються по клітинках дошки таким чином, що одна завжди лишається порожньою (рис. 2.1.1). Основною метою є досягнення певного впорядкованого розташування фішок на дошці, використовуючи послідовні переміщення (переміщення по діагоналі використовувати не дозволяється). А чи завжди є шанси досягти бажаного розташування, маючи довільне розташування фішок на початковому етапі?

Припустимо, що після виконання $n + 1$ ходу відбувається перенос фішки. У цьому випадку результат буде відрізнятись лише однією перестановкою двох фішок (наприклад, якщо $n + 1$ хід – це переміщення

клітинки №6 на №7, то фішка опиниться в №7, а так, яку було перенесено, - у №6; якщо перенос було здійснено за допомогою n ходів, то було б навпаки).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Рисунок 2.1.1

Перші два ходи з подальшим переносом ми можемо розглядати як одну перестановку. Звідси випливає, що n ходів з переносом еквівалентні $n - 1$ перестановці. Однак, якщо після t ходів порожня клітинка залишається на початковому місці, сам t - ний хід є переносом, а отримане зміщення – результат $t - 2$ перестановок.

Для більш спрощеного розуміння, можна розглянути на прикладі шахової дощечки – якщо клітинки зафарбовані у два кольори, то кожен наступний хід змінює колір порожньої клітинки (при цьому ми отримуємо, що t – парне). Таким чином, переміщення спричинене парним числом перестановок, з чого випливає, що якщо початкове випадкове розташування є негативним, то досягти позитивного впорядкованого результату неможливо (оскільки позитивна перестановка не змінюється на негативну і навпаки).

Нехай числа від 1 до n природньо впорядковані (верхній рядок), а під ними записано довільну перестановку тих самих чисел. Для $n = 15$ маємо:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

12, 10, 8, 15, 9, 6, 3, 4, 11, 1, 7, 2, 14, 5, 13.

Перегрупуємо рядки цикли: починаючи з довільного числа, слідуємо рядками: 1-12-2-10-1 – перший цикл. Наступний цикл починається з числа, яке не увійшло до попереднього циклу: 3-8-4-15-13-11-5-9-11-7. Нарешті, 6 утворює одноманітний цикл. Отриманий приклад містить $m = 3$ цикли. Якщо змінити місцями два елементи у нижньому рядку, то отримаємо два варіанти розвитку подій:

1. за умови, коли елементи належать одному циклу – цикл розділяється на два;
2. за умови, коли елементи належать до різних циклів – об'єднуються в один цикл.

У кожному із випадків кількість циклів m зміниться на протилежну парність (з парного на непарне і навпаки). Те саме стосується і величини $n - m$, яка і визначає парність перестановок. Це є необхідним етапом визначення можливості певної конфігурації після заданої кількості ходів.

Цією ж темою захопився і Вільям Сторі, який теж мав статтю у математичному журналі [10]. Його пояснення дещо відрізнялось від попереднього, оскільки Джонсон довів, що у звичайній формі головоломки позитивне розташування з порожньою 16-тою клітинкою ми не отримаємо з негативного розташування з тією ж самою порожньою клітинкою. Але той самий метод доведе, що на довільному квадратному чи прямокутному полі, яке поділене на клітинки, містяться фішки, яких на одну менше від кількості клітинок, пронумеровані і розміщені у будь-якому порядку, переміщуються як у грі «П'ятнашки», то позитивне розташування не може бути отримане з негативного порожньою клітинкою. Крім цього, результат є незалежним від самого положення порожньої клітинки.

Послідовність оберемо наступну: починаючи з верхнього ряду, ми послідовно беремо клітинки зліва направо; уздовж другого ряду навпаки – справа наліво; процес продовжується до тих пір, поки не буде охоплено усі клітинки, за виключенням порожньої. Таку послідовність можна зазначити як «порядок розташування» (позитивний або негативний, залежить від парності чи непарності перестановки). Розташування за природнім порядком чисел відзначимо «стандартним розташуванням».

Справедливий той факт, що в довільному розташуванні дві клітинки суміжні в порядку перестановки, або є суміжними на полі, або кожна з них прилягає до порожньої клітинки. З цього ми отримуємо, що порожня клітинка може переміщуватись в будь-яке інше положення на полі завдяки послідовним обмінам без зміни порядку розташування. Тому, умова перетворення у стандартне розташування розглядається як залежність від порядку розташування.

За умови довільного розташування будь-яку фішку можна перемістити повз дві фішки, які знаходяться перед або після неї, не змінюючи іншого порядку. Наприклад, якщо a, b, c – три послідовні фішки у порядку розташування (рис. 2.1.2), тоді a ми можемо перемістити через b та c звичайним зсувом (рис. 2.1.3).

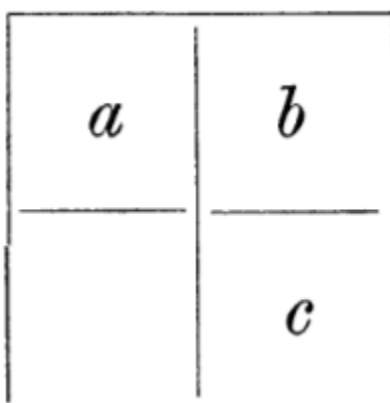


Рисунок 2.1.2

Якщо ми послідовно пересунемо у порожню клітинку a , потім b і c , а після цього – знову a , то отримаємо розташування, за якого a, b, c змінено на b, c, a . Можна також провести переміщення у зворотному порядку, завдяки чому можна дійти до початкового розташування без змін у порядку фішок. Тому, довільні переміщення порожньої клітинки не впливають на порядок розташування.

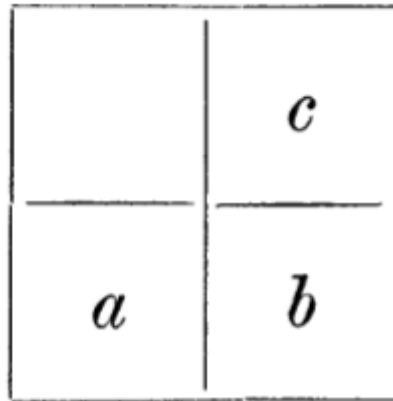


Рисунок 2.1.3

Кожне розташування можна привести до одного із кінцевих результатів, які різняться між собою лише однією перестановкою, а тому одне з них буде позитивне, а одне – негативне. З цього випливає, що тільки розташування з позитивним порядком може бути перетворене у стандартне розташування. Це – критерій стандартного розв’язання.

Природне розташування ми можемо перетворити на стандартне шляхом реверсу порядку фішок у кожному парному рядку. Безсумнівно, довільний ряд може бути реверсовано шляхом обміну фішок, які рівновіддалені від обох кінців. Саме так ряд парної кількості фішок може бути реверсовано за кількість перестановок, яка чисельно дорівнює половині кількості фішок у ряду.

Якщо позначити кількість рядків на полі як r , а кількість стовпців як c , то отримаємо наступне:

1. r парне, c парне;

2. r парне, c непарне;
3. r непарне, c парне;
4. r непарне, c непарне.

Кількість перестановок для того, щоб здійснити перетворення у стандартне розташування для кожної із ситуацій 1 – 4:

1. $\frac{1}{2}cr - 1$;
2. $\frac{1}{2}(c - 1)r$;
3. $\frac{1}{2}(r - 1)c$;
4. $\frac{1}{2}(r - 1)(c - 1)$.

Поділивши можливі поля на два класи (перший клас – знайдено парне число, другий клас – непарне), то маємо наступні твердження:

- на полі першого класу задане розташування можна (не можна) перетворити у природне розташування залежно від парного чи непарного порядку;
- на полі другого класу розташування можна (не можна) перетворити у природне розташування залежно від непарного чи парного порядку.

Для класичної версії гри «15» маємо $r = 4$, $c = 4$, тому використовуємо формулу $\frac{1}{2}cr - 1$. Підставивши значення, отримуємо вираз $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 - 1 = 7 \rightarrow$ непарне. Це свідчить про те, що природне розташування можна отримати з довільного розташування непарного порядку.

Перш ніж повернутись до результатів про перестановки сучасної алгебри, варто пригадати, що перестановка на множині (скінченній) – це бієкція, яка відображає множину саму в себе [11]. У більшості випадків перестановка розглядається як функція, яка переставляє чи переміщує

елементи множини. З цього слідує, що довільний стан гри «15» - звичайні перестановки.

