

Міністерство освіти і науки України
Херсонський державний університет
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

УЗАГАЛЬНЕНА КАНТОРОВА ДОСКОНАЛА МНОЖИНА У КУРСІ
МАТЕМАТИКИ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ

Кваліфікаційна робота (проект)
на здобуття ступеня вищої освіти “бакалавр”

Виконала: студентка 4-го курсу, 12-421
групи

Спеціальності: 014 Середня освіта

Спеціалізація: 014.04 Математика

Освітньо-професійної програми «Середня
освіта (математика)» першого
(бакалаврського) рівня вищої освіти

Цимбаляк Катерина Андріївна

Керівник доктор фізико-математичних наук,
професор Савченко Олександр Григорович

Рецензент доцентка кафедри інформаційних
технологій та фіз.-мат. дисциплін
Херсонської філії Національного
університету кораблебудування ім. адмірала
Макарова, кандидатка технічних наук

Литвиненко О.І.

Івано-Франківськ – 2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи формування дослідницьких умінь школярів	5
РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи формування дослідницьких умінь школярів	5
1.1. Аналіз наукових підходів до формування дослідницьких умінь.....	5
1.1. Аналіз наукових підходів до формування дослідницьких умінь.....	5
1.2. Основні відомості про побудову канторової множини.....	8
1.2. Основні відомості про побудову канторової множини.....	8
1.3. Основні відомості про побудову функції Кантора.....	12
1.3. Основні відомості про побудову функції Кантора.....	12
Розділ 2. Практичні аспекти використання наскрізної задачі в шкільному курсі математики	16
Розділ 2. Практичні аспекти використання наскрізної задачі в шкільному курсі математики	16
2.1. Аналіз шкільної програми та можливості інтеграції наскрізної задачі.....	16
2.1. Аналіз шкільної програми та можливості інтеграції наскрізної задачі.....	16
2.2. Етапи впровадження наскрізної задачі в навчальний процес.....	19
2.2. Етапи впровадження наскрізної задачі в навчальний процес.....	19
2.3. Розробка навчальних завдань на основі наскрізної задачі.....	27
2.3. Розробка навчальних завдань на основі наскрізної задачі.....	27
ВИСНОВОК.....	32
ВИСНОВОК.....	32
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	33
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	33

ВСТУП

Актуальність. На сучасному етапі розвитку базової середньої освіти формування математичної компетентності займає провідне місце. Важливу роль в досягненні наведеної цілі відіграє зацікавленість та особиста мотивація здобувачів освіти до вивчення математики. При цьому бажано будувати навчання таким чином, щоб учні не просто вивчали наведений матеріал, а самі ставали активними дослідниками.

Метою даної роботи є дослідження ідеї вивчення наскрізної задачі «Канторова множина та системи числення», опрацювання якої підвищить розвиток математичних здібностей школярів, підсилить їх мотивацію та пізнавальний процес, спонукатиме до власної дослідницької діяльності.

Поставлена мета вимагає виконання таких **завдань**:

- аналіз нормативно-правових документів та літератури з методики навчання математики з проблеми дослідження;
- побудова канторової досконалої множини для п'ятіркової та семіркової системи числення, з подальшим узагальненням;
- обчислення функції Кантора для п'ятіркової та семіркової системи числення, з подальшим узагальненням;
- розробка плану впровадження теми «Канторова множина та системи числення» в шкільний курс з урахуванням математичних знань відповідно до віку учнів.

Об'єкт: освітній процес в закладах повної загальної середньої освіти.

Предмет: методична система формування дослідницьких математичних умінь в процесі дослідження теми «Канторова множина та системи числення» в закладах загальної середньої освіти.

Методи дослідження – це система теоретичних та емпіричних методів, зокрема:

- теоретичних: аналіз нормативно-правових документів, математичної, психолого-педагогічної, методичної літератури з окресленої

проблеми, підручників та навчальних посібників з математики, алгебри та геометрії для з'ясування способів формування дослідницьких умінь здобувачів освіти під час вивчення шкільного курсу математики;

- **емпіричних:** спостереження за процесом вивчення курсу математики в закладах повної загальної середньої освіти з метою виявлення можливостей інтеграції теми «Канторова множина та системи числення» для школярів.

Практичне значення: Основні результати роботи можуть бути використані в освітньому процесі для підвищення рівня математичної компетентності учнів, розвитку їхніх дослідницьких навичок та мотивації до вивчення математики. Запропонований підхід може бути впроваджений як у межах окремих уроків, так і в рамках факультативних курсів та спецкурсів для учнів із поглибленим вивченням математики. Крім того, отримані результати можуть бути корисними для укладання навчально-методичних посібників, що сприятиме підвищенню якості математичної підготовки учнів у закладах загальної середньої освіти.

РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи формування дослідницьких умінь школярів

1.1. Аналіз наукових підходів до формування дослідницьких умінь.

Сьогодні Україна знаходиться на етапі активної реформи в базовій середній освіті. Нова українська школа – це дієва формула, яка робить навчання комфортним та практичним, а головне навчає критично мислити, досліджувати та пропонувати власні ідеї. Тобто тепер пріоритетне місце займають компетентності, завдяки яким людина зможе існувати в суспільстві, навчатися впродовж життя та займатися професійною діяльністю. Очевидно, що математична грамотність займає одне з ключових місць, а для її ефективного розвитку учні мають володіти дослідницькими вміннями. Адже будучи активними дослідниками учні зможуть якісніше здобути математичні компетентності.

Ідею розвитку дослідницьких умінь учнів підтримує багато педагогів-математиків. Однак, кожен з них має власний погляд на досягнення цієї мети. Дане питання у своїх роботах часто досліджують О. Онопрієнко та С. Скворцова. У роботі [14] розглядається розвиток дослідницьких умінь учнів початкової школи шляхом інтеграції. Автори вважають, що у школярів має формуватися цілісний науковий світогляд, а це можливо тоді, коли певні знання формуються не окремо, а в об'єднанні з іншими. Проте, часто хибно вважають, що об'єднання елементів різних предметів вже є інтеграцією. Насправді інтеграція може бути як міжпредметною, так і внутрішньо предметною, головне – за об'єкт інтеграції брати не спільний об'єкт, а спільну компетентність. Автори зазначають, що у зв'язку із цим виникають труднощі в інтеграції математики із іншими предметами. Разом з тим предмет «Математика» по суті вже є інтеграцією двох предметів: алгебри та геометрії.

Ідею інтеграції також підтримує у своїй роботі [18] О. Школьний. Автор ознайомлює із методичними особливостями роботи з модельними програмами з математики для 5-6 та 7-9 класів (Василишин та ін., 2021, Василишин та ін., 2023), які були створені колективом у складі Марії Василишин, Андрія Милянника, Миколи Працьовитого, Юлії Простакової та Олександра Школьного. Суттєвою відмінністю цих модельних програм від інших є те, що алгебра та геометрія вивчається в інтеграції, а не окремо, як це було раніше. Також змінюється і стиль викладу матеріалу. Оскільки абстрактне мислення школярів цього віку ще є не достатньо сформованим, то вивчення термінів, означення яких вже сформовані вчителем, чи підручником, є складним завданням. З огляду на це основним завданням стає показати учням, що певні терміни вони вже знають із повсякденного життя і можуть сформулювати самостійно. Особливо актуальним це є для геометричного матеріалу. Тобто фактично учні самостійно досліджують певне поняття та формують своє означення, використовуючи свої дослідницькі уміння.

