

Міністерство освіти і науки України
Херсонський державний університет
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ВИЩА АЛГЕБРА ТА ТЕОРІЯ ЧИСЕЛ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ
МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна робота (проект)
на здобуття ступеня вищої освіти “бакалавр”

Виконала: студентка 4-го курсу, 12-421 групи
Спеціальності: 014 Середня освіта
Спеціалізація: 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта
(математика)» першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти

Нестеренко Ольга Борисівна

Керівник кандидатка фізико-математичних
наук, доцентка Котова Ольга Володимирівна

Рецензент доцентка кафедри природничо-
наукової підготовки Херсонської державної
морської академії

Спичак Т.С.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ВИЩОЇ АЛГЕБРИ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ.....	6
1.1. Основні поняття вищої алгебри та їх місце у шкільному курсі	6
1.2. Змістове наповнення процесу вивчення вищої алгебри в шкільному курсі математики.....	8
1.3. Порівняльний аналіз викладу матеріалу в різних підручниках	16
РОЗДІЛ 2. ТЕОРІЯ ЧИСЕЛ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ.....	20
2.1. Основи теорії чисел у шкільному курсі математики	20
2.2. Змістове наповнення процесу вивчення теорії чисел в шкільному курсі математики.....	22
2.3. Порівняльний аналіз викладу матеріалу в різних підручниках.....	33
ВИСНОВКИ	37
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	39
ДОДАТКИ.....	43
Додаток А	43
Додаток Б.....	46
Додаток В	50
Додаток Г	53
Додаток Д	58

ВСТУП

У сучасних умовах розвитку суспільства, коли інформаційні технології, криптографія, штучний інтелект та математичне моделювання відіграють дедалі важливішу роль, вивчення вищої алгебри та теорії чисел у шкільному курсі математики набуває особливого значення. Ці математичні дисципліни не лише сприяють розвитку логічного та абстрактного мислення, а й формують навички аналізу та вирішення складних задач, що є необхідними для успішної професійної діяльності в багатьох сучасних галузях науки та техніки.

Вища алгебра закладає основи розуміння структури математичних об'єктів, таких як групи, кільця, поля та матриці. Її елементи активно застосовуються в комп'ютерній графіці, теорії кодування та обробці великих обсягів даних. Водночас теорія чисел є фундаментальною складовою багатьох сучасних технологій, особливо в криптографії та кібербезпеці, що є критично важливими в умовах цифрового суспільства.

Інтеграція елементів цих дисциплін у шкільний курс математики дозволяє не лише формувати математичну грамотність, а й розвивати здатність учнів до дослідницької діяльності, критичного мислення та розв'язання нестандартних задач. Вивчення вищої алгебри та теорії чисел відкриває широкі можливості для подальшого навчання, сприяє підготовці до професій у сфері інформаційних технологій, інженерії, економіки та природничих наук.

Таким чином, враховуючи виклики та потреби сучасного суспільства, важливо приділяти належну увагу вивченню вищої алгебри та теорії чисел у шкільному курсі математики, що сприятиме не лише інтелектуальному розвитку учнів, а й підготовці їх до майбутнього у високотехнологічному світі.

Вивчення вищої алгебри та теорії чисел у шкільному курсі математики відіграє важливу роль у формуванні логічного мислення, розвитку аналітичних навичок та розуміння фундаментальних математичних концепцій. Ці розділи математики є не лише основою для подальшого

вивчення складніших тем, а й допомагають учням оволодіти методами доведень, аналізу числових структур і властивостей математичних об'єктів.

Вища алгебра охоплює такі ключові поняття, як групи, кільця, поля, матриці та лінійні перетворення. Хоча ці теми зазвичай вивчаються у вищій школі, їхні окремі аспекти активно використовуються у шкільній математиці, зокрема в темах, пов'язаних із рівняннями, многочленами та симетріями. Вивчення алгебраїчних структур дозволяє глибше розуміти закономірності числових операцій та розширює математичний світогляд учнів.

Теорія чисел, у свою чергу, є однією з найдавніших і водночас найсучасніших галузей математики. Її основи закладаються ще в початковій школі через вивчення властивостей натуральних чисел, дільників, простих чисел і подільності. Розширення знань у цьому напрямку сприяє розумінню алгоритмів знаходження найбільшого спільного дільника, розкладу чисел на прості множники, модульної арифметики та їхнього застосування в сучасних технологіях, зокрема в криптографії.

Таким чином, інтеграція елементів вищої алгебри та теорії чисел у шкільний курс математики сприяє розвитку математичної культури, підготовці учнів до подальших наукових досліджень та розширенню їхніх можливостей у застосуванні математичних методів у реальному житті.

Мета дослідження – проаналізувати роль елементів вищої алгебри та теорії чисел у шкільному курсі математики, визначити їх значення для формування математичної компетентності учнів, а також розглянути методичні аспекти ефективного викладання цих тем.

Об'єкт дослідження – процес вивчення елементів вищої алгебри та теорії чисел у шкільному курсі математики.

Предмет дослідження – змістове наповнення, методичні підходи та особливості викладання тем, пов'язаних із вищою алгеброю та теорією чисел, у шкільних підручниках та навчальних програмах.

Завдання дослідження:

1. Проаналізувати основні поняття вищої алгебри та теорії чисел та їх місце у шкільному курсі математики.
2. Дослідити методичні підходи до викладання елементів вищої алгебри та теорії чисел у загальноосвітніх навчальних закладах.
3. Здійснити порівняльний аналіз змістового наповнення розділів, пов'язаних із вищою алгеброю та теорією чисел, у різних шкільних підручниках.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, додатків.

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ВИЩОЇ АЛГЕБРИ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

1.1. Основні поняття вищої алгебри та їх місце у шкільному курсі

Вища алгебра – це розділ математики, який вивчає алгебраїчні структури, операції над ними, а також методи розв’язання рівнянь різних ступенів. Основними поняттями цієї дисципліни є групи, кільця, поля, матриці, визначники, системи рівнянь, многочлени та теорія чисел [15].

Незважаючи на те, що повний курс вищої алгебри вивчається у вищих навчальних закладах, його окремі елементи інтегровані у шкільний курс математики. Це дозволяє учням ознайомитися з фундаментальними алгебраїчними концепціями, які використовуються в різних галузях науки і техніки.

Шкільний курс математики містить такі алгебраїчні поняття, які є частиною вищої алгебри:

- Многочлени та їх основні операції. Учні вивчають додавання, віднімання, множення та розкладання многочленів на множники.
- Раціональні, ірраціональні та комплексні числа. Поняття комплексних чисел поступово вводиться через необхідність розв’язку квадратних рівнянь.
- Корені многочленів та теорема Вієта. Ця тема допомагає учням зрозуміти взаємозв’язок між коефіцієнтами та коренями рівнянь.
- Методи розв’язку рівнянь та систем рівнянь. Вищі алгебраїчні методи дозволяють розв’язувати рівняння вищих ступенів та аналізувати їхні корені.
- Елементи лінійної алгебри (матриці та визначники). Використовуються у профільних класах або спеціалізованих математичних курсах [2;13].

Вища алгебра у шкільному курсі математики виконує кілька важливих функцій:

1. Формування логічного мислення. Робота з алгебраїчними структурами розвиває здатність аналізувати, узагальнювати та абстрагувати математичні об'єкти.

2. Підготовка до вивчення складніших тем. Розуміння алгебраїчних виразів, рівнянь та систем рівнянь є основою для подальшого засвоєння вищої математики.

3. Практичне застосування математичних методів. Алгебра широко використовується у фізиці, економіці, програмуванні, інженерії та багатьох інших дисциплінах.

4. Розвиток навичок аналізу та прогнозування. Використання алгебраїчних методів у реальних завданнях допомагає моделювати різні процеси та ухвалювати оптимальні рішення [11].

Таким чином, елементи вищої алгебри є важливими для розвитку математичної грамотності учнів і допомагають підготувати їх до подальшого навчання у технічних та природничих науках.

Викладання елементів вищої алгебри в школі має свою специфіку, оскільки деякі поняття є досить складними для сприйняття учнями. Методичні підходи повинні бути адаптовані до рівня підготовки школярів, забезпечуючи поступове введення теоретичних знань та їхнє практичне застосування.

1. Поетапне ускладнення матеріалу

Учні спочатку ознайомлюються з простими алгебраїчними операціями, такими як додавання і множення одночленів та многочленів. Далі матеріал ускладнюється через введення методів розв'язання рівнянь вищих ступенів, роботи з комплексними числами та аналізу поведінки многочленів

2. Інтерактивні методи навчання

Використання сучасних технологій робить навчальний процес більш наочним і доступним. Зокрема, можна використовувати:

- Онлайн-симулятори для побудови графіків функцій;
- Візуалізатори для демонстрації коренів рівнянь;
- Цифрові платформи для інтерактивного розв'язання рівнянь [9].

3. Застосування практичних прикладів

Алгебраїчні методи можна пояснювати через реальні ситуації, такі як:

- Обчислення складних процентів у банківській справі;
- Моделювання фізичних явищ, наприклад, коливальних процесів;
- Використання у криптографії та комп'ютерних алгоритмах [31].

4. Робота в групах та проєктна діяльність

Учні можуть виконувати дослідницькі проєкти, наприклад:

- Дослідження методів розв'язку рівнянь у різні історичні періоди;
- Порівняння різних способів розкладання многочленів;
- Аналіз алгебраїчних моделей, що використовуються у сучасній

науці [10].

5. Використання проблемного навчання. Цей метод передбачає постановку задачі, розв'язання якої вимагає знання алгебраїчних методів. Наприклад, учням можна запропонувати задачу на визначення кількості розв'язків рівняння залежно від значень параметрів [1].

Елементи вищої алгебри відіграють важливу роль у шкільному курсі математики, оскільки сприяють розвитку логічного мислення, формуванню математичної культури та підготовці учнів до подальшого навчання у вищих навчальних закладах.

Методика викладання алгебраїчних понять у школі повинна базуватися на принципах поступового ускладнення матеріалу, використання сучасних технологій, залучення практичних завдань та інтерактивних методів навчання.

Завдяки ефективному викладанню елементів вищої алгебри учні отримують не лише теоретичні знання, а й уміння застосовувати їх у різних сферах науки та техніки, що є важливим для їхнього подальшого академічного та професійного розвитку.

1.2. Змістове наповнення процесу вивчення вищої алгебри в шкільному курсі математики

Вивчення елементів вищої алгебри у школі охоплює широкий спектр тем, які є основою для подальшого засвоєння складніших математичних понять. У цьому розділі розглянемо основні теми, що входять до шкільного курсу математики, їх змістове наповнення, а також наведемо типові завдання до кожної з них.

1. Вирази, тотожності, многочлени та їх перетворення

Алгебраїчні вирази — це математичні вирази, що складаються з чисел, змінних та арифметичних операцій. У шкільному курсі алгебри ми розглядаємо кілька видів виразів:

- Многочлени (поліноми) — це вирази, які складаються із суми кількох одночленів, наприклад [12]:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

де a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 — це коефіцієнти, а x — змінна.

