Міністерство освіти і науки України

Херсонський державний університет

А.М. Бистрянцева

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Практикум

Херсон, 2018

УДК 514.12+512.64

Бистрянцева А.М.
Лінійна алгебра та аналітична геометрія : практикум. – Херсон: Айлант, 2018. – 76 с.

ISBN 978-966-630-210-2

Рецензенти: **Песчаненко В.С.** – професор кафедри інформатики, програмної інженерії та економічної кібернетики Херсонського державного університету, доктор фізико-математичних наук, доцент

Лобода О.М. – завідувач кафедри прикладної математики та економічної кібернетики ДВНЗ «Херсонський державний аграрний університет», кандидат технічних наук, доцент

Рекомендовано до друку рішенням вченої ради Херсонського державного університету (протокол № 3 від 29 жовтня 2018 р.)

Практикум містить широкий спектр розв'язаних навчальних задач, які доповнюють теоретичні питання дисципліни за розділами: матриці, визначники, системи лінійних рівнянь, векторна алгебра, аналітична геометрія на площині та в просторі; сприяють розвиткові практичних навичок і є зразком належного оформлення розв'язань задач для самостійної роботи. Задачі для самостійної роботи за варіантами можуть бути розв'язані як в аудиторії, так і використані для домашнього завдання.

Практикум призначено для студентів спеціальностей 014.08 «Середня освіта (Фізика)», 014.09 «Середня освіта (Інформатика)», 122 «Комп'ютерні науки», 121 «Інженерія програмного забезпечення» денної та заочної форм навчання.

ISBN 978-966-630-210-2 УДК 514.12+512.64

Зміст

Вступ

Практикум «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» складено відповідно до навчальних програм з дисципліни для спеціальностей «Середня освіта (фізика)», «Середня освіта (інформатика)», «Комп'ютерні науки», «Інженерія програмного забезпечення» денної та заочної форм навчання і містить такі розділи:

- матриці та визначники. Системи лінійних рівнянь;
- векторна алгебра;
- аналітична геометрія на площині;
- аналітична геометрія в просторі.

Практикум містить широкий спектр розв'язаних навчальних задач, які достатньо розкривають відповідні теоретичні питання дисципліни, сприяють розвиткові практичних навичок і є зразком належного оформлення розв'язань задач для самостійної роботи. Задачі для самостійної роботи за варіантами можуть бути розв'язані як в аудиторії, так і використані для домашнього завдання.

Метою практикуму є:

- допомогти в опануванні студентами основ математичного апарату лінійної алгебри та аналітичної геометрії;
- розвинути логічне та аналітичне мислення;
- виробити навички вибору ефективного методу розв'язування задач.

Самостійне розв'язування задач, яке формує основу математичного мислення, передбачає активну роботу з теоретичним матеріалом, використанням конспекту лекцій, посібників та підручників. Деякі з них подано у списку використаних джерел.

Розділ 1
Матриці та визначники. Системи лінійних рівнянь

Приклад 1 Знайти матрицю D, якщо $D = 3A - 2B + C^T$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -1 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Для знаходження матриці D помножимо матрицю A на 3, віднімемо від результату матрицю B, помножену на 2, і до отриманої різниці додамо транспоновану матрицю C.

Помножимо матрицю A на 3. Для цього кожен елемент цієї матриці множимо на 3:

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 0 & 3\cdot(-2) & 3\cdot(-3) \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 4 & 3\cdot 5 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 0 & 3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ 3 & 12 & 15 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Помножимо матрицю B на 2. Для цього кожен елемент цієї матриці множимо на 2:

$$2B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 4 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot(-2) & 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 6 \\ 0 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження матриці транспонованої до матриці C, поміняємо місцями рядки та стовпці даної матриці:

$$C^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -1 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 5 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо матрицю D:

$$D = 3A - 2B + C^T = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ 3 & 12 & 15 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -4 & 6 \\ 0 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 5 & -8 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0-8+4 & -6-(-4)+(-1) & -9-6+0 \\ 3-0+2 & 12-8+(-4) & 15-2+1 \\ 9-(-4)+5 & 0-2+(-8) & -3-6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -15 \\ 5 & 0 & 14 \\ 18 & -10 & -8 \end{pmatrix}.$$

Отже, $D=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -15 \\ 5 & 0 & 14 \\ 18 & -10 & -8 \end{pmatrix}$.

Завдання за варіантами

Приклад 1 Знайти матрицю D, якщо:

1.1 $D=2A-2B+C^T$, $A=\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.2 $D=3C-2A+B^T$, $A=\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.3 $D=4C+2A+B^T$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

1.4 $D=3A-2C+B^T$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.5 $D=-3B-2C+A^T$, $A=\begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.6 $D=3C-2B+A^T$, $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.7 $D=-2C+4A+B^T$, $A=\begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.8 $D=3A-2C+B^T$, $A=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.9 $D=2B-3C+A^T$, $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.10 $D=2A-2C+B^T$, $A=\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

1.11 $D=3B-2A+C^T$, $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

1.12 $D=-2B-5C+A^T$, $A=\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

1.13 $D=-3A+2C-B^T$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & -11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1.14 $D=-3B+4C-A^T$, $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.15 $D=-2A+2B+C^T$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

1.16 $D=3A+2C-B^T$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$.

1.17 $D=3B+2C-A^T$, $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 7\end{pmatrix}$.

1.18 $D=4A-3C-B^T$, $A=\begin{pmatrix}8 & 9\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

1.19 $D=4A+2C+B^T$, $A=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 9\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$.

1.20 $D=3A-2C+B^T$, $A=\begin{pmatrix}2 & 9\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

1.21 $D=-2A-2C-B^T$, $A=\begin{pmatrix}7 & 20\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 1 & 8\end{pmatrix}$.

1.22 $D=-2A-2B-C^T$, $A=\begin{pmatrix}4 & 19\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & 5\\ -4 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

1.23 $D=-2B-2B+C^T$, $A=\begin{pmatrix}2 & 17\\ 1 & 9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 7\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

1.24 $D=5A+2C-B^T$, $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$.

1.25 $D=-2A+4C+B^T$, $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ -2 & 13\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

1.26 $D=-2A-3C+B^T$, $A=\begin{pmatrix}2 & 11\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

1.27 $D=2B+3C+A^T$, $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

1.28 $D=4C+2A+B^T$, $A=\begin{pmatrix}5 & 9\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

1.29 $D=2A-2B+C^T$, $A=\begin{pmatrix}5 & 9\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

1.30 $D=3A-2C+B^T$, $A=\begin{pmatrix}11 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Приклад 2 Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

Для обчислення визначника використаємо правило трикутників:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 4 + 2\cdot 6\cdot 2 + 2\cdot 0\cdot 3 - (3\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 4 + 6\cdot 0\cdot 1) = 32 - 28 = 4.$$

Відповідь: 4

Завдання за варіантами

Приклад 2 Обчислити визначник:

2.1 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$;

2.2 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;

2.3 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$;

2.4 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$;

2.5 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$;

2.6 $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$;

2.7 $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

2.8 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

2.9 $\begin{vmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

2.10 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

2.11 $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

2.12 $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$;

2.13 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$;

2.14 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

2.15 $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$;

2.16 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$;

2.17 $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

2.18 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$;

2.19 $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 13 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;

2.20 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$;

2.21 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

2.22 $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; 2.25 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$; 2.28 $\begin{vmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$;

2.23 $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix}$; 2.26 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; 2.29 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$;

2.24 $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; 2.27 $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; 2.30 $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}$.

Приклад 3 Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

Спростимо визначник, використовуючи правило:

Елементи рядка (стовпця) визначника можна множити на число і додавати до елементів іншого рядка (стовпця), а потім розкласти визначник за рядком або стовпцем, в якому буде найбільша кількість нульових елементів.

Помножимо перший стовпець на (-1) та додамо його до другого стовпця, потім помножимо його на 2 і додамо до третього і до четвертого стовпця:

$$\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \cdot(-1)\end{array} = \begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & -5 & 5 & -6 \\ 3 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \cdot 2\end{array} = \begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 8 & 3 \\ 4 & -5 & 13 & -6 \\ 3 & -5 & 9 & 1 \end{vmatrix} \\ \cdot 2\end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 7 \\ 4 & -5 & 13 & 2 \\ 3 & -5 & 9 & 7 \end{vmatrix}.$$

В результаті отримали визначник, який має у першому рядку три нулі. Розкладемо його за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 7 \\ 4 & -5 & 13 & 2 \\ 3 & -5 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} + 0\cdot A_{14} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 8 & 7 \\ -5 & 13 & 2 \\ -5 & 9 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 4 & 13 & 2 \\ 3 & 9 & 7 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 4 & -5 & 2 \\ 3 & -5 & 7 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -5 & 13 \\ 3 & -5 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$=1\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}0&8&7\\-5&13&2\\-5&9&7\end{vmatrix}+0+0+0=\begin{vmatrix}0&8&7\\-5&13&2\\-5&9&7\end{vmatrix}.$$

Для обчислення визначника віднімемо від третього рядка другий та розкладемо визначник за елементами другого рядка:

$$\begin{vmatrix}0&8&7\\-5&13&2\\-5&9&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&8&7\\-5&13&2\\0&-4&5\end{vmatrix}=0\cdot A_{11}-5\cdot A_{21}+0\cdot A_{31}=0-5\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}8&7\\-4&5\end{vmatrix}+0=$$

$$=-5\cdot(-1)\cdot(8\cdot5-(-4)\cdot7)=5\cdot(40+28)=5\cdot68=340.$$

Відповідь: 340.

Завдання за варіантами

Приклад 3 Обчислити визначник:

3.1 $\begin{vmatrix}3&3&2&0\\-4&1&-4&7\\5&0&5&2\\0&-5&2&3\end{vmatrix}$; 3.6 $\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}$; 3.11 $\begin{vmatrix}0&5&0&2\\1&2&3&4\\-2&0&3&2\\1&3&5&4\end{vmatrix}$;

3.2 $\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}$; 3.7 $\begin{vmatrix}2&0&3&1\\1&-2&1&0\\0&1&-1&3\\4&-7&4&-4\end{vmatrix}$; 3.12 $\begin{vmatrix}0&0&1&5\\1&3&-2&-3\\3&-1&2&0\\2&-7&2&-8\end{vmatrix}$;

3.3 $\begin{vmatrix}3&0&2&0\\2&3&1&4\\0&4&-2&3\\5&2&0&1\end{vmatrix}$; 3.8 $\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&3\\3&2&1&2\\4&0&2&1\end{vmatrix}$; 3.13 $\begin{vmatrix}-3&-2&0&1\\-6&3&1&0\\0&4&-1&2\\2&3&1&-1\end{vmatrix}$;

3.4 $\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\0&0&-7&6\end{vmatrix}$; 3.9 $\begin{vmatrix}0&-3&1&5\\1&-2&-2&-3\\3&-1&2&0\\2&3&2&0\end{vmatrix}$; 3.14 $\begin{vmatrix}0&-3&1&0\\1&-2&-2&3\\3&-1&2&-1\\2&3&2&0\end{vmatrix}$;

3.5 $\begin{vmatrix}2&1&0&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}$; 3.10 $\begin{vmatrix}2&-2&0&1\\2&3&1&0\\3&0&-1&2\\1&3&1&-2\end{vmatrix}$; 3.15 $\begin{vmatrix}2&-3&0&1\\2&-6&1&-3\\3&0&-1&2\\2&3&0&1\end{vmatrix}$;

3.16 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; 3.21 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}$; 3.26 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

3.17 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; 3.22 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 7 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$; 3.27 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

3.18 $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 3.23 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; 3.28 $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 0 \end{vmatrix}$;

3.19 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; 3.24 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; 3.29 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

3.20 $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -4 & -2 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; 3.25 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; 3.30 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Приклад 4 Знайти добуток матриць AB, якщо $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Добуток AB можливо обчислити, оскільки число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. Знаходимо матрицю $C = AB$:

$$C = AB = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} -4\cdot1+0\cdot2+1\cdot(-2) & -4\cdot2+0\cdot0+1\cdot1 & -4\cdot(-3)+0\cdot1+1\cdot3 \\ 2\cdot1+(-1)\cdot2+3\cdot(-2) & 2\cdot2+(-1)\cdot0+3\cdot1 & 2\cdot(-3)+(-1)\cdot1+3\cdot3 \\ 3\cdot1+2\cdot2+2\cdot(-2) & 3\cdot2+2\cdot0+2\cdot1 & 3\cdot(-3)+2\cdot1+2\cdot3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -4+0-2 & -8+0+1 & 12+0+3 \\ 2-2-6 & 4+0+3 & -6-1+9 \\ 3+4-4 & 6+0+2 & -9+2+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -7 & 15 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Завдання за варіантами

Приклад 4 Знайти добуток матриць AB, якщо:

4.1 а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

4.2 а) $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

4.3 а) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

4.4 а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$;

4.5 а) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 5\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 4\\ 7 & 1 & 1 & 1\\ 7 & -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$;

4.6 а) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 9 & 5\\ 1 & 7 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & -7\end{pmatrix}$;

4.7 а) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 5 & 3 & -4\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 9 & 5\\ 1 & 7 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 0 & 3\\ -1 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$;

4.8 а) $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ -5 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 9 & 5\\ 1 & 7 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -5 & 4\\ 4 & -1 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

4.9 а) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 9 & 5\\ 1 & 7 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 0 & 3\\ -1 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$;

4.10 а) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -3\\ 1 & -1 & 3\\ 7 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -5 & 4\\ 4 & -1 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

4.11 а) $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 9 & 5\\ 1 & 7 & 2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 13\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 4\\ 2 & 7 & 1 & 2\\ 4 & 5 & 7 & 1\end{pmatrix}$;

4.12 а) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 9 & 5\\ 1 & 7 & 2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 13\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -5 & 4\\ 4 & -1 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

4.13 а) $A=\begin{pmatrix}7 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & -1 & -3\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -3\\ 9 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 4\\ 2 & 7 & 1 & 2\\ 4 & 5 & 7 & 1\end{pmatrix}$;

4.14 а) $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 3 & 7 & 0\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 1\\ 4 & -2 & 2\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

4.15 а) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ 3 & 1 & -3\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -3\\ 1 & -1 & 3\\ 7 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 6 & 3\\ 4 & 0 & 2 & -3\\ 1 & -1 & -1 & 5\end{pmatrix}$;

4.16 а) $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 5\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 1 & 7 & 2\\ 2 & 3 & 1 & 3\\ 1 & 6 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

4.17 а) $A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 3 & 6 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ 3 & 4 & 2\\ -3 & 2 & 5\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & 7 & 5\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 4\\ -1 & 1 & 1 & 5\\ 3 & 4 & -3 & 1\end{pmatrix}$;

4.18 а) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ 0 & 8 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 2 & 1\\ 1 & 5 & -3\\ 4 & -3 & -5\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & -2\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -3 & 7 & 6\\ 1 & -1 & 4 & 3\\ 2 & -3 & 1 & 0\end{pmatrix}$;

4.19 а) $A=\begin{pmatrix}8 & 1 & 7\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 2 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 7\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}7 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 4\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 7 & 0 & 8\\ 2 & 4 & 1 & 4\\ -3 & 5 & -3 & 1\end{pmatrix}$;

4.20 а) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 0\\ 7 & -3 & 4\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 4\\ -1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 4 & 2 & 0\\ 1 & 5 & 1 & -1\\ 3 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$;

4.21 а) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 4\\ 5 & 7 & -4\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 4 & -2\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1 & 2\\ 4 & 1 & -1 & 0\\ -3 & 7 & 0 & 5\end{pmatrix}$;

4.22 а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 4\\ 3 & 2 & -5\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 0 & 2\\ 7 & 4 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

4.23 а) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -7\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ 1 & -2 & 5\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 1\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -2\\ 7 & 6 & 3 & 0\\ 4 & 5 & 1 & -4\end{pmatrix}$;

4.24 а) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 8\\ 4 & 2 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 6 & 7\\ 2 & 1 & 2\\ 5 & 0 & 8\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 4\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 8 & 1\\ -3 & 1 & 4 & -8\\ 2 & 5 & 3 & -2\end{pmatrix}$;

4.25 а) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 3 & 5 & 2\\ 7 & 1 & 3\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ -1 & 7 & 4\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 2 & 4\\ 4 & 1 & 8 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

4.26 а) $A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 2\\ 1 & 4 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 0\\ 5 & 2 & 7\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\ 5 & -3 & 4\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 4 & 1 & 0\\ 7 & 2 & 2 & 8\\ 1 & 3 & -3 & 4\end{pmatrix}$;

4.27 а) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 8\\ 4 & 2 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 0\\ 5 & 2 & 7\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\ 5 & -3 & 4\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 8 & 1\\ -3 & 1 & 4 & -8\\ 2 & 5 & 3 & -2\end{pmatrix}$;

4.28 а) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 0\\ 5 & 2 & 7\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\ 5 & -3 & 4\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 2 & 4\\ 4 & 1 & 8 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

4.29 а) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -7\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 3 & 5 & 2\\ 7 & 1 & 3\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 1\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -2\\ 7 & 6 & 3 & 0\\ 4 & 5 & 1 & -4\end{pmatrix}$;

4.30 а) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 0\\ 5 & 2 & 7\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\ 5 & -3 & 4\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 2 & 4\\ 4 & 1 & 8 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

Приклад 5 Знайти матрицю, обернену до $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, та перевірити отриманий результат множенням.

Розв'язання:

Спочатку обчислимо визначник матриці A:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1 & -9\\ 1 & -3 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & -9\\ -3 & -1\end{vmatrix}=-26.$$

Так як визначник матриці відмінний від нуля, то матриця A має обернену. Для знаходження оберненої матриці A^{-1} обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8$; $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6$; $A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4$;

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$; $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 9$; $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7$;

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$; $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5$.

Матриця A^{-1}, обернена до матриці A, відповідно до формули $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, має вигляд

$$A^{-1} = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{1}{26} & -\frac{9}{26} & \frac{7}{26} \\ \frac{3}{26} & \frac{1}{26} & \frac{5}{26} \end{pmatrix}.$$

Виходячи з означення оберненої матриці і використовуючи правила множення матриць, обчислимо добуток матриць A^{-1} та A:

$$A^{-1}A = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 1 & -9 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 8\cdot 2 + 6\cdot 1 + 4\cdot 1 & 8\cdot 1 + 6\cdot(-2) + 4\cdot 1 & 8\cdot(-3) + 6\cdot 2 + 4\cdot 3 \\ 1\cdot 2 + (-9)\cdot 1 + 7\cdot 1 & 1\cdot 1 + (-9)\cdot(-2) + 7\cdot 1 & 1\cdot(-3) + (-9)\cdot 2 + 7\cdot 3 \\ (-3)\cdot 2 + 1\cdot 1 + 5\cdot 1 & (-3)\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 5\cdot 1 & (-3)\cdot(-3) + 1\cdot 2 + 5\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 26 & 0 & 0 \\ 0 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Завдання за варіантами

Приклад 5 Знайти матрицю, обернену до даної, та перевірити отриманий результат множенням.