В іншій статті [23] О. Школьний стверджує, що така модельна програма та підручник до неї були розроблені, опираючись на закордонний досвід. Тобто в інших країнах інтеграція «Алгебри» та «Геометрії» в єдиний предмет «Математика» активно використовується. До того ж навчання будується таким способом, що учні отримують відповіді на питання, які їх цікавлять. Тобто на початку уроку має бути сформоване проблемне питання, щоб учні мали мотивацію вивчити навчальний матеріал та дослідити порушену проблему.

А. Тушев та В. Чупордя у статті [16] розв'язують проблему формування дослідницьких умінь при побудові динамічних розробок з геометрії з допомогою програми Geogebra. Автори стверджують, що програма є потужною та зрозумілою у використанні, і особливо

актуальною під час дистанційного навчання. Вчителі можуть використовувати її як для побудови якісних малюнків, так і для розвитку дослідницьких умінь учнів. В ході виконання завдання у програмі Geogebra в учнів має виникати питання: «Що, якщо?». Здобувачі освіти мають змогу застосувати до фігури ту умову, яка їх цікавить і таким чином дослідити побудову.

Н.Любчак у своїй роботі [6], як один із дієвих методів розвитку дослідницьких умінь, розглядає проектну діяльність. Виконання проекту обов'язково має вирішувати певну проблему. Оскільки в роботі проводиться дослідження, то це сприяє розвитку дослідницьких умінь учнів. Важливим є те, що викладач не має втручатися в діяльність учнів, а може лише консультувати їх в деяких питаннях.

А. Яковенко у статті [19] дослідив питання ставлення вчителів до формування навчально-дослідницьких умінь учнів на уроках математики. З аналізу відповідей наданих педагогами встановлено, що найдієвішими методами формування дослідницьких умінь на думку вчителів є прийом «нових варіацій» та прийом «інформаційної недостатності». Для першого прийому учням необхідно розв'язувати завдання декількома способами та робити аналіз найбільш раціонального. У другому прийомі учні отримують завдання із недостатньою кількістю інформації, яку надалі вони мають знайти самостійно.

Разом з тим ідея розвитку дослідницьких умінь та математичної компетентності є не лише провідною ідеєю математиків та педагогів, вона закріплена у нормативно-правових документах нашої держави. Як зазначається у Концепції розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти): «Упровадження природничо-математичної освіти (STEM-освіти) вимагає від педагогічних та науково-педагогічних працівників активного використання новітніх педагогічних підходів до викладання та оцінювання, інновацій у сфері освіти, практики

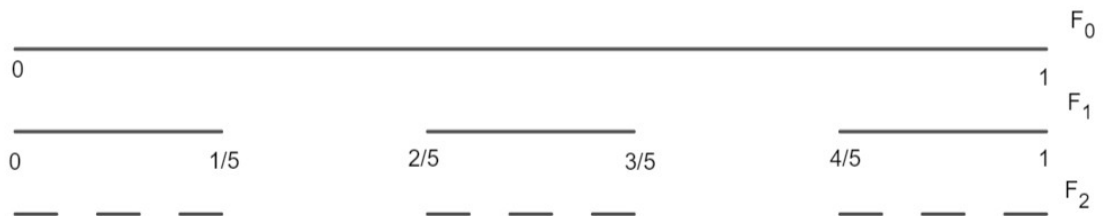
міжпредметного навчання, методів та засобів навчання, що сприяють розвитку дослідницьких та винахідницьких компетентностей здобувачів освіти.»[13]. До того ж положення Нової української школи не забороняють навчальні експерименти, а навпаки підтримують їх: «Щоб навчати по-новому, вчитель повинен отримати свободу дій – обирати навчальні матеріали, імпровізувати та експериментувати. Цю свободу дає новий закон «Про освіту».»[8, 12]

1.2. Основні відомості про побудову канторової множини

Розглянемо одиничний відрізок $[0;1]$. Розділимо його на 5 рівних

частин. Вилучимо інтервали 2 та 4, залишаючи $[0;] \cup [;] \cup [;]$.

Повторюємо аналогічні дії на : ділимо відрізки на 5 рівних частин та



вилучаємо 2-гі та 4-ті інтервали. Залишені 9 відрізків об'єднаємо та назвемо . Продовжуємо цей процес до нескінченності. На k -тому кроці знайдемо перетин цих множин: $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_k$. Отримали п'ятіркову множину Кантора (рис. 1).

Рис. 1. Канторова множина на п'ятірковій системі числення

Розглянемо структуру цієї множини та спробуємо з'ясувати загальну довжину відрізків, що залишаються та інтервалів, що вилучаються.

Початковий відрізок має довжину 1, множина має довжину: $3 \cdot =$

; множина має довжину: $9 \cdot = =$. Таким чином довжина k -тої

множини становить. При $k \rightarrow \infty$.

На множині вилучили $2 \cdot =$.

На.

На:

На 3^{k-1} . При $k \rightarrow \infty$ довжина $=$.

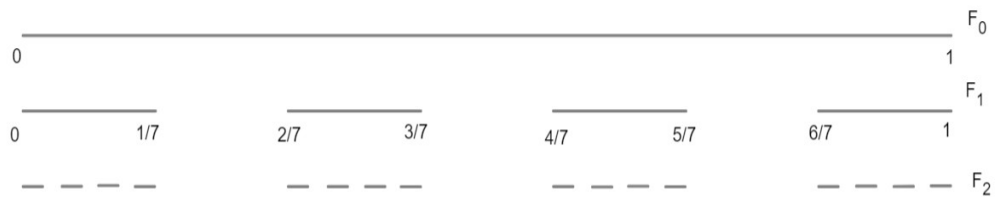
Кожне з чисел із відрізка $[0, 1]$, яке входить у множину, можна записати в п'ятірковій системі: , де числа можуть набувати значень 0, 1, 2, 3, 4. Встановимо таку відповідність: якщо після поділу множини на 5 відрізків число належить першому зліва відрізку, то ставимо цифру 0; другому відрізку – цифра 1; третьому відрізку – цифра 2; четвертому відрізку – цифра 3; п'ятому відрізку – цифра 4. Оскільки при побудові канторової п'ятіркової множини інтервали 2 та 4 вилучаємо, то очевидно, що число, яке належить цій множині в записі послідовності матиме лише числа 0, 2, 4. Тобто кожній точці $x \in F$ відповідає послідовність: , , ... , , ... , де дорівнює 0, 2, 4.

Побудуємо канторову множину на семірковій системі числення.

Одиничний відрізок $[0;1]$ розділимо на 7 рівних частин. Вилучимо

відрізки 2, 4, 6, залишаючи $[0; \frac{1}{7}] \cup [\frac{2}{7}; \frac{3}{7}] \cup [\frac{4}{7}; \frac{5}{7}] \cup [\frac{6}{7}; 1]$. Повторюємо аналогічні

дії на : ділимо відрізки на 7 рівних частин та відкидаємо 2-гі, 4-ті та 6-ті.