- Тотожності — це рівності, які завжди правильні для всіх значень змінних. Наприклад:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

або

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Тотожності використовуються для спрощення виразів та розв'язування рівнянь.

- Дробово-раціональні вирази — це вирази у вигляді відношення двох многочленів [14]:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Де $P(x)$ та $Q(x)$ — многочлени. Для таких виразів важливо знати правила множення, додавання та скорочення.

Перетворення виразів:

- Спростування — це зменшення виразу до найпростішої форми. Наприклад, замінюючи вирази за допомогою формул скороченого множення.
- Використання формул скороченого множення [15]:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

2. Рівняння та нерівності: методи розв'язання

• Рівняння — це математичне твердження, яке містить змінну і рівність між двома виразами. Основні типи рівнянь:

○ Лінійні рівняння:

$$ax + b = 0$$

Розв'язок знаходиться шляхом ізоляції змінної x :

$$x = -\frac{b}{a}$$

○ Квадратні рівняння:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Для розв'язку використовують дискримінант:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Якщо $\Delta > 0$, рівняння має два розв'язки. Якщо $\Delta = 0$, рівняння має один розв'язок. Якщо $\Delta < 0$, розв'язків немає.

○ Рівняння третього та четвертого степенів:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ та } ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Основними методами розв'язування даних рівнянь є:

- винесення спільного множника за дужки;
- застосування схеми Горнера;
- використання теореми Вієта;
- заміна змінної;
- графічний метод.

○ Ірраціональні рівняння. Рівняння, що містять корені, наприклад [27]:

$$\sqrt{x + 2} = 3$$

Для розв'язку такого рівняння спершу позбуваються кореня, шляхом піднесення обох частин рівняння до квадрату:

$$x + 2 = 9 \Rightarrow x = 7$$

○ Логарифмічні рівняння. Рівняння виглядає як $\log_b(x) = y$, розв'язок виглядає так [3]:

$$x = b^y$$

• Нерівності — це математичні вирази, які порівнюють два вирази, використовуючи знаки більше або менше:

○ Лінійні нерівності мають вигляд:

$$ax + b > 0$$

Розв'язок такої нерівності визначається за допомогою лінійних перетворень, подібних до тих, що застосовуються для лінійних рівнянь.

○ Квадратні нерівності мають вигляд:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

Для таких нерівностей використовують методи аналізу знаків функції та її графіка.

○ Нерівності з модулями [10]. Наприклад:

$$|x - 3| > 2$$

Для таких нерівностей розв'язок включає дві умови:

$$x - 3 > 2 \text{ або } x - 3 < -2$$

3. Системи рівнянь: методи Крамера, Гауса

• Системи рівнянь складаються з кількох рівнянь, що мають одні й ті самі невідомі. Наприклад:

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

Основні методи розв'язування систем:

○ Метод підстановки — одне з рівнянь виражається через одну змінну, а потім підставляється в інше рівняння.

○ Метод додавання (або елімінації) — рівняння додаються або віднімаються, щоб спростити розв'язок.

○ Метод Крамера використовується для розв'язання лінійних систем, де кожна змінна визначається через визначники матриць.

- Метод Гауса. Система рівнянь перетворюється до верхньої трикутної форми для зручнішого розв'язку [6].

4. Матриці та визначники

Матриці — це таблиці чисел, що застосовуються для розв'язування систем рівнянь. Основні операції з матрицями:

- Додавання та множення матриць - це операції, які використовуються для комбінування або перетворення даних.

- Обчислення визначника матриці. Для матриць порядку 2×2 визначник обчислюється як [35;39]:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

- Визначники застосовуються для перевірки існування розв'язку системи рівнянь (якщо визначник матриці не дорівнює нулю, система має єдиний розв'язок).

Зазначені методи — Крамера, Гауса, а також вивчення понять матриці, обчислення визначників, застосування їх для розв'язання систем лінійних рівнянь здійснюється у межах навчальних програм спецкурсів з алгебри для 10–11 класів [2]

5. Комплексні числа

- Комплексні числа — це числа, що включають уявну одиницю i , де $i^2 = -1$. Комплексне число має вигляд [13]:

$$z = a + bi$$

де a — дійсна частина, а b — уявна частина числа.

- Операції з комплексними числами:

- Додавання та множення комплексних чисел здійснюється за стандартними правилами для додавання та множення, комбінуючи дійсні та уявні частини.

- Комплексно спряжене число для $z = a + bi$ є $z^* = a - bi$.

- Тригонометрична форма. Комплексне число можна представити у вигляді [19]:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

де r — модуль числа, а θ — аргумент (кут) числа.

Ці теми складають основу для вивчення математичних дисциплін та розвитку логічного мислення. Їх засвоєння дозволяє учням вирішувати як прості, так і складніші задачі, а також закладає фундамент для подальших математичних досліджень.

Розглянемо приклади типових завдань за кожною з зазначених вище тем, які входять до шкільного курсу математики та містять елементи вищої алгебри.

1. Вирази, тотожності, многочлени та їх перетворення

1.1. Спрощення виразів:

1. Спростіть вираз:

$$\frac{x^2-4}{x-2} + \frac{x^2-9}{x+3}$$

2. Використовуючи формули скороченого множення, розкладіть на множники:

$$x^4 - 16$$

1.2. Дробово-раціональні вирази:

3. Скоротіть дріб:

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$$

4. Знайдіть область допустимих значень виразу:

$$\frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

2. Рівняння та нерівності

2.1. Квадратні рівняння:

1. Розв'яжіть рівняння:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

2. Розв'яжіть рівняння методом розкладу на множники:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

2.2. Рівняння третього та четвертого степенів:

3. Розв'яжіть рівняння:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

4. Розв'яжіть рівняння методом заміни змінної:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

2.3. Ірраціональні рівняння:

5. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{x+4} = x - 2$$

2.4. Логарифмічні рівняння:

6. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_3(x-2) + \log_3(x+2) = 1$$

2.4. Нерівності:

7. Розв'яжіть нерівність:

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

8. Розв'яжіть нерівність:

$$|x - 2| > 3$$

3. Системи рівнянь

3.1. Лінійні системи рівнянь:

1. Розв'яжіть систему рівнянь методом підстановки:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

3.2. Метод Крамера:

2. Використовуючи метод Крамера, розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

3.3. Метод Гауса:

3. Розв'яжіть систему рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

4. Матриці та визначники

4.1. Обчислення визначників:

1. Обчисліть визначник матриці:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4d \end{vmatrix}$$

4.2. Обернена матриця:

2. Знайдіть обернену матрицю до:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Комплексні числа

5.1. Арифметичні операції з комплексними числами:

1. Виконайте дії:

$$(3 + 2i) + (4 - 5i)$$

2. Обчисліть добуток комплексних чисел:

$$(2 + i)(1 - 3i)$$

5.2. Модуль і аргумент комплексного числа:

3. Знайдіть модуль числа:

$$|4 + 3i|$$

4. Переведіть число $1+i$ у тригонометричну форму.

Додаткові завдання підвищеної складності

1. Розв'яжіть рівняння:

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0$$

2. Доведіть тотожність:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$$

3. Використовуючи метод Гауса, розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 14 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

Таким чином, елементи вищої алгебри, які входять у шкільний курс математики, є основою для подальшого вивчення математичних дисциплін. Розгляд тем, таких як вирази, рівняння, системи рівнянь, матриці та комплексні числа, дозволяє учням розвинути навички логічного мислення та аналітичного підходу до розв'язку задач.

Вивчення цих тем має відбуватися поступово, із залученням інтерактивних методів навчання та практичних завдань, що сприятиме кращому розумінню матеріалу та його застосуванню на практиці.

1.3. Порівняльний аналіз викладу матеріалу в різних підручниках

Проведемо аналіз викладу матеріалу в різних підручниках з алгебри.

Підручник Бевза Г.П., Бевза В.Г., Владімірової Н.Г. (Алгебра і початок аналізу. Профільний рівень) для 11 класу охоплює основні теми алгебри і початків аналізу, зокрема [3]:

- Функції та їх властивості. У цій темі подано пояснення поняття функції, дослідження їх властивостей (область визначення, область значень, парність і непарність функцій, монотонність), а також характеристика функцій за допомогою їх графіків.

- Степеневі та тригонометричні функції. Розглядаються функції виду $f(x)=x^n$, їх властивості та графіки. Задається теоретичне пояснення та приклади для кожного виду функції [3].

- Методи розв'язування рівнянь. Підручник охоплює ключові методи розв'язування рівнянь, зокрема лінійні, квадратні, та більш складні рівняння з параметрами.

- Тотожності та перетворення. Є достатньо матеріалу для розв'язування різноманітних задач на тотожності та спрощення виразів.

- Рівняння та нерівності. Значна увага приділяється методам розв'язування нерівностей, включаючи лінійні, квадратні та раціональні нерівності.

Матеріал викладається абстрактно-індуктивним методом, що сприяє розвитку самостійного мислення учнів. Використовуються наочні приклади, де кожна теорема та правило супроводжується прикладами розв'язування.

Підручник поділений на 6 розділів, кожен з яких містить теоретичний матеріал, задачі для самоконтролю та творчі завдання. Завдання для

самостійного розв'язування мають різну складність і є добре структурованими. Задачі розподілені на рівні: А (простий) і В (складний), що дає можливість працювати з різними рівнями підготовки учнів.

Підручник має диференційовану систему задач, що дозволяє учням працювати на різних етапах освоєння матеріалу:

- Простір задач з рівнями складності.
- Після кожного розділу є завдання для самоперевірки, а також творчі завдання, що дозволяють учням не тільки закріпити знання, але й розвинути креативність у використанні математичних понять у реальному житті.

2. Підручник Істера О.С., Єргіної О.В. (Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень) для 11 класу [13].

Цей підручник зосереджений на більш детальному поясненні функцій і їх властивостей. Основні теми:

- Функції та їх графіки. У підручнику подано опис різних видів функцій (степеневі, тригонометричні) з акцентом на побудову їх графіків. Велика увага приділяється аналізу функцій за допомогою графіків, що дає можливість учням краще розуміти математичні поняття.
- Лінійні та квадратні рівняння. Тема включає вивчення методів розв'язування лінійних та квадратних рівнянь, а також підхід до нерівностей.
- Завдання для самоконтролю та систематизації. У підручнику надано значну кількість завдань для перевірки розуміння матеріалу. Також включено завдання з «життєвої математики», що дозволяє показати практичне застосування алгебри в реальних ситуаціях.

У підручнику навчальний матеріал подається з використанням абстрактно-індуктивного методу, де нові знання спершу пояснюються теоретично, а потім підтверджуються на практиці через рішення задач. Важливе значення має розв'язання прикладів, що дозволяють краще зрозуміти матеріал.

Підручник поділяється на 6 розділів, з яких три присвячені алгебрі, а три — геометрії. Завдання для самоконтролю допомагають перевірити рівень розуміння учнями пройденого матеріалу [13].