5.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 5.2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 5.3 $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

5.4 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

5.5 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

5.6 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5.7 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

5.8 $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5.9 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5.10 $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5.11 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

5.12 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

5.13 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

5.14 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5.15 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

5.16 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

5.17 $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5.18 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5.19 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

5.20 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

5.21 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

5.22 $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5.23 $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

5.24 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

5.25 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

5.26 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5.27 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

5.28 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

5.29 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5.30 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Приклад 6 Розв’язати систему:

а) $\begin{cases} 2x+y-3z=-5, \\ x-2y+2z=17, \\ x+y+3z=4. \end{cases}$ методом Гауса;

б) $\begin{cases} 4x+3y-2z=-1 \\ 3x+y+z=3 \\ x-2y-3z=8 \end{cases}$ за правилом Крамера;

в) $\begin{cases} 2x-2y-3z=1 \\ x+3y=2 \\ x-4y+z=1 \end{cases}$ матричним методом.

Розв'язання:

а) Розширена матриця системи має вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & 17 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Виконаємо прямий хід метода Гауса.

Для зручності обчислень змінимо місцями перший та другий рядок:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Так як $a_{11} \neq 0$, то помноживши перший рядок на (–2) і на (–1) і додаючи отримані рядки відповідно до другого і третього рядка, виключаємо змінну x із усіх рядків, починаючи із другого:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -39 \\ 0 & 3 & 1 & -13 \end{array}\right).$$

Так як $a_{22} \neq 0$, то помноживши другий рядок на $\left(-\frac{3}{5}\right)$ і додавши до третього, таким чином виключимо змінну y із третього рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -39 \\ 0 & 0 & \frac{26}{5} & \frac{52}{5} \end{array}\right).$$

Отримали систему рівнянь, яка відповідає останні матриці:

$$\begin{cases} x-2y+2z=17, \\ 5y-7z=-39, \\ \frac{26}{5}z=\frac{52}{5}. \end{cases}$$

Використовуючи обернений хід метода Гауса, знайдемо із третього з рівнянь $z=2$; із другого рівняння знайдемо $y=\frac{-39+7\cdot 2}{5}=-5$; із першого рівняння $x=\frac{17-2\cdot 2+2\cdot(-5)}{1}=3$.

Відповідь: $(3;-5;2)$.

б) Для знаходження розв'язку використовуємо формули:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}4&3&-2\\3&1&1\\1&-2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&11&10\\3&7&10\\1&0&0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}11&10\\7&10\end{vmatrix}=40;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}-1&3&-2\\3&1&1\\8&-2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0\\3&10&-5\\8&-22&-19\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}10&-5\\-22&-19\end{vmatrix}=80;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}4&-1&-2\\3&3&1\\1&8&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10&5&0\\3&3&1\\10&17&0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}10&5\\10&17\end{vmatrix}=-120;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}4&3&-1\\3&1&3\\1&-2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&3&-1\\15&10&0\\33&22&0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}15&10\\33&22\end{vmatrix}=0;$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{80}{40}=2;$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-120}{40}=-3;$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{0}{40}=0.$$

Відповідь: $(2;-3;0)$.

в) Обчислимо визначник вихідної матриці $\begin{pmatrix}2&-2&-3\\1&3&0\\1&-4&1\end{pmatrix}$:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-2&-3\\1&3&0\\1&-4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&-14&0\\1&3&0\\1&-4&1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5&-14\\1&3\end{vmatrix}=29.$$

Знайдемо обернену матрицю за формулою $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\dots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\dots&A_{n2}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{1n}&A_{2n}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}$.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij};$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ -4 & 1\end{vmatrix}=(-1)^2\cdot(3\cdot1-(-4)\cdot0)=3;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(-1)^3\cdot(1\cdot1-1\cdot0)=-1;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -4\end{vmatrix}=(-1)^4\cdot(1\cdot(-4)-1\cdot3)=-7;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3\\ -4 & 1\end{vmatrix}=(-1)^3\cdot(-2\cdot1-(-4)\cdot(-3))=14;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(-1)^4\cdot(2\cdot1-1\cdot(-3))=5;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & -4\end{vmatrix}=(-1)^5\cdot(2\cdot(-4)-1\cdot(-2))=6;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot M_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 3 & 0\end{vmatrix}=(-1)^4\cdot(-2\cdot0-3\cdot(-3))=9;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=(-1)^5\cdot(2\cdot0-1\cdot(-3))=-3;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=(-1)^6\cdot(2\cdot3-1\cdot(-2))=8.$$

Тепер, використовуючи знайдену обернену матрицю можна знайти розв’язок вихідної системи:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{29}\cdot\begin{pmatrix}3 & 14 & 9\\ -1 & 5 & -3\\ -7 & 6 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{29}\cdot\begin{pmatrix}3+28+9\\ -1+10-3\\ -1+12+8\end{pmatrix}=\frac{1}{29}\cdot\begin{pmatrix}40\\ 6\\ 19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{40}{29}\\ \frac{6}{29}\\ \frac{19}{29}\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\left(\frac{40}{29};\frac{6}{29};\frac{19}{29}\right)$.

Завдання за варіантами

Приклад 6 Розв’язати систему рівнянь: а) методом Гауса; б) за правилом Крамера; в) матричним методом.

6.1 $\begin{cases}x-y-z=3\\ 2x+y-z=0\\ 3x+y+z=1\end{cases}$ 6.2 $\begin{cases}2x-y+4z=15\\ 3x-y+z=8\\ -2x+y+z=0\end{cases}$ 6.3 $\begin{cases}3x-3y+2z=2\\ 4x-5y+2z=1\\ 5x-6y+4z=3\end{cases}$

6.4 $\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$

6.5 $\begin{cases} x+y-3z=3 \\ 2x+y-2z=1 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$

6.6 $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-y+2z=3 \\ x+y-4z=-2 \end{cases}$

6.7 $\begin{cases} 2x-y+3z=9 \\ x+5y-z=-6 \\ x+2y-3z=-7 \end{cases}$

6.8 $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 5x+y+3z=14 \\ 2x+y+2z=5 \end{cases}$

6.9 $\begin{cases} 2x-3y+z=-9 \\ x+y+z=2 \\ 3x-2y+2z=-7 \end{cases}$

6.10 $\begin{cases} x+2y+z=6 \\ 2x-y=-1 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$

6.11 $\begin{cases} 2x-y+3z=5 \\ x+2y+5z=7 \\ 3x+y+2z=0 \end{cases}$

6.12 $\begin{cases} 3x+2y-z=-4 \\ 2x-y+3z=6 \\ x+y-z=-3 \end{cases}$

6.13 $\begin{cases} 2x+3y+5z=2 \\ 4x+2y+7z=-5 \\ 5x+y+4z=-6 \end{cases}$

6.14 $\begin{cases} 3x-2y-5z=8 \\ 4x-5y-2z=13 \\ x+3y+7z=15 \end{cases}$

6.15 $\begin{cases} 2x-3y+4z=-6 \\ 5x+y+7z=5 \\ 4x+2y+3z=9 \end{cases}$

6.16 $\begin{cases} 2x+2y+z=4 \\ x+2y+4z=-4 \\ 4x+6y+3z=4 \end{cases}$

6.17 $\begin{cases} x+2y+3z=-3 \\ 2x+4y+6z=-7 \\ 3x+y-z=6 \end{cases}$

6.18 $\begin{cases} 3x+2y+4z=-5 \\ 2x+5y+3z=3 \\ x+3y-8z=31 \end{cases}$

6.19 $\begin{cases} 2x+3y+4z=1 \\ 4x+2y+z=30 \\ 2x-8y-17z=4 \end{cases}$

6.20 $\begin{cases} 5x+7y+4z=2 \\ 3x+10y+9z=3 \\ 9x+y-6z=0 \end{cases}$

6.21 $\begin{cases} 2x-5y+z=1 \\ x+y-z=2 \\ x-13y+5z=-4 \end{cases}$

6.22 $\begin{cases} 3x-2y+5z=6 \\ 9x-6y+9z=12 \\ 3x-2y-z=2 \end{cases}$

6.23 $\begin{cases} x-3y+2z=-1 \\ x+9y+6z=3 \\ x+3y+4z=1 \end{cases}$

6.24 $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+y-z=3 \\ 4x-y+3z=5 \end{cases}$

6.25 $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ x+y-z=0 \\ 4x-y+5z=3 \end{cases}$

6.26 $\begin{cases} 2x+y+4z=16 \\ 3x+2y+z=10 \\ x+3y+3z=16 \end{cases}$

6.27 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+2z=0 \\ x+y-z=3 \end{cases}$

6.28 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases}$

6.29 $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \\ 3x-6y+5z=6 \end{cases}$

6.30 $\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ x+y+z=6 \\ 2x+3y-z=5 \end{cases}$

Приклад 7 Дослідити на сумісність системи лінійних рівнянь. У випадку сумісності знайти їх розв’язок:

а) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7, \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9, \\ 2x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

Розв'язання:

а) Перевіримо систему на сумісність за допомогою теореми Кронекера-Капеллі. Для цього знайдемо ранг основної матриці системи та ранг її розширеної матриці.

Виписуємо основну матрицю системи A, після чого множимо послідовно всі елементи першого її рядка на –2, –3, –1 та додаємо до відповідних елементів другого, третього та четвертого рядків:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 6 \\ 6 & -3 & 7 & 8 \\ 2 & -4 & 9 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Викреслюємо третій рядок, що має всі елементи пропорційні відповідним елементам другого:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Міняємо всі знаки елементів другого рядка на протилежні і ділимо всі елементи третього рядка на 3 та ставимо його на місце другого:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Звідси знаходимо ранг матриці, який дорівнює 3.

Виписуємо розширену матрицю системи B, після чого множимо послідовно всі елементи першого її рядка на –2, –3, –1 та додаємо до відповідних елементів другого, третього та четвертого рядків:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & -4 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Викреслюємо третій рядок, що має всі елементи пропорційні відповідним елементам другого:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Міняємо всі знаки елементів другого рядка на протилежні і ділимо всі елементи третього рядка на 3 та ставимо його на місце другого:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} B=3$, тому за теоремою Кронекера-Капеллі система рівнянь сумісна. Знайдемо її розв'язок.

Записуємо систему еквівалентну даній:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5, \\ \quad -x_2+2x_3+2x_4=2, \\ \qquad\quad x_3+2x_4=3. \end{cases}$$

Ця система має безліч розв'язків. Вважаючи значення x_4 довільним, маємо, починаючи з останнього рівняння:

$x_3=3-2x_4$;

$x_2=2x_3+2x_4-2=2(3-2x_4)+2x_4-2=6-4x_4+2x_4-2=4-2x_4$;

$$x_1=\frac{1}{2}(x_2-3x_3-4x_4+5)=\frac{1}{2}(4-2x_4-3(3-2x_4)-4x_4+5)=$$

$$=\frac{1}{2}(4-2x_4-9+6x_4-4x_4+5)=\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$

В результаті маємо розв'язок системи:

$(0;4-2x_4;3-2x_4;x_4)$, де x_4 – довільне.

Відповідь: $(0;4-2x_4;3-2x_4;x_4)$, де x_4 – довільне.

б) Перевіримо сумісність системи за допомогою теореми Кронекера-Капеллі.

Розглянемо основну матрицю системи A. Від елементів другого рядка віднімемо елементи першого і змінимо їх місцями:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Множимо перший рядок на –2 і додаємо до другого, множимо перший рядок на –5 і додаємо до третього:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & -11 & 9 \\ 0 & -22 & 18 \end{pmatrix}.$$

Множимо другий рядок на –2 і додаємо до третього:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо, ранг основної матриці A системи дорівнює 2.

Знайдемо ранг розширеної матриці B системи.

В розширеній матриці B від елементів другого рядка віднімемо елементи першого і змінимо їх місцями:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -4 & -1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Множимо перший рядок на –2 і додаємо до другого, множимо перший рядок на –5 і додаємо до третього:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & -11 & 9 & 4 \\ 0 & -22 & 18 & 9 \end{pmatrix}.$$

Множимо другий рядок на –2 і додаємо до третього:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & -11 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що $\mathrm{rang} A = 2$, а $\mathrm{rang} B = 3$. Відповідно до теореми Кронекера-Капеллі, з того, що $\mathrm{rang} A \neq \mathrm{rang} B$, випливає несумісність вихідної системи.

Відповідь: система несумісна.

Завдання за варіантами

Приклад 7 Дослідити на сумісність системи лінійних рівнянь. У випадку сумісності знайти їх розв'язок:

7.1 а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 14; \end{cases}$

7.2 а) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 5, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 1, \\ -2x_1 + 7x_2 + 3x_3 - x_4 = 6; \end{cases}$

7.3 а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 13; \end{cases}$

7.4 а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ 5x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6; \end{cases}$

7.5 а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 13; \end{cases}$

7.6 а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 13x_3 = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3; \end{cases}$

7.7 а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 4, \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 6; \end{cases}$

7.8 а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \end{cases}$

7.9 а) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 13; \end{cases}$

7.10 а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -5, \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = -3; \end{cases}$

7.11 а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 = 6; \end{cases}$

7.12 а) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 7, \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \end{cases}$

7.13 а) $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5, \\ 9x_1 + x_2 + 2x_3 = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 8x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 8; \end{cases}$

7.14 а) $\begin{cases} 7x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9, \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 6; \end{cases}$

7.15 а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 12; \end{cases}$

7.16 а) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 9; \end{cases}$

7.17 а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -2, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 12; \end{cases}$

7.18 а) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 14, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 23; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 6x_4 = 8, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 13; \end{cases}$

7.19 а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -2, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 11; \end{cases}$

7.20 а) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 - x_3 + 5x_4 = 11, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 5, \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 16; \end{cases}$

7.21 а) $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 4, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 14; \end{cases}$

7.22 а) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = -9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5, \\ 7x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4 = -4; \end{cases}$

7.23 а) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5, \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3; \end{cases}$

7.24 а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3; \end{cases}$

7.25 а) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 3, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 10; \end{cases}$

7.26 а) $\begin{cases} -x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 9, \\ 4x_1 + 10x_2 - x_3 = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 10; \end{cases}$

7.27 а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3; \end{cases}$

7.28 а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 14; \end{cases}$

7.29 а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 5, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 1, \\ -2x_1 + 7x_2 + 3x_3 - x_4 = 6; \end{cases}$

7.30 а) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 13. \end{cases}$

Приклад 8 Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

Розв’язання:

а) Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) \cdot 5 - (3 \cdot 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-4) \cdot 2) =$$

$$= 8 + 36 - 5 - (30 + 6 - 8) = 39 - 28 = 11 \neq 0 .$$

Тому система має єдиний нульовий розв’язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Відповідь: $(0;0;0)$.

б) Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) \cdot 4 + 4 \cdot 5 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - (4 \cdot (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \cdot 3) =$$

$$= -36 + 80 - 1 - (12 + 16 + 15) = 43 - 43 = 0 .$$

Отже, система має нескінченну множину розв’язків. Розглянемо будь-які два рівняння системи (наприклад, перше і друге) і знайдемо розв’язок системи:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Так як визначник із коефіцієнтів при невідомих x_1 і x_2 не дорівнює нулю, то в якості базисних невідомих візьмемо x_1 і x_2 (хоча можна брати й інші пари невідомих) і перемістимо члени системи з x_3 в праві частини рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = x_3, \\ x_1 - 3x_2 = -5x_3. \end{cases}$$

Отриману систему розв'язуємо за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 = -9 - 4 = -13;$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} x_3 & 4 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = -3x_3 + 20x_3 = 17x_3; \ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -5x_3 \end{vmatrix} = -15x_3 - x_3 = -16x_3.$$

Звідси знаходимо, що $x_1 = -\dfrac{17x_3}{13}$, $x_2 = \dfrac{16x_3}{13}$. Вважаючи, що $x_3 = 13k$, де k – довільний коефіцієнт пропорційності, отримуємо розв'язок вихідної системи: $x_1 = -17k$, $x_2 = 16k$, $x_3 = 13k$.

Відповідь: $(-17k; 16k; 13k)$.

Завдання за варіантами

Приклад 8 Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

8.1 а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$

8.2 а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$

8.3 а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases}$

8.4 а) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases}$

8.5 а) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$

8.6 а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$

8.7 а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$

8.8 а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$

8.9 а) $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$

8.10 а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$

8.11 а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases}$

8.12 а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$

8.13 а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 9x_3 = 0; \end{cases}$

8.14 а) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$

8.15 а) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

8.16 а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$

8.17 а) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1-x_2-x_3=0, \\ 3x_1+3x_2+2x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-3x_2-2x_3=0, \\ 3x_1-x_2+4x_3=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3=0; \end{cases}$

8.18 а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2=0, \\ x_1-x_2+2x_3=0, \\ 4x_1-2x_2+5x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1+x_2-2x_3=0, \\ 3x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_1+2x_2-3x_3=0; \end{cases}$

8.19 а) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ x_1+2x_2-5x_3=0, \\ 3x_1+x_2+x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0, \\ 5x_1-x_2-2x_3=0; \end{cases}$

8.20 а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ 4x_1+3x_2+4x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1-x_2+5x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+2x_2+3x_3=0; \end{cases}$

8.21 а) $\begin{cases} x_1-3x_2-4x_3=0, \\ 5x_1-8x_2-2x_3=0, \\ 2x_1+x_2-x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=0, \\ 2x_1-3x_2-7x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-6x_3=0; \end{cases}$

8.22 а) $\begin{cases} 3x_1+5x_2-x_3=0, \\ 2x_1+4x_2-3x_3=0, \\ x_1-3x_2+x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=0, \\ x_1-5x_2+2x_3=0, \\ 4x_1-x_2+x_3=0; \end{cases}$

8.23 а) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+x_2-4x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3=0, \\ x_1-3x_2+2x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0; \end{cases}$

8.24 а) $\begin{cases} 7x_1+x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+3x_3=0, \\ x_1-x_2+2x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1-6x_2-x_3=0, \\ 3x_1-3x_2+4x_3=0, \\ 4x_1-3x_2-5x_3=0; \end{cases}$

8.25 а) $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=0, \\ 2x_1-x_2-3x_3=0, \\ x_1+3x_2+x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1-3x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+4x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-7x_2+5x_3=0; \end{cases}$

8.26 а) $\begin{cases} 7x_1-6x_2+x_3=0, \\ 4x_1+5x_2=0, \\ x_1-2x_2+3x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-8x_2+7x_3=0, \\ 3x_1+5x_2-4x_3=0, \\ 4x_1-3x_2+3x_3=0; \end{cases}$

8.27 а) $\begin{cases} 5x_1-4x_2+2x_3=0, \\ 3x_2-2x_3=0, \\ 4x_1+x_2-3x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1+8x_2-5x_3=0, \\ 7x_1+5x_2-x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=0; \end{cases}$

8.28 а) $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$

8.29 а) $\begin{cases} 8x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

8.30 а) $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

Розділ 2
Векторна алгебра

Приклад 1 Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюються кут $\varphi = 120°$. Знаючи, що $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$, обчислити:

а) $(3\overline{a} - 2\overline{b})(\overline{a} + 2\overline{b})$;

б) $|\overline{a} - \overline{b}|$.