Множина усіх перестановок на n – символах – це n – та симетрична група, яка позначається як S_n . Множина перестановок головоломки «П'ятнашки» є, очевидно, підгрупою S_{15} . Підгрупа, яка складається виключно з парних перестановок – знакозмінна група.

Перестановки фішок №14 та №15 – непарна перестановка, тому, якщо можна довести, що група перестановок на полі гри «15» є підгрупою знакозмінної групи, то в деяких випадках переставити ці фішки неможливо. Відповідно, ми не зможемо дійти до кінця гри.

Можна розглянути множину перестановок, у якій порожня плитка повертається на своє початкове місце шляхом замкнених шляхів, які починаються в нижньому правому куті (рис. 2.1.4).

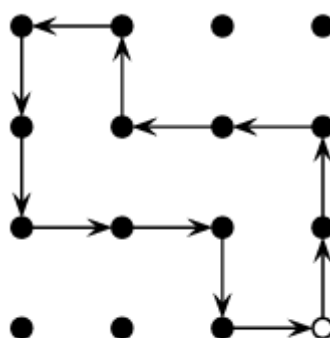


Рисунок 2.1.4

Варто звернути увагу на те, що на рисунку 2.1.4 кожен рух вгору супроводжується рухом вниз, а кожен рух вліво – має рух вправо. Тому, необхідно мати парну кількість перестановок. З цього випливає, що множина перестановок у головоломці «П'ятнашки», які повертають порожню фішку в правий нижній кут, є підгрупою знакозмінної групи A_{15} .

Результатом попередньо описаних дій можна зазначити неможливість зміни фішок №14 та №15 місцями без зміни розташування інших фішок.

2.2 Поняття інваріанта у грі «П'ятнашки»

На перший погляд може здаватись, що таке поняття інваріанта зовсім не пов'язане з головоломкою «П'ятнашки». Однак, провівши ґрунтовний аналіз можливих спроб до досягнення мети – складання чисел у природньому порядку – стає зрозуміло, що це два нерозривні один від одного елементи.

Уявимо, що ми маємо випадковий порядок фішок на полі гри (рис. 2.2.1) перед початком складання. Слідуючи правилам, ми не можемо діставати фішки з ігрового поля, лише переміщувати, використовуючи порожню клітинку.

4	2	3	1
5	6		7
8	9	10	11
12	13	14	15

Рисунок 2.2.1

Чи можна впорядкувати отримане розташування фішок так, аби отримати послідовне розташування чисел у порядку зростання, а права нижня фішка стала порожньою?

Припустимо, що намагаючись скласти правильний порядок, отримався «майже» кінцевий результат – виключенням стають фішки №14 та №15, які змінені місцями між собою (рис. 2.2.2).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Рисунок 2.2.2

Виявляється, що подальше розв’язання неможливе. Тоді постає наступне не менш важливе запитання: *як довести дане твердження?*

Однією з ідей, які дозволяють довести нерозв’язність задачі – виявлення і використання характеристик, якими вона наділена.

Повертаючись до попередніх пунктів, нам відомо, що інваріант – властивість об’єкта, яке залишається незмінним при довільних змінах. За умови, якщо знайдено інваріант, значення якого для двох об’єктів не співпадає, то перетворити один об’єкт в інший не вдасться. Іншими словами, пошук інваріанта, який доводить різницю між двома елементами, доводить нерозв’язність задачі перетворення одного об’єкта в інший.

Відповідно до введеної задачі до гри «15» отримується, що слід віднайти таку інваріантну характеристику позицій, яка б відрізнялась у кінцевого результату і «майже» кінцевого результату, де змінено фішки номерами 14 і 15. У даному випадку – це парність суми двох наступних чисел.

Нехай, число A – число пар фішок, в яких фішка з більшим номером йде перед фішкою з меншим номером; число B – номер рядка, в якому знаходиться порожня фішка. Наприклад, на рисунку 2.2.1 всього п’ять невірних пар: (4,2), (4,3), (4,1), (2,1), (3,1), тому в цьому випадку $A = 5$,

тоді як $B = 2$. Переконаймося в тому, що парність суми A та B є інваріантом.

Дійсно, коли гравець виконує переміщення горизонтально, то відносне розташування номерів залишається без змін, числа A і B теж не змінюються. Якщо ж гравець переміщує фішку вертикально (тобто, на сусідню позицію), то обидва числа (i A , i B) змінюють парність: число B зміниться відповідно до означення, оскільки номер рядка зміниться на одиницю; парність числа A зміниться через те, що при вертикальному переміщенні фішки її номер «зіскочить» через три числа (зсув вниз – через наступні, зсув вгору – через попередні), а «зіскок» через кожне число змінить саме A на $+1$ чи -1 . Наприклад, з рисунка 2.2.1 при зсуві фішки №3 вниз, вона «зіскочить» через номери 1, 5 і 6. Із одночасної зміни парності чисел A та B слідує, що парність суми цих чисел залишиться без змін. *Тому, парність суми чисел A та B – інваріант.*

Відшуканий нами інваріант дає змогу поділити усі позиції в грі «15» на парні та непарні. Якщо вхідна позиція має непарний інваріант, то дана позиція не може бути доведена до кінцевого результату, де вся фішки впорядковані природньо.

На рисунках 2.2.1 та 2.2.2 – приклади непарних позицій, які ми не можемо довести до кінця. Але за правилами гри є можливість звести розташування фішок з рисунка 2.2.1 до розташування з рисунка 2.2.2, оскільки усі непарні позиції еквівалентні, тобто такі, що зводяться одна до одної. Крім того, еквівалентні між собою і всі парні позиції, тобто будь-яку з них можна впорядкувати. Доведення вищезазначених тверджень є невід’ємною частиною теорії груп.

2.3 Методика введення поняття інваріанта учням 10 класу за допомогою гри «15»

Перш ніж безпосередньо перейти до методики формування у учнів розуміння абстрактних понять математики, слід зупинитись на психологічних і дидактичних перевагах використання ігор під час навчання.

Незважаючи на підвищену цікавість у використанні новітніх прийомів і методів навчання, проблемі використання дидактичних ігор, на нашу думку, приділено недостатню кількість уваги, тим більш коли мова йде про старшу школу та профільне навчання, зокрема – елективні курси. Однак, варто розуміти, що при використанні дидактичних ігор під час навчання математики «... формується мотивація навчальної діяльності й інтерес дітей ..., активізується їх навчально пізнавальна діяльність. Дидактичні ігри дають змогу індивідуалізувати роботу на уроці, давати завдання, посилені кожному учню, максимально розвиваючи їхні здібності ...» [30]. Крім того, такий навчальний предмет як математика дає можливість для створення додаткових ресурсів під час використання даних методів навчання.

Перш за все, використання ігор на уроках математики спрямоване на ознайомлення дітей з новим матеріалом, його закріпленням. Створення ігрових ситуацій може допомогти у більш глибокому засвоєнні раніше набутих понять і тверджень, у формуванні умінь та навичок, розвитку мислення та розширення світогляду учнів.

Однак, не варто використовувати одні і ті самі ігри чи ситуації під час навчання, оскільки це може знизити інтерес дітей через втрату новизни. Для запобігання цього, можна вносити деякі поправки: ускладнювати завдання, поєднувати зміст гри з оточуючим світом і брати реальні приклади з життя. Використання такого методу навчання передбачає ґрунтовну методичну підготовку вчителя.

Занурення учнів у ігрові ситуації під час уроків мають на меті знизити психологічну напругу та стимулювати зацікавленість до сприйняття матеріалу через відчуття контролю над процесом розв'язання поставленої задачі, постановці чітких цілей перед початком гри та миттєвого зворотного зв'язку.

Ігрова діяльність допомагає сформувати не лише знання, а й навички та уміння, оскільки на практиці можна прослідкувати над закономірностями «в дії». Такий спосіб отримання інформації є більш ефективним для запам'ятовування.

Варто також зазначити, що використання ігрових технологій у навчанні формує соціальний інтелект та уміння працювати в команді [19].