Залишені 16 відрізків об'єднаємо та назвемо . Продовжуємо цей процес до нескінченності. Отримали семіркову множину Кантора (рис. 2).

Рис. 2. Канторова множина на семірковій системі числення

Обчислимо загальну довжину відрізків, що залишаються та інтервалів, що вилучаються. Початковий відрізок має довжину 1, множина має

довжину: $4 \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{7}$; множина має довжину: $16 \cdot \frac{4}{7^2} = \frac{16}{7}$. Таким чином

довжина k -тої множини становить $\frac{4^k}{7^k}$. При $k \rightarrow \infty$.

На множині вилучили $3 \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{7}$.

На .

На : .

На 4^{k-1} . П р и $k \rightarrow \infty$ д о в ж и н а $\rightarrow =$.

Встановимо правило за яким кожне з чисел із відрізка $[0, 1]$, яке входить у множину , запишемо в семірковій системі: , де числа можуть набувати значень 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Якщо після поділу множини на 7 відрізків число належить першому зліва відрізка, то ставимо цифру 0; другому відрізка – цифра 1; третьому відрізка – цифра 2; четвертому відрізка – цифра 3; п'ятому відрізка – цифра 4, шостому відрізка – цифра 5, сьомому відрізка – цифра 6. Зауважимо, що при побудові канторової семіркової множини відрізки 2, 4 та 6 вилучаємо, тому кожній точці $x \in F$ відповідає послідовність: , , ... , , ... , де дорівнює 0, 2, 4, 6

Виникає питання: а чи можна розділити одиничний відрізок на 9, 11, 13 і т.д. частин? Використовуючи наведенні міркування, спробуємо узагальнити побудову канторових досконалих множин.

Розглянемо одиничний відрізок $= [0;1]$. Розділимо його на $2n+1$ рівних частин, n – деяке натуральне фіксоване число. Домовимося, що нумерація відрізків починатиметься з цифри 0, тобто відрізка m відповідає цифра $m-1$, $m =$. Тепер вилучимо всі відрізки, яким відповідає непарне число, тобто це відрізки $2m-1$, $m =$. Залишені відрізки об'єднаємо і матимемо:

$$= [0;] \cup [;] \cup \dots \cup [;], \text{ де } =$$

Тепер кожен з відрізків множини знову поділимо на 2^{n+1} рівних відрізків та вилучимо відрізки 2^{m-1} , $m = 1, 2, \dots, 2^n$. Перетин цих відрізків назвемо F_n . Продовжимо цей крок до нескінченності та отримаємо: $F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$. Множина, яка утворилася є досконалою множиною Кантора. Знайдемо сумарну довжину відрізків з множини F . Відрізок $[0, 1]$ має довжину 1. Після поділу відрізка на 2^{n+1} однакових відрізків, кількість відрізків, що залишається становить 2^{n+1} . Таким чином множина F_n має довжину: $|F_n| = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Множина F має довжину: $|F| = \lim_{n \rightarrow \infty} |F_n| = 0$.

Таким чином довжина k -тої множини становить $|F_k| = \left(\frac{3}{4}\right)^k$. При $k \rightarrow \infty$ $|F_k| \rightarrow 0$.

Тепер знайдемо сумарну довжину відрізків, що вилучаємо.

На множині F_n вилучили: $n \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^n}$.

На F_{n-1}

На F_{n-2} :

На F_{n-k} При $n \rightarrow \infty$ довжина $|F_n| = 0$.

Кожне з чисел із відрізка $[0, 1]$, яке входить у множину F , можна записати у відповідній 2^{n+1} системі числення: $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$, де числа a_n можуть набувати значень 0, 1. Проте кожній точці з канторової досконалої множини $x \in F$ відповідає послідовність: $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, де a_n можуть набувати значень 2^m , $m = 0, 1, \dots, 2^n$.

1.3. Основні відомості про побудову функції Кантора

Побудуємо канторову функцію для п'ятіркової канторової множини.

Для цього виконаємо такі кроки:

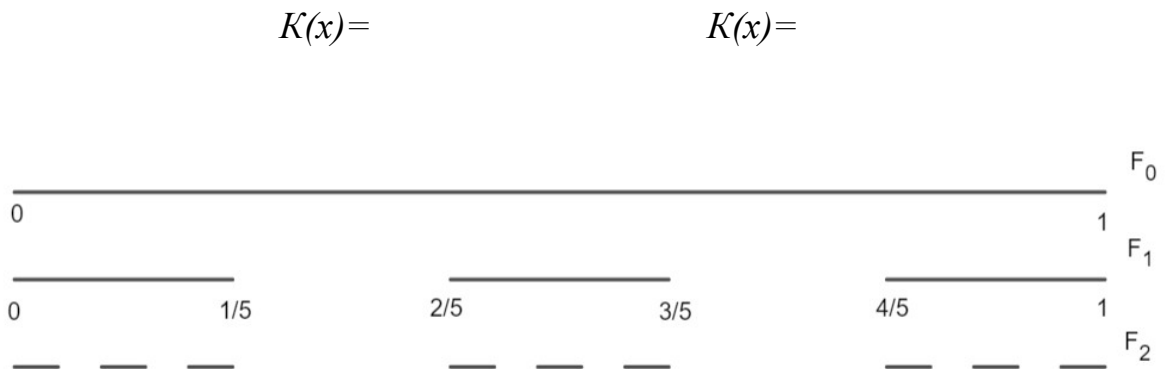
1. На відрізку, який вилучаємо, обираємо один із кінців.
2. В п'ятірковому записі цього числа всі цифри ділимо на 2.
3. Обчислюємо значення функції. Це значення матиме кожна точка з обраного відрізка.
4. Робимо аналогічні кроки для кожного з вилучених відрізків.

Обчислюємо значення функції на $\frac{1}{5}$. Поділимо координати навпіл та отримаємо трійковий запис: $\frac{1}{3}$. Обчислюємо значення: $\frac{1}{3}$. Переконаємося, що і на іншому кінці інтервалу таке ж саме значення: $\frac{1}{3}$. Поділимо координати навпіл та отримаємо трійковий запис: $\frac{1}{3}$. Обчислюємо значення: $\frac{1}{3}$. Отже, інтервалу відповідає функція $K(x) = \frac{1}{3}$.

Обчислюємо значення функції на $\frac{2}{5}$. Поділимо координати навпіл та отримаємо трійковий запис: $\frac{2}{3}$. Обчислюємо значення: $\frac{2}{3}$. Отже, інтервалу відповідає функція $K(x) = \frac{2}{3}$.

Обчислюємо значення функції на $\frac{3}{5}$. Поділимо координати навпіл та отримаємо трійковий запис: $\frac{3}{3}$. Обчислюємо значення: 1 . Отже, інтервалу відповідає функція $K(x) = 1$.