Розв'язання:

а) $A = (3\overline{a} - 2\overline{b})(\overline{a} + 2\overline{b}) = 3\overline{a}^2 - 2\overline{b}\overline{a} + 6\overline{a}\overline{b} - 4\overline{b}^2 = 3\overline{a}^2 + 4\overline{a}\overline{b} - 4\overline{b}^2$.

Оскільки вірними є рівності:

$\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2 = 9$, $\overline{b}^2 = |\overline{b}|^2 = 16$, $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos 120° = 3 \cdot 4 \cdot (-0{,}5) = -6$, то

$A = 3 \cdot 9 + 4 \cdot (-6) - 4 \cdot 16 = -61$;

б) $|\overline{a} - \overline{b}| = \sqrt{(\overline{a} - \overline{b})^2} = \sqrt{\overline{a}^2 - 2\overline{a}\overline{b} + \overline{b}^2} = \sqrt{9 - 2 \cdot (-6) + 16} = \sqrt{37}$.

Завдання за варіантами

Приклад 1 Обчислити:

1.1 а) $(4\overline{a} + 7\overline{b})(\overline{a} - 2\overline{b})$; б) $|2\overline{a} - 3\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 5$, $\varphi = 60°$;

1.2 а) $(2\overline{a} + 5\overline{b})(3\overline{a} - 2\overline{b})$; б) $|\overline{a} - 3\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$, $\varphi = 120°$;

1.3 а) $(3\overline{a} + \overline{b})(2\overline{a} + 3\overline{b})$; б) $|2\overline{a} - 3\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}| = \sqrt{2}$, $|\overline{b}| = 3$, $\varphi = 45°$;

1.4 а) $(4\overline{a} + 3\overline{b})(\overline{a} - 4\overline{b})$; б) $|2\overline{a} + 3\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 6$, $\varphi = 60°$;

1.5 а) $(4\overline{a} + 5\overline{b})(\overline{a} - 2\overline{b})$; б) $|2\overline{a} - \overline{b}|$, якщо $|\overline{a}| = \sqrt{3}$, $|\overline{b}| = 1$, $\varphi = 30°$;

1.6 а) $(5\overline{a} + 3\overline{b})(\overline{a} + 2\overline{b})$; б) $|\overline{a} - \overline{b}|$, якщо $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$, $\varphi = 60°$;

1.7 а) $(2\overline{a} + 4\overline{b})(-3\overline{a} - \overline{b})$; б) $|\overline{a} + 2\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$, $\varphi = 120°$;

1.8 а) $(3\overline{a} + 2\overline{b})(-\overline{a} + 3\overline{b})$; б) $|2\overline{a} + 3\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}| = 4\sqrt{2}$, $|\overline{b}| = 3$, $\varphi = 45°$;

1.9 а) $(4\overline{a} + \overline{b})(3\overline{a} - \overline{b})$; б) $|2\overline{a} + \overline{b}|$, якщо $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 4$, $\varphi = 60°$;

1.10 а) $(6\overline{a} + 5\overline{b})(\overline{a} + \overline{b})$; б) $|4\overline{a} - \overline{b}|$, якщо $|\overline{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\overline{b}| = 1$, $\varphi = 30°$;

1.11 а) $(5\overline{a} + \overline{b})(\overline{a} + \overline{b})$; б) $|\overline{a} + \overline{b}|$, якщо $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$, $\varphi = 60°$;

1.12 а) $(3\overline{a} + 4\overline{b})(-3\overline{a} - \overline{b})$; б) $|\overline{a} + 2\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 2$, $\varphi = 120°$;

1.13 а) $(5\overline{a} + 2\overline{b})(-\overline{a} + 3\overline{b})$; б) $|\overline{a} + 4\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}| = \sqrt{2}$, $|\overline{b}| = 3$, $\varphi = 45°$;

1.14 а) $(4\overline{a} + 3\overline{b})(3\overline{a} - 2\overline{b})$; б) $|2\overline{a} + 5\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 4$, $\varphi = 60°$;

1.15 а) $(2\overline{a} + 5\overline{b})(\overline{a} + \overline{b})$; б) $|2\overline{a} - \overline{b}|$, якщо $|\overline{a}| = \sqrt{3}$, $|\overline{b}| = 1$, $\varphi = 30°$;

1.16 а) $(\overline{a} + \overline{b})(\overline{a} - 2\overline{b})$; б) $|\overline{a} - \overline{b}|$, якщо $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$, $\varphi = 60°$;

1.17 а) $(3\overline{a}+5\overline{b})(3\overline{a}-\overline{b})$; б) $|\overline{a}+2\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=2$, $\varphi=120°$;

1.18 а) $(3\overline{a}+2\overline{b})(-\overline{a}+3\overline{b})$; б) $|\overline{a}+3\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}|=6\sqrt{2}$, $|\overline{b}|=3$, $\varphi=45°$;

1.19 а) $(-4\overline{a}+3\overline{b})(3\overline{a}+2\overline{b})$; б) $|2\overline{a}+\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=6$, $\varphi=60°$;

1.20 а) $(2\overline{a}-7\overline{b})(\overline{a}-\overline{b})$; б) $|2\overline{a}-3\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}|=4\sqrt{3}$, $|\overline{b}|=1$, $\varphi=30°$;

1.21 а) $(\overline{a}+\overline{b})(3\overline{a}-2\overline{b})$; б) $|\overline{a}-\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}|=5$, $|\overline{b}|=4$, $\varphi=60°$;

1.22 а) $(3\overline{a}+\overline{b})(4\overline{a}-\overline{b})$; б) $|\overline{a}+2\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=5$, $\varphi=120°$;

1.23 а) $(3\overline{a}+5\overline{b})(-\overline{a}-\overline{b})$; б) $|\overline{a}+\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}|=3\sqrt{2}$, $|\overline{b}|=2$, $\varphi=45°$;

1.24 а) $(-\overline{a}+3\overline{b})(3\overline{a}+\overline{b})$; б) $|2\overline{a}+\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=3$, $\varphi=60°$;

1.25 а) $(2\overline{a}-3\overline{b})(\overline{a}-\overline{b})$; б) $|2\overline{a}-\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}|=3\sqrt{3}$, $|\overline{b}|=1$, $\varphi=30°$;

1.26 а) $(\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}-2\overline{b})$; б) $|3\overline{a}+\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=4$, $\varphi=60°$;

1.27 а) $(2\overline{a}+\overline{b})(4\overline{a}-\overline{b})$; б) $|5\overline{a}+2\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=2$, $\varphi=120°$;

1.28 а) $(3\overline{a}+5\overline{b})(-\overline{a}+\overline{b})$; б) $|\overline{a}+\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}|=5\sqrt{2}$, $|\overline{b}|=2$, $\varphi=45°$;

1.29 а) $(\overline{a}+3\overline{b})(\overline{a}+\overline{b})$; б) $|2\overline{a}+\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}|=4$, $|\overline{b}|=3$, $\varphi=60°$;

1.30 а) $(2\overline{a}-\overline{b})(\overline{a}-\overline{b})$; б) $|2\overline{a}-\overline{b}|$, якщо $|\overline{a}|=5\sqrt{3}$, $|\overline{b}|=2$, $\varphi=30°$.

Приклад 2 Дано вектори $\overline{a}=\overline{i}-\overline{j}+4\overline{k}$, $\overline{b}=6\overline{i}+5\overline{j}+4\overline{k}$, $\overline{c}=-2\overline{i}-3\overline{j}+4\overline{k}$. Знайти вектор $\overline{x}$, який задовольняє рівності $\overline{x}\cdot\overline{a}=8$, $\overline{x}\cdot\overline{b}=-3$, $\overline{x}\cdot\overline{c}=13$.

Розв'язання:

Нехай $\overline{x}=\{x_1;x_2;x_3\}$, тоді умова $\overline{x}\cdot\overline{a}=8$ рівносильна рівності $x_1-x_2+4x_3=8$. Аналогічно дістаємо ще два рівняння $6x_1+5x_2+4x_3=-3$ та $2x_1-3x_2+4x_3=13$.

Розв'язавши систему

$$\begin{cases} x_1-x_2+4x_3=8, \\ 6x_1+5x_2+4x_3=-3, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=13. \end{cases}$$

Отримаємо розв'язок є $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=2$.

Завдання за варіантами

Приклад 2 Знайти вектор $\overline{x}$, якщо:

2.1 $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}+\overline{k})=1$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}+3\overline{k})=5$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-3\overline{j}+6\overline{k})=2$;

2.2 $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k})=2$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}+5\overline{k})=8$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-4\overline{j}+8\overline{k})=2$;

2.3 $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k})=5$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-2\overline{j}+7\overline{k})=11$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-5\overline{j}+10\overline{k})=2$;

2.4 $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}+4\overline{k})=10$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-3\overline{j}+9\overline{k})=14$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-6\overline{j}+12\overline{k})=2$;

2.5 $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}+5\overline{k})=17$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-4\overline{j}+11\overline{k})=17$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-7\overline{j}+14\overline{k})=2$;
2.6 $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}+6\overline{k})=26$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-5\overline{j}+13\overline{k})=20$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-8\overline{j}+16\overline{k})=2$;
2.7 $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}+7\overline{k})=37$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-6\overline{j}+15\overline{k})=23$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-9\overline{j}+18\overline{k})=2$;
2.8 $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}-\overline{k})=5$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k})=-1$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k})=2$;
2.9 $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}-3\overline{k})=17$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}+4\overline{j}-5\overline{k})=-7$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k})=2$;
2.10 $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}-4\overline{k})=26$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}+5\overline{j}-7\overline{k})=-10$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}+2\overline{j}-4\overline{k})=2$;
2.11 $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}-5\overline{k})=37$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}+6\overline{j}-9\overline{k})=-13$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}+3\overline{j}-6\overline{k})=2$;
2.12 $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}+\overline{k})=3$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k})=1$, $\overline{x}\cdot(3\overline{i}+\overline{j}+10\overline{k})=-1$;
2.13 $\overline{x}\cdot(3\overline{i}-2\overline{j}+3\overline{k})=10$, $\overline{x}\cdot(2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k})=4$, $\overline{x}\cdot(5\overline{i}+\overline{j}+12\overline{k})=0$;
2.14 $\overline{x}\cdot(2\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k})=7$, $\overline{x}\cdot(3\overline{i}-\overline{j}+4\overline{k})=7$, $\overline{x}\cdot(7\overline{i}+\overline{j}+14\overline{k})=1$;
2.15 $\overline{x}\cdot(5\overline{i}-2\overline{j}+5\overline{k})=18$, $\overline{x}\cdot(4\overline{i}-\overline{j}+5\overline{k})=10$, $\overline{x}\cdot(9\overline{i}+\overline{j}+16\overline{k})=2$;
2.16 $\overline{x}\cdot(3\overline{i}-2\overline{j}+3\overline{k})=11$, $\overline{x}\cdot(5\overline{i}-\overline{j}+6\overline{k})=13$, $\overline{x}\cdot(11\overline{i}+\overline{j}+18\overline{k})=3$;
2.17 $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j})=10$, $\overline{x}\cdot(6\overline{i}-\overline{j}+7\overline{k})=16$, $\overline{x}\cdot(13\overline{i}+\overline{j}+20\overline{k})=4$;
2.18 $\overline{x}\cdot(\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k})=6$, $\overline{x}\cdot(2\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k})=9$, $\overline{x}\cdot(-3\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k})=-4$;
2.19 $\overline{x}\cdot(\overline{i}+\overline{j}+\overline{k})=5$, $\overline{x}\cdot(3\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k})=11$, $\overline{x}\cdot(-5\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k})=-5$;
2.20 $\overline{x}\cdot(3\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k})=14$, $\overline{x}\cdot(4\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k})=14$, $\overline{x}\cdot(-7\overline{i}+\overline{j})=-6$;
2.21 $\overline{x}\cdot(2\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k})=9$, $\overline{x}\cdot(5\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k})=17$, $\overline{x}\cdot(9\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k})=7$;
2.22 $\overline{x}\cdot(5\overline{i}+2\overline{j}+5\overline{k})=22$, $\overline{x}\cdot(6\overline{i}+\overline{j}+5\overline{k})=20$, $\overline{x}\cdot(11\overline{i}-\overline{j}+4\overline{k})=8$;
2.23 $\overline{x}\cdot(3\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k})=13$, $\overline{x}\cdot(7\overline{i}+\overline{j}+6\overline{k})=23$, $\overline{x}\cdot(13\overline{i}-\overline{j}+6\overline{k})=9$;
2.24 $\overline{x}\cdot(5\overline{i}+2\overline{j}-3\overline{k})=-2$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}+\overline{j}+\overline{k})=3$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}+4\overline{k})=0$;
2.25 $\overline{x}\cdot(5\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k})=1$, $\overline{x}\cdot(2\overline{i}+\overline{j})=3$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-2\overline{j}+5\overline{k})=-1$;
2.26 $\overline{x}\cdot(5\overline{i}-\overline{k})=4$, $\overline{x}\cdot(3\overline{i}+\overline{j}-\overline{k})=5$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-3\overline{j}+6\overline{k})=-2$;
2.27 $\overline{x}\cdot(5\overline{i}-\overline{j})=7$, $\overline{x}\cdot(4\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k})=9$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-4\overline{j}+7\overline{k})=-3$;
2.28 $\overline{x}\cdot(5\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k})=10$, $\overline{x}\cdot(5\overline{i}+\overline{j}-3\overline{k})=15$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-5\overline{j}+8\overline{k})=-4$;
2.29 $\overline{x}\cdot(5\overline{i}+4\overline{j}-5\overline{k})=-8$, $\overline{x}\cdot(-\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k})=9$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k})=2$;
2.30 $\overline{x}\cdot(5\overline{i}+5\overline{j}-6\overline{k})=-11$, $\overline{x}\cdot(-2\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k})=15$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k})=3$.

Приклад 3 Знайти $(2\overline{a}-2\overline{b})\times(3\overline{a}+2\overline{b})$, якщо $\overline{a}=\{2;3;1\}$, $\overline{b}=\{-2;4;0\}$.

Розв'язання:

Послідовно знаходимо
$2\overline{a}-\overline{b}=\{4;6;2\}-\{-2;4;0\}=\{6;2;2\}$, $3\overline{a}+2\overline{b}=\{6;9;3\}+\{-4;8;0\}=\{2;17;3\}$.
Тоді

$$(2\overline{a}-2\overline{b})\times(3\overline{a}+2\overline{b})=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 6 & 2 & 2\\ 2 & 17 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 17 & 3\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}6 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}6 & 2\\ 2 & 17\end{vmatrix}\overline{k}=$$

$= -28\bar{i} - 14\bar{j} + 98\bar{k}$.

Завдання за варіантами

Приклад 3 Знайти векторний добуток:

3.1 $(2\bar{a} + 4\bar{b}) \times (3\bar{a} - \bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{-2;1;2\}$, $\bar{b} = \{-2;4;3\}$;
3.2 $(5\bar{a} + 2\bar{b}) \times (2\bar{a} - 3\bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{-1;3;4\}$, $\bar{b} = \{-5;1;2\}$;
3.3 $(-2\bar{a} + 7\bar{b}) \times (3\bar{a} - 2\bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{-4;3;1\}$, $\bar{b} = \{2;2;1\}$;
3.4 $(3\bar{a} + 4\bar{b}) \times (2\bar{a} - \bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{2;-3;4\}$, $\bar{b} = \{-1;-1;3\}$;
3.5 $(\bar{a} - 4\bar{b}) \times (2\bar{a} - 3\bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{3;3;1\}$, $\bar{b} = \{-2;-3;-2\}$;
3.6 $(-\bar{a} + 3\bar{b}) \times (2\bar{a} + \bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{-4;3;2\}$, $\bar{b} = \{-2;4;5\}$;
3.7 $(3\bar{a} + 2\bar{b}) \times (2\bar{a} - 6\bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{-1;0;4\}$, $\bar{b} = \{-3;1;2\}$;
3.8 $(-3\bar{a} + 7\bar{b}) \times (3\bar{a} - \bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{4;3;2\}$, $\bar{b} = \{2;1;4\}$;
3.9 $(-3\bar{a} - 2\bar{b}) \times (2\bar{a} + \bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{0;-4;4\}$, $\bar{b} = \{-2;-3;3\}$;
3.10 $(5\bar{a} - 4\bar{b}) \times (2\bar{a} - \bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{3;2;1\}$, $\bar{b} = \{-1;-2;-2\}$;
3.11 $(-\bar{a} + 4\bar{b}) \times (\bar{a} + \bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{-5;1;2\}$, $\bar{b} = \{-3;4;3\}$;
3.12 $(3\bar{a} - 2\bar{b}) \times (2\bar{a} - 3\bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{-1;4;4\}$, $\bar{b} = \{3;1;-2\}$;
3.13 $(-3\bar{a} - 4\bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{2;3;2\}$, $\bar{b} = \{2;-1;-4\}$;
3.14 $(-3\bar{a} + 2\bar{b}) \times (2\bar{a} + 9\bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{0;-2;2\}$, $\bar{b} = \{-2;-3;0\}$;
3.15 $(5\bar{a} - 3\bar{b}) \times (\bar{a} - 3\bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{3;-2;1\}$, $\bar{b} = \{-1;-2;2\}$;
3.16 $(-\bar{a} + 3\bar{b}) \times (\bar{a} + 2\bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{-2;4;2\}$, $\bar{b} = \{-3;0;3\}$;
3.17 $(3\bar{a} - 2\bar{b}) \times (3\bar{a} + 2\bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{-1;2;3\}$, $\bar{b} = \{4;1;-3\}$;
3.18 $(3\bar{a} - \bar{b}) \times (4\bar{a} - \bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{2;1;2\}$, $\bar{b} = \{2;-1;-2\}$;
3.19 $(-3\bar{a} + \bar{b}) \times (2\bar{a} + \bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{0;-2;1\}$, $\bar{b} = \{-2;-4;0\}$;
3.20 $(2\bar{a} - 3\bar{b}) \times (\bar{a} - 2\bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{3;-2;0\}$, $\bar{b} = \{1;-2;2\}$;
3.21 $(-\bar{a} - 2\bar{b}) \times (-\bar{a} + 2\bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{-2;4;3\}$, $\bar{b} = \{-3;0;2\}$;
3.22 $(3\bar{a} - 2\bar{b}) \times (\bar{a} + 2\bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{-1;2;1\}$, $\bar{b} = \{4;1;-2\}$;
3.23 $(2\bar{a} - \bar{b}) \times (3\bar{a} + \bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{2;1;4\}$, $\bar{b} = \{2;-1;-3\}$;
3.24 $(-3\bar{a} + 2\bar{b}) \times (4\bar{a} + \bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{0;-2;2\}$, $\bar{b} = \{-2;-3;0\}$;
3.25 $(2\bar{a} - \bar{b}) \times (5\bar{a} - 2\bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{4;-1;0\}$, $\bar{b} = \{1;-2;3\}$;
3.26 $(-\bar{a} - 2\bar{b}) \times (-\bar{a} - 3\bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{-2;4;0\}$, $\bar{b} = \{-4;0;2\}$;
3.27 $(3\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} + \bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{-1;4;1\}$, $\bar{b} = \{3;1;-2\}$;
3.28 $(\bar{a} - \bar{b}) \times (3\bar{a} + 4\bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{2;0;4\}$, $\bar{b} = \{3;-1;-2\}$;
3.29 $(3\bar{a} + 2\bar{b}) \times (4\bar{a} + \bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{0;-1;1\}$, $\bar{b} = \{-2;-1;0\}$;
3.30 $(2\bar{a} - 3\bar{b}) \times (2\bar{a} - \bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{3;-2;0\}$, $\bar{b} = \{1;-4;3\}$.