З точки зору дидактики, гра – активність, під час якої учень здатний перевіряти, аналізувати та систематизувати інформацію, а не лише отримувати її. Ключовим у використанні ігрових ситуацій є можливість персоналізації поставлених задач, оскільки темп роботи учнів навіть в межах одного класу може суттєво відрізнятись.

Під час введення поняття інваріанта учням 10 класу слід створити таку навчальну ситуацію, за якої здобувачі самостійно матимуть змогу виявити незмінну при будь-яких перетвореннях величину.

Задля більш свідомого розуміння окресленої теми перед переходом до суто математичного змісту курсу, можна зробити історичну довідку, яка демонструватиме періоди становлення поняття інваріанта. На цьому етапі можна надати учням можливість створення тематичних проєктів, які б напряду стосувались теми, оскільки пошуково-дослідницька діяльність під час навчального процесу лише сприятиме збільшенню інтересу до отримання нової інформації, а віднайдені факти допоможуть будувати причинно-наслідкові зв'язки під час вивчення матеріалу з курсу.

Після історичної довідки, етапу дослідницьких проєктів, відбувається перехід до математичної частини курсу: вчитель може запропонувати учням ознайомитись з класичним виглядом гри «15», в якій фішки розташовані у рамці з 4 рядків та 4 стовпців (16-та фішка порожня) . На цьому етапі може бути розв’язана невелика кількість задач на переміщення із зазначенням початкового та кінцевого порядку. За приклад можна взяти задачу (складність обирати із урахуванням можливостей і здібностей учнів, можна починати від найлегших конфігурацій, поступово піднімаючи складність):

Приклад 6. Упорядкуйте фішки на ігровому полі у правильному порядку.

2	5	3	1
4	6		7
8	10	11	13
12	9	14	15

Після розв’язання декількох задач шляхом переміщень і зсувів, учням можна запропонувати задачу на розміщення фішок з номерами 14 і 15 за умови, що вони змінені місцями.

Приклад 7. Чи можна впорядкувати фішки на ігровому полі з вхідним розташуванням?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Виходячи із результатів розв’язання поставлених задач, питання, які повинні з’явитись на даному етапі, можна зазначити наступні:

1. *За яких умов ми можемо досягти дійти до правильного розташування в грі?*
2. *Чому у нас немає змоги отримати правильну конфігурацію фішок?*

Зазвичай, цей етап характеризується появою припущень від учнів, що довільна вхідна конфігурація може бути впорядкована у правильному порядку; завданням вчителя є фіксація кожної із запропонованих ідей як гіпотези для подальшого доведення чи спростування.

Важливим елементом є розгляд емпіричного виявлення інваріанта, тобто *підрахунок загальної кількості інверсій* – фішок з більшим числом, які стоять в загальному рядку перед фішками з меншим числовим значенням. Використовуючи приклад 6, кількість інверсій підраховується наступним алгоритмом:

1. Записуємо загальний ряд фішок: 2, 5, 3, 1, 4, 6, 0, 7, 8, 10, 11, 13, 12, 9, 14, 15 (0 – порожня фішка у 2 рядку на 3 позиції).
2. Прораховуємо кількість пар, у яких фішка з більшим числовим значенням знаходиться лівіше від фішки з меншим числовим значенням:

2 перед 1 = 1 інверсія, 5 перед 3, 1, 4 = 3 інверсії, 3 перед 1 = 1 інверсія, 1 (0 інверсій), 4 (0 інверсій), 6 (0 інверсій), 7 (0 інверсій), 8 (0

інверсій), 10 перед 9 = 1 інверсія, 11 перед 9 = 1 інверсія, 13 перед 12 і 9 = 2 інверсії, 12 перед 9 = 1 інверсія, 9 (0 інверсій), 14 (0 інверсій), 15 (0 інверсій).

3. Сумуємо отримані нами інверсії: $1 + 3 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 2 + 1 + 0 + 0 + 0 = 10$.

Приклад 8. Співвіднести задані конфігурації із загальною кількістю інверсій в них:

A). 5, 9, 11, 12, 13, 1, 3, 0, 6, 4, 2, 10, 8, 7, 14, 15.	1). 45 інверсій.
B). 12, 1, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 0, 15, 13, 14, 4, 6, 9, 2.	2). 11 інверсій.
C). 1, 2, 3, 7, 6, 5, 9, 10, 4, 11, 12, 13, 14, 15, 0, 8.	3). 42 інверсії.
D). 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 6, 7, 8, 9, 14, 13, 0, 15.	4). 13 інверсій.
E). 1, 2, 4, 3, 5, 7, 8, 9, 0, 10, 12, 11, 13, 14, 15, 6.	5). 4 інверсії.
F). 2, 3, 1, 4, 5, 6, 7, 0, 8, 9, 10, 12, 11, 14, 13, 15.	6). 15 інверсій.

Усвідомлене засвоєння алгоритму дозволяє учням плавно дійти до визначення інверсії:

для послідовності фішок (без урахування порожньої), це – пара (a_i, a_j) , $i < j$, де $a_i > a_j$.

Вищезазначені приклади дозволяють зробити висновок, що під час виконання певних перетворень певна величина залишається незмінною, що і є інваріантною характеристикою, яка, у свою чергу, відіграє важливу роль у математичних дослідженнях. Використання гри «15» для уведення поняття інваріанта дозволяє сформулювати не лише емпіричне уявлення про властивості у учнів, а й закласти підґрунтя для більш глибокого усвідомлення абстрактних понять, які надалі зустрічатимуться під час вивчення курсу.

РОЗДІЛ III. РОЗРОБКА ЕЛЕКТИВНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ УЧНІВ 10 КЛАСУ З ТЕМИ «ІНВАРІАНТИ – МАТЕМАТИКА НЕЗМІННОГО В ЗМІННОМУ»

3.1 Вимоги та загальне наповнення елективних курсів

Проаналізувавши відповідну літературу щодо методики організації елективних курсів з предметів у старшій школі [15-16], однією із найбільш поширених проблем сучасних педагогів, яка потребує швидкого реагування через безперестанне реформування та організацію профільного навчання, є недостатньо сформоване уміння створювати навчальні програми в рамках спецкурсів.

Головною метою довільного курсу за спрямуванням є індивідуалізація освітнього процесу та соціалізація тих, хто навчається, оскільки це забезпечує підготовку підростаючого покоління до усвідомленого та відповідального вибору майбутнього професійного спрямування.

Справедливо відзначити, що основною метою елективного курсу з математики постає формування більш глибокого та стійкого розуміння понять з предмета у учнів; важливо також навчити застосовувати розглянуті ідеї понять під час розв'язування різнорівневих задач, використовуючи при цьому дослідницький та ігровий підходи навчання.

Наприклад, розглядаючи питання вивчення поняття інваріанта учнями на елективному курсі математики, метою можна окреслити більш усвідомлений розгляд математичного поняття задля розширення раніше отриманої інформації. Виходячи з поставленої мети, основними завданнями спецкурсу на вивчення інваріантів можна виділити наступні:

1. Ознайомити учнів з поняттям інваріанта, його місцем у математичних дослідженнях.

2. Прослідкувати (визначити) взаємозв'язок з іншими освітніми галузями.
3. Навчити учнів використовувати основні ідеї інваріантності при розв'язуванні задач різного типу складності.
4. Сформувати у учнів уміння віднаходити закономірності, розвивати логічне мислення.
5. За допомогою використання дидактичних ігор (наприклад, з використанням гри «15», sudoku чи інших довільних головоломок, які стосуються теми) підвищити у учнів інтерес до вивчення математики.
6. Сприяти формуванню стійких міжпредметних зв'язків.

Форма реалізації та тривалість елективних курсів не є універсальними, оскільки дані характеристики самостійно визначають заклади освіти відповідно до змісту навчальної програми та методичного забезпечення. Тривалість здатна варіюватись від кількох уроків, на яких зосереджено конкретний розгляд теми без розширення в інші галузі та уведення поступової складності, до четверті, семестру чи цілого навчального року. Однак, в більшості випадків спецкурс охоплює навчальну чверть чи семестр.

Відповідно до теми кваліфікаційної роботи, створений елективний курс можна віднести до предметно-орієнтаційних курсів, оскільки саме вони спрямовані на глибоке дослідження окремих тем і розділів (у нашому випадку окремо досліджується поняття інваріанта), які виходять за межі шкільної програми вивчення, однак стосуються навчального предмета.