Завдання в підручнику не диференційовані за складністю, але вони розміщені таким чином, що кожне наступне завдання є складнішим за попереднє. Підручник містить практичні завдання та завдання на систематизацію матеріалу.

3. Підручник Мерзляка А.Г., Номіровського Д.А., Полонського В.Б., Якіра М.С. (Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень) для 11 класу

Цей підручник охоплює велику кількість математичних тем, від простих рівнянь до складних функцій і їх властивостей [27]:

- Функції та їх властивості. У підручнику розглядаються всі основні види функцій, такі як степеневі, тригонометричні, а також методи їх побудови.
- Методи розв'язування рівнянь та нерівностей. Охоплюються методи розв'язування різних типів рівнянь (лінійні, квадратні, показникові, логарифмічні).
- Системи рівнянь. Викладаються методи Крамера та Гауса для розв'язування систем лінійних рівнянь [27].

Цей підручник також використовує абстрактно-індуктивний метод з акцентом на теоретичні та практичні завдання для перевірки знань. Велику увагу приділено детальному поясненню теорем та прикладів.

Підручник складається з 5 розділів, які зосереджені тільки на алгебрі. Кожен розділ має свою структуру з визначеннями, теоремами та доказами, а також завданнями для самоперевірки.

Завдання до кожного параграфа мають диференційовану складність, а також включають завдання для самоперевірки, що дають змогу учням закріплювати та перевіряти отримані знання. Система задач добре розкриває теоретичний матеріал, дозволяючи учням практично застосувати отримані знання.

Підручник за авторством Бевза Г.П., Бевза В.Г., Владімірової Н.Г. має збалансований підхід до викладу теорії та практики. Задачі добре структуровані та мають різну складність, що дозволяє охопити різні рівні учнів.

Автори Істер О.С., Єргіна О.В. більше акцентують увагу на побудові графіків та функцій, завдання допомагають активно застосовувати математичні знання в практиці. Тема «життєва математика» дозволяє зв'язати теоретичні знання з реальним життям.

У підручнику з алгебри авторів Мерзляк А.Г., Номіровського Д.А., Полонського В.Б., Якір М.С подано детальну систему задач, зокрема завдання для самоперевірки та зворотний зв'язок через практичні завдання. Добре охоплює всі основні теми алгебри та початків аналізу, включаючи складні рівняння та системи.

Кожен з підручників має свої особливості в подачі матеріалу, що дає можливість вибору відповідно до потреб класу.

РОЗДІЛ 2. ТЕОРІЯ ЧИСЕЛ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

2.1. Основи теорії чисел у шкільному курсі математики

Теорія чисел є одним із фундаментальних розділів математики, що вивчає властивості цілих чисел, їх розклади та співвідношення. Хоча повний курс теорії чисел традиційно вивчається у вищих навчальних закладах, її основні елементи інтегровані у шкільний курс математики. Це сприяє розвитку логічного мислення, навичок аналізу числових структур і застосування математичних методів у реальних умовах.

У шкільній програмі теорія чисел представлена такими основними темами:

- Прості та складені числа. Учні знайомляться з поняттями простих чисел та їх роллю у розкладі складених чисел.
- Ознаки подільності. Вивчаються правила подільності на 2, 3, 5, 9, 10 та інші числа, що допомагає при спрощенні виразів і розв’язанні рівнянь.
- Розклад числа на прості множники. Це один із базових методів теорії чисел, який знаходить застосування в криптографії.
- Найбільший спільний дільник (НСД) і найменше спільне кратне (НСК). Використовуються для розв’язання задач на дроби, пропорції та рівняння з цілими числами.
- Решта від ділення і модульна арифметика. Ця тема вводить учнів у світ залишкових класів і використовується в програмуванні.
- Основна теорема арифметики. Формує розуміння того, що будь-яке натуральне число можна подати у вигляді добутку простих чисел єдиним способом.
- Формули та рівняння Діофанта. Навчають пошуку цілих розв’язків рівнянь і демонструють зв’язок між алгеброю та теорією чисел [6].

Розглянемо основні методичні підходи, які доцільно використовувати в процесі викладання теорії чисел у школі

1. Поступове ускладнення матеріалу. Спочатку учні знайомляться з простими поняттями подільності чисел, а далі поступово переходять до складніших тем, таких як алгоритм Евкліда для знаходження НСД чи рівняння в модульній арифметиці.

2. Використання історичного підходу. Учням пропонується ознайомлення з історією розвитку теорії чисел, зокрема відкриттями Евкліда, Ферма, Гауса, Ейлера, що сприяє зацікавленню предметом [39].

3. Використання цифрових технологій. Сучасні платформи та програми дозволяють:

- Візуалізувати розклад чисел на множники;
- Будувати графіки числових функцій;
- Виконувати перевірку чисел на простоту.

4. Практичне застосування. Учням пропонується розв'язання задач, що мають реальне застосування, наприклад:

- Використання чисел Фібоначчі у природі та фінансах;
- Застосування теорії чисел у криптографії та безпеці даних;
- Моделювання періодичних процесів за допомогою конгруенцій

[7].

5. Робота в групах та проектна діяльність. Завдання для дослідницьких проєктів можуть включати:

- Аналіз найвідоміших нерозв'язаних проблем теорії чисел (гіпотеза Рімана, найбільше просте число, проблеми доведення нескінченності простих чисел у певних послідовностях) [40];

- Вивчення зв'язку між числовими послідовностями та реальними явищами (золотий переріз, числова гармонія в музиці тощо);

- Дослідження алгоритмів шифрування та їх основи в теорії чисел.

Вивчення елементів теорії чисел виконує важливу роль у розвитку математичного мислення учнів, що полягає у:

1. Розвитку логічного мислення. Доведення теорем і розв'язання рівнянь стимулюють аналітичне мислення.

2. Формуванні навичок роботи з абстрактними поняттями. Теорія чисел допомагає учням розуміти фундаментальні закони математики.
3. Підготовці до вищої математики. Розуміння властивостей чисел необхідне для вивчення алгебри, комбінаторики, математичного аналізу.
4. Можливості до практичного застосування. Методи теорії чисел широко використовуються в комп'ютерних науках, економіці, фізиці та інших галузях [99].

Включення основ теорії чисел у шкільний курс математики відіграє важливу роль у формуванні математичної грамотності учнів. Використання інтерактивних методів навчання, історичних фактів та реальних застосувань сприяє кращому розумінню предмета. Теорія чисел не лише допомагає розвивати логічне та аналітичне мислення, а й готує школярів до подальшого навчання у вищих навчальних закладах та застосування математичних знань у різних сферах життя.

2.2. Змістове наповнення процесу вивчення теорії чисел в шкільному курсі математики

Просте число — це натуральне число, яке має лише два натуральних дільники: одиницю та саме себе. Іншими словами, просте число p є таким, що воно не може бути розкладене на множники, менші за нього, окрім тривіального випадку множення на одиницю [5].

Формально, число p називається простим, якщо воно задовольняє умову:

$$\forall d \in N, d \mid p \Rightarrow d = 1 \text{ або } d = p$$

Дослідник Д. М. Бертран у своїх працях зазначає, що прості числа є «будівельними блоками» натуральних чисел, оскільки будь-яке складене число можна представити як добуток простих множників [18].

Приклади простих і складених чисел

Для кращого розуміння наведемо декілька прикладів:

- Простими числами є: 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29 і так далі.

- Числа, які мають більше ніж два дільники, називаються складеними. Наприклад:

- 4 (ділиться на 1,2,4),
- 6 (ділиться на 1,2,3,6),
- 8 (ділиться на 1,2,4,8),
- 9 (ділиться на 1,3,9).

З цього випливає, що прості числа — це такі числа, які не можна розкласти на множники, відмінні від 1 і самого себе [18].

Число 1: просте чи ні?

Історично число 1 часто розглядалося як просте, оскільки воно має лише один дільник. Однак сучасне визначення простих чисел вимагає наявності рівно двох дільників, що виключає одиницю з множини простих чисел. Таке рішення було прийнято через потребу уніфікації математичних теорем, наприклад, основної теореми арифметики, яка стверджує, що кожне натуральне число можна розкласти унікальним способом на добуток простих множників [4].

Основна теорема арифметики

Важливим результатом, пов'язаним із простими числами, є основна теорема арифметики, яка стверджує, що будь-яке натуральне число більше 1 можна представити у вигляді добутку простих чисел, і цей розклад єдиний (якщо не враховувати порядок множників) [22]:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

де $p_1, p_2, \dots, p_k$ — прості числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — натуральні степені відповідних простих чисел.

Наприклад, число 60 можна розкласти на прості множники таким чином:

$$60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

Теорема Гаусса є фундаментальною для розуміння структури натуральних чисел і широко застосовується у теорії чисел та криптографії [23].

Формальне визначення через функцію подільності

Математично прості числа можна описати через функцію подільності. Якщо позначити кількість дільників числа n як $d(n)$, то число n є простим, якщо:

$$d(n) = 2$$

Тобто, воно ділиться лише на 1 та на n .

Прості числа у множині натуральних чисел

Множину всіх простих чисел позначають як P .

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots\}$$

Цікаво, що число 2 — єдине парне просте число, оскільки всі інші парні числа діляться на 2 і, отже, є складеними. Це також означає, що всі інші прості числа — непарні [29].

Грецький математик Евклід ще у III столітті до н.е. довів, що множина простих чисел є нескінченною. Його доведення базується на методі від супротивного [16]:

1. Припустимо, що існує скінченна кількість простих чисел: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.
2. Розглянемо число $P = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$.
3. Число P не ділиться на жодне з p_i , бо залишок від ділення на будь-яке p_i дорівнює 1.
4. Отже, P або є простим, або має інші прості дільники, що суперечить припущенню про скінченність множини простих чисел.

Цей доказ є одним із найкрасивіших і найвідоміших у математиці (Евклід, *Начала*, 300 р. до н.е.) [16].

Означення простих чисел є ключовим для розуміння фундаментальних властивостей натуральних чисел. Просте число — це таке число, яке має рівно два дільники: одиницю та саме себе. Вони відіграють важливу роль у теорії чисел, криптографії та багатьох інших галузях. Дослідження простих чисел триває й досі, відкриваючи нові аспекти їхньої природи та застосування [24].

Основна теорема арифметики є одним із фундаментальних тверджень у теорії чисел. Вона формулюється так:

Будь-яке натуральне число більше 1 можна подати у вигляді добутку простих чисел, і цей розклад єдиний (якщо не враховувати порядок множників).

Формально, якщо n — натуральне число, то існують прості числа $p_1, p_2, \dots, p_k$ і натуральні степені $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, такі що:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

Цей розклад називається канонічним розкладом числа на прості множники.

Теорема була доведена ще давньогрецьким математиком Евклідом у його знаменитій праці *«Начала»* близько 300 року до н.е. Однак повну строгість цього твердження у сучасному розумінні сформулювали лише у XVIII–XIX століттях Карл Фрідріх Гаусс та інші математики [16].