Приклад 4 За координатами точок $A(-5;1;6)$, $B(1;4;3)$ і $C(6;3;9)$ знайти:
а) модуль вектора $\bar{a} = 4\overline{AB} + \overline{BC}$;

б) скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b} = \overline{BC}$;

в) проекцію вектора $\overline{c} = \overline{b}$ на вектор $\overline{d} = \overline{AB}$;

г) координати точки M, яка ділить відрізок $l = AB$ у відношенні $1:3$.

Розв'язання:

а) послідовно знаходимо координати векторів, які складають вектор $\overline{a}$ (від координат кінця вектора віднімаємо координати початку вектора):

$\overline{AB} = \{6;3;-3\}$, $\overline{BC} = \{5;-1;6\}$, $4\overline{AB} + \overline{BC} = \{29;11;-6\}$.

Знаходимо модуль вектора $\overline{a}$:

$\left|\overline{a}\right| = \left|4\overline{AB} + \overline{BC}\right| = \sqrt{29^2 + 11^2 + (-6)^2} = \sqrt{998}$;

б) для знаходження скалярного добутку векторів, знайдемо спочатку їх координати. Маємо $\overline{a} = \{29;11;-6\}$, $\overline{b} = \{5;-1;6\}$. Тоді скалярний добуток векторів (сума добутків відповідних координат векторів):

$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = 29 \cdot 5 + 11 \cdot (-1) + (-6) \cdot 6 = 98$;

в) для обчислення проекції вектора $\overline{c}$ на вектор $\overline{d}$ використовуємо формулу $\text{пр}_{\overline{d}}\overline{c} = \dfrac{\left(\overline{c}, \overline{d}\right)}{\left|\overline{d}\right|}$. Знаходимо значення величин, які входять до формули:

$\overline{d} = \{6;3;-3\}$,

$\left(\overline{c}, \overline{d}\right) = 30 - 3 - 18 = 9$,

$\left|\overline{d}\right| = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54}$,

$\text{пр}_{\overline{AB}}\overline{BC} = \dfrac{9}{\sqrt{54}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$;

г) враховуючи формулу для обчислення координат точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні $r_M = \dfrac{r_A + \lambda r_B}{1 + \lambda}$, де $\lambda = \dfrac{1}{3}$, маємо:

$$x_M = \frac{-5 + \frac{1}{3} \cdot 1}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{7}{2}; \quad y_M = \frac{1 + \frac{1}{3} \cdot 4}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{7}{4}; \quad z_M = \frac{6 + \frac{1}{3} \cdot 3}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{21}{4}.$$

Отримуємо точку $M\left(-\dfrac{7}{2}; \dfrac{7}{4}; \dfrac{21}{4}\right)$.

Відповідь: $\sqrt{998}$; 98; $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$; $M\left(-\dfrac{7}{2}; \dfrac{7}{4}; \dfrac{21}{4}\right)$.

Завдання за варіантами

Приклад 4 За координатами точок A, B і C для указаних векторів знайти:

а) модуль вектора $\overline{a}$;

б) скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

в) проекцію вектора $\overline{c}$ на вектор $\overline{d}$;

г) координати точки M , яка ділить відрізок l у відношенні $\alpha:\beta$.

4.1 $A(4;6;3)$, $B(-5;2;6)$, $C(4;-4;-3)$, $\bar{a}=4\overline{CB}-\overline{AC}$, $\bar{b}=\overline{AB}$, $\bar{c}=\overline{CB}$, $\bar{d}=\overline{AC}$, $l=AB$, $\alpha=5$, $\beta=4$;

4.2 $A(4;3;-2)$, $B(-3;-1;4)$, $C(2;2;1)$, $\bar{a}=-5\overline{AC}+2\overline{CB}$, $\bar{b}=\overline{AB}$, $\bar{c}=\overline{AC}$, $\bar{d}=\overline{CB}$, $l=BC$, $\alpha=2$, $\beta=3$;

4.3 $A(-2;-2;4)$, $B(1;3;-2)$, $C(1;4;2)$, $\bar{a}=2\overline{AC}-3\overline{BA}$, $\bar{b}=\overline{BC}$, $\bar{c}=\overline{BC}$, $\bar{d}=\overline{AC}$, $l=BA$, $\alpha=2$, $\beta=1$;

4.4 $A(2;4;3)$, $B(3;1;-4)$, $C(-1;2;2)$, $\bar{a}=2\overline{BA}+4\overline{AC}$, $\bar{b}=\overline{BA}$, $\bar{c}=\bar{b}$, $\bar{d}=\overline{AC}$, $l=BA$, $\alpha=1$, $\beta=4$;

4.5 $A(2;4;5)$, $B(1;-2;3)$, $C(-1;-2;4)$, $\bar{a}=3\overline{AB}-4\overline{AC}$, $\bar{b}=\overline{BC}$, $\bar{c}=\bar{b}$, $\bar{d}=\overline{AB}$, $l=AB$, $\alpha=2$, $\beta=3$;

4.6 $A(-1;-2;4)$, $B(-1;3;5)$, $C(1;4;2)$, $\bar{a}=3\overline{AC}-7\overline{BC}$, $\bar{b}=\overline{AB}$, $\bar{c}=\bar{b}$, $\bar{d}=\overline{AC}$, $l=AC$, $\alpha=1$, $\beta=7$;

4.7 $A(1;3;2)$, $B(-2;4;-1)$, $C(1;3;-2)$, $\bar{a}=2\overline{AB}+5\overline{CB}$, $\bar{b}=\overline{AC}$, $\bar{c}=\bar{b}$, $\bar{d}=\overline{AB}$, $l=AB$, $\alpha=2$, $\beta=4$;

4.8 $A(2;-4;3)$, $B(-3;-2;4)$, $C(0;0;-2)$, $\bar{a}=3\overline{AC}-4\overline{CB}$, $\bar{b}=\bar{c}=\overline{BC}$, $\bar{d}=\overline{CB}$, $l=AC$, $\alpha=2$, $\beta=1$;

4.9 $A(3;4;-4)$, $B(-2;1;2)$, $C(2;-3;1)$, $\bar{a}=5\overline{CB}+4\overline{AC}$, $\bar{b}=\bar{c}=\overline{BA}$, $\bar{d}=\overline{AC}$, $l=BA$, $\alpha=2$, $\beta=5$;

4.10 $A(0;2;5)$, $B(2;-3;4)$, $C(3;2;-5)$, $\bar{a}=3\overline{AB}+4\overline{CB}$, $\bar{b}=\bar{c}=\overline{AC}$, $\bar{d}=\overline{AB}$, $l=AC$, $\alpha=3$, $\beta=2$;

4.11 $A(-2;-3;-4)$, $B(2;-4;0)$, $C(1;4;5)$, $\bar{a}=4\overline{AC}-8\overline{BC}$, $\bar{b}=\bar{c}=\overline{AB}$, $\bar{d}=\overline{BC}$, $l=AB$, $\alpha=4$, $\beta=2$;

4.12 $A(-2;-3;-2)$, $B(1;4;2)$, $C(1;-3;-3)$, $\bar{a}=2\overline{AC}-4\overline{BC}$, $\bar{b}=\bar{c}=\overline{AB}$, $\bar{d}=\overline{AC}$, $l=BC$, $\alpha=3$, $\beta=1$;

4.13 $A(5;6;1)$, $B(-2;4;-1)$, $C(3;-3;3)$, $\bar{a}=3\overline{AB}-4\overline{BC}$, $\bar{b}=\bar{c}=\overline{AC}$, $\bar{d}=\overline{AB}$, $l=BC$, $\alpha=3$, $\beta=2$;

4.14 $A(10;6;3)$, $B(-2;4;5)$, $C(3;-4;-6)$, $\bar{a}=5\overline{AC}-2\overline{CB}$, $\bar{b}=\bar{c}=\overline{BA}$, $\bar{d}=\overline{AC}$, $l=CB$, $\alpha=1$, $\beta=5$;

4.15 $A(3;2;4)$, $B(-2;1;3)$, $C(2;-2;-1)$, $\bar{a}=4\overline{BC}-3\overline{AC}$, $\bar{b}=\overline{BA}$, $\bar{c}=\overline{AC}$, $\bar{d}=\overline{BC}$, $l=AC$, $\alpha=2$, $\beta=4$;

4.16 $A(-2;3;-4)$, $B(3;-1;2)$, $C(4;2;4)$, $\bar{a}=7\overline{AC}+4\overline{CB}$, $\bar{b}=\bar{c}=\overline{AB}$, $\bar{d}=\overline{CB}$, $l=AB$, $\alpha=2$, $\beta=5$;

4.17 $A(4;5;3)$, $B(-4;2;3)$, $C(5;-6;-2)$, $\bar{a}=9\overline{AB}-4\overline{BC}$, $\bar{b}=\bar{c}=\overline{AC}$, $\bar{d}=\overline{AB}$, $l=BC$, $\alpha=5$, $\beta=1$;

4.18 $A(2;4;6)$, $B(-3;5;1)$, $C(4;-5;-4)$, $\bar{a}=-6\overline{BC}+2\overline{BA}$, $\bar{b}=\bar{c}=\overline{CA}$, $\bar{d}=\overline{BA}$, $l=BC$, $\alpha=1$, $\beta=3$;

4.19 $A(-4;-2;-5)$, $B(3;7;2)$, $C(4;6;-3)$, $\overline{a}=9\overline{BA}+3\overline{BC}$, $\overline{b}=\overline{c}=\overline{AC}$, $\overline{d}=\overline{BC}$, $l=BA$, $\alpha=4$, $\beta=3$;

4.20 $A(5;4;4)$, $B(-5;2;3)$, $C(4;2;-5)$, $\overline{a}=11\overline{AC}-6\overline{AB}$, $\overline{b}=\overline{BC}$, $\overline{c}=\overline{AB}$, $\overline{d}=\overline{AC}$, $l=BC$, $\alpha=3$, $\beta=1$;

4.21 $A(3;4;6)$, $B(-4;6;4)$, $C(5;-2;-3)$, $\overline{a}=-7\overline{BC}+4\overline{CA}$, $\overline{b}=\overline{BA}$, $\overline{c}=\overline{CA}$, $\overline{d}=\overline{BC}$, $l=BA$, $\alpha=5$, $\beta=3$;

4.22 $A(-5;-2;-6)$, $B(3;4;5)$, $C(2;-5;4)$, $\overline{a}=8\overline{AC}-5\overline{BC}$, $\overline{b}=\overline{c}=\overline{AB}$, $\overline{d}=\overline{BC}$, $l=AC$, $\alpha=3$, $\beta=4$;

4.23 $A(3;4;1)$, $B(5;-2;6)$, $C(4;2;-7)$, $\overline{a}=-7\overline{AC}+5\overline{AB}$, $\overline{b}=\overline{c}=\overline{BC}$, $\overline{d}=\overline{AC}$, $l=AB$, $\alpha=2$, $\beta=3$;

4.24 $A(4;3;2)$, $B(-4;-3;5)$, $C(6;4;-3)$, $\overline{a}=8\overline{AC}-5\overline{BC}$, $\overline{b}=\overline{c}=\overline{BA}$, $\overline{d}=\overline{AC}$, $l=BC$, $\alpha=2$, $\beta=5$;

4.25 $A(-5;4;3)$, $B(4;5;2)$, $C(2;7;-4)$, $\overline{a}=3\overline{BC}+2\overline{AB}$, $\overline{b}=\overline{c}=\overline{CA}$, $\overline{d}=\overline{AB}$, $l=BC$, $\alpha=3$, $\beta=4$;

4.26 $A(6;4;5)$, $B(-7;1;8)$, $C(2;-2;-7)$, $\overline{a}=5\overline{CB}-2\overline{AC}$, $\overline{b}=\overline{AB}$, $\overline{c}=\overline{CB}$, $\overline{d}=\overline{AC}$, $l=AB$, $\alpha=3$, $\beta=2$;

4.27 $A(6;5;-4)$, $B(-5;-2;2)$, $C(3;3;2)$, $\overline{a}=6\overline{AB}-3\overline{CB}$, $\overline{b}=\overline{c}=\overline{AC}$, $\overline{d}=\overline{CB}$, $l=BC$, $\alpha=1$, $\beta=5$;

4.28 $A(-3;-5;6)$, $B(3;5;-4)$, $C(2;6;4)$, $\overline{a}=4\overline{AC}-5\overline{BA}$, $\overline{b}=\overline{CB}$, $\overline{c}=\overline{BA}$, $\overline{d}=\overline{AC}$, $l=BA$, $\alpha=4$, $\beta=2$;

4.29 $A(3;5;4)$, $B(4;2;-3)$, $C(-2;4;7)$, $\overline{a}=3\overline{BA}-4\overline{AC}$, $\overline{b}=\overline{AB}$, $\overline{c}=\overline{BA}$, $\overline{d}=\overline{AC}$, $l=BA$, $\alpha=2$, $\beta=5$;

4.30 $A(4;6;7)$, $B(2;-4;1)$, $C(-3;-4;2)$, $\overline{a}=5\overline{AB}-2\overline{AC}$, $\overline{b}=\overline{c}=\overline{BC}$, $\overline{d}=\overline{AB}$, $l=AB$, $\alpha=3$, $\beta=4$.

Приклад 5 Дано вектори $\overline{a}=4\overline{i}+4\overline{k}$, $\overline{b}=-\overline{i}+3\overline{j}+2\overline{k}$ і $\overline{c}=3\overline{i}+5\overline{j}$. Необхідно:

а) обчислити добуток векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $5\overline{c}$;

б) знайти модуль векторного добутку $3\overline{c}$ і $\overline{b}$;

в) обчислити скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $3\overline{b}$;

г) перевірити, чи будуть колінеарними чи ортогональними вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

д) перевірити, чи будуть компланарними вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$.

Розв'язання:

а) Так як $5\overline{c}=15\overline{i}+25\overline{j}$, то

$$\left(\left[\overline{a},\overline{b}\right],5\overline{c}\right)=\begin{vmatrix}4&0&4\\-1&3&2\\15&25&0\end{vmatrix}=-100-180-200=-480;$$

б) оскільки $3\overline{c} = 9\overline{i} + 15\overline{j}$, то

$$\left[3\overline{c}, \overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 9 & 15 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 30\overline{i} + 27\overline{k} + 15\overline{k} - 18\overline{j} = 30\overline{i} - 18\overline{j} + 42\overline{k},$$

$$\left|\left[3\overline{c}, \overline{b}\right]\right| = \sqrt{30^2 + (-18)^2 + 42^2} = \sqrt{2988};$$

в) знаходимо: $3\overline{b} = -3\overline{i} + 9\overline{j} + 6\overline{k}$, $\left(\overline{a}, 3\overline{b}\right) = 4\cdot(-3) + 0\cdot 9 + 4\cdot 6 = 12$;

г) так як $\overline{a} = \{4;0;4\}$, $\overline{b} = \{-1;3;2\}$ і $\dfrac{4}{-1} \neq \dfrac{0}{3} \neq \dfrac{4}{2}$, то вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ не колінеарні. Оскільки $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = 4\cdot(-1) + 0\cdot 3 + 4\cdot 2 = 4 \neq 0$, то вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ не ортогональні;

д) вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ компланарні, якщо $\left(\left[\overline{a}, \overline{b}\right], \overline{c}\right) = 0$. Обчислюємо

$$\left(\left[\overline{a}, \overline{b}\right], \overline{c}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 - 36 - 40 = -96 \neq 0,$$ тобто вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ не компланарні.

Завдання за варіантами

Приклад 5 Дано вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$. Необхідно:

а) обчислити мішаний добуток трьох векторів;

б) знайти модуль векторного добутку;

в) обчислити скалярний добуток двох векторів;

г) перевірити, чи будуть колінеарними чи ортогональними два вектори;

д) перевірити, чи будуть компланарними три вектори.