Програма елективного курсу – нормативний документ, який відображає структуру та зміст, містить чіткий план викладу інформації відповідно до навчальної дисципліни. Документ повинен містити наступні елементи:

1. *Титульна сторінка*, яка включає в себе відомості стосовно назви навчального закладу; посаду, ініціали відповідальної особи закладу, яким затверджено програму; дату затвердження відповідної програми; назву спецкурсу та терміни її реалізації; вікову категорію дітей; відомості стосовно автора програми (П.І.Б., посада); назва населеного пункту та рік складання програми.

2. *Пояснювальна записка* – загальна інформація про курс. Дана частина повинна містити відомості стосовно освітньої галузі, до якої слід віднести спецкурс; чітко окреслені функції, новизну, актуальність та доцільність впровадження курсу; мету і завдання курсу, особливості та тривалість реалізації; важливе місце на даному етапі варто відвести оформленню вимог та ідей курсу, очікуваних результатів, форм і методів досягнення певних кінцевих результатів [16].

3. *Зміст курсу* містить в собі короткий огляд тем (та/або розділів), перелік понять; описані вимоги щодо знань, умінь та навичок учнів; характеристику форм проведення занять, а також опис дидактичного матеріалу (за необхідності – і технічного оснащення також).

4. *Навчально-тематичний план* – карта курсу, яка містить перелік тем та розподілення часу між практичними та теоретичними заняттями, що впливає на форму їх проведення (уроки, практичні заняття, дискусії, бесіди тощо). Крім цього, дана структурна одиниця містить інформацію стосовно методів проведення підсумкового оцінювання.

5. *Інформаційно-методичне забезпечення* – перелік літератури та необхідних для навчання матеріалів.

Задля підвищення пізнавальної активності учнів 10 класу, цілі та завдання елективного курсу з математики на тему «Інваріанти – математика незмінного у змінному» повинні бути не лише зрозумілими, а й мотивуючими для кожного з учасників, тому під час їх визначення слід зацентрувати увагу на значущості винесення даної теми на глибоке

вивчення, оскільки поняття інваріанта може стати у нагоді як універсальний інструмент розв'язання різнорівневих задач, який допомагає отримати відповідь без використання складних обчислень.

Говорячи про форми навчання та методи, слід зосередитись на врахуванні індивідуальних особливостей кожного з учнів, їх розвитку. Більшу частину процесу навчання повинен займати метод дослідницького підходу, за яким учні не просто вивчають теорію, а беруть участь у її поступовому розкритті. Для цього, наприклад, можна використати проблемно-орієнтоване навчання, основною характеристикою якого є першочергова постановка проблеми, яка повинна спонукати здобувачів на пошук та викриття певних закономірностей. Метод спостереження також варто включити до цього списку. Вирішальним на даному етапі буде залучення учнів до обговорення отриманих результатів, аргументації висновків, що сприятиме не лише розширенню математичних умінь та навичок, а й розвиватиме комунікацію в колективі. Таким чином, вивчення базується на емпіричному досвіді учнів, а не на пасивному засвоєнню знань, які надає вчитель.

Не слід недооцінювати важливість відведення частини курсу на самостійне опрацювання, оскільки даний тип роботи сприяє розвитку умінь працювати з інформацією, вміти фільтрувати та аналізувати її. Декілька уроків можна виділити на захист проєктів, тематика яких пов'язана з історією становлення поняття інваріанта, взаємозв'язок математичних абстрактних понять з іграми, використання ідей інваріантності при вирішенні задач прикладного спрямування. Тематика даного виду роботи може бути наступна: «Застосування інваріанта в сучасному світі», «Історія становлення поняття інваріанта», «Використання інваріанта при розв'язуванні нестандартних задач», «Інваріант – розгадка гри «15»». Можна також запропонувати учням (у вигляді індивідуальної чи групової роботи) віднайти головоломки зі

схожим принципом та презентувати їх на загальну аудиторію, або ж спробувати створити власну версію гри-головоломки. Це не лише налаштує на глибоке сприйняття і засвоєння математичних відомостей, а й розвиватиме креативне та творче мислення.

Підсумовуючи, для впровадження елективного курсу в навчання необхідно виконати наступне:

- розробити програму курсу;
- створити навчально-тематичний план;
- скласти методичні вказівки до занять (конспекти уроків);
- упорядкувати додаткові дидактичні матеріали (схеми, тести, таблиці, тематика проєктів чи завдань для індивідуальної та/або групових робіт).

Але варто зауважити, що не має чіткого плану стосовно вмісту та наповнення даного напрямку навчання, оскільки це самостійно визначає автор і спікер спецкурсу відповідно до навчального навантаження та методичного забезпечення [17].

Оскільки вивчення матеріалу спрямоване на вихід за межі шкільної програми під час вивчення теми, то проведення занять не повинно бути схожим на монотонне читання лекцій вчителем, варто заохочувати слухачів до активних бесід та обговорень, надавати можливість озвучувати думки, помилятись та вчити віднаходити істину.

Одночасно з базовими вимогами необхідно розглянути питання оцінювання прослуханого курсу, що певним чином має вплив на мотиви відбору курсу учнями. Досить часто використовується 12-бальне оцінювання, трохи рідше – форма «зараховано / не зараховано». Однак, на нашу думку, будь-який курс обирається лиш для того, аби успішно його освоїти, тому віддаємо перевагу саме другому варіанту оцінювання учнів.

3.2 Програма елективного курсу «Інваріанти – математика незмінного в змінному»

3.2.1 Пояснювальна записка

У наш час постає питання щодо необхідності перегляду методів і форм навчання, оскільки з появою новітніх технологій і прийомів виникає проблема в умінні поєднати їх з традиційними способами передачі знань.

Достатньо кропітким, але водночас цікавим є процес навчання підростаючого покоління шляхом використання ігрового підходу, адже безпосередньо через стимуляцію творчого потенціалу школярів, яка відбувається саме під час нестандартного поєднання освіти і дозвілля, можна отримати надзвичайно цікаві результати. Це може бути як і успішне засвоєння матеріалу, так і поява нових ідей, гіпотез та аргументів відносно оглянутих тем.

Іншим не менш важливим елементом освіти в сучасних умовах є впровадження профільного навчання, а саме спецкурсів, основною метою яких є не лише поглиблене вивчення окремих розділів чи тем предметів, а й формування та розвиток креативного мислення, навичок пошуку, синтезу та аналізу інформації.

Поняття інваріанта займає досить важливу позицію в математиці, оскільки пронизує декілька із розділів науки, починаючи з алгебри, де інваріант виступає як властивість, яка залишається сталою при довільних операціях, поняття також зустрічається в комбінаториці та теорії чисел (ідеї парності), геометрії.

Однак, шкільний курс математики містить надзвичайно малу кількість відомостей стосовно більшості абстрактних понять, до яких відноситься інваріант. У результаті – рівень знань учнів може не відповідати запитам більшості закладів здобуття вищої освіти.

Тому, задля усунення даної невідповідності і уникнення розмитості поняття інваріанта в цілому, пропонується впровадження елективного курсу *«Інваріанти – математика незмінного в змінному»*, який покладений на цілком органічне розширення змісту основного курсу шкільної математики для учнів старшої школи (конкретно – для учнів 10 класу).

Програма курсу розрахована для навчання в класах природничо – математичного профілю, а також може бути використана в класах із універсальним спрямуванням.

Основною *метою курсу* є розширення математичних компетентностей учнів, підвищення зацікавленості до науки, заповнення прогалин у змісті навчальних програм старшої школи; надання учням можливості розширити і систематизувати знання стосовно поняття інваріанта як характеристики сталості певних величин та/або властивостей; розвивати здатності до мислення.

З огляду на поставлену мету, курс можливо реалізувати лише за умови успішного виконання *завдань*:

1. *з теоретико – методологічного боку*:
 - ознайомити слухачів з поняттям інваріанту, ідеєю інваріантності у математиці;
 - розглянути історичні передумови становлення поняття;
 - формувати чітке уявлення щодо взаємозв'язку з іншими розділами математики.
2. *з практичного боку*:
 - розвинути вміння віднаходити інваріанти у задачах різних типів;
 - сприяти засвоєнню навичок роботи з поняттям задля розв'язування задач різних типів.