Приклади застосування основної теореми арифметики

Щоб продемонструвати дію цієї теореми, розглянемо декілька прикладів:

1. Число 60 можна розкласти на прості множники так:

$$60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

2. Число 84 розкладається таким чином:

$$84 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^1$$

3. Число 210:

$$210 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$

У кожному випадку ми отримуємо єдиний набір простих множників, що ілюструє дію основної теореми арифметики [5].

Доведення основної теореми арифметики

Доведення складається з двох частин:

1. Будь-яке число можна розкласти на прості множники

- Якщо число саме є простим, воно вже є своїм власним розкладом.
- Якщо число складене, то воно ділиться на деяке просте число.
- Ділення продовжується доти, доки не залишиться лише прості

множники.

2. Єдиність розкладу

○ Припустимо, що число n можна подати у вигляді двох різних добутоків простих множників:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_m^{\beta_m}$$

○ За принципом найменшого простого дільника найменше просте число в обох розкладах має збігатися.

○ Після спрощення залишається рівність між іншими множниками, що призводить до ідентичності розкладів.

Гаусс у своїй книзі *Disquisitiones Arithmeticae* 1801 року узагальнив цей підхід і дав строгий доказ єдиності розкладу [22].

Значення основної теореми арифметики

Основна теорема арифметики є наріжним каменем багатьох областей математики, зокрема:

1. Теорія чисел

○ Використовується для визначення властивостей чисел, їхніх дільників та простих множників.

○ Дає змогу ефективно працювати з числовими структурами та їхніми властивостями [29].

2. Алгоритми та обчислення

○ У криптографії (RSA, криптографія на еліптичних кривих) прості числа використовуються для побудови алгоритмів безпеки [31].

○ Канонічний розклад допомагає у швидкому обчисленні найбільшого спільного дільника (НСД) та найменшого спільного кратного (НСК) чисел.

3. Криптографія

○ Основна теорема арифметики є базою для сучасних криптографічних систем, що використовують добутки великих простих чисел.

○ Наприклад, RSA-шифрування засноване на тому, що швидко розкласти велике число на прості множники є обчислювально складною задачею [16;31].

4. Аналітична теорія чисел

- Використовується для доведення теорем про розподіл простих чисел, наприклад, теореми про розподіл простих чисел.
- Застосовується у вивченні функції розподілу простих чисел (наприклад, функції Лежандра і Піса).

Основна теорема арифметики є фундаментальним твердженням, яке визначає структуру натуральних чисел. Вона стверджує, що будь-яке число можна унікально розкласти на прості множники, що має важливе значення в теорії чисел, обчислювальній математиці та криптографії. Ця теорема є основою багатьох сучасних технологій, пов'язаних із безпекою та захистом даних, і залишається об'єктом активних досліджень у математиці.

Одним із найважливіших результатів у теорії чисел є твердження про нескінченність множини простих чисел. Його вперше довів давньогрецький математик Евклід близько 300 року до н.е. у своїй знаменитій праці «*Начала*» (*Elements*).

Теорема (Евклід, 300 р. до н.е.). Існує нескінченно багато простих чисел [8].

Ця теорема означає, що множина простих чисел не має найбільшого елемента, тобто яким би великим не було просте число, завжди знайдеться більше просте число.

Доведення Евкліда (класичний метод від супротивного)

Доведення теореми Евкліда є одним із найвідоміших прикладів доведення від супротивного (*reductio ad absurdum*).

1. Припустимо, що множина простих чисел є скінченною. Нехай існує кінцевий список усіх простих чисел:

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$$

2. Побудуємо число N , яке є добутком всіх цих простих чисел плюс 1:

$$N = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$$

3. Число N більше за будь-яке p_i , тому воно або є простим, або має простий дільник, що не входить у початковий список.

4. Якщо N саме є простим, то ми знайшли нове просте число, яке не входить до нашого списку, що суперечить припущенню про його повноту.

5. Якщо N складене, то воно ділиться на деяке просте число q , але при діленні на будь-яке p_i із початкового списку залишає остачу 1:

$$N \bmod p_i = 1$$

Отже, жодне з p_i не є дільником N , що знову суперечить припущенню [29].

Таким чином, множина простих чисел не може бути скінченною, що й потрібно було довести.

Інші доведення нескінченності множини простих чисел

Хоча доведення Евкліда є класичним, існують інші підходи до доведення цього твердження.

1. Аналітичне доведення (Ейлер, 1737)

Леонард Ейлер запропонував аналітичний підхід до доведення нескінченності простих чисел. Він показав, що гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

розходиться, а потім довів, що відповідний ряд, у якому враховуються лише прості числа, також розходиться:

$$\sum_p \frac{1}{p} = \infty$$

Оскільки розбіжний ряд не може складатися з кінцевого числа членів, це означає, що множина простих чисел є нескінченною [29].

2. Доведення Ферма [23]

Французький математик П'єр де Ферма запропонував узагальнення доведення Евкліда, використовуючи так звані числа Ферма:

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Ці числа мають особливу властивість: жодне з них не ділиться на жодне з попередніх. Це також свідчить про нескінченність множини простих чисел [18].

3. Доведення через арифметичні прогресії (Діріхле, 1837)

Німецький математик Петер Густав Лежен Діріхле довів, що у будь-якій арифметичній прогресії виду

$$a + nk, k \in \mathbb{N}$$

з взаємно простими a та k існує нескінченно багато простих чисел. Це дає ще один підхід до доведення нескінченності множини простих чисел [4].

Теорема Евкліда про нескінченність множини простих чисел є однією з найважливіших у математиці. Вона була доведена ще в Стародавній Греції, але залишається актуальною і сьогодні, зокрема в сучасній криптографії, обчислювальній математиці та аналітичній теорії чисел. Крім класичного доведення, існує багато альтернативних підходів, які лише підтверджують важливість і універсальність цього фундаментального твердження.

Ознаки подільності числа дозволяють визначити, чи ділиться одне число на інше без необхідності виконувати ділення з остачею. Це особливо корисно при роботі з великими числами, коли безпосереднє ділення є складним чи непотрібним [39].

1. Подільність на 2

Число ділиться на 2, якщо його остання цифра є парною. Тобто, число може закінчуватися на одну з таких цифр: 0, 2, 4, 6 або 8. Наприклад, 14, 30, 88 — всі ці числа діляться на 2, оскільки їх останні цифри є парними.

2. Подільність на 3

Число ділиться на 3, якщо сума всіх його цифр кратна 3. Це означає, що якщо ви додасте цифри числа і отримаєте число, яке ділиться на 3, то і саме число буде ділитися на 3. Наприклад, для числа 123 сума цифр буде $1 + 2 + 3 = 6$, що ділиться на 3, тому і саме число 123 ділиться на 3.

3. Подільність на 5

Число ділиться на 5, якщо його остання цифра є 0 або 5. Це дуже проста ознака: наприклад, числа 25, 50, 105 — усі ці числа діляться на 5, оскільки їх останні цифри є або 0, або 5.

Ці ознаки допомагають швидко визначити подільність чисел без необхідності виконувати повне ділення.

Подільність чисел, НСД і НСК [14]

Найбільший спільний дільник двох чисел — це найбільше число, яке ділить обидва ці числа без залишку. Для знаходження НСД використовують різні методи, одним із яких є алгоритм Евкліда. НСД важливий для вирішення задач на дробі, а також при спрощенні виразів. Наприклад, НСД чисел 36 і 48 — це 12, оскільки 12 є найбільшим числом, яке ділить і 36, і 48 без залишку.

Найменше спільне кратне двох чисел — це найменше число, яке ділиться на обидва ці числа. НСК можна знайти, використовуючи формулу [14]:

$$\text{НСК}(a, b) = \frac{|a \cdot b|}{\text{НСД}(a, b)}$$

Наприклад, для чисел 36 і 48 НСК дорівнює 144, оскільки 144 — це найменше число, яке ділиться і на 36, і на 48.

Алгоритм Евкліда — це класичний метод для знаходження найбільшого спільного дільника двох чисел через послідовне ділення з остачею. Основна ідея алгоритму полягає в тому, що НСД чисел a і b дорівнює НСД числа b та остачі від ділення a на b . Ось як виглядає процес:

1. Розділімо a на b , отримуємо залишок r .
2. Якщо $r=0$, то НСД — це b .
3. Якщо $r \neq 0$, повторюємо процес: ділимо b на r .

Приклад: Знайдемо НСД чисел 168 і 126.

1. Ділимо 168 на 126, залишок 42.
2. Ділимо 126 на 42, залишок 0.

Отже, $\text{НСД}(168, 126) = 42$.

Конгруенції та їх застосування у розв'язуванні задач. Конгруенція — це відношення між двома цілими числами, яке визначає їх однаковість за певним модулем. Число a і число b є конгруентними за модулем m , якщо їх різниця ділиться на m , тобто [8]:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Це означає, що залишки від ділення a і b на m однакові. Наприклад:

$$47 \equiv 3 \pmod{7}$$

тому що 47, ділене на 7, дає залишок 3, як і 3, ділене на 7.

Конгруенції використовуються в задачах, пов'язаних з подільністю, а також для вирішення різноманітних задач на залишки, таких як знаходження періодичних послідовностей та розв'язання систем модульних рівнянь.

Диофантові рівняння — це рівняння, у яких шукаються цілі розв'язки. Це можуть бути лінійні рівняння вигляду:

$$ax + by = c$$

де a , b , і c — відомі цілі числа, а x і y — невідомі цілі числа. Такі рівняння мають рішення, якщо НСД(a , b) ділить c . Якщо це виконано, то рівняння має безліч цілих розв'язків [14].

Наприклад, знайдемо розв'язки рівняння $12x + 18y = 6$.

1. Знайдемо НСД(12, 18), який дорівнює 6.
2. Оскільки НСД ділить праву частину рівняння, розв'язок існує.

У загальному випадку для розв'язування таких рівнянь використовують методи з теорії чисел, зокрема алгоритм Евкліда для знаходження початкового розв'язку, після чого застосовують методи для знаходження всіх можливих розв'язків.

Таким чином, теорія чисел є важливою частиною шкільного курсу алгебри і дає можливість вирішувати різноманітні задачі з подільності, рівнянь, а також застосовувати теоретичні результати в практичних ситуаціях.

Нижче наведено типові завдання для кожної з зазначених вище тем у теорії чисел у шкільному курсі математики:

1. Прості та складені числа

Завдання 1. Визначте, які з чисел 17, 25, 37, 49 є простими.

Завдання 2. Розкладіть на прості множники число 180.

Завдання 3. Доведіть, що число 97 – просте.

2. Ознаки подільності

Завдання 4. Перевірте, чи ділиться число 534 на 3 і 9.

Завдання 5. Які цифри можна поставити замість * у числі $57*2$, щоб воно ділилося на 6?

Завдання 6. Чи ділиться число 142857 на 7? Використайте відповідну ознаку подільності.