5.1 $\overline{a} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{j} + 4\overline{k}$ і $\overline{c} = 5\overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$; а) $\overline{a}$, $3\overline{b}$, $\overline{c}$; б) $3\overline{a}$, $2\overline{c}$; в) $\overline{b}$, $-4\overline{c}$; г) $\overline{a}$, $\overline{c}$; д) $\overline{a}$, $2\overline{b}$, $3\overline{c}$;

5.2 $\overline{a} = 3\overline{i} + 4\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j} + 7\overline{k}$ і $\overline{c} = 3\overline{i} - 6\overline{j} + 21\overline{k}$; а) $5\overline{a}$, $2\overline{b}$, $\overline{c}$; б) $4\overline{b}$, $2\overline{c}$; в) $\overline{a}$, $\overline{c}$; г) $\overline{b}$, $\overline{c}$; д) $2\overline{a}$, $-3\overline{b}$, $\overline{c}$;

5.3 $\overline{a} = 2\overline{i} - 4\overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{b} = 7\overline{i} + 3\overline{j}$ і $\overline{c} = 3\overline{i} + 5\overline{j} - 7\overline{k}$; а) $\overline{a}$, $2\overline{b}$, $3\overline{c}$; б) $3\overline{a}$, $-7\overline{b}$; в) $-2\overline{a}$, $\overline{c}$; г) $\overline{a}$, $\overline{c}$; д) $3\overline{a}$, $2\overline{b}$, $3\overline{c}$;

5.4 $\overline{a} = -7\overline{i} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 4\overline{k}$ і $\overline{c} = \overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$; а) $\overline{a}$, $-2\overline{b}$, $-7\overline{c}$; б) $4\overline{b}$, $3\overline{c}$; в) $2\overline{a}$, $-7\overline{c}$; г) $\overline{b}$, $\overline{c}$; д) $2\overline{a}$, $4\overline{b}$, $3\overline{c}$;

5.5 $\overline{a} = -4\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} + 5\overline{j} - 2\overline{k}$ і $\overline{c} = \overline{j} + 5\overline{k}$; а) $\overline{a}$, $6\overline{b}$, $3\overline{c}$; б) $2\overline{b}$, $\overline{a}$; в) $\overline{a}$, $-4\overline{c}$; г) $\overline{a}$, $\overline{b}$; д) $\overline{a}$, $6\overline{b}$, $3\overline{c}$;

5.6 $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{j} - 3\overline{k}$ і $\overline{c} = -3\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$; а) $\overline{a}$, $-3\overline{b}$, $2\overline{c}$; б) $3\overline{c}$, $5\overline{a}$; в) $-2\overline{a}$, $4\overline{b}$; г) $\overline{a}$, $\overline{c}$; д) $5\overline{a}$, $4\overline{b}$, $3\overline{c}$;

5.7 $\overline{a} = 4\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 5\overline{k}$ і $\overline{c} = 7\overline{i} + 2\overline{j} + 4\overline{k}$; а) $7\overline{a}$, $-4\overline{b}$, $2\overline{c}$; б) $3\overline{a}$, $5\overline{c}$; в) $2\overline{b}$, $4\overline{c}$; г) $\overline{b}$, $\overline{c}$; д) $7\overline{a}$, $2\overline{b}$, $5\overline{c}$;

5.8 $\bar{a}=4\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}+\bar{k}$ і $\bar{c}=-12\bar{i}-6\bar{j}+9\bar{k}$; а) $2\bar{a}$, $3\bar{b}$, $\bar{c}$; б) $4\bar{a}$, $3\bar{b}$; в) $\bar{b}$, $-4\bar{c}$; г) $\bar{a}$, $\bar{c}$; д) $2\bar{a}$, $3\bar{b}$, $-4\bar{c}$;

5.9 $\bar{a}=-\bar{i}+5\bar{k}$, $\bar{b}=-3\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$ і $\bar{c}=-2\bar{i}-4\bar{j}+\bar{k}$; а) $3\bar{a}$, $-4\bar{b}$, $2\bar{c}$; б) $7\bar{a}$, $-3\bar{c}$; в) $3\bar{a}$, $2\bar{b}$; г) $\bar{b}$, $\bar{c}$; д) $7\bar{a}$, $2\bar{b}$, $-3\bar{c}$;

5.10 $\bar{a}=6\bar{i}-4\bar{j}+6\bar{k}$, $\bar{b}=9\bar{i}-6\bar{j}+9\bar{k}$ і $\bar{c}=\bar{i}-8\bar{k}$; а) $2\bar{a}$, $-4\bar{b}$, $3\bar{c}$; б) $3\bar{b}$, $-9\bar{c}$; в) $3\bar{a}$, $-5\bar{c}$; г) $\bar{a}$, $\bar{b}$; д) $3\bar{a}$, $-4\bar{b}$, $-9\bar{c}$;

5.11 $\bar{a}=5\bar{i}-3\bar{j}+4\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}-4\bar{j}-2\bar{k}$ і $\bar{c}=3\bar{i}+5\bar{j}-7\bar{k}$; а) $\bar{a}$, $-4\bar{b}$, $2\bar{c}$; б) $-2\bar{b}$, $4\bar{c}$; в) $-3\bar{a}$, $6\bar{c}$; г) $\bar{b}$, $\bar{c}$; д) $\bar{a}$, $-2\bar{b}$, $6\bar{c}$;

5.12 $\bar{a}=-4\bar{i}+3\bar{j}-7\bar{k}$, $\bar{b}=4\bar{i}+6\bar{j}-2\bar{k}$ і $\bar{c}=6\bar{i}+9\bar{j}-3\bar{k}$; а) $-2\bar{a}$, $\bar{b}$, $-2\bar{c}$; б) $4\bar{b}$, $7\bar{c}$; в) $5\bar{a}$, $-3\bar{c}$; г) $\bar{b}$, $\bar{c}$; д) $-2\bar{a}$, $4\bar{b}$, $7\bar{c}$;

5.13 $\bar{a}=-5\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$, $\bar{b}=7\bar{i}-5\bar{k}$ і $\bar{c}=2\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k}$; а) $2\bar{a}$, $4\bar{b}$, $-5\bar{c}$; б) $-3\bar{b}$, $11\bar{c}$; в) $8\bar{a}$, $-6\bar{c}$; г) $\bar{a}$, $\bar{c}$; д) $8\bar{a}$, $-3\bar{b}$, $11\bar{c}$;

5.14 $\bar{a}=-4\bar{i}-6\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}$ і $\bar{c}=-\bar{i}+5\bar{j}-3\bar{k}$; а) $5\bar{a}$, $7\bar{b}$, $2\bar{c}$; б) $-4\bar{b}$, $11\bar{a}$; в) $3\bar{a}$, $-7\bar{c}$; г) $\bar{b}$, $\bar{a}$; д) $3\bar{a}$, $7\bar{b}$, $-2\bar{c}$;

5.15 $\bar{a}=-4\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k}$, $\bar{b}=-3\bar{j}+5\bar{k}$ і $\bar{c}=6\bar{i}+6\bar{j}-4\bar{k}$; а) $5\bar{a}$, $-\bar{b}$, $3\bar{c}$; б) $-7\bar{a}$, $4\bar{c}$; в) $3\bar{a}$, $9\bar{c}$; г) $\bar{a}$, $\bar{c}$; д) $3\bar{a}$, $-9\bar{b}$, $4\bar{c}$;

5.16 $\bar{a}=-3\bar{i}+8\bar{j}$, $\bar{b}=2\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k}$ і $\bar{c}=8\bar{i}+12\bar{j}-8\bar{k}$; а) $4\bar{a}$, $-6\bar{b}$, $5\bar{c}$; б) $-7\bar{a}$, $9\bar{c}$; в) $3\bar{b}$, $-8\bar{c}$; г) $\bar{b}$, $\bar{c}$; д) $4\bar{a}$, $-6\bar{b}$, $9\bar{c}$;

5.17 $\bar{a}=2\bar{i}-4\bar{j}-2\bar{k}$, $\bar{b}=-9\bar{i}+2\bar{k}$ і $\bar{c}=3\bar{i}+5\bar{j}-7\bar{k}$; а) $7\bar{a}$, $5\bar{b}$, $-\bar{c}$; б) $4\bar{b}$, $-5\bar{a}$; в) $3\bar{b}$, $-8\bar{c}$; г) $\bar{a}$, $\bar{c}$; д) $7\bar{a}$, $5\bar{b}$, $-\bar{c}$;

5.18 $\bar{a}=9\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}-15\bar{j}+21\bar{k}$ і $\bar{c}=\bar{i}-5\bar{j}+7\bar{k}$; а) $2\bar{a}$, $-7\bar{b}$, $3\bar{c}$; б) $-6\bar{a}$, $4\bar{c}$; в) $7\bar{a}$, $5\bar{b}$; г) $\bar{b}$, $\bar{c}$; д) $2\bar{a}$, $-7\bar{b}$, $4\bar{c}$;

5.19 $\bar{a}=-2\bar{i}+4\bar{j}-3\bar{k}$, $\bar{b}=5\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$ і $\bar{c}=7\bar{i}+4\bar{j}-\bar{k}$; а) $\bar{a}$, $-6\bar{b}$, $2\bar{c}$; б) $-8\bar{b}$, $5\bar{c}$; в) $-9\bar{a}$, $7\bar{c}$; г) $\bar{a}$, $\bar{b}$; д) $\bar{a}$, $-6\bar{b}$, $5\bar{c}$;

5.20 $\bar{a}=-9\bar{i}+4\bar{j}-5\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}-2\bar{j}+4\bar{k}$ і $\bar{c}=-5\bar{i}+10\bar{j}-20\bar{k}$; а) $-2\bar{a}$, $7\bar{b}$, $5\bar{c}$; б) $-6\bar{b}$, $7\bar{c}$; в) $9\bar{a}$, $4\bar{c}$; г) $\bar{b}$, $\bar{c}$; д) $-2\bar{a}$, $7\bar{b}$, $4\bar{c}$;

5.21 $\bar{a}=2\bar{i}-7\bar{j}+5\bar{k}$, $\bar{b}=-\bar{i}+2\bar{j}-6\bar{k}$ і $\bar{c}=3\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}$; а) $-3\bar{a}$, $6\bar{b}$, $-\bar{c}$; б) $5\bar{b}$, $3\bar{c}$; в) $7\bar{a}$, $-4\bar{b}$; г) $\bar{b}$, $\bar{c}$; д) $7\bar{a}$, $-4\bar{b}$, $3\bar{c}$;

5.22 $\bar{a}=7\bar{i}-4\bar{j}-5\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}-11\bar{j}+3\bar{k}$ і $\bar{c}=5\bar{i}+5\bar{j}+3\bar{k}$; а) $3\bar{a}$, $-7\bar{b}$, $2\bar{c}$; б) $2\bar{b}$, $6\bar{c}$; в) $-4\bar{a}$, $-5\bar{c}$; г) $\bar{a}$, $\bar{c}$; д) $-4\bar{a}$, $2\bar{b}$, $6\bar{c}$;

5.23 $\bar{a}=4\bar{i}-6\bar{j}-2\bar{k}$, $\bar{b}=-2\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$ і $\bar{c}=3\bar{i}-5\bar{j}+7\bar{k}$; а) $6\bar{a}$, $3\bar{b}$, $8\bar{c}$; б) $-7\bar{b}$, $6\bar{a}$; в) $-5\bar{a}$, $4\bar{c}$; г) $\bar{b}$, $\bar{a}$; д) $-5\bar{a}$, $3\bar{b}$, $4\bar{c}$;

5.24 $\bar{a}=3\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{b}=-\bar{i}+5\bar{j}-4\bar{k}$ і $\bar{c}=6\bar{i}-2\bar{j}+4\bar{k}$; а) $4\bar{a}$, $-7\bar{b}$, $-2\bar{c}$; б) $6\bar{a}$, $-4\bar{c}$; в) $-2\bar{a}$, $5\bar{b}$; г) $\bar{a}$, $\bar{c}$; д) $6\bar{a}$, $-7\bar{b}$, $-2\bar{c}$;

5.25 $\bar{a}=-3\bar{i}-\bar{j}-5\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}-4\bar{j}+8\bar{k}$ і $\bar{c}=3\bar{i}+7\bar{j}-\bar{k}$; а) $2\bar{a}$, $-\bar{b}$, $3\bar{c}$; б) $-9\bar{a}$, $4\bar{c}$; в) $5\bar{b}$, $-6\bar{c}$; г) $\bar{b}$, $\bar{c}$; д) $2\bar{a}$, $5\bar{b}$, $-6\bar{c}$;

5.26 $\bar{a}=-3\bar{i}+2\bar{j}+7\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}-5\bar{k}$ і $\bar{c}=6\bar{i}+4\bar{j}-\bar{k}$; а) $-2\bar{a}$, $\bar{b}$, $7\bar{c}$; б) $5\bar{a}$, $-2\bar{c}$; в) $3\bar{b}$, $\bar{c}$; г) $\bar{a}$, $\bar{c}$; д) $-2\bar{a}$, $3\bar{b}$, $7\bar{c}$;

5.27 $\bar{a}=3\bar{i}-\bar{j}+5\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}-4\bar{j}+6\bar{k}$ і $\bar{c}=\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}$; а) $-3\bar{a}$, $4\bar{b}$, $-5\bar{c}$; б) $6\bar{b}$, $3\bar{c}$; в) $\bar{a}$, $4\bar{c}$; г) $\bar{b}$, $\bar{c}$; д) $-3\bar{a}$, $4\bar{b}$, $-5\bar{c}$;

5.28 $\bar{a}=4\bar{i}-5\bar{j}-4\bar{k}$, $\bar{b}=5\bar{i}-\bar{j}$ і $\bar{c}=2\bar{i}+4\bar{j}-3\bar{k}$; а) $\bar{a}$, $7\bar{b}$, $-2\bar{c}$; б) $-5\bar{a}$, $4\bar{b}$; в) $-3\bar{a}$, $8\bar{c}$; г) $\bar{a}$, $\bar{c}$; д) $-3\bar{a}$, $4\bar{b}$, $8\bar{c}$;

5.29 $\bar{a}=-9\bar{i}+4\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}-4\bar{j}+6\bar{k}$ і $\bar{c}=3\bar{i}-6\bar{j}+9\bar{k}$; а) $3\bar{a}$, $-5\bar{b}$, $-4\bar{c}$; б) $6\bar{b}$, $2\bar{c}$; в) $-2\bar{a}$, $8\bar{c}$; г) $\bar{b}$, $\bar{c}$; д) $3\bar{a}$, $6\bar{b}$, $-4\bar{c}$;

5.30 $\bar{a}=5\bar{i}-6\bar{j}-4\bar{k}$, $\bar{b}=4\bar{i}+8\bar{j}-7\bar{k}$ і $\bar{c}=3\bar{j}-4\bar{k}$; а) $5\bar{a}$, $3\bar{b}$, $-4\bar{c}$; б) $4\bar{b}$, $\bar{a}$; в) $7\bar{a}$, $-2\bar{c}$; г) $\bar{b}$, $\bar{a}$; д) $5\bar{a}$, $4\bar{b}$, $-2\bar{c}$.

Приклад 6 Вершини піраміди знаходяться в точках $A(2;3;4)$, $B(4;7;3)$, $C(1;2;2)$ і $D(-2;0;-1)$. Обчислити:

а) площу грані ABC;

б) площу перерізу, який проходить через середину ребер AB, AC, AD;

в) об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язання:

а) відомо, що $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left[\overline{AB},\overline{BC}\right]$. Знаходимо $\overline{AB}=\{2;4;-1\}$, $\overline{AC}=\{-1;-1;-2\}$.

$$\left[\overline{AB},\overline{BC}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & -1\end{vmatrix}\bar{k}=-9\bar{i}+5\bar{j}+2\bar{k}.$$

Остаточно маємо:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{9^2+5^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{110};$$

б) середини ребер AB, AC, AD знаходяться в точках $K(3;5;3{,}5)$, $M(1{,}5;2{,}5;3)$, $N(0;1{,}5;1{,}5)$. Далі маємо:

$$S_{KMN}=\frac{1}{2}\left[\overline{KM},\overline{KN}\right];$$

$$\overline{KM}=\{-1{,}5;-2{,}5;-0{,}5\};$$

$$\overline{KN}=\{-3;-3{,}5;-2\};$$

$$\left[\overline{KM},\overline{KN}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1{,}5 & -2{,}5 & -0{,}5\\ -3 & -3{,}5 & -2\end{vmatrix}=3{,}25\bar{i}-1{,}5\bar{j}-2{,}25\bar{k}.$$

$$S_{KMN}=\frac{1}{2}\sqrt{3{,}25^2+1{,}5^2+2{,}25^2}=\frac{1}{2}\sqrt{17{,}875};$$

в) оскільки $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\left[\overline{AB},\overline{AC}\right],\overline{AD}\right)\right|$, $\overline{AD}=\{-4;-3;-5\}$,

$$\left(\left[\overline{AB},\overline{AC}\right],\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -2\\ -4 & -3 & -5\end{vmatrix}=11, \text{ то } V_{ABCD}=\frac{11}{6}.$$

Завдання за варіантами

Приклад 6 Вершини піраміди знаходяться в точках A, B, C і D. Обчислити:

а) площу вказаної грані;

б) площу перерізу, який проходять через середину ребра l і дві вершини піраміди;

в) об'єм піраміди $ABCD$.

6.1 $A(-5;-4;-3)$, $B(7;3;-1)$, $C(6;-2;0)$, $D(3;2;-7)$; а) BCD; б) $l=AD$, B і C;
6.2 $A(-7;-5;6)$, $B(-2;5;-3)$, $C(3;-2;4)$, $D(1;2;2)$; а) BCD; б) $l=CD$, A і B;
6.3 $A(1;3;1)$, $B(-1;4;6)$, $C(-2;-3;4)$, $D(3;4;-4)$; а) ACD; б) $l=BC$, A і D;
6.4 $A(2;4;1)$, $B(-3;-2;4)$, $C(3;5;-2)$, $D(4;2;-3)$; а) ABD; б) $l=AC$, B і D;
6.5 $A(-5;-3;-4)$, $B(1;4;6)$, $C(3;2;-2)$, $D(8;-2;4)$; а) ACD; б) $l=BC$, A і D;
6.6 $A(3;4;2)$, $B(-2;3;-5)$, $C(4;-3;6)$, $D(6;-5;3)$; а) ABD; б) $l=BD$, A і C;
6.7 $A(-4;6;3)$, $B(3;-5;1)$, $C(2;6;-4)$, $D(2;4;-5)$; а) ACD; б) $l=AD$, B і C;
6.8 $A(7;5;8)$, $B(-4;-5;3)$, $C(2;-3;5)$, $D(5;1;-4)$; а) BCD; б) $l=BC$, A і D;
6.9 $A(-7;-6;-5)$, $B(5;1;-3)$, $C(8;-4;0)$, $D(3;4;-7)$; а) BCD; б) $l=AD$, B і C;
6.10 $A(3;4;5)$, $B(1;2;1)$, $C(-2;-3;6)$, $D(3;-6;-3)$; а) ACD; б) $l=AB$, C і D;
6.11 $A(3;-5;-2)$, $B(-4;2;3)$, $C(1;5;7)$, $D(-2;-4;5)$; а) ACD; б) $l=BD$, A і C;
6.12 $A(7;4;9)$, $B(1;-2;-3)$, $C(-5;-3;0)$, $D(1;-3;4)$; а) ABD; б) $l=AB$, C і D;
6.13 $A(-4;-7;-3)$, $B(-4;-5;7)$, $C(2;-3;3)$, $D(3;2;1)$; а) BCD; б) $l=BC$, A і D;
6.14 $A(-4;-5;-3)$, $B(3;1;2)$, $C(5;7;-6)$, $D(6;-1;5)$; а) ACD; б) $l=BC$, A і D;
6.15 $A(5;2;4)$, $B(-3;5;-7)$, $C(1;-5;8)$, $D(9;-3;5)$; а) ABD; б) $l=BD$, A і C;
6.16 $A(-6;4;5)$, $B(5;-7;3)$, $C(4;2;-8)$, $D(2;8;-3)$; а) ACD; б) $l=AD$, B і C;
6.17 $A(5;3;6)$, $B(-3;-4;4)$, $C(5;-6;8)$, $D(4;0;-3)$; а) BCD; б) $l=BC$, A і D;
6.18 $A(5;-4;4)$, $B(-4;-6;5)$, $C(3;2;-7)$, $D(6;2;-9)$; а) ABD; б) $l=BD$, A і C;
6.19 $A(3;-2;6)$, $B(-6;-2;3)$, $C(1;1;-4)$, $D(4;6;-7)$; а) ABD; б) $l=BD$, A і C;
6.20 $A(7;-1;-2)$, $B(1;7;8)$, $C(3;7;9)$, $D(-3;-5;2)$; а) ACD; б) $l=BD$, A і C;
6.21 $A(5;2;7)$, $B(7;-6;-9)$, $C(-7;-6;3)$, $D(1;-5;2)$; а) ABD; б) $l=AB$, C і D;
6.22 $A(-2;-5;-1)$, $B(-6;-7;9)$, $C(4;-5;1)$, $D(2;1;4)$; а) BCD; б) $l=BC$, A і D;
6.23 $A(-6;-3;-5)$, $B(5;1;7)$, $C(3;5;-1)$, $D(4;-2;9)$; а) ACD; б) $l=BC$, A і D;
6.24 $A(7;4;2)$, $B(-5;3;-9)$, $C(1;-5;3)$, $D(7;-9;1)$; а) ABD; б) $l=BD$, A і C;
6.25 $A(-8;2;7)$, $B(3;-5;9)$, $C(2;4;-6)$, $D(4;6;-5)$; а) ACD; б) $l=AD$, B і C;
6.26 $A(4;3;1)$, $B(2;7;5)$, $C(-4;-2;4)$, $D(2;-3;-5)$; а) ACD; б) $l=AB$, C і D;
6.27 $A(-9;-7;4)$, $B(-4;3;-1)$, $C(5;-4;2)$, $D(3;4;4)$; а) BCD; б) $l=CD$, A і B;
6.28 $A(3;5;3)$, $B(-3;2;8)$, $C(-3;-2;6)$, $D(7;8;-2)$; а) ACD; б) $l=BD$, A і C;
6.29 $A(4;2;3)$, $B(-5;-4;2)$, $C(5;7;-4)$, $D(6;4;-7)$; а) ABD; б) $l=AD$, B і C;

6.30 $A(-4;-2;-3)$, $B(2;5;7)$, $C(6;3;-1)$, $D(6;-4;1)$; а) ACD; б) $l = BC$, A і D.