3. *з огляду на міжпредметну взаємодію:*

- встановити можливість застосування інваріанта під час вивчення інших навчальних предметів;

- сприяти розумінню універсальності деяких математичних ідей.

4. *з розвивального боку:*

- сприяти розвитку мислення учнів шляхом розв'язування ситуацій на використання ідеї інваріантності;

- формувати у учнів навички висування гіпотез, доведень чи спростувань тверджень, аналізу результатів.

5. *з мотиваційного боку:*

- підвищувати інтерес до вивчення математики, використовуючи різні методи та підходи навчання;

- сприяти самостійності та ініціативності учнів.

Після опанування курсу учень повинен:

- *мати уявлення:* про основні відомості, які стосуються поняття; про роль поняття та застосування в суміжних науках;

- *знати:* основні твердження з теми (визначення інваріанта, ідею інваріантності), алгоритм розв'язування типових задач; можливості застосування ідей інваріантності при розв'язуванні нестандартних задач;

- *уміти:* висувати гіпотези та аргументувати твердження; встановлювати закономірності в розв'язуванні задач на інваріантність.

Крім того, на завершення курсу учні повинні демонструвати навички логічного, абстрактного і критичного мислення, здатні до швидкого реагування під час нестандартних ситуацій. Зі сторони ціннісного напрямлення спецкурсу, слухачі проявляють стійкий інтерес до математичних знань.

Програма наведена у вигляді таблиці, в якій окрім змісту навчального матеріалу зазначено також і вимоги до досягнень старшокласників. Зміст викладено за темами занять із конкретним значенням відведеного часу (подається орієнтовно і може бути зміненим в залежності від потреб учнів). Перелік вимог є орієнтацією на очікуваний результат, тому може стати у нагоді при підборі матеріалу, розробці задач та створенні системи контролю.

Курс розрахований на 8 годин (2 години на місяць протягом навчального семестру).

Задля підвищення активності та сприйняття на заняттях курсу слід застосовувати комбінацію форм, методів і прийомів навчання, оскільки саме ці дії залучатимуть учнів до постановки проблеми проблем і активного обговорення.

Цілком зрозумілим є те, що деякі задачі, відведені для ознайомлення на курсі, не будуть успішно розв'язані всіма слухачами через індивідуальні відмінності у сприйнятті і засвоєнні матеріалу. Тому завдання слід вводити дозовано із можливістю їх колективного розв'язування.

Враховуючи вимоги, зазначені у програмі курсу, доцільно використовувати оцінювання виду «зараховано / не зараховано», при цьому використовуючи традиційні перевірки знань (контрольні роботи чи тестування) разом з нетрадиційними (проектні та дослідницько-пошукові роботи, творчі завдання).

3.2.2 Тематичне планування та вимоги щодо навчальних досягнень учнів

Розподіл навчального часу можна у вигляді таблиці 3.2.2.1, в якій зазначається номер та тема заняття, кількість годин, які відведені на засвоєння. У таблиці також зазначені вимоги щодо навчальних досягнень учнів під час опанування курсу та окремо винесено інформацію щодо

домашніх завдань, виконання яких спрямовані не лише на перевірку якості сприймання інформації, а і на розвиток уміння працювати з задачами різних типів.

Таблиця 3.2.2.1

**Орієнтовне тематичне планування елективного курсу
«Інваріанти – математика незмінного в змінному»**

№ заняття	Тема заняття	К-сть годин	Вимоги до навчальних досягнень учнів	Домашня робота
МОДУЛЬ I. Вступ (1 год.)				
1	Інваріант – суть поняття і історична довідка	1	Учні розуміють зміст введеного поняття, можуть навести приклади інваріантів з оточуючого світу	Підготувати короткий виступ на перелік прикладів інваріантів у житті
МОДУЛЬ II. Алгебраїчні інваріанти (3 год.)				
2	Математичний зміст гри «15». Перестановки в грі «15», типи конфігурацій	1	Учні аналізують і розрізняють перестановки, розуміються принципи гри	
3	Перестановки в грі «15», типи конфігурацій. Розв'язні і нерозв'язні конфігурації	1	Учні визначають можливість розв'язання комбінації за допомогою парності перестановки	Розв'язування письмових вправ
4	Закономірності розташування плиток. Використання	1	Учень застосовує знання про ідеї інваріантності на практиці	

	нестандартних варіацій гри «15»			
МОДУЛЬ III. Геометричні інваріанти (3 год.)				
5	Поняття геометричних інваріантів. Рухи площини	1	Учні розуміються на відмінностях між алгебраїчними і геометричними інваріантами; наводять приклади	
6	Розв'язування задач	1	Учні вміють визначати незмінні властивості	Розв'язання задач з теми
7	Дослідження фігур, які зберігають певні властивості при рухах	1	Учні пояснюють зв'язок поняття з геометричними властивостями фігур; застосовують ідеї поняття під час розв'язування задач	Підготовка до захисту творчих робіт, проєктів
МОДУЛЬ IV. Підсумкова частина (1 год.)				
8	Урок узагальнення знань «Інваріанти у навколишньому світі». Захист творчих робіт, проєктів	1	Учні демонструють уміння працювати з різними типами інваріантів; узагальнюють знання з теми; розуміються на важливості окремого вивчення деяких математичних понять; захищають творчі роботи, проєкти	

3.2.3 Огляд науково-методичної літератури для застосування на елективному курсі

Оскільки впровадження елективного курсу у 10 класі спрямоване на розширення шкільного змісту математики, справедливо зазначити, що більша частина спецкурсу буде відведена на розв'язування задач підвищеної складності, використання олімпіадних задач. Однак, враховуючи потребу у індивідуальному підході під час навчання, матеріал слід вводити з поступовим підвищенням складності.

Під час підготовки до читання курсу, вчителю слід спиратись на науково-популярні та методичні джерела, які розкривають не лише теоретичні основи, а і практичний бік застосування поняття.

Етап ознайомлення учнів із поняттям інваріанта повинен характеризуватись завданнями, які стимулюють учнів до емпіричного відкриття властивостей. У цьому випадку доцільно розпочинати з вивчення числових характеристик: суми, різниці, остачі від ділення (задачі на перестановку школярів на уроках фізичної культури, складання пазлів [22]).

У роботі Сарана О. А. і Семенець С. П. «Нестандартні геометричні задачі» [25] представлено комбінацію різнорівневих прикладів, які супроводжуються поясненнями та вказівками: від простих (парність чи залишки), до більш складних. Підкріплення практичних завдань теоретичними основами збільшує актуальність використання посібника під час поглибленого та усвідомленого вивчення.

У посібнику [27] задачі, які стосуються даної теми, спрямовані на підвищений рівень складності, оскільки охоплюють поєднання алгебраїчних та геометричних інваріантів (задача про розбиття квадратного поля на ділянки; задача про купу сірників).

Серед книг, які можна використовувати під час подання поняття інваріанта як прихований метод пошуку деяких закономірностей математичних конструкцій, варто зазначити підручники для поглибленого вивчення математики у старшій школі, затверджені чинною програмою Міністерства освіти і науки України.

3.3 Педагогічний експеримент на впровадження елективного курсу з вивчення інваріантів

Педагогічним експериментом називають такий метод дослідження, основним завданням якого є визначення ефективності застосування довільних форм та засобів, методів у навчанні під час засвоєння учнями конкретної теми предмету [29].

Оскільки елективні курси характеризуються можливістю їх самостійного обрання учнями, то для оцінки впровадження спецкурсу на вивчення математичних понять було обрано порівняльний експеримент як одна із форм педагогічного експерименту.

Дослідження проводилось за участі учнів 10 класу Тарасівського ліцею Виноградівської територіальної громади, які за результатами опитування розділились на групи: *експериментальна група* – 9 учнів, які виявили бажання прослухати елективний курс «Інваріанти – математика незмінного в змінному»; *контрольна група* – 9 учнів, котрі продовжили опановувати шкільний зміст математики без поглибленого вивчення окремих тем. Розподіл старшокласників на групи надав можливість порівняти і проаналізувати результативність впровадження спецкурсу.

Педагогічний експеримент – складна структура, яка складається з декількох етапів [20]. Тому під час проведення дослідження важливим завданням було дотримання логічної поступовості.