3. Подільність чисел, НСД і НСК

Завдання 7. Знайдіть найбільший спільний дільник чисел 36 і 48.

Завдання 8. Обчисліть найменше спільне кратне чисел 15 і 20.

Завдання 9. Два числа мають $\text{НСД} = 12$ і $\text{НСК} = 180$. Знайдіть можливі значення цих чисел.

4. Застосування алгоритму Евкліда

Завдання 10. Використовуючи алгоритм Евкліда, знайдіть НСД чисел 126 і 210.

Завдання 11. Числа 187 та 221 є взаємно простими? Обґрунтуйте відповідь за допомогою алгоритму Евкліда.

Завдання 12. Доведіть, що два послідовні натуральні числа є взаємно простими.

5. Конгруєнції та їх застосування у розв'язуванні задач

Завдання 13. Розв'яжіть конгруєнцію: $5x \equiv 3 \pmod{7}$

Завдання 14. Знайдіть остачу від ділення числа 2^{15} на 5.

Завдання 15. Доведіть, що число 12345678 залишає остачу 2 при діленні на 3.

6. Діофантові рівняння та їх застосування

Завдання 16. Розв'яжіть рівняння в цілих числах: $5x + 7y = 1$

Завдання 17. У класі 28 учнів. Вони сідають групами по 4 або по 6 осіб. Чи можливо це? (Розв'язати через діофантове рівняння).

Завдання 18. Доведіть, що рівняння $3x + 6y = 17$ не має цілих розв'язків.

Розгляд наведених тем у шкільному курсі математики дозволяє учням розвивати логічне мислення, навички розв'язування рівнянь та аналіз числових властивостей. Використання практичних завдань та застосування теоретичних знань у реальних ситуаціях підвищує зацікавленість учнів та сприяє глибшому розумінню теорії чисел.

2.3. Порівняльний аналіз викладу матеріалу в різних підручниках

Розглянемо особливості викладу матеріалу з теорії чисел у різних підручниках шкільного курсу математики.

1. Підручник Бевза Г.П., Бевза В.Г., Владімірової Н.Г. (Алгебра і початок аналізу. Профільний рівень) для 11 класу [3].

Цей підручник охоплює основні аспекти теорії чисел, зокрема:

- Прості та складені числа. Наведено строгі означення, наведено алгоритм перевірки числа на простоту, але приклади обмежуються лише базовими випадками.
- Ознаки подільності. Пояснюються класичні правила подільності на 2, 3, 5, 9, 10, з прикладами застосування для розв'язання задач.
- НСД і НСК. Висвітлюється алгоритм розкладу чисел на прості множники для знаходження НСД і НСК, а також пояснено алгоритм Евкліда.
- Конгруенції та їх застосування. Викладається базова теорія конгруенцій, але без глибокого аналізу їх застосування в задачах.
- Диофантові рівняння. Згадується метод розв'язування рівнянь у цілих числах, зокрема рівняння виду $ax + by = c$, проте детальні розв'язки задач майже не представлені.

Підручник використовує абстрактно-індуктивний метод, теоретичний матеріал подано з поступовим ускладненням, кожен параграф супроводжується задачами для самостійного розв'язання, поділеними за рівнями складності.

2. Підручник Істера О.С., Єргіної О.В. (Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень) [13].

Особливості викладу теми «Теорія чисел» у цьому підручнику:

- Прості та складені числа. Наведено означення простих чисел, включено історичні довідки, наприклад, про найбільші знайдені прості числа.
- Ознаки подільності. Викладено докази основних ознак подільності, проте практичних задач наведено менше, ніж у підручнику Бевза.
- НСД і НСК. Значна увага приділена алгоритму Евкліда, наведено практичні застосування, наприклад, у розв'язанні задач на знаходження спільних кратних.
- Конгруенції. Розглядаються лише в базовому форматі, без значного акценту на теоретичних доказах.
- Діофантові рівняння. Наведено базові методи розв'язку, зокрема метод невизначених коефіцієнтів, але без розгляду складних задач.

Підручник орієнтований на графічно-аналітичний метод, основні означення супроводжуються схемами та таблицями, що робить виклад більш наочним.

3. Підручник Мерзляка А.Г., Номіровського Д.А., Полонського В.Б., Якіра М.С. (Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень) [27].

У цьому підручнику тема теорії чисел подана досить структуровано:

- Прості та складені числа. Виклад більш формалізований, наведено розширений перелік методів перевірки числа на простоту.
- Ознаки подільності. Окрім класичних ознак, представлено доведення нових критеріїв подільності, зокрема через залишки від ділення.
- НСД і НСК. Подаються не лише алгоритми обчислення, а й розглядаються їх застосування у задачах, наприклад, для оптимізації розподілу ресурсів.
- Конгруенції. Виклад включає доведення основних властивостей, наведено метод розв'язання лінійних конгруенцій.

– Диофантові рівняння. Детально розглянуто методи їх розв’язування, зокрема застосування алгоритму Евкліда.

Підручник має теоретико-практичний підхід, задачі охоплюють широкий спектр складності, від базових до підвищеного рівня.

Таблиця 2.1

Порівняльний аналіз підручників щодо викладу матеріалу з теорії чисел [2;13;27]

Тема	Бевз Г.П.	Істер О.С.	Мерзляк А.Г.
Прості та складені числа	Формальні означення, базові задачі	Теорія + історичні довідки	Формальні означення + методи перевірки простоти
Ознаки подільності	Основні ознаки	Доведення ознак	Додаткові критерії подільності
НСД і НСК	Основні алгоритми	Практичні застосування	Глибокий розгляд, зв’язок із задачами
Алгоритм Евкліда	Основи застосування	Пояснення через приклади	Доведення + використання в диофантових рівняннях
Конгруенції	Коротко, лише означення	Мінімальний виклад	Формальна теорія, методи розв’язання
Диофантові рівняння	Базові методи	Метод невизначених коефіцієнтів	Алгоритм Евкліда,

			застосування в задачах
--	--	--	---------------------------

Отже, підручник під авторством Бевза Г.П. найкраще підходить для поступового вивчення теми, з чітким поділом на теоретичний матеріал і задачі. Підручник Істера О.С. містить більш наочні пояснення, історичні відомості, але не заглиблюється у складні методи. Підручник піж авторством Мерзляка А.Г. найбільш формалізований, включає розширений аналіз теми, складніші задачі та доведення. Таким чином, вибір підручника залежить від рівня підготовки учнів та цілей вивчення курсу.

ВИСНОВКИ

Вищу алгебру як розділ математичної науки представлено в шкільному курсі через основні поняття, такі як рівняння, нерівності, функції, тотожності та їх властивості. Основні алгебраїчні структури, що формують основу вищої алгебри, подаються у вигляді базових елементів, необхідних для подальшого навчання у вищих навчальних закладах. Місце вищої алгебри у шкільному курсі визначається її значущістю для формування математичної грамотності та розвитку логічного мислення учнів.

Процес вивчення вищої алгебри в шкільному курсі охоплює теми, які сприяють розвитку аналітичного мислення та вмінь працювати з абстрактними математичними структурами. До основних розділів належать рівняння та нерівності, функції та їх властивості, елементи комбінаторики, ймовірності та математичної статистики. Значна увага приділяється методам розв'язування рівнянь і нерівностей різного рівня складності, а також використанню математичних моделей у прикладних задачах.

Аналіз підручників показав, що кожен із них має свою специфіку подання матеріалу. Підручник Бевза Г.П., Бевза В.Г., Владімірової Н.Г. характеризується структурованою подачею матеріалу з акцентом на теоретичну складову та методичне пояснення алгоритмів. Підручник Істера О.С., Єргіної О.В. більше орієнтований на графічний аналіз функцій і практичне застосування математичних понять. У підручнику Мерзляка А.Г., Номіровського Д.А., Полонського В.Б., Якіра М.С. представлена велика кількість задач із диференційованими рівнями складності, що сприяє розвитку навичок розв'язування нестандартних задач.

Теорія чисел є важливим розділом шкільного курсу математики, що формує уявлення учнів про числові множини та їх властивості. Основні теми цього розділу включають прості та складені числа, ознаки подільності, поняття НСД та НСК, а також основи конгруенцій. Вивчення цих тем сприяє розвитку аналітичного мислення та математичної інтуїції.

Основні поняття теорії чисел подаються через розгляд властивостей натуральних чисел та їх застосування у розв'язуванні задач. Значна увага приділяється методам знаходження найбільшого спільного дільника (НСД) та найменшого спільного кратного (НСК), алгоритму Евкліда, властивостям конгруенцій та діофантовим рівнянням. Практичне застосування цих тем включає задачі на подільність, пошук невідомих чисел за заданими умовами та аналіз числових закономірностей.

Підручники, що використовуються для вивчення теорії чисел у школі, мають різні підходи до подання матеріалу. Підручник Бевза Г.П., Бевза В.Г., Владімірової Н.Г. містить чітку структуровану подачу теоретичного матеріалу з великою кількістю прикладів. Підручник Істера О.С., Єрґіної О.В. надає особливу увагу алгоритму Евкліда та задачам на конгруенції. У підручнику Мерзляка А.Г., Номіровського Д.А., Полонського В.Б., Якіра М.С. представлена широка система задач на подільність та діофантові рівняння, що дає можливість учням застосовувати знання у нестандартних ситуаціях.

Дослідження особливостей викладання вищої алгебри та теорії чисел у шкільному курсі математики показало, що ці розділи є важливими для формування логічного та аналітичного мислення учнів. Порівняння підручників дозволяє визначити, що кожен з них має власні методичні особливості: від структурованого теоретичного матеріалу до широкого набору практичних задач. Використання різних підходів у викладанні математики сприяє підвищенню рівня математичної підготовки учнів та розвитку їхньої здатності до самостійного розв'язування задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П. Моя методика математики Тернопіль : Навчальна книга Богдан, 2021. 584 с.
2. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Бевз Г.П. Збірник програм курсів за вибором і факультативів з математики (10 –11 класи). Харків: Ранок, 2011. — 320 с.
3. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти. Київ: Освіта, 2019. — 336 с.
4. Безущак О.О., Ганюшкін О.Г. Елементи теорії чисел: Навчальний посібник. К.: Видавничо–поліграфічний центр “Київський університет”, 2003. 203 с.
5. Благий О. Прості числа та їх практичне застосування. Наука. Освіта. Молодь. Частина 1. С.47-49 Бодько Л. Метод проектів як засіб реалізації особистісно орієнтованого навчання. Початкова школа. 2013. № 10. С. 1-4.
6. Бокало І.Г. Теорія чисел: навчальний посібник. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2007. – 276 с.
7. Бондаренко І. І., Васильєва О. В. Методика навчання конгруенцій з однією змінною у вищих класах школи. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: зб. наук. пр. - Кривий Ріг: Вид-во КДПУ імені В. Винниченка, 2014. - Вип. 39. - С. 222-229.
8. Бондаренко І. І., Коваленко Ю. М. Методичні аспекти навчання конгруенцій з однією змінною. Науковий вісник Полісся. 2016. №3 (11). - С. 15-18.
9. Галиця І. О. Інноваційні механізми активізації педагогічного і наукового процесів. Запоріжжя, 2011. № 8. 86 с.
10. Галузинський, В. М., Євтух, М. Б., Кондратюк, О. П., Дьомін, А. І. Форми організації навчання математики учнів старшої школи. 2014.