Виконуємо аналогічні дії для кожного вилученого інтервалу. Цей процес продовжуємо для всіх вилучених інтервалів. На деякому етапі отримали такі результати (рис. 3):



$$K(x) = \begin{cases} K(x) = & K(x) = & K(x) = \end{cases}$$

Рис. 3. Значення функції Кантора в п'ятірковій системі на деякому кроці

Тоді функція Кантора матиме вигляд (рис. 4):

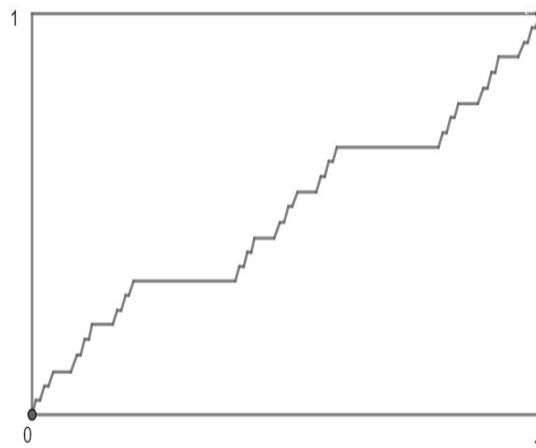


Рис. 4. Графік функції Кантора в п'ятірковій системі на деякому кроці

Щоб побудувати канторову функцію для семіркової канторової множини, будемо дотримуватися аналогічного алгоритму, як і для п'ятіркової системи. В інтервалі обираємо точку . Їй відповідає запис: 7 . Поділимо навпіл, отримаємо: 4 . Обчислюємо значення функції: $\frac{1}{4}$. Інший кінець інтервалу матиме таке ж саме значення. Отже, інтервалу відповідає функція $K(x) = \frac{1}{4}$.

В інтервалі обираємо точку . Їй відповідає запис: 7 . Поділимо навпіл, отримаємо: 4 . Обчислюємо значення функції: $\frac{1}{4}$. Отже, інтервалу відповідає функція $K(x) = \frac{1}{4}$.

Продовжуємо виконувати аналогічні дії на кожному вилюченому інтервалі. На певному етапі отримаємо такі значення функції Кантора (рис.5):

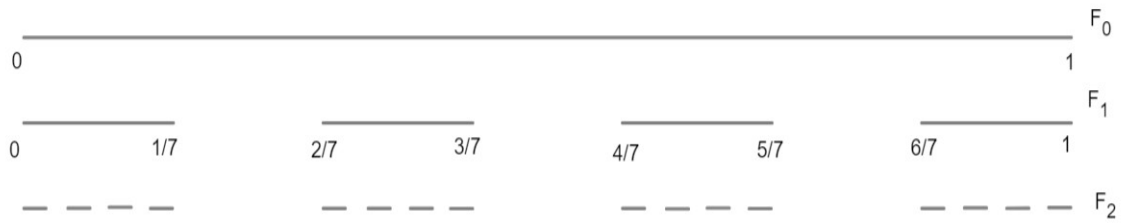


Рис. 5 Значення функції Кантора в семірковій системі на деякому кроці

Оскільки канторову досконалу множину можна побудувати для будь-якої $2n+1$ системи числення при фіксованому натуральному n , то для

кожної з них визначимо функцію Кантора. Отже, якщо $x \in F$, x можна

представити у такому вигляді:

, де числа можуть набувати значень виду 2^m , $m =$.

Визначимо , тобто фактично ми знайшли число, якому відповідає послідовність в системі числення з основою $n+1$.

Якщо $x \notin F$, то x належить деякому з вилучених на k – ому етапі

інтервалів. Можна довести, що значення функції Кантора у кінцевих точках визначеного інтервалу співпадають, а тому значення функції Кантора в будь-якій точці цього інтервалу будемо вважати рівним значенню в будь-якій його кінцевій точці.

Розділ 2. Практичні аспекти використання наскрізної задачі в шкільному курсі математики

2.1. Аналіз шкільної програми та можливості інтеграції наскрізної задачі

Розвиток дослідницьких умінь учнів має беззаперечне значення в сучасному світі. До цієї думки схиляється багато математиків-методистів, проте кожен з них пропонує свій спосіб для вирішення порушеної проблеми. На нашу думку, математичну підготовку необхідно реалізовувати таким чином, щоб після закінчення закладів загальної середньої освіти учні не лише вміли виконувати базові математичні обрахунки, а й розв'язували завдання з комбінованих тем; бачили різні способи застосування вивченої теми; прогнозували та досліджували різні математичні моделі; пропонували гіпотези та доводили або спростовували їх. Важливу роль в досягненні наведених цілей відіграє зацікавленість та особиста мотивація здобувачів освіти до вивчення математики. Пропонуємо будувати навчання таким чином, щоб учні не просто вивчали наведений матеріал, а самі ставали активними діячами та науковцями.

Реалізація даної ідеї може відбуватися таким чином: учні мають наскрізну задачу, поступові кроки до вирішення якої вони виконуватимуть впродовж всього свого навчання. Таким чином буде існувати мета до вивчення певної теми, а набутті знання одразу ж застосовуватимуться для опрацювання проблемного завдання. Разом з тим створюються сприятливі обставини для впровадження проектно-зорієнтованої технології навчання, яка надасть додаткову мотивацію до навчання; навчить критично осмислювати інформацію та використовувати набуті знання на практиці. Наскрізною задачею, яку доречно впровадити в шкільний курс математики, може стати узагальнена канторова множина. Безперечно, дана тема виноситься на

опрацювання лише в курсі вищої математики, проте при правильному плануванні етапів опрацювання, яке враховуватиме глибину знань та готовність до сприйняття інформації на конкретному етапі навчання, стає можливим її впровадження в шкільний курс.

Якщо проаналізувати математичне підґрунтя необхідне для вивчення узагальненої канторової множини, то виявимо такі теми: поняття відрізка та його поділу; дії над звичайними дробами; елементи комбінаторики; поняття множини та дії над нею; геометрична прогресія та сума нескінченно спадної геометричної прогресії; обернена функція; елементи методології математики. Оскільки, ці теми вивчаються в шкільному курсі математики, то для здобувачів освіти закладів загальної середньої освіти, які вивчають математику на поглибленому рівні, опрацювання запропонованої наскрізної задачі є цілком можливим завданням.

Окрім того М. Жалдак та Г. Михалін у роботі [4] звертають увагу на те, що в шкільному курсі змістова лінія «Елементи теорії множин» охоплює лише деякі поверхневі факти і вивчається недостатньо. Хоча в університетському курсі ця ж змістова лінія є дуже важливою для багатьох курсів. Тому автори пропонують починати її вивчення вже в середніх класах школи, при цьому доповнюючи великою кількістю зрозумілих для учнів прикладів. А також варто багатократно повертатися до цієї теми щоразу на більш підвищеному рівні. Тому впровадження наскрізної задачі не лише допоможе у формуванні дослідницьких умінь учнів, а й посилить змістову лінію «Елементи теорії множин».