На *діагностичному етапі* експерименту основним завданням є виявлення проблеми та її актуальності; у нашому випадку – визначення

рівня зацікавленості учнів у нестандартному підході до вивчення математичних понять. У цей час для обох груп було проведено опитування щодо володіння знаннями про поняття інваріанта (див. додаток А), а результати визначались за початковим, середнім, достатнім та високим рівнями навчальних досягнень. Підсумки анкетування обох груп перед початком експерименту представлено у вигляді таблиці 3.3.1.

Таблиця 3.3.1

Результати вхідного анкетування учнів

Рівні навчальних досягнень учнів	Експериментальна група (9 учнів)		Контрольна група (9 учнів)	
	кількість учнів	% учнів	кількість учнів	% учнів
Початковий	0	0	0	0
Середній	3	≈ 33,33	3	≈ 33,33
Достатній	4	≈ 44,44	5	≈ 55,56
Високий	2	≈ 22,22	1	≈ 11,11

Прогностичний етап дослідження характеризується постановкою мети та завдань експерименту, моделюванням методичної складової елективного курсу, основну частину якої становить розробка навчально-методичних матеріалів (конспекти уроків – додаток Б, теми проєктних робіт – додаток В).

Оскільки *організаційний етап* більше стосується координаційної роботи вчителя і закладу освіти на впровадження курсу, доцільно одразу перейти на *практичний етап* експерименту. Даний етап є гармонійною взаємодією учнів, яка бере участь у дослідженні, та вчителя, оскільки у цей час відбувається навчальний процес. Старшокласники у складі експериментальної групи поступово опановували курс відповідно до затвердженого тематичного планування, заняття проводились у

одночасному поєднанні теоретичної і практичної частин. Варто зазначити, що уже на даному етапі проведення дослідження було виявлено, що використання нестандартного підходу до більш глибокого вивчення математичних понять стимулювало учнів на виконання завдань різної складності. Наприкінці впровадженого спецкурсу слухачі виявляли самостійність під час розв’язування задач, виконанні дослідницьких чи проєктних робіт.

Оскільки контрольна група продовжувала навчання за стандартним виглядом, то справедливо, що на *узагальнювальному етапі* опитування щодо рівня сприйняття прослуханого курсу слід проводити лише з учасниками експериментальної групи. Однак, запропонований матеріал дещо відрізнявся складністю у порівнянні з вхідним опитування, адже безпосередньо спрямований на оцінювання впровадження методики. Результати вихідного опитування учнів зі спецкурсу зазначено у вигляді таблиці 3.3.2.

Таблиця 3.3.2

Результати вихідного анкетування експериментальної групи

Рівні навчальних досягнень учнів	Експериментальна група (9 учнів)	
	кількість учнів	% учнів
Початковий	0	0
Середній	1	≈ 11,11
Достатній	4	≈ 44,44
Високий	4	≈ 44,44

Аналізуючи результати таблиці 3.3.2, маємо наступне: учні експериментальної групи, які були учасниками елективного курсу «Інваріанти — математика незмінного в змінному» під час узагальнювального опитування показали значне покращення рівня оволодіння матеріалом, який стосувався прослуханого курсу — зросла

кількість учнів з високим рівнем навчальних досягнень. Це може свідчити про ефективність застосування методики для навчання учнів. Задля підтвердження вищезазначеного висновку, було проведено опитування і серед контрольної групи з використанням матеріалу, орієнтованого на учасників курсу. Виявилось, що більшість учнів володіють недостатньою базою знань стосовно поняття інваріанта та можливостей його застосування, оскільки за результатами опитування число учнів з високим та достатнім рівнями навчальних досягнень знизилось, в той час як кількість учнів з середнім рівнем зростає (див. таблицю 3.3.3).

Таблиця 3.3.3

Результати вихідного анкетування контрольної групи

Рівні навчальних досягнень учнів	Контрольна група (9 учнів)	
	кількість учнів	% учнів
Початковий	0	0
Середній	7	$\approx 77,77$
Достатній	2	$\approx 22,22$
Високий	0	0

Отримані статистичні дані свідчать про те, що впровадження елективних курсів на поглиблене вивчення математичних понять (у нашому випадку – поняття інваріанта) позитивно впливає на якість засвоєння знань, сприяє підвищенню зацікавленості до навчання у учнів, мотивує до самостійності.

ВИСНОВКИ

Відповідно до теми, у даній кваліфікаційній роботі (проєкті) розроблено, аргументовано і експериментально перевірено методику вивчення поняття інваріанта на елективному курсі з математики учнями 10 класу. Дослідження на впровадження спецкурсу «Інваріанти – математика незмінного в змінному» в навчальний план старшокласників дало змогу не лише оцінити ефективність використання різноманітних підходів до вивчення деяких предметних понять, а й показало безпосередній вплив на розвиток пізнавальної активності, підвищення зацікавленості до навчання, розширення границь мислення учнів.

Однією із провідних проблем шкільної математичної освіти залишається недостатньо глибоке вивчення деяких понять, в тому числі поняття інваріанта – вивчення відбувається поверхнево, як частина певної теми. Тому актуальним залишається проблема висвітлення математичних понять для повномірною опанування курсу математики в цілому.

Під час аналізу науково-методичної літератури з'ясовано, що поняття інваріанта багатогранне, оскільки є не лише математичною категорією, а і принципом узагальнення та способом мислення. Можна сказати, що поняття є інструментом для побудови законів збереження.

Зміст методичної розробки елективного курсу орієнтований, перш за все, на розширення знань, умінь і навичок учнів. Крім того, опанування курсу спрямоване на формування вміння знаходити стійке та незмінне в змінному, пошуку головного в другорядному. Поєднання традиційного підходу у навчанні з нестандартним типом подання матеріалу створює умови для збагачення світогляду школярів, пояснює сутність міжпредметних зв'язків.

Робота містить методичні рекомендації, які можуть бути корисними під час організації навчання на базі елективного курсу, де навчання учнів

відбуватиметься поступово, починаючи від інтуїтивного рівня до свідомого застосування вивчених ідей.

Характерною особливістю експериментального курсу є взаємопоеднання теоретичного і практичного підходів вивчення поняття інваріанта: процес навчання супроводжувався розв'язуванням задач, можливістю прояву креативності учнів у ході висування гіпотез, дослідницькою роботою. Комбінація форм, методів і прийомів спрямована не лише на «сухе» прослуховування курсу, а і на розвиток самостійності під час пошуку та виявлення закономірностей.

У ході проведення педагогічного експерименту, на узагальнювальному етапі нами було виявлено, що вивчення математичних понять на курсі за вибором може бути ефективним засобом для:

1. розвитку алгоритмічного, логічного та аналітичного мислення;
2. формування вміння вбачати зв'язок між математичними концепціями та їх практичним застосуванням;
3. інтеграції навчальних предметів;
4. підвищення розуміння цінності науки як елементу пізнання світу.

У свою чергу, реалізація курсів у шкільну програму вимагає від вчителів не лише високої предметної компетентності, а і структуровано правильної методичної підготовки. Особливу увагу слід приділяти підбору матеріалу та формі його представлення, оскільки це напряму впливає на якість сприйняття інформації слухачами курсу. Тому слід врахувати наступне:

- а. зміст повинен бути послідовним і логічним, з поступовим ускладненням вхідного матеріалу;

б. навчальні матеріали повинні відповідати віковим і психологічним характеристикам старшокласників;

с. поєднання теоретичної і практичної складової курсу повинно включати різноплановість організаційних форм навчальної діяльності.

Підсумовуючи, роль вчителя у реалізації курсів полягає у створенні мотиваційного середовища для учнів, в якому освоєння нових знань є не метою, а інструментом опанування навколишнього світу з відмінної від звичної сторони.