URL:<https://fizmatsspu.sumy.ua/Konferencii/sbor/npk/NPK-2014-2-.pdf#page=110>

11. Глобін О.І., Бурда М.І., Васильєва Д.В., Волошена В.В., Вашуленко О.П., Мацько Н.Д., Хмара Т.М.. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: Метод. посібник К.: Педагогічна думка, 2015. 245с.
12. Дідківська Т. В., Паламарчук Н. М. Числа крізь призму людської уяви. Актуальні проблеми математики та методики її викладання. 2009. С.30-36.
13. Істер О.С., Єргіна О.В. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти. Київ: Генеза, 2019. 288 с.
14. Ільєнко М.І., Ярошенко І.І. Алгебра і теорія чисел: підручник для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. К.: Грамота, 2006. 320 с.
15. Кіров О. М. Курс алгебри та початків аналізу: Підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. К.: Генеза, 2017. 448 с.
16. Ковальчук Л.В., Маслова Н.О. Математичні методи криптографії. Електронний навчальний посібник. Дрогобич: ДВНЗ «ДонНТУ», 2024. 146с.
17. Колесник М.М. Теорія чисел: навчальний посібник. Х.: Вид-во ХДУ, 2008. 312 с.
18. Козак Д. Прості та складені числа. Мандрівка у світ арифметики. Universum. 2024. № 8.С. 292-296.
19. Куліш М.М., Лисенко В.В., Самойленко І.В. Курс алгебри і початків аналізу: Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Генеза, 2016. – 352 с.
20. Лов'янова І.В. Дидактичні основи навчання математики. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Кривий Ріг: КДПУ, 2009. 192 с.
21. Лов'янова І. В. Методика навчання математики у запитаннях і відповідях. Навчальний посібник для підготовки студентів до атестації

здобувачів вищої освіти. Кривий Ріг: Криворізький державний педагогічний університет. 2-ге видання, доповнене і перероблене. 2020. 156 с.

22. Лукашова Т. Прості числа та деякі пов'язані з ними проблеми теорії чисел. Фізико-математична освіта. 2015. № 2 (5). С. 29-37.

23. Лужецький В. А. Прості числа: властивості та застосування в криптографії : електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання. Вінниця: ВНТУ, 2024. 161 с.

24. Майборода О. В., Воробйова А. І., Майборода В. А. Фундаментальні проблеми теорії чисел і задачі шкільної математики. Наукові праці Чорноморського державного університету імені Петра Могили комплексу Києво-Могилянська академія. Серія: Педагогіка 2014. Вип. 233. С. 40-43.

25. Мачуляк М. В. Алгоритм перевірки чисел на простоту в системі залишкових класів. Збірник тез доповідей VII Міжнародної науково-технічної конференції молодих учених та студентів „Актуальні задачі сучасних технологій “. 2018. №1.С. 9-10.

26. Мельник М.І. Теорія чисел та криптографія: Навчальний посібник. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2016. – 320 с.

27. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2019. 320 с.

28. Молодченко Д. В., Гончар В. М. Комбінаторна теорія чисел: задачі про складність розбиття натуральних чисел на суми, задачі про прості числа та їх розподіл. Прикладні інформаційні технології, 2023, 157-158.

29. Оглобліна О. І. Елементи теорії чисел : навч. посіб. Суми : Сумський державний університет, 2015. 186 с

30. Плясенко Є. О. Форми навчання математики учнів 10-11 класів гуманітарних профілів. Студентська звітна конференція. С. 49.

31. Рассоха І. В. Застосування теорії подільності у криптографії. 2022. PhD Thesis. Національний університет" Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка". URL: <https://reposit.nupp.edu.ua/bitstream/PoltNTU/11073/1/74->

[%D1%82%D0%B0%20%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D1%84%20%D0%A2.1-208-210.pdf](#)

32. Семенець С.П. Методика формування математичних понять (розвивальних підхід). Навчання математики: проблеми та перспективи. № 37 2012. С.68-73.
33. Серветник В. Г. Загадки простих чисел. URL: <https://vseosvita.ua/library/embed/001hko-63f3.docx.html>
34. Скуратовський Р. В. Вища математика з прикладами і задачами. Підручник. К.: Національна академія управління, 2021. 232 с.
35. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів .К.: Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.
36. Тарасенкова Н. А. Організація навчання математики у старшій профільній школі : монографія / Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, І. В. Лов'янова, З. О. Сердюк; за ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси: Видавець ФОП Гордієнко, 2017. 216 с.
37. Швець В. О. Практикум з методики навчання математики. Основна школа: навчальний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів.К. : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. 267 с.
38. Шумигай С.М. Розвиток пізнавального інтересу учнів. Дидактика математики: проблеми і дослідження: між нар. зб. наук. робіт. Донецьк: Вид-во ДонНУ. 2010. Вип. 33. С. 76-82.
39. Ярошенко І.І. Алгебра і теорія чисел: навчальний посібник для вищих навчальних закладів. К.: Генеза, 2010. 312 с.
40. Barry Mazur. Prime Numbers and the Riemann Hypothesis. Cambridge University Press; 1st edition, 2016. 150 pages.
41. Burton, D. M.. Elementary number theory (7th ed.). Tata McGraw-Hill Education, 2012.- 248 p.
42. Stewart I., & Tall D. Algebraic number theory and Fermat's last theorem (4th ed.). AK Peters/CRC Press, 2015.-412 p.

ДОДАТКИ

Додаток А

Конспект уроку з алгебри і початків аналізу

Тема уроку. Алгебраїчні рівняння і нерівності

Мета уроку: перевірити рівень засвоєння знань та сформованості вмінь учнів з теми.

Тип уроку: перевірка знань, умінь, навичок.

ХІД УРОКУ

I. Організаційний момент.

Учитель перевіряє готовність учнів до уроку.

II. Перевірка домашнього завдання.

Учитель збирає на перевірку зошити учнів з виконаною домашньою самостійною роботою.

III. Перевірка знань учнями матеріалу.

Варіант 1

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$. б) $|x^2 - 4| = x^2 - 4$

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{(3 - x^2)} = \sqrt{(-5x - 3)}$

б) $\sqrt{(3 - x)} + \sqrt{(x - 6)} = 5$

в) $(x^2 - 4)\sqrt{(1 - 7x)} = 0$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:
$$\begin{cases} 5x + 2y = 25 \\ 3x + 4y = 29 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть нерівність: а) $-4 < x^2 - 4x \leq 0$; б) $|3x - 8| < x - 2$

5. Знайдіть всі цілі розв'язки нерівності, які належать проміжку $[-3; 7]$. У відповіді записати їхню кількість $(\frac{1}{2})^{x^2-5} < (\frac{1}{16})^x$

6. При яких значеннях b рівняння $x^2 + bx + 16 = 0$ не має коренів?

7. Розв'яжіть рівняння:
$$\frac{x-1}{x+2} + \frac{x+1}{x-2} = \frac{2x+8}{x^2-4}$$

8. Чому дорівнює значення виразу $3x_1x_2 - x_1 - x_2$, де x_1 і x_2 - корені рівняння $x^2 + 12x + 19 = 0$.

Варіант 2

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$. б) $|x^2 - 1| = x^2 - 1$

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{(4 - x^2)} = \sqrt{(-4x - 4)}$ б) $\sqrt{(5 - x)} + \sqrt{(x - 3)} = 4$
в) $(x^2 - 9)\sqrt{(1 - 6x)} = 0$

3. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$

4. Розв'яжіть нерівність: а) $-3 < x^2 - 5x \leq 1$; б) $|2x - 5| < x - 1$

5. Знайдіть всі цілі розв'язки нерівності, які належать проміжку $[-5; 6]$. У відповіді записати їхню кількість $(\frac{1}{3})^{x^2-4} < (\frac{1}{27})^x$. Записати їхню кількість.

6. При яких значеннях b рівняння $x^2 + bx + 25 = 0$ не має коренів?

7. Розв'яжіть рівняння: $\frac{x-2}{x+3} + \frac{x+2}{x-3} = \frac{2x+18}{x^2-9}$

8. Чому дорівнює значення виразу $2x_1x_2 - x_1 - x_2$, де x_1 і x_2 - корені рівняння $x^2 + 10x + 16 = 0$.

Варіант 3

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^4 - 20x^2 + 36 = 0$. б) $|x^2 - 9| = x^2 - 9$

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{(2 - x^2)} = \sqrt{(-2x - 1)}$ б) $\sqrt{(7 - x)} + \sqrt{(x - 5)} = 6$
в) $(x^2 - 16)\sqrt{(1 - 5x)} = 0$

3. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

4. Розв'яжіть нерівність: а) $-2 < x^2 - 3x \leq 2$; б) $|x - 4| < x - 3$

5. Знайдіть всі цілі розв'язки нерівності, які належать проміжку $[-2; 5]$. У відповіді записати їхню кількість $(\frac{1}{4})^{x^2-3} < (\frac{1}{64})^x$
6. При яких значеннях b рівняння $x^2 + bx + 9 = 0$ не має коренів?
7. Розв'яжіть рівняння: $\frac{x-3}{x+4} + \frac{x+3}{x-4} = \frac{2x+24}{x^2-16}$
8. Чому дорівнює значення виразу $x_1x_2 - x_1 - x_2$, де x_1 і x_2 - корені рівняння $x^2 + 8x + 15 = 0$.

Варіант 3

1. Розв'яжіть рівняння:
 - а) $x^4 - 16x^2 + 64 = 0$.
 - б) $|x^2 - 16| = x^2 - 16$
2. Розв'яжіть рівняння:
 - а) $\sqrt{5 - x^2} = \sqrt{-3x - 2}$
 - б) $\sqrt{9 - x} + \sqrt{x - 4} = 7$
 - в) $(x^2 - 25)\sqrt{1 - 4x} = 0$
3. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} 4x - y = 11 \\ 2x + 3y = 17 \end{cases}$
4. Розв'яжіть нерівність: а) $-1 < x^2 - 2x \leq 3$; б) $|x - 6| < x - 4$
5. Знайдіть всі цілі розв'язки нерівності, які належать проміжку $[-4; 8]$. У відповіді записати їхню кількість $(\frac{1}{5})^{x^2-2} < (\frac{1}{125})^x$
6. При яких значеннях b рівняння $x^2 + bx + 36 = 0$ не має коренів?
7. Розв'яжіть рівняння: $\frac{x-4}{x+5} + \frac{x+4}{x-5} = \frac{2x+40}{x^2-25}$
8. Чому дорівнює значення виразу $4x_1x_2 - x_1 - x_2$, де x_1 і x_2 - корені рівняння $x^2 + 14x + 24 = 0$.