Реалізувати цю ідею пропонуємо, використовуючи модельні програми «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Васишин М.С., Милянник А.І., Працьовитий М.В.,

Простакова Ю.С., Школьний О.В.) [9] та «Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (авт. Василюшин М. С., Милянник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьний О. В.) [10]. Адже, на наш погляд, ці програми є більш гнучкими, як зазначають автори: «Розподіл годин навчального навантаження здійснюється вчителем самостійно, виходячи з можливостей навчального плану школи з урахуванням особливостей учнів класу та власної педагогічної моделі навчання, для поглиблення вивчення тих чи інших тем, урізноманітнення форм освітнього процесу, узагальнення та тематичного оцінювання відповідно до навчального матеріалу та процесу досягнення тих чи інших освітніх результатів і орієнтирів для оцінювання згідно з Державним стандартом базової середньої освіти.»[9].

Найкращим варіантом опрацювання канторових досконалих множин є класи з поглибленим вивченням математики. Адже більша кількість годин дає можливість опрацювання додаткових тем. Вдалим є те, що модельна програма дозволяє реалізувати новітню технологію навчання, таку як проектне навчання. Саме під час виконання проектів учні можуть поступово опановувати запропоновану тему. Реалізовувати вивчення канторових досконалих множин пропонуємо в такій послідовності:

- 1) Ознайомлення із системами числення (5 клас)
- 2) Введення поняття відрізка та поділу відрізків (5 клас)
- 3) Визначення значення кінців відрізків (5 клас)
- 4) Ознайомлення із способами кодування (5 клас)
- 5) Формування поняття множини (5 клас)

- 6) Визначення приналежності точки через порівняння дробів з різними знаменниками (6 клас)
- 7) Обрахування довжини відрізків, що належать канторовій множині та які вилучаються на початкових множинах (6 клас)
- 8) Узагальнення знань про побудову канторової множини (7 клас)
- 9) Ознайомлення із скінченними та нескінченними множинами. Потужністю континуум (8 клас)
- 10) Знаходження точок канторової множини з допомогою геометричної прогресії (9 клас)
- 11) Ознайомлення з функцією Кантора (9 клас)
- 12) Обчислення загальної довжини відрізків канторової множини та вилучених інтервалів (10 клас)
- 13) Узагальнення знань (11 клас)

Варто зазначити, що при опрацюванні даної теми, ми пропонуємо дотримуватися проектної форми навчання. По суті саме вирішення наскрізної задачі та збір всіх необхідних матеріалів уже є проектом здобувачів освіти. Але необхідно додавати невеличкі проекти в процесі опрацювання теми. Окрім цього в роботу необхідно активно впроваджувати програми для якісної розробки малюнків та креслень, таких як «Geogebra». Адже, побудова малюнків учнями власноруч із застосуванням сучасних технологій може стати додатковою мотивацією до навчання.

2.2. Етапи впровадження наскрізної задачі в навчальний процес

Дотримуючись плану впровадження наскрізної задачі в шкільний курс математики, проілюструємо необхідні знання і навички учнів, а також очікувані дії вчителя на кожному етапі розгляду теми:

1. Ознайомлення із системами числення

В курсі 5 класу учні ознайомлюються із десятковою системою числення. Але десяткова система числення для школярів – це той запис чисел, до якого вони звикли. Саме тому в учнів може з'явитися логічне питання про те, які системи числення існують окрім десяткової. Насправді така ситуація викликає в учнів зацікавленість та мотивацію до вивчення теми. Тому вчитель має скористатися цим і познайомити учнів із іншими системами числення.

Аналізуючи підручник з математики для 5 класу Джона Ендрю Біоса [1], який розроблено відповідно до модельної програми «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Васишин М.С., Милянник А.І., Працьовитий М.В., Простакова Ю.С., Шкільний О.В.)[9], бачимо, що в якості інтегрованого модуля автор пропонує, розглянути інші системи числення, такі як римська та двійкова системи числення. Окрім того вчитель може пояснити, що для трійкової системи використовуємо цифри 0,1,2; для п'ятіркової 0, 1, 2, 3, 4 і т.д. Також свиникають сприятливі умови для створення міжпредметних зв'язків та інтеграції із предметом «Інформатика». Таким чином в учнів буде сформоване уявлення про існування інших систем числення, а також правила їх використання.

2. Введення поняття відрізка та поділу відрізків

Розділ найпростіші геометричні фігури на площині передбачає вивчення відрізка та його поділу. Оскільки ця тема є необхідною складовою для вивчення канторових досконалих множин, то необхідно відпрацювати навички учнів стосовно поділу відрізків. На цьому етапі учні мають розуміти поняття відрізка, а також вміти поділити його на 3, 5, 7 і т.д. рівних частин. Проте вчителю варто підбирати довжину відрізка так, щоб був можливим поділ на однакові відрізки, які

виражатимуться цілим числом, оскільки з дробами учні ще не працювали. Отримаємо такі малюнки (рис. 6):

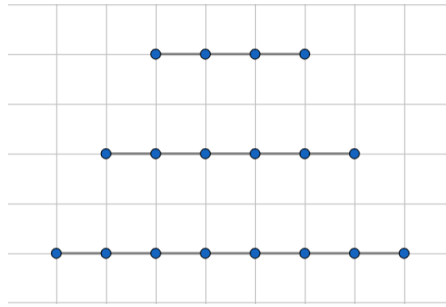


Рис. 6. Поділ відрізків на 3, 5, 7 рівних частин

3. Визначення значення кінців відрізків

Після того як учні вивчать звичайні дроби, то вчитель має ускладнити їх завдання, давши на поділ одиничний відрізок. Зрозуміло, що в цьому випадку довжина відрізків і самі точки поділу будуть виражатися дробовим числом. Наприклад, поділили відрізок на 5 частин, тому в знаменнику буде число 5. Тоді перша точка поділу - $\frac{1}{5}$, друга точка поділу - $\frac{2}{5}$, третя - $\frac{3}{5}$, четверта - $\frac{4}{5}$. На цьому етапі учні мають навчитися ділити одиничні відрізки на 3, 5, 7 і т.д. частин, та встановлювати числове значення точок поділу. Отримаємо такий результат (рис. 7):

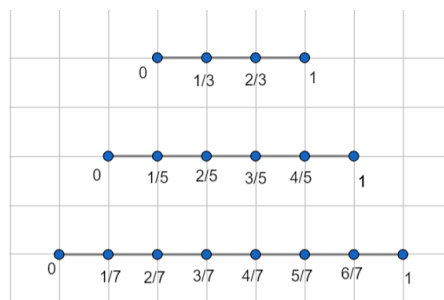


Рис. 7. Поділ

одиничних відрізків на

3, 5, 7 рівних частин

4. Ознайомлення із способами кодування

У 5 класі передбачається вивчення теми логічні та комбінаторні задачі, тому на цьому етапі можна ознайомити учнів із правилом закодовування точок канторової множини. Треба пояснити, що після поділу відрізка на 3, 5, 7 і т.д. рівних частин, кожному відрізку ставимо