Проведене дослідження на оцінку впровадження елективного курсу у зміст навчання математики показало, що сучасна система освіти потребує розгляду варіативної складової навчальних програм. Зокрема, збільшення кількості спецкурсів сприятиме не лише розвитку здібностей учнів, а і адаптує навчальний процес відповідно до вимог, потреб та інтересів його учасників.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. A picture of frustration: Sam Loyd's 15 puzzle – David Richeson: Division by Zero – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: https://divisbyzero.com/2011/03/01/a-picture-of-frustation-sam-loyds-15-puzzle/?utm_source (дата звернення 04.08.2025 рік).
2. Cognitive Or Social Development Of A Child – Online Education Blog – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: <https://web.archive.org/web/20130227031620/http://www.educationguideonline.net/cognitive-or-social-development-of-a-child> (дата звернення 01.08.2025 рік).
3. Dehn Invariant -- from Wolfram MathWorld – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: <https://mathworld.wolfram.com/DehnInvariant.html> (дата звернення 31.07.2025 рік).
4. Gauß, Carl Friedrich: Disquisitiones arithmeticae. Lipsiae: in commissis apud Gerh. Fleischer, Jun., 1801.
5. Invariant – Etymology, Origin & Meaning – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: <https://www.etymonline.com/word/invariant?utm.source> (дата звернення 27.07.2025 рік).
6. Invariant Theory: Cayley and Sylvester (Chapter 34) – Sources in the Development of Mathematics – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: <https://resolve.cambridge.org/core/books/abs/sources-in-the-development-of-mathematics/invariant-theory-cayley-and-sylvester/E7FF5B52D91781F7FBB4E92396906035> (дата звернення 27.07.2025 рік).
7. Invariants – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: <https://yu-dylan.github.io/files/handouts/M3-invariants.pdf?utm.source> (дата звернення 31.07.2025 рік).

8. Jerry Slocum and Dic Sonneveld. The 15 Puzzle. Slocum Puzzle Foundation, Beverley Hills, CA, 2006.
9. Max Dehn: “Über den Rauminhalt”, Mathematische Annalen 55 (1901), no. 3, pages 465 – 478.
10. Notes on the “15” Puzzle on JSTOR – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: <https://www.jstor.org/stable/2369492?mag=square-space-fifteen-puzzle&seq=1> (дата звернення 05.08.2025 рік).
11. The Fifteen Puzzle and Related Puzzles (Supplemental Material for Intro to Modern Algebra) – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: <https://faculty.etsu.edu/beelerr/fifteen-suppl.pdf> (дата звернення 06.08.2025 рік).
12. Wallace – Bolyai – Gerwien Theorem – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: https://www.cut-the-knot.org/do_you_know/Bolyai.shtml (дата звернення 28.07.2025 рік).
13. Бойко Н. В. Формування логічного мислення учнів через ігрові технології // Освіта і суспільство. – 2020.
14. Гук В. Є. Допрофільне навчання: сутність, зміст, технології / В. Є. Гук. // Управління школою. – 2005. – № 11.
15. Даниленко Л. І. Методичні проблеми викладання курсів за вибором у профільній школі. Педагогічний вісник. 2013. №4. С. 22-24.
16. Елективні курси та їх роль в профільному навчанні : метод. вказівки для студентів III курсу ф-ту хімії та фармації спеціальності 014 «Середня освіта (Хімія)» / О. М. Чеботарьов, О. М. Гузенко, О. М. Рахлицька. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2020. – 42 с.
17. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. II. Профільне навчання / Упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. – Х.: Вид-во «Ранок», 2011. – 384 с. – (Факультативи та курси за вибором).

18. Інваріанти. Принцип крайнього – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: <https://www.uzhnu.edu.ua/en/infocentre/get/30238> (дата звернення 09.07.2025 рік).
19. Ковальова, К. (2023) ВИКОРИСТАННЯ ІГРОВИХ МЕТОДІВ НАВЧАННЯ НА ЗАНЯТТЯХ З ІНОЗЕМНОЇ МОВИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ АГРАРНИХ ЗАКЛАДІВ. *Молодий вчений*, 9(21), 81-89.
20. Лекційне заняття на тему: Методика проведення педагогічного експерименту. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: <https://naurok.com.ua/lekciya-na-temu-metodika-provedennya-pedagogichnogo-eksperimentu-127407.html> (дата звернення 27.09.2025 рік).
21. Малафіїк І. В. Дидактика: Навчальний посібник. – К.: Кондор, 2005.
22. Математика як інструмент мислення : навч. – метод. посібник / уклад.: О. О. Бахчеджиоглу, Т. Д. Тимошкевич. – Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2014. – 124 с.
23. Прус А. А. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. К., 1997.
24. Савицька О. С. Особливості впровадження елективних курсів в систему профільної технологічної освіти / О. Савицька // Науковий часопис НПУ імені Н. П. Драгоманова. Серія 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи. – Бердянськ, 2012. - № 31. – С. 217-222.
25. Сарана О. А., Семенець С. П. Нестандартні геометричні задачі: Навчально-методичний посібник. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім.. І. Франка, 2007. – 150 с., іл.
26. Сутність профільного навчання в старшій школі – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: http://umo.edu.ua/images/content/nashi_vydanya/stud_almanah/v_1/43.pdf (дата звернення 01.08.2025 рік).

27. Федак І. В. Розв'язування задач підвищеної складності з математики. Спеціальний курс: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ, 2010. – 100 с.

28. Формування математичної компетентності на уроках математики. Методи навчання математики, що формують набуття математичних компетентностей – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: <https://vseosvita.ua/library/formuvanna-matematichnoi-kompetentnosti-na-urokah-matematikimetodi-navcanna-matematiki-so-formuut-nabutta-matematichnih-kompetentnostey-427507.html> (дата звернення 01.08.2025 рік).

29. Чашечникова О. С. Деякі аспекти формування математичної грамотності учнів. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання математики: матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції. Суми: СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2009.

30. Чосік Л. Я., Мандзюк С. Я. Використання дидактичних ігор з метою активізації навчально-пізнавальної діяльності молодших школярів з математики / Л. Чосік, С. Мандзюк // Науковий вісник СНУ імені Лесі Українки. Серія: Педагогічні науки. – Луцьк, 2017. – № 2(351). – С. 40-44.

**Анкета на виявлення рівня обізнаності учнів з поняттям
інваріанта (діагностичний етап експерименту на впровадження
методики вивчення математичних понять на елективному курсі)**

Інструкція для учня.

Анкета складається з декількох частин: вхідні дані, забір самооцінювання і короткі завдання для перевірки. Прохання відповідати абсолютно чесно задля аналізу та порівняльної характеристики результатів.

Час на виконання: 25-30 хвилин.

I частина (загальні відомості):

1. *Прізвище, ім'я:* _____
2. *Чи раніше були учасниками елективних курсів з математики?*

Так / ні

3. *Як би Ви оцінили достатність знань задля опанування курсу на поглиблення змісту шкільної математики?* Низький рівень / середній рівень / достатній рівень / високий рівень

II частина (самооцінювання відповідно до тематики курсу):

4. *Чи цікавитесь Ви нестандартними задачами з математики?*

Так / ні

5. *Чи зустрічались Ви з поняттям «інваріант» на уроках математики?* Ніколи не чув (чула) / Чув (чула) декілька разів / Чув (чула), але не маю розуміння сутності поняття / Чув (чула) і розумію суть поняття

6. *Наскільки Ви впевнені у власному умінні віднаходити певні закономірності у математичних задачах? (оцінити по шкалі від 1 до 5, де 1 – не впевнений (не впевнена зовсім), 5 – цілком впевнений (впевнена) 1 / 2 / 3 / 4 / 5.*

7. Чи доводилось Вам раніше зустрічатись з ігровими методами на уроках математики? Яке у Вас ставлення до такого підходу у навчанні? (підкреслити відповідне) Зустрічався / зустрічалась, подобається / не подобається, частково подобаються / частково не подобаються

8. Чи готові Ви працювати самостійно над певними пошуковими завданнями? Так / ні / скоріше так / скоріше ні.

III частина (тести + завдання на відкриту відповідь):

9. Яка з наведених характеристик найкраще відповідає визначенню поняття інваріанта?

- А) Значення, що змінюється при перетворенні.
- Б) Значення, яке залишається незмінним при певних перетвореннях.
- В) Формула обчислення функцій.
- Г) Властивість парних чисел.

10. При перестановці елементів набору $\{1, 2, 3, 4\}$ сума елементів:

- А) Змінюється.
- Б) Залишається незмінною.
- В) Інколи змінюється.
- Г) Результат залежить від порядку елементів.