IV. Домашнє завдання

Виконати завдання, що вчитель роздав учням на аркушах.

Конспект уроку з алгебри і початків аналізу

Тема уроку. *Елементи теорії матриць і визначників*

Мета уроку: ознайомити учнів з базовими операціями над матрицями: додаванням, множенням, множенням на число; сформувати вміння знаходити визначники 2-го та 3-го порядків; ознайомити з поняттям оберненої матриці та методами її знаходження; розвивати логічне мислення, увагу, обчислювальні навички; формувати вміння застосовувати знання до розв'язування задач.

Тип уроку: комбінований - повторення матеріалу, закріплення та перевірка знань, умінь, навичок.

ХІД УРОКУ

I. Організаційний момент.

Учитель перевіряє готовність учнів до уроку.

II. Перевірка домашнього завдання.

Аналіз домашніх вправ та виправлення помилок.

III. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Що таке матриця?
2. Які є види матриць?
3. Що таке визначник? Для яких матриць він існує?
4. При яких умовах матриця має обернену?

Повторення матеріалу:

Прямокутна таблиця, що складається з $m \times n$ чисел, розташованих в m рядках і n стовпцях, називається **матрицею**. Запис $m \times n$ позначає розмірність матриці. Числа a_{ik} називаються елементами матриці, перший індекс - номер рядка, другий - номер стовпця.

Матриці позначаються великими латинськими літерами: **$A, B, C, D \dots$**

Добутком матриці A та довільного числа α називається матриця C , елементами якої є добутки елементів матриці A та числа α .

Додавати (віднімати) можна тільки матриці однакової розмірності.

Щоб додати (відняти) дві матриці треба додати (відняти) їх відповідні елементи.

Добутком $m \times p$ - матриці A та $p \times n$ - матриці B називається $m \times n$ - матриця C , елементи якої c_{ik} ($i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$) дорівнюють сумі добутків відповідних елементів i -го рядка матриці A і k -го стовпця матриці B , тобто $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ip}b_{pk}$.

Добуток матриць A і B позначається AB . Добуток AB має зміст лише при умові, що кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B .

Множення матриць не підлягає комутативному (переставному) закону. Матриці, які підлягають комутативному закону, називаються комутативними.

Визначник – числова характеристика квадратної матриці.

Визначником другого порядку називається вираз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Визначником третього порядку називається вираз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Матриця A^{-1} називається **оберненою матрицею до квадратної невинродженої матриці A** , якщо виконується співвідношення: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{mn} - алгебраїчні доповнення мінорів матриці A .

Завдання 1. Знайти суму матриць $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ та

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -7 & 10 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо:

$$C = \begin{pmatrix} 5+0 & -8+1 & 0+2 & 2-1 \\ 4+5 & 3+6 & 1-7 & 2+10 \\ -1+1 & 2-3 & -7+4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Завдання 2. Знайти визначник матриці $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ та $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 10$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot (-5) + 6 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 0 - 6 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 0 -$$

$$-1 \cdot (-1) \cdot (-5) = -129$$

Завдання 3. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Обчислимо:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 10 = 5.$$

$\Delta(A) \neq 0$ — обернена матриця існує.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

IV. Перевірка знань учнями матеріалу.

Варіант 1**№1. Обчислити**

а) $A-2B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

б) AB , якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

№2. Знайти визначники

а) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0,5 & -0,8 \\ 0,2 & 0,6 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

№3. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Варіант 2**№1. Обчислити**

а) $A-2B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

б) AB , якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

№2. Знайти визначники

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0,1 & -0,2 \\ 0,3 & 0,4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

№3. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

V. Домашнє завдання.

Повторити матеріал. Виконати завдання з аркушу на обчислення визначників.

Додаток В

Конспект уроку з алгебри і початків аналізу

Тема уроку. *Комплексні числа*

Мета уроку: перевірити рівень засвоєння знань та сформованості вмінь учнів з теми.

Тип уроку: перевірка знань, умінь, навичок.

ХІД УРОКУ**I. Організаційний момент.**

Учитель перевіряє готовність учнів до уроку.

II. Перевірка домашнього завдання.

Учитель збирає на перевірку зошити учнів з виконаною домашньою самостійною роботою.

III. Перевірка знань учнями матеріалу.***Варіант 1***

1. Визначте дійсну та уявну частини комплексного числа $z = 5 - 3i$.
2. Знайдіть модуль комплексного числа $z = 4 + 3i$.
3. Спростіть вираз $(3 + 2i) + (4 - i)$.
4. Знайдіть добуток комплексних чисел $(2 - i)(3 + i)$.
5. Розв'яжіть рівняння $2x + 3i = 5 - 2i$.
6. Знайдіть корені квадратного рівняння $x^2 + 4x + 3 = 0$.
7. Знайдіть область значень виразу $|z - 3|$, де z - комплексне число, що задовольняє умові $|z| = 5$.
8. Знайдіть суму перших n членів геометричної прогресії, перший член якої дорівнює a , а знаменник $-q$.

Варіант 2

1. Визначте дійсну та уявну частини комплексного числа $z = -2 + 7i$.
2. Знайдіть модуль комплексного числа $z = -3 - 4i$.

3. Спростіть вираз $(1 - 3i) + (2 + 5i)$.
4. Знайдіть добуток комплексних чисел $(1 + 2i)(2 - 3i)$.
5. Розв'яжіть рівняння $3x - i = 2 + 4i$.
6. Знайдіть корені квадратного рівняння $x^2 - 2x + 1 = 0$.
7. Знайдіть область значень виразу $|z + 2|$, де z - комплексне число, що задовольняє умові $|z| = 4$.
8. Знайдіть суму перших n членів геометричної прогресії, якщо $a = 2$, $q = -0,5$.

Варіант 3

1. Визначте дійсну та уявну частини комплексного числа $z = 1 - 6i$.
2. Знайдіть модуль комплексного числа $z = 1 - i$.
3. Спростіть вираз $(-2 + i) + (3 + 4i)$.
4. Знайдіть добуток комплексних чисел $(4 + i)(1 - i)$.
5. Розв'яжіть рівняння $x + 2i = -1 + 3i$.
6. Знайдіть корені квадратного рівняння $x^2 + x - 6 = 0$.
7. Знайдіть область значень виразу $|z + 1|$, де z - комплексне число, що задовольняє умові $|z| = 3$.
8. Знайдіть суму перших n членів геометричної прогресії, якщо $a = 5$, $q = 2$.

Варіант 4

1. Визначте дійсну та уявну частини комплексного числа $z = -4 + 2i$.
2. Знайдіть модуль комплексного числа $z = -5 + 12i$.
3. Спростіть вираз $(5 - i) + (-3 + 2i)$.
4. Знайдіть добуток комплексних чисел $(3 - 2i)(1 + i)$.
5. Розв'яжіть рівняння $4x + i = 3 - 2i$.
6. Знайдіть корені квадратного рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$.

7. Знайдіть область значень виразу $|z - 1|$, де z - комплексне число, що задовольняє умові $|z| = 2$.

8. Знайдіть суму перших n членів геометричної прогресії, якщо $a = 1$,
 $q = 3$.

IV. Домашнє завдання.

Виконати завдання, що вчитель роздав учням на аркушах.

Додаток Г

Конспект уроку з алгебри і початків аналізу в 11 класі

Тема уроку. Прості і складені числа. Нескінченність множини простих чисел. Решето Ератосфена.

Мета уроку: сформувати поняття простого та складеного числа; ознайомити учнів з методом пошуку простих чисел — решетом Ератосфена; довести, що множина простих чисел є нескінченною.

Тип уроку: комбінований.

Хід уроку**I. Організаційний момент**

Привітання. Перевірка присутніх. Налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання**III. Актуалізація опорних знань**

Фронтальне опитування

1. Що таке натуральне число?
2. Які числа діляться лише на себе і на 1?
3. Приклади парних і непарних чисел.
4. Чим просте число відрізняється від складеного?

Означення: дільником натурального числа a називається таке натуральне число b , на яке дане число a ділиться без остачі.

Із означення випливає, що будь-який дільник даного числа не більший, ніж дане число a . Це означає, що кількість дільників у даного числа скінченна і найменшим дільником є число 1. Отже, всі дільники деякого числа a знаходяться на проміжку $[1; a]$. Спробуємо згрупувати всі цілі невід'ємні числа за кількістю дільників у певні класи. До першого класу віднесемо число 0, бо воно ділиться на будь-яке натуральне число, тобто має безліч дільників. Цей клас позначимо $K_1 = \{0\}$. До другого класу віднесемо натуральне число 1, яка має рівно один дільник. Цей клас позначимо $K_2 = \{1\}$. До третього класу,

який позначимо K_3 , віднесемо всі натуральні числа, що мають рівно два дільники. І нарешті, до четвертого класу, який позначимо K_4 , віднесемо натуральні числа, що мають три і більше дільників. Оскільки кожен із вказаних класів непорожній, класи попарно не перетинаються, а їх об'єднання утворює всю множину цілих невід'ємних чисел, то ми розбили множину цілих невід'ємних чисел на класи, що попарно не перетинаються. Розглянемо більш детально два останні класи. Елементи кожного із класів приводять до появи нових понять: „просте число” і „складене число”.

Означення: більші за одиницю натуральні числа, які мають рівно два дільники, називаються **простими**.

Означення: більші за одиницю натуральні числа, які мають більше, ніж два дільники, називаються **складеними**.

Числа 0 і 1 не відносяться ні до простих, ні до складених. В означеннях простих і складених чисел нічого не говориться про їх існування, а тому потрібно довести відповідні теореми.

Теорема (про існування простих чисел): найменший, відмінний від 1, дільник більшого за 1 натурального числа a є просте число.

Доведення: за умовою $a \in \mathbb{Z}_0$ і $a > 1$. Множина дільників числа a не може бути порожньою, бо $a : 1$ і $a : a$. Крім того, ця множина є скінченною, а тому на проміжку $[1; a]$ існує найменший, відмінний від одиниці дільник числа a . Нехай таким дільником буде число p . Тоді $a : p$, причому $1 < p \leq a$. З'ясуємо, простим чи складеним є число p . Припустимо, що число p – складене, тоді воно має принаймні три дільники $(1, p_1, p)$, де $1 < p_1 < p$. Оскільки $a : p$ і $p : p_1$, то за властивістю транзитивності $a : p_1$. Отже, p_1 є дільником числа a . Це суперечить вибору числа p , як найменшого дільника числа a . Ця суперечність говорить про те, що наше припущення про те, що p – складене число, було хибним. Отже, p – просте число, тобто прості числа існують. Теорема доведена.

Доведена теорема була сформульована і доведена у 3 ст. до н. е. Евклідом. Це єдина проблема теорії простих чисел, яку вдалося розв'язати античним математикам. Разом з тим доведена теорема нічого не говорить про кількість простих чисел, а тому слід довести теорему.

Теорема (Евкліда): множина простих чисел нескінченна.