у відповідність число. Тобто першому відрізку – 0, другому – 1, третьому – 2 і т.д. Потім відрізки з парними номерами залишаємо, а з непарними вилючаємо. Необхідно показати, що аналогічний поділ ми можемо зробити ще декілька разів з кожним залишеним відрізком. Проте далі вчитель сам визначає скільки таких поділів варто робити з учнями. Після цього треба показати, що після ще одного поділу кожному відрізку ставимо у відповідність числа за тим самим правилом. Далі учні можуть переходити до кодування. Кодувати учням буде легше не точки, що належать відрізкам, а самі відрізки. Тому що основною метою цього завдання є ознайомлення учнів із алгоритмом кодування відрізків канторової множини. На деякому етапі отримаємо такі результати (рис. 8):

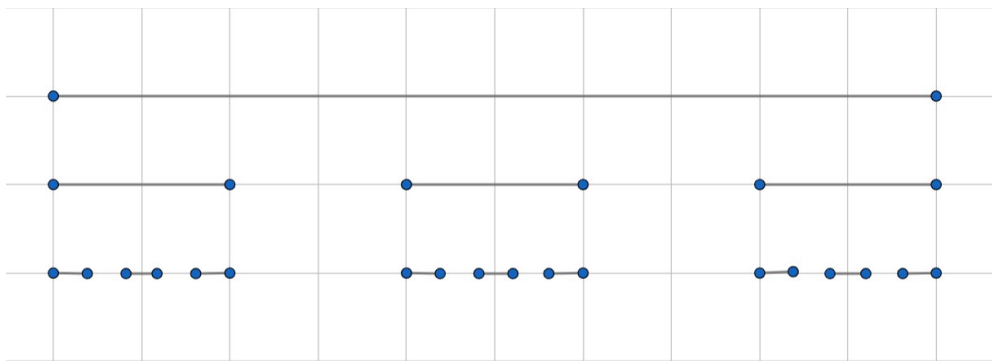


Рис. 8. Кодування відрізків на деякому етапі

5. Формування поняття множини

Змістова лінія «Елементи теорії множин» в шкільному курсі розглядається доволі поверхнево. Перше вивчення розпочинається у 8 класі в курсі алгебри. Учні, які вивчають математику на базовому рівні розглядають лише поняття множини, підмножини, способи задання множини та числові множини. Варто зазначити, що, наприклад, автори підручника з алгебри для 8 класу з поглибленим вивченням Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.[7] у 8 класі ознайомлюють учнів також із операціями над множинами, скінченними та

нескінченними множинами. Проте автор підручника з математики для 5 класу Джон Ендрю Біос [1] пропонує ознайомче вивчення множини на п'ятому році навчання. На цьому етапі розглядаються способи задання множини, переріз, об'єднання та різниця. Це дозволяє ознайомити здобувачів освіти із тим фактом, що такий поділ відрізків продовжується ще багато разів, залишенні відрізки об'єднуємо і отримуємо множину Кантора. На її досконалості наголошувати не варто, оскільки вивчення множин відбувається оглядово.

6. Визначення приналежності точки через порівняння дробів з різними знаменниками

Після того, як учні матимуть необхідні знання для порівняння дробів із різними знаменниками, вони вже зможуть визначити, чи належить точка відрізкам канторової множини, чи тим інтервалам, що вилучаються. Наприклад, маємо п'ятіркову систему і точку $x = \frac{1}{5}$. Тепер порівнюємо точку із кінцями відрізків канторової множини. $NSK(5; 8)=40$.

$$x = \frac{1}{5} = 0.2; \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{10} \rightarrow 0.2 < 0.25 < 0.3. \text{ Таким чином } 0.2 < 0.25.$$

Оскільки інтервал вилучається, то дана точка вилучається також.

7. Обрахування довжини відрізків, що належать канторовій множині та інтервалів, які вилучаються на початкових множинах

Коли здобувачі освіти вже можуть виконувати арифметичні дії над звичайними дробами, то замість вправ на додавання деяких випадкових дробів, можна запропонувати більш конкретну задачу. Наприклад, можна порахувати суму залишених відрізків та суму вилучених інтервалів на початкових множинах.

Наприклад, для п'ятіркової системи множина має довжину: $3 \cdot =$;

множина має довжину: $9 \cdot =$. Вилучені інтервали на мають довжину:

$2 \cdot =$; На множині :

Зручно те, що можна створити багато аналогічних завдань і учні не будуть виконувати абстрактні завдання, а працюватимуть із вже відомою їм канторовою множиною.

8. Узагальнення знань про побудову канторової множини

Традиційно курс математики 7 класу є новим етапом в математичній освіті учнів, тому починається із повторення вивченого у 5-6 класі. На цьому етапі буде доречно актуалізувати та узагальнити набуті знання про канторову множину. Пов'язано це з тим, що в попередніх класах учні побудову канторових множин робили покроково в силу вивчення нових тем, тому тепер це має скластися в загальну картину.

Реалізувати це можна з допомогою проектної моделі. Кожному учню може бути запропонована певна система числення, в якій він буде виконувати побудову. До речі, саму побудову краще виконувати у

програмі Geogebra. Також кожному здобувачу необхідно дати загальні інструкції: будуюмо одиничний відрізок, ділимо його на задану кількість рівних частин, визначаємо значення кінців відрізків; показуємо, які інтервали вилучаємо, а які відрізки залишаємо; визначаємо приналежність вибраної точки до певного відрізка, вводимо елементи кодування відрізків, продовжуємо процес побудови та робимо висновок про одержання канторової множини.

9. Ознайомлення із скінченними та нескінченними множинами, потужність континуум

На цьому етапі учні вже є готовими до сприйняття поняття множини більш детально. Як вже зазначалося, в класах із поглибленим вивченням у 8 класі розглядається поняття скінченних, нескінчених та злічених множин. Необхідно ознайомити учнів, що канторова множина має потужність континуум. Також можна показати й деякі інші властивості множин, але варто оцінити глибину знань учнів та їх готовність до сприймання цього матеріалу. Таким чином в учнів буде сформоване поняття канторової множини. Також за час вивчення цієї теми в учнів могло з'явитися логічне питання стосовно назви, а саме, чому множина є канторовою. Буде доречним розказати учням про Георга Кантора, а також запропонувати виконати проект стосовно життя та наукової діяльності цього математика.

10. Знаходження точок канторової множини з допомогою геометричної прогресії

Обрахувати числове значення точки канторової множини, яка задані числовою послідовністю є доволі складним завданням. Але якщо в послідовності простежується певна закономірність, то можна використати геометричну прогресію, яка вивчається в курсі 9 класу.

Також варто нагадати учням про принципи кодування точок, які належать канторовій множині.

Наприклад, $x = (0, 2, 4, 0, 2, 4, \dots)_5$. Звертаємо увагу учнів на те, що якщо додамо кожні 3 члена геометричної прогресії, то утвориться геометрична прогресія, де $b_1 =$; $q =$.

$$X = + = + +$$

Шукаємо суму спадної геометричної прогресії $x = =* =$.

11. Ознайомлення з функцією Кантора

У 9 класі здобувачі освіти активно вивчають функцію, перетворення графіків функції, тому, на нашу думку, доцільно опрацювати і функцію Кантора. Необхідно показати алгоритм побудови, структуру, обчислення значення функції та приблизний графік функції. Це завдання також можна реалізовувати, як проектну роботу. Оскільки функцію Кантора можна визначити на кожній $2n+1$ системі числення, то кожен учень чи група учнів будуватимуть цю функцію в різних системах числення.