11. Яке з тверджень правильне щодо гри «15» (без використання порожньої клітинки):

- А) Будь-яку перестановку плиток можна отримати послідовністю зсувів.
- Б) Існують перестановки, які неможливо отримати, і які пов'язані з поняттям парності.
- В) Розв'язність залежить виключно від кількості кроків.

12. При паралельному перенесенні фігури на площині її площа:

- А) Змінюється.

Б) Залишається незмінною.

В) Змінюється при повороті.

Г) Залежить від умов перенесення.

13. Якщо при виконанні послідовних операцій на числах деяка величина завжди збільшується або ж залишається тією ж – це приклад:

А) Інваріанта.

Б) Напівінваріанта.

В) Змінної.

Г) Похідної.

14. Наведіть приклад числового інваріанта.

15. Наведіть приклад геометричного інваріанта.

**Анкета (підсумкове опитування узагальнювального етапу
експерименту на впровадження методики вивчення математичних
понять на елективному курсі)**

Мета: оцінка впливу прослуханого елективного курсу «Інваріанти – математика незмінного в змінному».

I частина (загальні відомості)

1. Прізвище, ім'я: _____

2. Чи брали Ви участь у заняттях елективного курсу? Так / ні

3. Як би Ви оцінили власне розуміння поняття «інваріант»?

Орієнтуюсь у понятті / не орієнтуюсь у понятті

II частина (самооцінювання)

4. Чи цікаво Вам було працювати на елективному курсі на вивчення поняття інваріанта? Так / частково / ні

5. Який тип інваріантів Вам видався більш складним і потребував детальнішого розгляду? Алгебраїчні інваріанти / Геометричні інваріанти / Обидва типи

6. Чи здатні Ви пояснити іншому учневі суть поняття «інваріант»? (оцінити від 1 до 5, де 1 – не здатний/ не здатна пояснити, 5 – можу впевнено пояснити) 1 / 2 / 3 / 4 / 5

7. Який вид завдання був найбільш ґрунтовним у використанні на курсі? Ігрові ситуації / Геометричні побудови / Дослідницькі завдання

III частина (тести + завдання на відкриті відповіді)

8. З колоди, яка налічує 36 карт, по черзі виймають карти. Чи може кількість червоних і чорних карт у вибраних змінюватись, якщо в кінці маємо однакову кількість.

Яка величина є інваріантом у цій задачі?

А) Кількість витягнутих карт.

Б) Різниця кількості карт за кольором.

В) Кількість червоних карт.

9. У грі «15» парність перестановки визначається _____.

10. При центральній симетрії трикутника площа та периметр:

А) Змінюються.

Б) Залишаються незмінними.

В) Змінюється тільки периметр.

Г) Змінюється тільки площа.

11. Наведіть приклад задачі на використання ідеї інваріантності.

12. Опишіть алгоритм визначення розв'язності заданої конфігурації гри «15».

Конспект уроку на тему «Перестановки в грі «15». Типи конфігурацій. Розв'язні і нерозв'язні конфігурації»

Мета: ознайомити учнів із математичним підґрунтям гри «15»;; сформулювати уявлення про інваріантність парності перестановки; навчитись визначати розв'язні і нерозв'язні конфігурації; розвивати логічне, креативне мислення, аналізувати і застосовувати набуті знання на практиці.

Тип уроку: комбінований (з елементами дослідницької діяльності).

Хід уроку

I. Організаційний етап – привітання з учнями, налаштування на роботу.

II. Мотивація навчальної діяльності – демонстрація гри, представлення конфігурацій (розв'язна і нерозв'язна). Проблемне питання: «Чи можна будь-яке розташування, на Вашу думку, перетворити у правильний порядок, якщо робити певну кількість ходів?»

III. Актуалізація опорних знань – фронтальне опитування.

Питання:

1. Що таке перестановка?
2. Скільки існує перестановок для 4 елементів?
3. Як визначають парність перестановки?
4. Що таке інверсія?

IV. Формування нових знань

1. Математична модель гри «15» (поле з 16 клітинок, одна з яких – порожня).

2. Поняття інверсії; взаємозв'язок кількості інверсій і конфігурації гри.
3. Інваріант гри (поняття парності/непарності суми).

V. Формування вмінь – завдання на підрахунок кількості інверсій, та узагальнення щодо розв'язності вхідної конфігурації.

VI. Підбиття підсумків уроку

Підсумкові питання:

1. Що описує поняття перестановки у грі «15»?
2. Який інваріант діє у грі «15»?
3. Як визначити розв'язність певних конфігурацій?
4. Чому не всі конфігурації розв'язні?

VII. Домашнє завдання

Примітки

Конспект уроку на тему «Розв'язування задач» (геометричний блок)

Мета: формувати у учнів уміння аналізувати геометричні фігури, користуватись принципом інваріантності під час розв'язування геометричних задач; розвивати просторове мислення, логіку та уважність.

Тип уроку: комбінований.

Хід уроку

I. Організаційний етап – привітання, коротке налаштування на роботу.

II. Мотивація навчальної діяльності – демонстрація *Задачі 1* (рис. Б.1), поява перших припущень учнів.

Задача 1. Яка фігура є зайвою?

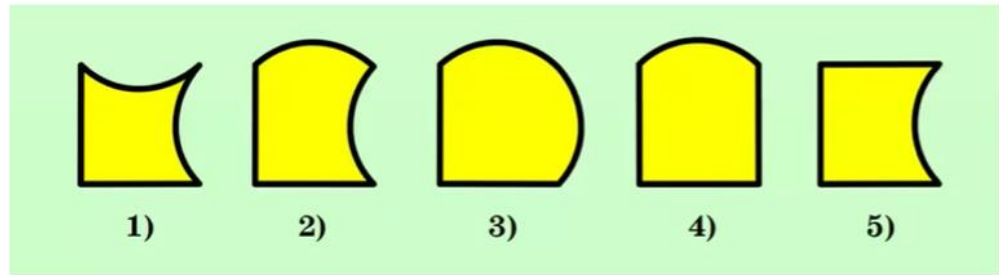


Рисунок Б.1 – Задача 1

III. Актуалізація опорних знань – питання про поняття випуклих / увігнутих частин фігури, надання допоміжного пояснення до задачі (випуклу частину позначити «+1, увігнуту «-1»).

IV. Формування знань – розв’язування Задачі 1.

V. Формування вмінь – демонстрація Задачі 2 (рис. Б.2) та її розв’язування.

Задача 2. Яка фігура є зайвою?

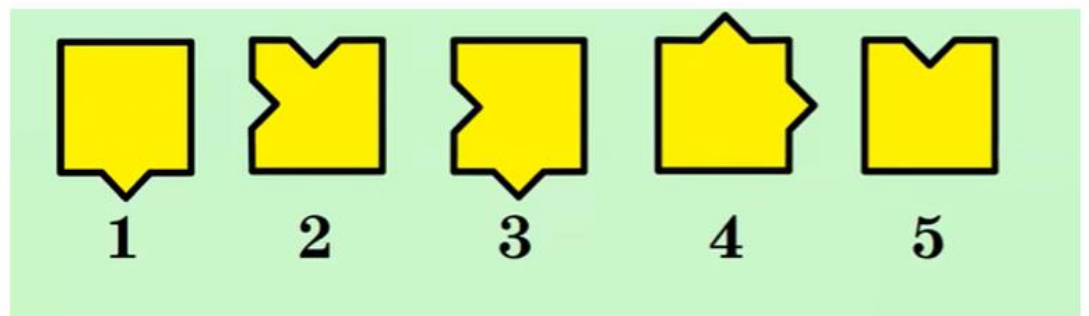


Рисунок Б.2 – Задача 2

VI. Підбиття підсумків уроку – бесіда рефлексія, узагальнення вчителя.

VII. Домашнє завдання

Примітки

Тематика дослідницьких (проектних) робіт під час опанування курсу «Інваріанти – математика незмінного в змінному»

1. «Ханойські вежі».
2. «Рубік – куб».
3. Інваріанти в музиці.
4. Інваріанти в комбінаторних задачах.
5. Інваріанти в симетричних орнаментах.
6. Інваріантні властивості трикутника.
7. Питання нерозв'язності деяких конфігурацій в грі «15».
8. Інваріанти на шаховій дошці.
9. Інваріанти і графічний дизайн.
10. Цикли природи як інваріантна характеристика.