Приклад 7 Довести, що вектори $\overline{a} = \{3;-1;0\}$, $\overline{b} = \{2;3;1\}$, $\overline{c} = \{-1;4;3\}$ утворюють базис, та знайти координати вектора $\overline{d} = \{2;3;7\}$ в цьому базисі.

Розв'язання:

Обчислюємо визначник, який складаємо із координат векторів:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0.$$

Отже, вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ утворюють базис, і вектор $\overline{d}$ лінійно можна виразити через базисні вектори: $\overline{d} = x\overline{a} + y\overline{b} + z\overline{c}$ або в координатній формі маємо систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 2, \\ -x + 3y + 4z = 3, \\ y + 3z = 7. \end{cases}$$

Розв'язуючи отриману систему, знаходимо розв'язки:

$x = 3$, $y = -2$, $z = 3$.

Тому координати вектора $\overline{d}$ у новому базисі $\overline{d} = \{3;-2;3\}$ або $\overline{d} = 3\overline{a} - 2\overline{b} + 3\overline{c}$.

Завдання за варіантами

Приклад 7 Довести, що вектори $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ утворюють базис і розкласти вектор $\overline{x}$ за цим базисом:

7.1 $\overline{x} = \{-2;11;14\}$, $\overline{p} = \{1;1;3\}$, $\overline{q} = \{1;2;1\}$, $\overline{r} = \{-4;1;1\}$;

7.2 $\overline{x} = \{2;-6;-3\}$, $\overline{p} = \{2;1;8\}$, $\overline{q} = \{2;-3;1\}$, $\overline{r} = \{1;-1;2\}$;

7.3 $\overline{x} = \{-12;13;-4\}$, $\overline{p} = \{1;2;3\}$, $\overline{q} = \{1;4;1\}$, $\overline{r} = \{5;1;-3\}$;

7.4 $\overline{x} = \{11;14;12\}$, $\overline{p} = \{2;4;3\}$, $\overline{q} = \{1;2;-1\}$, $\overline{r} = \{4;4;5\}$;

7.5 $\overline{x} = \{-3;-2;2\}$, $\overline{p} = \{1;2;1\}$, $\overline{q} = \{2;2;-3\}$, $\overline{r} = \{-1;1;4\}$;

7.6 $\overline{x} = \{-12;-2;-15\}$, $\overline{p} = \{1;2;-1\}$, $\overline{q} = \{-4;3;1\}$, $\overline{r} = \{2;4;5\}$;

7.7 $\overline{x} = \{-4;13;16\}$, $\overline{p} = \{1;3;1\}$, $\overline{q} = \{7;-1;4\}$, $\overline{r} = \{-1;2;3\}$;

7.8 $\overline{x} = \{4;5;-7\}$, $\overline{p} = \{1;2;1\}$, $\overline{q} = \{2;-1;1\}$, $\overline{r} = \{-1;1;-3\}$;

7.9 $\overline{x} = \{0;0;2\}$, $\overline{p} = \{2;2;3\}$, $\overline{q} = \{4;-3;-1\}$, $\overline{r} = \{-6;1;-1\}$;

7.10 $\overline{x} = \{-1;13;10\}$, $\overline{p} = \{1;2;3\}$, $\overline{q} = \{3;-3;1\}$, $\overline{r} = \{-2;4;1\}$;

7.11 $\overline{x} = \{-1;9;12\}$, $\overline{p} = \{1;3;2\}$, $\overline{q} = \{-2;-1;3\}$, $\overline{r} = \{3;2;-1\}$;

7.12 $\overline{x} = \{5;-6;2\}$, $\overline{p} = \{1;2;3\}$, $\overline{q} = \{-4;1;-2\}$, $\overline{r} = \{2;-3;-1\}$;

7.13 $\overline{x} = \{16;2;10\}$, $\overline{p} = \{2;1;1\}$, $\overline{q} = \{-6;1;-1\}$, $\overline{r} = \{8;-1;4\}$;

7.14 $\overline{x}=\{13;-3;6\}$, $\overline{p}=\{3;1;4\}$, $\overline{q}=\{2;-2;-1\}$, $\overline{r}=\{1;1;1\}$;

7.15 $\overline{x}=\{13;16;-1\}$, $\overline{p}=\{1;2;1\}$, $\overline{q}=\{2;3;1\}$, $\overline{r}=\{-1;1;4\}$;

7.16 $\overline{x}=\{11;11;27\}$, $\overline{p}=\{1;1;5\}$, $\overline{q}=\{5;1;1\}$, $\overline{r}=\{-1;-5;-1\}$;

7.17 $\overline{x}=\{-1;-1;2\}$, $\overline{p}=\{2;1;3\}$, $\overline{q}=\{2;-3;1\}$, $\overline{r}=\{1;2;1\}$;

7.18 $\overline{x}=\{1;2;6\}$, $\overline{p}=\{1;2;3\}$, $\overline{q}=\{1;-3;-1\}$, $\overline{r}=\{-4;2;-1\}$;

7.19 $\overline{x}=\{4;11;11\}$, $\overline{p}=\{2;3;3\}$, $\overline{q}=\{-1;4;-2\}$, $\overline{r}=\{-1;-2;4\}$;

7.20 $\overline{x}=\{8;6;-4\}$, $\overline{p}=\{2;1;3\}$, $\overline{q}=\{-1;-3;1\}$, $\overline{r}=\{1;-5;-7\}$;

7.21 $\overline{x}=\{1;2;3\}$, $\overline{p}=\{3;1;2\}$, $\overline{q}=\{2;1;2\}$, $\overline{r}=\{-1;2;5\}$;

7.22 $\overline{x}=\{10;8;-2\}$, $\overline{p}=\{1;6;3\}$, $\overline{q}=\{6;3;1\}$, $\overline{r}=\{3;-1;-6\}$;

7.23 $\overline{x}=\{-1;7;1\}$, $\overline{p}=\{2;7;1\}$, $\overline{q}=\{6;-1;1\}$, $\overline{r}=\{3;-1;1\}$;

7.24 $\overline{x}=\{-4;6;4\}$, $\overline{p}=\{2;1;3\}$, $\overline{q}=\{-3;2;-1\}$, $\overline{r}=\{-3;4;2\}$;

7.25 $\overline{x}=\{1;1;1\}$, $\overline{p}=\{7;2;-5\}$, $\overline{q}=\{-3;5;-2\}$, $\overline{r}=\{-3;-6;8\}$;

7.26 $\overline{x}=\{8;9;3\}$, $\overline{p}=\{-1;4;6\}$, $\overline{q}=\{4;2;-1\}$, $\overline{r}=\{5;3;-2\}$;

7.27 $\overline{x}=\{0;-9;-3\}$, $\overline{p}=\{3;-2;6\}$, $\overline{q}=\{4;-3;1\}$, $\overline{r}=\{5;5;-1\}$;

7.28 $\overline{x}=\{-2;-4;3\}$, $\overline{p}=\{1;2;4\}$, $\overline{q}=\{-4;-3;1\}$, $\overline{r}=\{2;-1;2\}$;

7.29 $\overline{x}=\{7;8;5\}$, $\overline{p}=\{2;2;3\}$, $\overline{q}=\{3;4;-1\}$, $\overline{r}=\{-1;1;1\}$;

7.30 $\overline{x}=\{-6;4;-3\}$, $\overline{p}=\{1;3;3\}$, $\overline{q}=\{-3;1;-2\}$, $\overline{r}=\{-3;3;-1\}$;

Розділ 3
Аналітична геометрія на площині

Приклад 1 Дано вершини трикутника ABC: $A(4;3)$, $B(-3;-3)$, $C(2;7)$. Знайти:

а) рівняння сторони AB;

б) рівняння висоти CH;

в) рівняння медіани AM;

г) точку N перетину медіани AM і висоти CH;

д) рівняння прямої, яка проходить через точку C паралельно стороні AB;

е) відстань від точки C до прямої AB.

Розв'язання:

а) використовуючи рівняння прямої, яка проходить через дві точки, отримаємо рівняння сторони AB: $\dfrac{x-4}{-3-4}=\dfrac{y-3}{-3-3}$, звідки

$6(x-4)=7(y-3)$ або після перетворень:

$6x-7y-3=0$ – рівняння сторони AB;

б) використовуючи загальне рівняння сторони AB, знайдемо кутовий коефіцієнт цієї прямої: $6x-7y-3=0$ або $y=\dfrac{6}{7}x-\dfrac{3}{7}$. Звідки $k_1=\dfrac{6}{7}$.

З урахуванням умови перпендикулярності прямих AB і CH $(k_1k_2=-1)$, знаходимо кутовий коефіцієнт висоти CH: $k_2=-\dfrac{7}{6}$. За координатами точки $C(2;7)$ і кутовому коефіцієнту $k_2=-\dfrac{7}{6}$ складаємо рівняння висоти CH:

$y-7=-\dfrac{7}{6}(x-2)$ або $7x+6y-56=0$ – рівняння висоти CH;

в) знайдемо спочатку координати x_0 та y_0 середини відрізка BC – точки M: $x_0=\dfrac{-3+2}{2}=-\dfrac{1}{2}$ та $y_0=\dfrac{-3+7}{2}=2$.

Тепер за координатами двох відомих точок A і M складемо рівняння медіани AM: $\dfrac{x-4}{-\frac{1}{2}-4}=\dfrac{y-3}{2-3}$ або після перетворень отримуємо

$2x-9y+19=0$ – рівняння медіани AM.

г) для знаходження координат точки N перетину медіани AM і висоти CH складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}2x-9y+19=0,\\ 7x+6y-56=0.\end{cases}$$

Розв'язавши її, отримуємо координати точки $N\left(\frac{26}{5};\frac{49}{15}\right)$, яка є точкою перетину медіани AM і висоти CH;

д) так як пряма, яка проходить через вершину C, паралельна стороні AB, то їх кутові коефіцієнти рівні $k_1 = \frac{6}{7}$. Тоді за координатами точки C і значенню кутового коефіцієнту складаємо рівняння прямої CD:

$y - 7 = \frac{6}{7}(x - 2)$ або $6x - 7y + 37 = 0$ – рівняння прямої, яка проходить через точку C паралельно стороні AB;

е) відстань від точки C до прямої AB обчислюємо за формулою:

$$d = |CH| = \frac{|6 \cdot 2 - 7 \cdot 7 - 3|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} = \frac{40}{\sqrt{85}} = \frac{8\sqrt{85}}{17}.$$

Розв'язок даної задачі проілюстровано на рисунку 3.1.

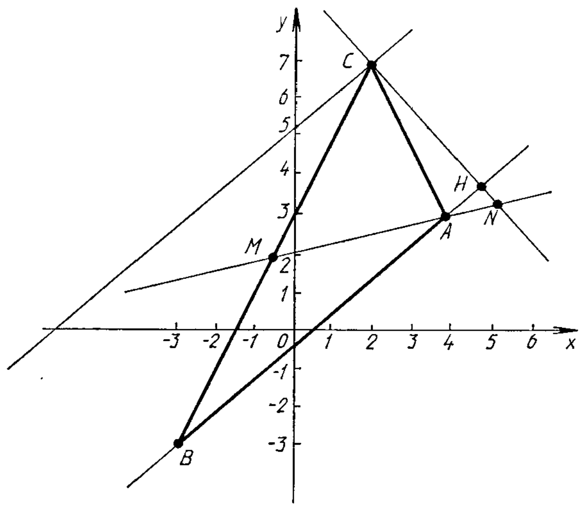

Рисунок 3.1

Завдання за варіантами

Приклад 1 Дано вершини трикутника ABC: $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$. Знайти:

а) рівняння сторони AB;

б) рівняння висоти CH;

в) рівняння медіани AM;

г) точку N перетину медіани AM і висоти CH;

д) рівняння прямої, яка проходить через точку C паралельно стороні AB;

е) відстань від точки C до прямої AB.

1.1 $A(-2;4)$, $B(3;1)$, $C(10;7)$;

1.2 $A(-3;-2)$, $B(14;4)$, $C(6;8)$;

1.3 $A(1;7)$, $B(-3;-1)$, $C(11;-3)$;

1.4 $A(1;0)$, $B(-1;4)$, $C(9;5)$;

1.5 $A(1;-2)$, $B(7;1)$, $C(3;7)$;
1.6 $A(-2;-3)$, $B(1;6)$, $C(6;1)$;
1.7 $A(-4;2)$, $B(-6;6)$, $C(6;2)$;
1.8 $A(4;-3)$, $B(7;3)$, $C(1;10)$;
1.9 $A(4;-4)$, $B(8;2)$, $C(3;8)$;
1.10 $A(-3;-3)$, $B(5;-7)$, $C(7;7)$;
1.11 $A(1;-6)$, $B(3;4)$, $C(-3;3)$;
1.12 $A(-4;2)$, $B(8;-6)$, $C(2;6)$;
1.13 $A(-5;2)$, $B(0;-4)$, $C(5;7)$;
1.14 $A(4;-4)$, $B(6;2)$, $C(-1;8)$;
1.15 $A(-3;8)$, $B(-6;2)$, $C(0;-5)$;
1.16 $A(6;-9)$, $B(10;-1)$, $C(-4;1)$;
1.17 $A(4;1)$, $B(-3;-1)$, $C(7;-3)$;
1.18 $A(-4;2)$, $B(6;-4)$, $C(4;10)$;
1.19 $A(3;-1)$, $B(11;3)$, $C(-6;2)$;
1.20 $A(-7;-2)$, $B(-7;4)$, $C(5;-5)$;
1.21 $A(-1;-4)$, $B(9;6)$, $C(-5;4)$;
1.22 $A(10;-2)$, $B(4;-5)$, $C(-3;1)$;
1.23 $A(-3;-1)$, $B(-4;-5)$, $C(8;1)$;
1.24 $A(-2;-6)$, $B(-3;5)$, $C(4;0)$;
1.25 $A(-7;-2)$, $B(3;-8)$, $C(-4;6)$;
1.26 $A(0;2)$, $B(-7;-4)$, $C(3;2)$;
1.27 $A(7;0)$, $B(1;4)$, $C(-8;-4)$;
1.28 $A(1;-3)$, $B(0;7)$, $C(-2;4)$;
1.29 $A(-5;1)$, $B(8;-2)$, $C(1;4)$;
1.30 $A(2;5)$, $B(-3;1)$, $C(0;4)$.

Приклад 2 Відомі вершини $O(0;0)$, $A(-2;0)$ паралелограма $OACD$ і точка перетину його діагоналей $B(2;-2)$. Записати рівняння сторін паралелограма.

Розв'язання:

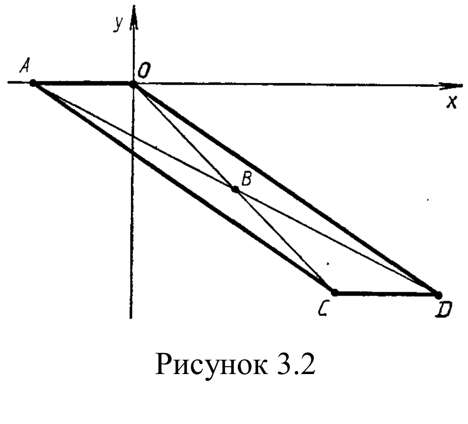

Рисунок 3.2

Рівняння сторони OA можна знайти за формулою рівняння прямої, яка проходить через дві точки: $y = 0$.

Так як точка B є серединою діагоналі AD (за властивістю точки перетину діагоналей паралелограма), то за формулами ділення відрізка навпіл можна обчислити координати вершини $D(x;y)$: $2 = \frac{-2+x}{2}$, $-2 = \frac{0+y}{2}$, звідки $x = 6$, $y = -4$.

Тепер можна знайти рівняння всіх інших сторін.

Враховуючи паралельність сторін OA і CD (як протилежних сторін паралелограма), складаємо рівняння сторони CD: $y = -4$.

Рівняння сторони OD складаємо за відомими координатами двох точок:

$\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-0}{-4-0}$, звідки $y = -\frac{2}{3}x$ або $2x + 3y = 0$.

Рівняння сторони AC знаходимо, враховуючи той факт, що вона проходить через відому точку $A(-2;0)$ паралельно відомій прямій OD:

$y - 0 = -\frac{2}{3}(x+2)$ або $2x + 3y = 4 = 0$.

Завдання за варіантами

Приклад 2 Розв'язати наступні задачі.

2.1 Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $3x - 2y - 7 = 0$ і $x + 3y - 6 = 0$, і відтинає на осі абсцис відрізок, який дорівнює 3.

2.2 Знайти проекцію точки $A(-8;12)$ на пряму, яка проходить через точки $B(2;-3)$ і $C(-5;1)$.

2.3 Дано вершини трикутника ABC: $A(-4;4)$, $B(4;-12)$ і точка $M(4;2)$ перетину його висот. Знайти координати вершини C.

2.4 Знайти рівняння прямої, яка відтинає на осі ординат відрізок, який дорівнює 2, і проходить паралельно прямій $2y - x = 3$.

2.5 Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2;-3)$ і точку перетину прямих $2x - y = 5$ і $x + y = 1$.

2.6 Довести, що чотирикутник $ABCD$ – трапеція, якщо $A(3;6)$, $B(5;2)$, $C(-1;-3)$, $D(-5;5)$.

2.7 Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3;1)$ перпендикулярно до прямої BC, якщо $B(2;5)$, $C(1;0)$.

2.8 Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-2;1)$ паралельно прямій MN, якщо $M(-3;-2)$, $N(1;6)$.

2.9 Знайти точку, симетричну точці $M(2;-1)$ відносно прямої $x - 2y + 3 = 0$.

2.10 Знайти точку O перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$, якщо $A(-1;-3)$, $B(3;5)$, $C(5;2)$, $D(3;-5)$.