12. Обчислення загальної довжини відрізків Канторової множини та вилучених інтервалів

Якщо в попередніх класах обраховувалася загальна довжина залишених відрізків та вилучених інтервалів лише на початкових множинах, то в 10 класі, коли учні вже розуміють поняття границі, можна запропонувати завдання обрахувати загальну довжину залишених відрізків та вилучених інтервалів на множині F_n , адже тут передбачається перехід до границі. В результаті буде отримано шокуючий для здобувачів освіти результат: загальна довжина залишених відрізків рівна 0, а вилучених інтервалів 1, тобто довжині початкового відрізка. На нашу думку таке неймовірне відкриття ще

більше зацікавить до вивчення математики та підштовхне до наукової діяльності.

13. Узагальнення знань

Методологія математики є важливою наскрізною лінією для вивчення. Адже учні вчаться висловувати гіпотези, доводити або спростовувати їх. На нашу думку, в 11 класі здобувачі освіти вже мають достатню глибину знань та математичний апарат для виконання узагальнення. Тому варто звернути увагу учнів на побудовані раніше трійкову, п'ятіркову, семіркову канторові множини та функції Кантора на них. Потім запропонувати розглянути канторову множину і функцію Кантора на загальний випадок, тобто на $2n+1$ систему числення. Таким чином завершується опрацювання даної теми в шкільному курсі. Проте сама тема цим не вичерпується, адже здобувачі можуть продовжити її опрацювання в курсі вищої математики. Тим самим залишається мотивація до подальшого вивчення математики.

2.3. Розробка навчальних завдань на основі наскрізної задачі

Завдання для закріплення знань і навичок учнів із канторової множини мають враховувати глибину знань учнів та відповідати навчальному матеріалу, який опрацювали. У 5 класі завдання мають охоплювати поняття про системи числення та роботу з ними, відрізок та його поділ, кодування точок, роботу із програмою Geogebra. Можливими є такі завдання:

Завдання 1. В якості міжпредметної інтеграції із інформатикою виконати переведення чисел з десяткової системи числення в двійкову і навпаки.

Завдання 2. В якості проектної роботи підготувати доповідь про трійкову, четвіркову і т.д. системи числення.

Завдання 3. Намалюйте відрізок довжиною 12 см, розділіть його на 3 рівні частини та визначте довжину кожного відрізка.

Завдання 4. Відрізок АВ має довжину 18 см розділіть його на 3, 6 та 9 рівних частин та визначте довжину утворених відрізків при кожному поділі.

Завдання 5. Відрізок АВ має довжину 9 см. Розділіть його на 3 рівних частини та вкажіть довжину кожного відрізка. Кожен отриманий відрізок ще раз розділіть на 3 частини та вкажіть довжину кожного.

Завдання 6. Одиничний відрізок поділено точками на 5 рівних частин. Вкажіть значення кожної точки

Завдання 7. Відрізок АВ має довжину 1 см, розділіть його на 3 рівні частини, вкажіть довжину кожного відрізка та значення кінців цих відрізків.

Завдання 8. Одиничний відрізок поділили на 5 рівних частин та пронумерували їх від 0 до 4 та вилучили 1 та 3 відрізок. З кожним залишеним відрізком виконали аналогічні дії. Вкажіть який код матимуть відрізки утворені при другому поділі.

Завдання 9. Одиничний відрізок поділили на 3 рівні частини та пронумерували їх від 0 до 2 та вилучили відрізок 1. Аналогічні дії зробили із залишеними відрізками ще 2 рази. Зобразіть з допомогою програми Geogebra даний поділ та вкажіть відрізок, якому відповідає код 022.

У 6 класі значно розширюються знання учнів про роботу із дробами. Тому здобувачі освіти можуть виконувати низку завдань, використовуючи роботу із звичайними дробами. На цьому етапі учні можуть встановлювати приналежність точки до певного відрізка через порівняння дробів із різними знаменниками, а також обраховувати

довжину відрізків касторової множини, що залишаються та тих, що вилучаються на початкових інтервалів побудови. Можливі такі варіанти завдань:

Завдання 1. Маємо канторову множину на п'ятірковій системі числення. З'ясувати якому з відрізків належить точка під час другого поділу.

Завдання 2. Маємо канторову множину на семірковій системі числення. З'ясувати, які з поданих точок: належать відріzkу .

Завдання 3. Знайти загальну довжину залишених відрізків та вилучених інтервалів на третьому етапі побудови канторової множини на трійковій/п'ятірковій/семірковій системі числення.

У 7 класі найкраще підібрати завдання таким чином, щоб вони охоплювали матеріал вивчений у 5-6 класах. Це допоможе учням побачити цілісну побудову канторової множини.

Завдання 1. Складіть опис побудови канторової множини в трійковій/п'ятірковій системі числення до третього етапу та визначте кількість залишкових відрізків. Зобразіть дану побудову з допомогою Geogebra.

Завдання 2. Після двох етапів побудови канторової множини в деякій системі числення залишилося 12 відрізків. Скільки відрізків залишиться після третього етапу побудови?

Завдання 3. Побудуйте канторову множину в трійковій системі числення та покажіть відрізки із кодом 222, 202, 022.

У 8 класі розглядається поняття множини, тому завдання можуть бути загальними, не обов'язково пов'язаними із канторовою множиною. Також учні можуть зайнятися проектною діяльністю та підготувати

додаткову інформацію про Георга Кантора та його діяльність. Можливі варіанти завдань:

Завдання 1. Поясніть відмінність між скінченими та нескінченими множинами. Яку потужність має канторова множина?

Завдання 2. Підготуйте доповідь про діяльність Георга Кантора.

Після вивчення геометричної прогресії у 9 класі варто запропонувати учням завдання, в яких передбачено обрахування деяких значень точок канторової множини. Проте вчитель має пам'ятати, що не кожную послідовність можна перевести у точку, тому необхідно ретельно підбирати завдання.

Завдання 1. Якій точці канторової множини у п'ятірковій системі числення відповідає послідовність (402402...).

Завдання 2. Яка послідовність відповідає точці, яка задана на канторовій множині у семірковій системі числення?

Завдання 3. Яким точкам канторової множини у трійковій, п'ятірковій та семірковій системах числення відповідає послідовність (020202...)?

У 10 класі учням варто попрацювати із функцією Кантора. Тому завдання мають охоплювати основні аспекти її побудови з допомогою програми Geogebra. Також з допомогою переходу до границі здобувачі можуть обрахувати загальну довжину відрізків канторової множини, що залишаються та інтервалів, що вилучаються. Орієнтовні завдання:

Завдання 1. Опишіть алгоритм побудови функції Кантора.

Завдання 2. Обчисліть значення функції Кантора в п'ятірковій системі числення до третього етапу її побудови.

Завдання 3. З допомогою Geogebra побудуйте графік функції Кантора в трійковій системі числення до другого етапу її побудови.

Завдання 4. Знайдіть загальну довжину відрізків канторової множини, що залишаються та інтервалів, що вилучаються у трійковій/ п'ятірковій/ семірковій системі числення.