Доведення: проведемо методом від супротивного, припустивши, що множина простих чисел скінченна. Задамо цю множину переліком:

$A = \{p_1 p_2 p_3 \dots p_k\}$ де вони записані у порядку зростання. Утворимо нове число $b = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k + 1$. Легко бачити, що $b > 1$, а тому, згідно з теоремою про існування простих чисел, число b буде мати відмінний від 1 простий дільник. Нехай це буде число p . Оскільки, p – дільник числа b , то $b : p$. Оскільки p – просте число, то $p \in A$. Тоді за теоремою про подільність добутку цей добуток буде ділитись націло на p . Це означає, що число p дорівнює якомусь елементу з множини A . Тоді справедливим буде твердження: $(p_1 p_2 p_3 \dots p_k) : p$, бо там записані всі прості числа. Нехай для визначеності $p = p_2$, тоді $b : p_2$. Оскільки $b : p_2$ і $(p_1 p_2 p_3 \dots p_k) : p$, то за теоремою про подільність різниці, різниця $(b - p_1 p_2 p_3 \dots p_k) : p_2$, тобто $1 : p_2$. Це суперечить тому, що $p_2 > 1$. Ця суперечність і говорить, що наше припущення про скінченність множини простих чисел було хибним. Теорема доведена.

Спостерігаючи за таблицею простих чисел, можна виявити прості числа–близнюки, різниця між якими дорівнює двом (5 і 7, 17 і 19). Існують надзвичайно великі проміжки натурального ряду, на яких немає жодного простого числа. На даний час відомо такий проміжок $\underbrace{n! + 2; n! + 3, \dots n! + n}_{n-1}$.

На даний час невідомо скінченною чи нескінченною є множина простих чисел–близнюків. Є ще багато нерозв'язаних питань у теорії простих чисел.

Для спрощення процесу знаходження простих дільників у даного числа доводять теореми:

Теорема: найменший, відмінний від 1, простий дільник натурального числа a не перевищує кореня квадратного із цього числа a .

Доведення: нехай цим числом є число p , тобто $a : p, p \neq 1$. Доведемо, що $p \leq \sqrt{a}$. Оскільки $a : p$, то $a = p \cdot b$. Порівняємо p і b : $b \geq p$, бо в противному разі число b мало б прості дільники, менші, ніж p , а тому число p не було б найменшим простим дільником числа a . Оскільки $b \geq p$, то помноживши обидві частини на p , маємо: $bp \geq p^2$. Таким чином, $p \leq \sqrt{a}$. Теорема доведена.

Теорема: якщо, більше за 1 натуральне число a не ділиться на жодне із простих чисел, які не перевищують корінь квадратний $\sqrt{a}$ із числа a , то це число a – просте.

Доведення: нехай $a \in N$ і $a > 1$. За теоремою про існування простого дільника число a має такий простий дільник. Крім того, за попередньою теоремою цей простий дільник не перевищує $\sqrt{a}$. Якщо число a – складене, то його найменший простий дільник, відмінний від одиниці, за попередньою теоремою не перевищує $\sqrt{a}$. За умовою даної теореми число a не ділилося на жодне із простих чисел, які не перевищують квадратного кореня із цього числа, а тому число a є простим. Теорема доведена.

V. Перевірка знань учнями матеріалу.

Варіант 1

1. Чи може сума трьох послідовних натуральних чисел бути простим числом? Доведіть.
2. Просте чи складене число $2^{2025} - 1$?
3. Якщо p – просте число, більше ніж 3, то $p^2 - 1$ ділиться на 24. Доведіть.
4. Визначте, на який день тижня припадає ваша дата народження.

Варіант 2

1. Чи може сума п'яти послідовних натуральних чисел бути простим числом? Доведіть.
2. Просте чи складене число $2^{2024} - 1$?

3. Якщо p – непарне просте число, більше ніж 3, то $p^2 - 1$ кратне 8.

Доведіть.

4. Визначте, на який день тижня припадає ваша дата народження.

VI. Домашнє завдання.

Виконати завдання, що вчитель роздав учням на аркушах.

Додаток Д

Конспект уроку з алгебри і початків аналізу в 11 класі

Тема: Графічний метод розв'язання кубічного рівняння

Мета уроку: ознайомити учнів з графічним методом розв'язання кубічних рівнянь, навчити будувати графіки кубічних функцій та знаходити наближені значення коренів рівняння за допомогою графіків; розвивати графічні навички учнів, вміння аналізувати та інтерпретувати графіки функцій, сприяти розвитку логічного мислення та просторової уяви.

Тип уроку: комбінований

ХІД УРОКУ**I. Організаційний етап**

Привітання учнів.

Перевірка готовності до уроку (наявність необхідного обладнання).

Оголошення теми та мети уроку.

II. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування:

1. Що таке кубічне рівняння? Який його загальний вигляд?
2. Які алгебраїчні методи розв'язання кубічних рівнянь ви знаєте?
3. Як можна знайти корені рівняння за допомогою графіка?

III. Вивчення нового матеріалу

Кубічне рівняння — це рівняння виду $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ($a \neq 0$), де a, b, c, d — дійсні коефіцієнти, x — змінна.

Графічний метод розв'язання кубічного рівняння:

Щоб розв'язати кубічне рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ графічним методом, необхідно:

1. Побудувати графік функції $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
2. Знайти точки перетину цього графіка з віссю абсцис (віссю x).

3. Абсциси точок перетину є наближеними коренями кубічного рівняння.

Етапи побудови графіка кубічної функції:

1. Знаходження області визначення: для кубічної функції область визначення – всі дійсні числа ($D(y) = (-\infty; +\infty)$).
2. Знаходження точок перетину з осями координат:
 - З віссю y : підставити $x=0$ у рівняння функції ($y=d$). Отримаємо точку $(0;d)$.
 - З віссю x : розв'язати рівняння $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Це і є наша мета, але графічно ми знаходимо наближені значення. Для побудови графіка нам знадобиться кілька точок.
3. Знаходження кількох додаткових точок: підставити кілька довільних значень x у рівняння функції та обчислити відповідні значення y .
4. Побудова графіка.

Завдання 1: Розглянемо рівняння $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Побудуємо графік функції $y = x^3 - 3x + 2$.

Точка перетину з віссю y : $(0; 2)$.

Знайдемо кілька додаткових точок:

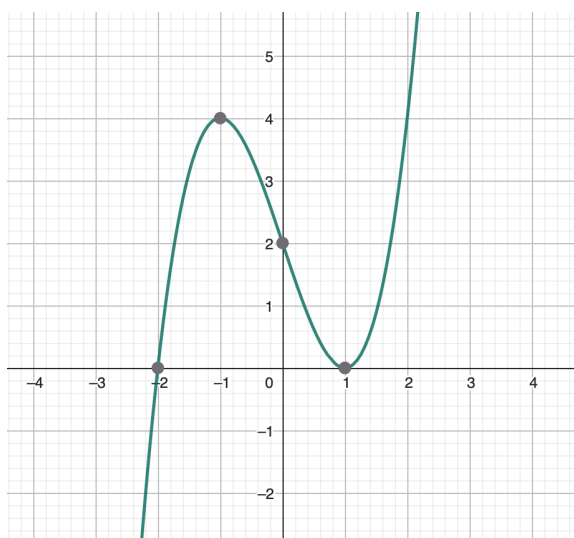
$$x = 1 \Rightarrow y = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0 \Rightarrow (1; 0)$$

$$x = -2 \Rightarrow y = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 2 = -8 + 6 + 2 = 0 \Rightarrow (-2; 0)$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 8 - 6 + 2 = 4 \Rightarrow (2; 4)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4 \Rightarrow (-1; 4)$$

Побудуємо графік:



Визначимо точки перетину графіка з віссю x : $(-2; 0)$ та $(1; 0)$. (Зауважимо, що в точці $x = 1$ графік дотикається до осі x , що означає кратний корінь).

Отже, коренями рівняння $x^3 - 3x + 2 = 0$ є $x = -2$ та $x = 1$.

Завдання 2: Розглянемо рівняння $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

Побудуємо графік функції $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Точка перетину з віссю y : підставимо $x = 0$ у рівняння функції:

$y = 0^3 - 2 \cdot 0^2 - 0 + 2 = 2$. Отже, точка перетину з віссю y є $(0; 2)$.

Знайдемо кілька додаткових точок:

$$x = 1 \Rightarrow y = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 1 - 2 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow (1; 0)$$

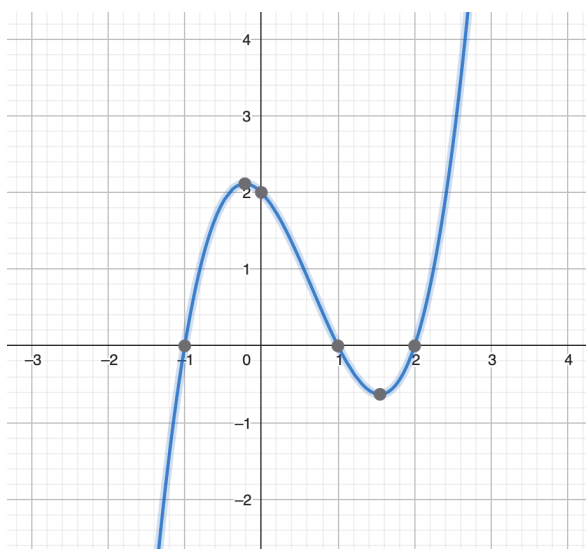
$$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - (-1) + 2 = -1 - 2 + 1 + 2 = 0 \Rightarrow (-1; 0)$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 8 - 8 - 2 + 2 = 0 \Rightarrow (2; 0)$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 3 + 2 = 27 - 18 - 3 + 2 = 8 \Rightarrow (3; 8)$$

$$x = -2 \Rightarrow y = (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 - (-2) + 2 = -8 - 8 + 2 + 2 = -12 \\ \Rightarrow (-2; -12)$$

Побудуємо графік:



Визначимо точки перетину графіка з віссю x :

Точки перетину графіка функції $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ з віссю абсцис (віссю x) є ті точки, де $y = 0$. З наших обчислень ми бачимо, що це відбувається при наступних значеннях x :

- $x = 1$, оскільки точка $(1;0)$ лежить на графіку.
- $x = -1$, оскільки точка $(-1;0)$ лежить на графіку.
- $x = 2$, оскільки точка $(2;0)$ лежить на графіку.

Отже, коренями рівняння $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ є $x = -1$, $x = 1$ та $x = 2$.

IV. Закріплення вивченого матеріалу

Розв'язати рівняння:

1) $x^3 - x = 0$,

3) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$.

2) $x^3 + 1 = 0$,

V. Підбиття підсумків уроку

Узагальнити основні етапи графічного методу розв'язання кубічних рівнянь.

Наголосити на перевагах та недоліках графічного методу.

Відзначити активність учнів на уроці.

VI. Домашнє завдання

- Розв'язати графічним методом кубічне рівняння $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$
- Повторити основні поняття про графіки функцій.