2.11 Через точку перетину прямих $6x - 4y + 5 = 0$, $2x + 5y + 8 = 0$ провести пряму, паралельну осі абсцис.

2.12 Відомі рівняння сторони AB трикутника ABC $4x + y = 12$, його висот BH $5x - 4y = 12$ і AM $x + y = 6$. Знайти рівняння двох інших сторін трикутника ABC.

2.13 Дано дві вершини трикутника ABC: $A(-6;2)$, $B(2;-2)$ і точка перетину його висот $H(1;2)$. Знайти координати точки M перетину сторони AC і висоти BH.

2.14 Знайти рівняння висот трикутника ABC, які проходять через вершини A і B, якщо $A(-4;2)$, $B(3;-5)$, $C(5;0)$.

2.15 Обчислити координати точки перетину перпендикулярів, проведених через середини сторін трикутника, вершинами якого є точки $A(2;3)$, $B(0;-3)$, $C(6;-3)$.

2.16 Скласти рівняння висоти, яка проведена через вершину A трикутника ABC, знаючи рівняння його сторін AB: $2x-y-3=0$, AC: $x+5y-7=0$, BC: $3x-2y+13=0$.

2.17 Дано трикутник з вершинами $A(3;1)$, $B(-3;-1)$, $C(5;-12)$. Знайти рівняння і обчислити довжину його медіани, яка проведена з вершини C.

2.18 Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і точку перетину прямих $2x+5y-8=0$ і $2x+3y+4=0$.

2.19 Знайти рівняння перпендикулярів до прямої $3x+5y-15=0$, які проведені через точки перетину даної прямої з осями координат.

2.20 Дано рівняння сторін чотирикутника $x-y=0$, $x+3y=0$, $x-y-4=0$, $3x+y-12=0$. Знайти рівняння його діагоналей.

2.21 Скласти рівняння медіани CM і висоти CK трикутника ABC, якщо $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;-4)$.

2.22 Через точку $P(5;2)$ провести пряму: а) яка відтинає рівні відрізки на осях координат; б) паралельну осі Ox; в) паралельну осі Oy.

2.23 Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-2;3)$ і складає з віссю Ox кут: а) 45º; б) 90º; в) 0º.

2.24 Яку ординату має точка C, яка лежить на одній прямій з точками $A(-6;6)$ і $B(-3;-1)$, і має абсцису, яка дорівнює 3?

2.25 Через точку перетину прямих $2x-5y-1=0$ і $x+4y-7=0$ провести пряму, яка ділить відрізок між точками $A(4;-3)$ і $B(-1;2)$ у відношенні $\lambda=\dfrac{2}{3}$.

2.26 Відомі рівняння двох сторін ромба $2x-5y-1=0$ і $2x-5y-34=0$ і рівняння однієї з його діагоналей $x+3y-6=0$. Знайти рівняння другої діагоналі.

2.27 Знайти точку E перетину медіан трикутника, вершинами якого є точки $A(-3;1)$, $B(7;5)$, $C(5;-3)$.

2.28 Записати рівняння прямих, які проходять через точку $A(-1;1)$ під кутом 45º до прямої $2x+3y=6$.

2.29 Дано рівняння висот трикутника ABC $2x-3y+1=0$, $x+2y+1=0$ і координати його вершини $A(2;3)$. Знайти рівняння сторін AB і AC трикутника.

2.30 Дано рівняння двох сторін паралелограма $x-2y=0$, $x-y-1=0$ і точка перетину його діагоналей $M(3;-1)$. Знайти рівняння двох інших його сторін.

Приклад 3 Довести, що прямі $4x-3y+2=0$ та $8x-6y-13=0$ паралельні, і знайти відстань між ними.

Розв'язання:

Перевіримо, чи є прямі паралельними: $\frac{4}{8}=\frac{-3}{-6}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Так як виконується рівність, то прямі паралельні.

Оскільки задані прямі паралельні, то відстань між ними дорівнює, наприклад, відстані від довільної точки другої прямої до першої. Знаходимо довільну точку на прямій $8x-6y-13=0$: нехай $x=0$, тоді $y=-\frac{13}{6}$.

Відстань від точки $M\left(0;-\frac{13}{6}\right)$ до прямої $4x-3y+2=0$ обчислюємо за формулою:

$$d=\frac{\left|4\cdot 0-3\cdot\left(-\frac{13}{6}\right)+2\right|}{\sqrt{16+9}}=1{,}7.$$

Завдання за варіантами

Приклад 3 Довести, що прямі паралельні, і знайти відстань між ними:

3.1 $2x+5y-12=0$ і $4x+10y-11=0$;

3.2 $3x-4y-7=0$ і $-6x+8y-15=0$;

3.3 $2x-5y-11=0$ і $-6x+15y-17=0$;

3.4 $3x-7y-7=0$ і $12x-28y-25=0$;

3.5 $5x+6y+22=0$ і $10x+12y-31=0$;

3.6 $x-7y-32=0$ і $2x-14y-13=0$;

3.7 $3x+5y+5=0$ і $9x+15y-17=0$;

3.8 $3x-8y-27=0$ і $-6x+16y+11=0$;

3.9 $2x-9y-37=0$ і $-6x+27y-10=0$;

3.10 $3x-4y-18=0$ і $15x-20y-41=0$;

3.11 $x+6y-14=0$ і $4x+24y-23=0$;

3.12 $3x-7y-8=0$ і $9x-21y-16=0$;

3.13 $3x-5y-19=0$ і $6x-10y-21=0$;

3.14 $3x+4y+28=0$ і $-9x-12y-7=0$;

3.15 $4x-3y+7=0$ і $8x-6y-11=0$;

3.16 $5x-4y-48=0$ і $15x-12y-5=0$;

3.17 $5x+3y-43=0$ і $20x+15y+22=0$;

3.18 $7x-2y-15=0$ і $14x-4y-5=0$;

3.19 $3x-y-6=0$ і $15x-5y-32=0$;

3.20 $3x+7y+42=0$ і $12x+28y-61=0$;

3.21 $6x+7y+16=0$ і $12x+14y-21=0$;

3.22 $8x-5y+32=0$ і $16x-10y-17=0$;

3.23 $6x+11y+22=0$ і $18x+33y-43=0$;

3.24 $3x+10y+27=0$ і $9x+30y-11=0$;

3.25 $4x-7y+35=0$ і $12x-21y-62=0$;

3.26 $-3x+5y+4=0$ і $18x-30y-1=0$;

3.27 $2x+5y+12=0$ і $10x+25y-13=0$;

3.28 $-4x+3y+17=0$ і $12x-9y-22=0$;

3.29 $5x+7y+16=0$ і $15x+21y-44=0$;

3.30 $11x+5y+15=0$ і $22x+10y-7=0$.

Приклад 4 Скласти канонічне рівняння:

а) еліпса, велика піввісь якого дорівнює 3, а фокус знаходиться в точці $F\left(\sqrt{5};0\right)$;

б) гіперболи з уявною піввіссю, яка дорівнює 2, і фокусом $F\left(-\sqrt{13};0\right)$;

в) параболи, яка має директрису $x=-3$.

Розв'язання:

а) канонічне рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. За умовою задачі велика піввісь $a=3$, $c=\sqrt{5}$.

Для еліпса виконується рівність $b^2=a^2-c^2$. Підставивши до неї відомі значення a і c, знайдемо: $b^2=3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=4=2^2$.

Отже, шукане канонічне рівняння еліпса: $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$;

б) канонічне рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. За умовою уявна піввісь $b=2$ і $c=\sqrt{13}$.

Для гіперболи виконується рівність $b^2=c^2-a^2$. Звідки маємо рівність $a^2=c^2-b^2$. Підставивши до неї відомі значення b і c, знайдемо: $a^2=\left(\sqrt{13}\right)^2-2^2=9=3^2$.

Отже, шукане канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$;

в) канонічне рівняння параболи в даному випадку повинне мати вигляд $y^2=2px$, а рівняння її директриси $x=-\frac{p}{2}$. За умовою задачі рівняння директриси $x=-3$. Тому $-\frac{p}{2}=-3$, звідки $p=6$ і шукане канонічне рівняння параболи має вигляд $y^2=12x$.

Завдання за варіантами

Приклад 4 Скласти канонічне рівняння:

а) еліпса;

б) гіперболи;

в) параболи,

якщо A, B – точки, які лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань.

4.1 а) $b = 15$, $F(-10;0)$; б) $a = 13$, $\varepsilon = \frac{14}{13}$; в) $D:\ x = -4$;

4.2 а) $b = 2$, $F(4\sqrt{2};0)$; б) $a = 7$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{85}}{7}$; в) $D:\ x = 5$;

4.3 а) $A(3;0)$, $B\left(2;\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$; б) $k = \frac{3}{4}$, $\varepsilon = \frac{5}{4}$; в) $D:\ y = -2$;

4.4 а) $\varepsilon = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $A(-5;0)$; б) $A(\sqrt{80};3)$, $B(4\sqrt{6};3\sqrt{2})$; в) $D:\ y = 1$;

4.5 а) $2a = 22$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{57}}{11}$; б) $k = \frac{2}{3}$, $2c = 10\sqrt{13}$; в) вісь симетрії Ox і $A(27;9)$;

4.6 а) $b = \sqrt{15}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{10}}{25}$; б) $k = \frac{3}{4}$, $2a = 16$; в) вісь симетрії Ox і $A(4;-8)$;

4.7 а) $a = 4$, $F(3;0)$; б) $b = 2\sqrt{10}$, $F(-11;0)$; в) $D:\ x = -2$;

4.8 а) $b = 4$, $F(9;0)$; б) $a = 5$, $\varepsilon = \frac{7}{5}$; в) $D:\ x = 6$;

4.9 а) $A(0;\sqrt{3})$, $B\left(\sqrt{\frac{14}{3}};1\right)$; б) $k = \frac{\sqrt{21}}{10}$, $\varepsilon = \frac{11}{10}$; в) $D:\ y = -4$;

4.10 а) $\varepsilon = \frac{7}{8}$, $A(8;0)$; б) $A\left(3;-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$, $B\left(\sqrt{\frac{13}{5}};6\right)$; в) $D:\ y = 4$;

4.11 а) $2a = 24$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{22}}{6}$; б) $k = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $2c = 10$; в) вісь симетрії Ox і $A(-7;-7)$;

4.12 а) $b = 2$, $\varepsilon = \frac{5\sqrt{29}}{29}$; б) $k = \frac{12}{13}$, $2a = 26$; в) вісь симетрії Ox, $A(-5;15)$;

4.13 а) $a = 6$, $F(-4;0)$; б) $b = 3$, $F(7;0)$; в) $D:\ x = -7$;

4.14 а) $b = 7$, $F(5;0)$; б) $a = 11$, $\varepsilon = \frac{12}{11}$; в) $D:\ x = 10$;

4.15 а) $A\left(-\sqrt{\frac{17}{3}};\frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{21}}{2};\frac{1}{2}\right)$; б) $k = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$; в) $D:\ y = -1$;

4.16 а) $\varepsilon = \frac{3}{5}$, $A(0;8)$; б) $A(\sqrt{6};0)$, $B(-2\sqrt{2};1)$; в) $D:\ y = 9$;

4.17 а) $2a = 22$, $\varepsilon = \frac{10}{11}$; б) $k = \frac{\sqrt{11}}{5}$, $2c = 12$; в) вісь симетрії Ox, $A(-7;5)$;

4.18 а) $b = 5$, $\varepsilon = \frac{12}{13}$; б) $k = \frac{1}{3}$, $2a = 6$; в) вісь симетрії Oy і $A(-9;6)$;

4.19 а) $a = 9$, $F(7;0)$; б) $b = 6$, $F(12;0)$; в) $D:\ x = -\frac{1}{4}$;

4.20 а) $b = 5$, $F(-10;0)$; б) $a = 9$, $\varepsilon = \frac{4}{3}$; в) $D:\ x = 12$;

4.21 а) $A(0;-2)$, $B\left(\frac{\sqrt{15}}{2};1\right)$; б) $k = \frac{2\sqrt{10}}{9}$, $\varepsilon = \frac{11}{9}$; в) $D:\ y = 5$;

4.22 а) $\varepsilon = \frac{2}{3}$, $A(-6;0)$; б) $A(\sqrt{8};0)$, $B\left(\frac{\sqrt{20}}{3};2\right)$; в) $D:\ y = 1$;

4.23 а) $2a = 50$, $\varepsilon = \frac{3}{5}$; б) $k = \frac{\sqrt{29}}{14}$, $2c = 30$; в) вісь симетрії Oy і $A(4;1)$;

4.24 а) $b = 2\sqrt{15}$, $\varepsilon = \frac{7}{8}$; б) $k = \frac{5}{6}$, $2a = 12$; в) вісь симетрії Oy, $A(-2;3\sqrt{2})$;

4.25 а) $a = 13$, $F(-5;0)$; б) $b = 44$, $F(-7;0)$; в) $D:\ x = -\frac{3}{8}$;

4.26 а) $b = 7$, $F(13;0)$; б) $b = 4$, $F(-11;0)$; в) $D:\ x = 13$;

4.27 а) $A(-3;0)$, $B\left(1;\frac{\sqrt{40}}{3}\right)$; б) $k = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{15}}{3}$; в) $D:\ y = 4$;

4.28 а) $\varepsilon = \frac{5}{6}$, $A(0;-\sqrt{11})$; б) $A\left(\sqrt{\frac{32}{3}};1\right)$, $B(\sqrt{8};0)$; в) $D:\ y = -3$;

4.29 а) $2a = 30$, $\varepsilon = \frac{17}{15}$; б) $k = \frac{\sqrt{17}}{8}$, $2c = 18$; в) вісь симетрії Oy, $A(4;-10)$;

4.30 а) $b = 2\sqrt{2}$, $\varepsilon = \frac{7}{9}$; б) $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $2a = 12$; в) вісь симетрії Oy, $A(-45;15)$.

Приклад 5 Записати рівняння кола, яке проходить через фокуси еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$ і має центр в його верхній вершині.

Розв'язання:

Для даного еліпса $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$ верхня вершина має координати $A(0;1)$, величини півосей дорівнюють $a = 2$, $b = 1$. Тому $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ і фокуси знаходяться в точках $F_1(-\sqrt{3};0)$ і $F_2(\sqrt{3};0)$.

Радіус R шуканого кола обчислюємо за формулою відстані між двома точками (відстань від точки A, яка є центром кола до точки F_1 або F_2, які знаходяться на колі):

$$R = |AF_1| = |AF_2| = \sqrt{\left(\mp\sqrt{3} - 0\right)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2.$$

У відповідності до нормального рівняння кола $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, записуємо рівняння кола з центром в точці з координатами $(a;b)$ радіуса R:

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 2^2 \text{ або } x^2 + (y-1)^2 = 4.$$

Завдання за варіантами

Приклад 5 Записати рівняння кола, яке проходить через вказані точки і має центр в точці A.

5.1 Вершини гіперболи $12x^2 - 13y^2 = 156$, $A(0;-2)$.

5.2 Вершини гіперболи $4x^2 - 9y^2 = 36$, $A(0;4)$.

5.3 Фокуси гіперболи $24y^2 - 25x^2 = 600$, $A(0;-8)$.

5.4 $O(0;0)$, A – вершина параболи $y^2 = 3(x-4)$.

5.5 Фокуси еліпса $9x^2 + 25y^2 = 1$, $A(0;6)$.

5.6 Лівий фокус гіперболи $3x^2 - 4y^2 = 12$, $A(0;-3)$.

5.7 Фокуси еліпса $3x^2 + 4y^2 = 12$, A – його верхня вершина.

5.8 Вершини гіперболи $x^2 - 16y^2 = 64$, $A(0;-2)$.

5.9 Фокуси гіперболи $4x^2 - 5y^2 = 80$, $A(0;-4)$.

5.10 $O(0;0)$, A – вершина параболи $y^2 = -\dfrac{(x+5)}{2}$.

5.11 Правий фокус еліпса $33x^2 + 49y^2 = 1617$, $A(1;7)$.

5.12 Лівий фокус гіперболи $3x^2 - 5y^2 = 30$, $A(0;6)$.

5.13 Фокуси еліпса $16x^2 + 47y^2 = 656$, A – його нижня вершина.

5.14 Вершину гіперболи $2x^2 - 9y^2 = 18$, $A(0;4)$.

5.15 Фокуси гіперболи $5x^2 - 11y^2 = 55$, $A(0;5)$.

5.16 $B(1;4)$, A – вершина параболи $y^2 = \dfrac{x-4}{3}$.

5.17 Лівий фокус еліпса $3x^2 + 7y^2 = 21$, $A(-1;-3)$.

5.18 Ліву вершину гіперболи $5x^2 - 9y^2 = 45$, $A(0;-6)$.

5.19 Фокуси еліпса $24x^2 + 25y^2 = 600$, A – його верхня вершина.

5.20 Праву вершину гіперболи $3x^2 - 16y^2 = 48$, $A(1;3)$.

5.21 Лівий фокус гіперболи $7x^2 - 9y^2 = 63$, $A(-1;-2)$.

5.22 $B(2;-5)$, A – вершина параболи $x^2 = -2(y+1)$.

5.23 Правий фокус еліпса $x^2 + 4y^2 = 12$, $A(2;-7)$.

5.24 Праву вершину гіперболи $40x^2 - 81y^2 = 3240$, $A(-2;5)$.

5.25 Фокуси еліпса $x^2 + 10y^2 = 90$, A – його нижня вершина.

5.26 Праву вершину гіперболи $3x^2 - 25y^2 = 75$, $A(-5;-2)$.

5.27 Фокуси гіперболи $4x^2 - 5y^2 = 20$, $A(0;-6)$.

5.28 $B(3;4)$, A – вершина параболи $y^2 = \dfrac{x+7}{4}$.

5.29 Лівий фокус еліпса $13x^2 + 49y^2 = 837$, $A(1;8)$.

5.30 Правий фокус гіперболи $57x^2 - 64y^2 = 3648$, $A(2;8)$.

Приклад 6 Задано рівняння лінії другого порядку $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$. Визначити вид кривої, знайти її фокуси, піввісі, ексцентриситет, рівняння директрис і асимптот (для гіперболи). Побудувати графік.

Розв'язання:

Дане рівняння зводиться до канонічного вигляду: $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = -1$, або $-\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, і є рівнянням спряженої гіперболи з дійсною піввіссю $b = 2$, яка лежить на осі Oy, і уявною $a = \sqrt{5}$ – на осі Ox.

Половину фокусної відстані знайдемо з умови $c^2 = a^2 + b^2 = 9$, тому $c = 3$.

Фокуси F_1 і F_2 спряженої гіперболи лежать на осі Oy, їхні координати: $(0;-3)$ та $(0;3)$ відповідно.

Ексцентриситет: $\varepsilon = \dfrac{c}{b} = 1{,}5$.

Рівняння директрис: $y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$, $y = \pm\dfrac{4}{3}$.

Рівняння асимптот: $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, $y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}x$.