В 11 класі варто розвивати уміння учнів із методології математики. Вони мають виконувати комплексні завдання на побудову канторової множини та функції Кантора, розуміти сутність даної множини.

Можливі завдання:

Завдання 1. З допомогою Geogebra побудуйте перші чотири ітерації канторової множини у п'ятірковій системі числення, починаючи з відрізка $[0,1]$. Запишіть координати всіх залишених відрізків після кожної ітерації.

Завдання 2. Доведіть, що довжина відрізків, що залишилися після нескінченної кількості кроків, дорівнює нулю.

Завдання 3. Запишіть у трійковій системі числення всі точки канторової множини, які залишаються після третього кроку побудови.

Завдання 4. Доведіть, що число належить Канторовій множині тоді і тільки тоді, коли його трійковий запис містить лише цифри 0 та 2.

Завдання 5. Перетворіть трійковий запис (002002) з Канторової множини у точку. Що можна сказати про потужність Канторової множини?

Завдання 6. Поясніть побудову функції Кантора та зробіть її у Geogebra до 3 кроку побудови. Систему числення оберіть самостійно.

ВИСНОВОК

Результати проведеного теоретичного дослідження показали, що:

1. Аналіз нормативно-правових документів, математичної, навчально-методичної, психолого-педагогічної літератури, практики засвідчують актуальність на даному етапі розвитку освіти в Україні формування дослідницької компетенції здобувачів освіти середньої школи. Різні дослідники по-своєму підходять до вирішення цієї проблеми. Зокрема в нашому дослідженні пропонуємо зробити це через розв'язання наскрізної задачі з теми «Системи числення на досконалій множині». Адже, розвиток математичної грамотності є дуже важливою компетентністю, завдяки якій людина зможе існувати в суспільстві, навчатися в продовж життя та займатися професійною діяльністю, саме цього і вимагають основні положення Нової української школи.
2. З'ясували, що можливо побудувати канторову досконалу множину на $2n+1$ системах числення, зокрема розглянули п'ятіркову та семіркові системи, що дозволило виконати подальше узагальнення.
3. Побудували функції Кантора для п'ятіркової та семіркової систем числення, з'ясували закономірності, опираючись на які узагальнили функцію Кантора для всіх $2n+1$ систем числення.
4. Проаналізували, що зміст модельних навчальних програм дозволяє впровадити тему «Канторова множина та системи числення» в шкільний курс математики. Для цього було запропоновано план реалізації цієї ідеї, який враховує глибину знань, вікові можливості школярів, та є повністю інтегрованим до шкільних тем. Окрім цього для кожного етапу розв'язування задачі було розроблено завдання, які допоможуть учням поглибити свої знання та закріпити отримані навички.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Біос Дж. Е. Математика: підручник для 5 класу закладів загальної середньої освіти. Київ: Формула, 2022. 240 с.
2. Біос Дж. Е. Математика: підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти. Київ: Формула, 2023. 256 с.
3. Борисенко О. А. Диференціальна геометрія і топологія. Харків: Основа, 1995. 320 с.
4. Жалдак М. І., Михалін Г. О. Елементарні факти теорії множин у шкільному курсі математики. *Математика в школі*. 2011. № 3. С. 12–23.
5. Жалдак М. І., Михалін Г. О., Деканов С. Я. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних. Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2007. – 400 с.
6. Любчак Н. М. Методи формування дослідницьких умінь здобувачів вищої освіти. Київ: Освіта, 2020. 208 с.
7. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра 8: підручник для класів з поглибленим вивченням математики. Харків: Гімназія, 2021. 304 с.
8. Нова українська школа. Концептуальні засади реформування середньої школи. Л. М. Гриневич та ін. Київ, 2016. 36 с.
9. Модельна навчальна програма «Математика. 5–6 класи» для закладів загальної середньої освіти / авт. Васишин М. С., Милянник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Шкільний О. В. – URL: https://drive.google.com/file/d/1YMPwWKLNmdHTQ6wj4_5aUH0sPafkCBqX/view. (дата звернення 03.04.2025)

10. Модельна навчальна програма «Математика. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (авт. Васишин М. С., Милянник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьний О. В.). URL: <https://drive.google.com/file/d/1hxfR8CXPRbsZ16yos4CykfiJ-K5U-cKu/view>. (дата звернення 03.04.2025)
11. Онопрієнко О. В. (2023). Компетентнісний потенціал навчальної діяльності на уроках математики у НУШ. Початкова освіта в парадигмі Нової української школи: виклики часу: збірник матеріалів Всеукраїнської науково-практичної конференції (27 квітня 2023 року, м. Глухів) (с. 104-107). Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка.
12. Про деякі питання державних стандартів повної загальної середньої освіти: Постанова Кабінету Міністрів України від 2022 р. № 898 . *Офіційний вісник України*. 2022. № 73. С. 56–67. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-п#Text>. (дата звернення 03.04.2025)
13. Про схвалення Концепції розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти): Розпорядження Кабінету Міністрів України № 960-р (2020). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-п#Text> (дата звернення 03.04.2025)
14. Скворцова С. О., Онопрієнко О. В. Інтеграція у навчанні молодших школярів математики. *Початкова школа*. 2017. № 9 (579). С. 22–29.
15. Тарасенкова Н. А. Компетентнісні засади забезпечення наступності навчання математики в різних ланках освіти. Реалізація наступності в математичній освіті: реалії та перспективи. Одеса: ПНПУ ім. К. Д. Ушинського, 2016. С. 108–111.

16. Тушев А., Чупордя В. . Застосування програми Geogebra до формування дослідницьких умінь під час створення динамічних розробок з геометрії. *Фізико-математична освіта* 2022. №34(2), С. 43-49. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-007> (дата звернення 03.04.2025)
17. Формування дослідницьких умінь в учнів початкової школи на уроці математики Долян О. та ін. *Педагогічні науки*. 2020. № 1. С. 67–74.
18. Школьний О. . Методичні особливості вивчення логічних основ математики в інтегрованому курсі «Математика» для учнів 7 класу НУШ. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*. 2024, №2, С. 20-28.
19. Яковенко, А. О. Погляд учителів математики на проблему формування навчально-дослідницьких умінь учнів. *Pedagogy and Psychology*. 2021 №246(IX (97)), С. 43-45.
20. Learning and Understanding: Improving Advanced Study of Mathematics and Science in U.S. High Schools. *National Academies Press*. 2002. URL: <https://doi.org/10.17226/10129> (дата звернення 03.04.2025)
21. Rizayeva L. Formation of research skills of students through solving problems in teaching mathematics in primary classes. *Cypriot Journal of Educational Sciences*. 2022. Вип. 17. №. 8. С. 2567–2579.
22. Tifi A., Natale N., Lombardi A. Scientists at play: teaching science process skills. *Science in School*. 2006. № 1. С. 37–40.
23. Shkolnyi O. New approach to studying mathematics in the 7th grade within the New Ukrainian School project . *Educația în contextul provocărilor societale: paradigme, inovații, transfer tehnologic*. 2023. С. 51–58.