Графік гіперболи зображено на рисунку 3.3.

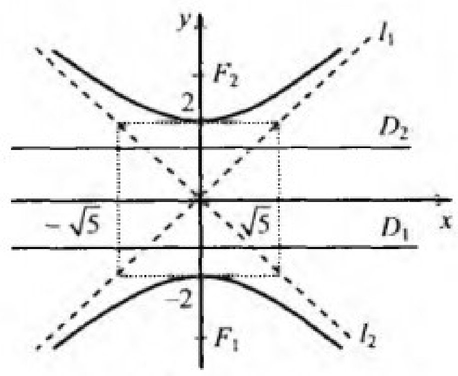

Рисунок 3.3

Завдання за варіантами

Приклад 6 Задано рівняння кривої другого порядку. Виконати такі дії:

а) визначити за рівнянням вид кривої;

б) у випадку еліпса знайти величину півосей, координати фокусів, ексцентриситет, скласти рівняння директрис;

в) у випадку гіперболи визначити величину півосей, координати фокусів, ексцентриситет, скласти рівняння директрис та асимптот;

г) у випадку параболи знайти значення параметра, координати фокусів, скласти рівняння директриси;

д) виконати креслення кривої з поданням фокусів, директрис, асимптот (за наявності).

6.1 $x^2+4y^2-4=0$;

6.2 $9x^2+4y^2-36=0$;

6.3 $16x^2-25y^2-400=0$;

6.4 $-16x^2+25y^2-400=0$;

6.5 $x^2+10y=10$;

6.6 $9x^2-16y^2+144=0$;

6.7 $16x^2+25y^2-400=0$;

6.8 $y^2-4x=4$;

6.9 $16x^2-36y^2-576=0$;

6.10 $25x^2+16y^2-400=0$;

6.11 $x^2-4y^2-4=0$;

6.12 $4x^2+25y^2-100=0$;

6.13 $9x^2-36y^2+324=0$;

6.14 $4x^2+9y^2-36=0$;

6.15 $5x^2+4y^2-20=0$;

6.16 $25x^2+4y^2-100=0$;

6.17 $y^2+8x=16$;

6.18 $16x^2-9y^2+144=0$;

6.19 $x^2+9y^2-9=0$;

6.20 $25x^2-36y^2-900=0$;

6.21 $9x^2-4y^2-36=0$;

6.22 $4x^2-9y^2+36=0$;

6.23 $x^2-12y=24$;

6.24 $36x^2+16y^2-576=0$;

6.25 $9x^2+16y^2-144=0$;

6.26 $5x^2-4y^2+20=0$;

6.27 $9x^2+36y^2-324=0$;

6.28 $x^2-4y^2+4=0$;

6.29 $36x^2+25y^2-900=0$;

6.30 $25x^2-36y^2+900=0$.

Приклад 7 Звести рівняння кривої $y=\frac{2}{5}\sqrt{26+2x+x^2}$ до нормального вигляду та побудувати її графік.

Розв'язання:

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату та виконаємо відповідні перетворення, привівши рівняння до нормального вигляду:

$y^2=\left(\frac{2}{5}\sqrt{24-2x-x^2}\right)^2$; $y^2=\frac{4}{25}\left(24-2x-x^2\right)$;

$25y^2=-4\left(x^2+2x+1-25\right)$;

$25y^2+4\left(x^2+2x+1-25\right)=0$ (виділяємо повний квадрат);

$25y^2+4(x+1)^2-100=0$;

$25y^2+4(x+1)^2=100$ (ділимо ліву і праву частину рівності на 100);

$\frac{(x+1)^2}{5^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ – нормальне рівняння еліпса з центром у точці $(-1;0)$ з півосями 5 і 2 (рис. 3.4).

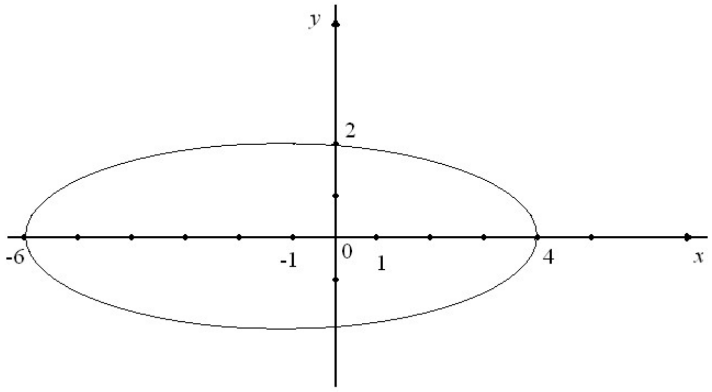

Рисунок 3.4

Завдання за варіантами

Приклад 7 Звести рівняння кривої до нормального вигляду та побудувати її графік.

7.1 $x = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{3 - y^2 - 2y}$;

7.2 $y = 4 - \sqrt{x^2 - x - \frac{3}{4}}$;

7.3 $x = 4 - \frac{3}{2}\sqrt{5 + y^2 - 2y}$;

7.4 $y = -4\sqrt{-x^2 - 2x}$;

7.5 $y = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 12x + 32}$;

7.6 $x = -\frac{1}{3} + \sqrt{6 - 2y - y^2}$;

7.7 $x = -2 - \frac{2}{3}\sqrt{6y - y^2}$;

7.8 $y = -2 - \sqrt{-x^2 - 8x - 8}$;

7.9 $y = 5 + \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + 2x - 3}$;

7.10 $y = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{30x - 5x^2}$;

7.11 $x = -2 + \frac{5}{3}\sqrt{8 - y^2 - 2y}$;

7.12 $x = -4 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$;

7.13 $y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 10x + 21}$;

7.14 $y = -2 + \frac{2}{5}\sqrt{16 - x^2 - 6x}$;

7.15 $y = -\frac{1}{2} + \sqrt{12 + 4x - x^2}$;

7.16 $x = -1 + \sqrt{\frac{7}{4} - y^2 + 3y}$;

7.17 $x = -1 + \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 2y + 17}$;

7.18 $x = -7 + \frac{8}{5}\sqrt{y^2 + 2y + 26}$;

7.19 $y = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{15 - x^2 + 2x}$;

7.20 $y = -2 + \frac{2}{3}\sqrt{-8x - x^2 - 7}$;

7.21 $x = 2 - \sqrt{8\frac{15}{16} - \frac{1}{2}y - y^2}$;

7.22 $y = -2 - \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 2x - 63}$;

7.23 $x = -2 - \sqrt{-10y - y^2}$;

7.24 $x = -3 - \frac{4}{3}\sqrt{8\frac{3}{4} - y^2 + y}$;

7.25 $y = \frac{5}{6}\sqrt{37 + x^2 + 2x}$;

7.26 $y = -\frac{6}{5}\sqrt{29 + x^2 + 4x}$;

7.27 $y = \frac{4}{7}\sqrt{50 - 2x + x^2}$;

7.28 $y = -\frac{7}{4}\sqrt{20 - 4x + x^2}$;

7.29 $x = \frac{7}{2}\sqrt{5 - 2y + y^2}$; 7.30 $x = -\frac{3}{7}\sqrt{53 + 4y + y^2}$.

Приклад 8 Звести рівняння кривої до нормального вигляду та побудувати її графік: $-4x^2 + y^2 + 12x + 4y - 7 = 0$.

Розв'язання:

Виділимо повні квадрати по змінним x і y:

$-4\left(x^2 - 3x\right) + y^2 + 4y - 7 = 0$; $-4\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] + (y+2)^2 - 4 - 7 = 0$;

$-4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9 + (y+2)^2 - 11 = 0$;

$-4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = 2$ (ділимо ліву і праву частини рівності на 2);

$$-\frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} + \frac{(y+2)^2}{2} = 1;$$

$$-\frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{(y+2)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1$$ – отримуємо нормальне рівняння спряженої гіперболи, центр якої знаходиться в точці з координатами $\left(\frac{3}{2}; -2\right)$ з півосями $\frac{1}{\sqrt{2}}$ і $\sqrt{2}$ (рис. 3.5).

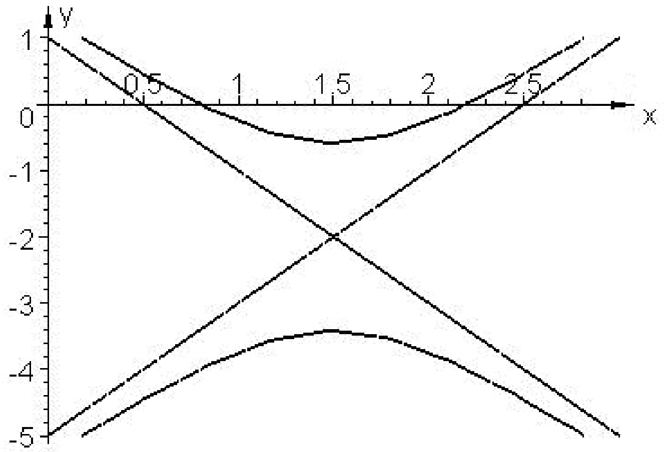

Рисунок 3.5

Завдання за варіантами

Приклад 8 Звести рівняння кривої до нормального вигляду та побудувати її графік.

8.1 $\frac{9}{4}x^2 - y^2 - \frac{9}{2}x - 2y - \frac{31}{4} = 0$;

8.2 $\frac{x^2}{16} - y^2 - \frac{3}{8}x - 6y - \frac{119}{16} = 0$;

8.3 $\frac{25}{16}x^2 - y^2 + \frac{25}{4}x - 3y + 29 = 0$;

8.4 $9x^2 + 4y^2 - 27x - 8y - \frac{47}{4} = 0$;

8.5 $x^2 + \frac{9}{4}y^2 - 4x + 9y + 4 = 0$;

8.6 $x^2 - y^2 - x - 6y - \frac{51}{4} = 0$;

8.7 $x^2 - y^2 + 4x - 3y + \frac{23}{4} = 0$;

8.8 $9x^2 - 4y^2 - 9x + 8y - \frac{151}{4} = 0$;

8.9 $4x^2 - y^2 + 16x - 6y + 11 = 0$;

8.10 $-y^2 + 6x - 6y - 12 = 0$;

8.11 $x^2 + y^2 - x + 6y + \frac{21}{4} = 0$;

8.12 $x^2 + y^2 + 4x + 3y + \frac{9}{4} = 0$;

8.13 $9x^2 + 4y^2 - 9x - 8y - \frac{119}{4} = 0$;

8.14 $4x^2 + y^2 + 16x + 6y + 21 = 0$;

8.15 $-y^2 + 6x + 4y + 8 = 0$;

8.16 $\frac{x^2}{4} - y^2 + x - 6y - 12 = 0$;

8.17 $x^2 - \frac{9}{4}y^2 - 4x - 9y + 4 = 0$;

8.18 $-y^2 + 8x + 6y - 25 = 0$;

8.19 $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$;

8.20 $\frac{x^2}{16} + y^2 - \frac{3}{8}x + 6y + \frac{137}{16} = 0$;

8.21 $x^2 - 4x + 20y - 56 = 0$;

8.22 $4x^2 - y^2 - 4x - 6y - 24 = 0$;

8.23 $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$;

8.24 $-9x^2 + y^2 - 36x + 6y - 36 = 0$;

8.25 $y^2 + 16x + 6y + 1 = 0$;

8.26 $8x^2 - 2y^2 - 32x - y + \frac{287}{8} = 0$;

8.27 $x^2 + 4y^2 - 6x + 5 = 0$;

8.28 $x^2 - 4y^2 + 8y - 6 = 0$;

8.29 $2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$;

8.30 $64x^2 - 16y^2 - 8y + 63 = 0$.

Розділ 4
Аналітична геометрія в просторі

Приклад 1 У просторі задані точки $M_0(2;3;1)$, $M_1(1;2;-1)$, $M_2(3;1;-2)$, $M_3(-2;3;-2)$. Знайти:

а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

г) відстань від точки M_0 до $M_1M_2M_3$;

д) канонічне рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 та M_2;

е) параметричне рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 та M_3;

є) кут між прямими M_1M_2 і M_1M_3.

Розв'язання:

а) на площині $M_1M_2M_3$ візьмемо довільну точку $M(x,y,z)$ і утворимо три вектори: $\overline{M_1M}=\{x-1, y-2, z+1\}$, $\overline{M_1M_2}=\{2,-1,-1\}$, $\overline{M_1M_3}=\{-3,1,-1\}$.

Складемо рівняння площини, записавши визначник: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$.

Звідки після розкриття визначника за першим рядком одержуємо загальне рівняння площини $M_1M_2M_3$: $2x+5y-z-13=0$;

б) оскільки шукана площина α паралельна площині $M_1M_2M_3$, то нормальний вектор цієї площини $\overline{n}=\{2;5;-1\}$ є також нормальним вектором для площини α.

Тоді рівняння площини α, яка проходить через точку M_0, має вигляд:

$2(x-2)+5(y-3)-(z-1)=0$, або $2x+5y-z-18=0$.

в) щоб записати рівняння площини, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$, скористаємось рівнянням, в якому координати вектора $\overline{M_1M_3}$ є координатами вектора нормалі:

$-3(x-2)+(y-3)-(z-1)=0$, або $3x-y+z-4=0$;

г) відстань від точки $M_0(2;3;1)$ до площини $M_1M_2M_3$, заданої рівнянням $2x+5y-z-13=0$, обчислюємо за формулою:

$$d=\frac{|2\cdot 2+5\cdot 3-1-13|}{\sqrt{2^2+5^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{30}};$$

д) канонічне рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 та M_2 будемо шукати як рівняння прямої, що проходить через точку M_1 паралельно до напрямного вектора $\overline{M_1M_2}$.

Знайдемо координати вектора $\overline{M_1M_2}$: $\overline{M_1M_2} = \{2,-1,-1\}$.

Тоді канонічне рівняння має вигляд: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{-1}$.

е) параметричне рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 та M_3 будемо шукати із канонічного рівняння цієї прямої:

Розглянемо напрямний вектор прямої $\overline{M_1M_3} = \{-3,1,-1\}$ та точку $M_1(1;2;-1)$, тоді канонічне рівняння прямої M_1M_3 має вигляд: $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$.

Прирівняємо до параметру t кожну із рівностей. Маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{-3} = t, \\ \dfrac{y-2}{1} = t, \\ \dfrac{z+1}{-1} = t. \end{cases}$$

Звідки після перетворень параметричне рівняння прямої M_1M_3:

$$\begin{cases} x = 1-3t, \\ y = 2+t, \\ z = -1-t. \end{cases}$$

є) кут між прямими M_1M_2(канонічне рівняння прямої – $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{-1}$) і M_1M_3 (канонічне рівняння прямої – $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$) визначається як кут між їх напрямними векторами. Знайдемо спочатку косинус кута між напрямними векторами прямих M_1M_2 і M_1M_3, тобто між векторами $\overline{a_1} = \{2;-1;-1\}$ і $\overline{a_2} = \{-3;1;-1\}$:

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot(-3)+(-1)\cdot 1+(-1)\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{-6-1+1}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{9+1+1}} =$$

$$= -\frac{6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{11}} = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}} = -\sqrt{\frac{6}{11}}.$$

Тоді кут між напрямними векторами, а отже, і між прямими M_1M_2 і M_1M_3 дорівнює:

$$\varphi = \arccos\left(-\sqrt{\frac{6}{11}}\right) = \pi - \arccos\sqrt{\frac{6}{11}}.$$

Завдання за варіантами

Приклад 1 У просторі задані точки M_0, M_1, M_2, M_3. Знайти:

а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

г) відстань від точки M_0 до $M_1M_2M_3$;

д) канонічне рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 та M_2;

е) параметричне рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 та M_3;

є) кут між прямими M_1M_2 і M_2M_3.

1.1 $M_0(0;-1;1)$, $M_1(1;0;1)$, $M_2(4;6;1)$, $M_3(6;-1;0)$;

1.2 $M_0(0;1;1)$, $M_1(-13;0;6)$, $M_2(10;1;-3)$, $M_3(-2;1;3)$;

1.3 $M_0(0;4;1)$, $M_1(6;-8;-2)$, $M_2(-4;10;-1)$, $M_3(0;-2;-3)$;

1.4 $M_0(0;1;2)$, $M_1(2;0;2)$, $M_2(8;-1;7)$, $M_3(12;1;1)$;

1.5 $M_0(0;1;-2)$, $M_1(1;-12;8)$, $M_2(0;11;-10)$, $M_3(0;-1;2)$;

1.6 $M_0(1;-1;0)$, $M_1(7;-5;-1)$, $M_2(-3;13;0)$, $M_3(1;1;-2)$;

1.7 $M_0(1;3;1)$, $M_1(0;-2;-1)$, $M_2(-3;-1;6)$, $M_3(-5;-3;0)$;

1.8 $M_0(1;2;3)$, $M_1(14;3;-2)$, $M_2(-9;2;7)$, $M_3(3;2;1)$;

1.9 $M_0(-3;1;-1)$, $M_1(-7;0;5)$, $M_2(11;1;-5)$, $M_3(-1;-1;-1)$;

1.10 $M_0(0;-1;1)$, $M_1(1;0;1)$, $M_2(4;6;1)$, $M_3(6;-1;0)$;

1.11 $M_0(1;0;-1)$, $M_1(-2;-1;4)$, $M_2(11;0;5)$, $M_3(-1;0;1)$;

1.12 $M_0(-2;2;3)$, $M_1(4;6;2)$, $M_2(-6;12;3)$, $M_3(-2;0;1)$;

1.13 $M_0(1;2;-1)$, $M_1(2;-1;-1)$, $M_2(5;0;4)$, $M_3(7;-2;-2)$;

1.14 $M_0(2;0;0)$, $M_1(-4;5;1)$, $M_2(2;0;-4)$, $M_3(-2;0;-2)$;

1.15 $M_0(3;-1;2)$, $M_1(7;5;0)$, $M_2(-1;-5;2)$, $M_3(1;-1;-2)$;

1.16 $M_0(2;1;0)$, $M_1(3;2;0)$, $M_2(6;3;5)$, $M_3(8;1;-1)$;

1.17 $M_0(3;5;1)$, $M_1(-3;9;2)$, $M_2(7;-9;1)$, $M_3(3;3;3)$;

1.18 $M_0(-1;1;0)$, $M_1(0;1;1)$, $M_2(1;6;4)$, $M_3(-1;0;6)$;

1.19 $M_0(4;-2;6)$, $M_1(2;-4;4)$, $M_2(4;-2;1)$, $M_3(0;-2;2)$;

1.20 $M_0(-1;3;1)$, $M_1(5;-7;0)$, $M_2(-5;1;1)$, $M_3(-1;-1;-1)$;

1.21 $M_0(-1;0;3)$, $M_1(0;1;3)$, $M_2(3;2;8)$, $M_3(5;0;2)$;

1.22 $M_0(2;1;-3)$, $M_1(-1;-2;2)$, $M_2(2;-1;-7)$, $M_3(0;-1;1)$;

1.23 $M_0(-2;3;2)$, $M_1(10;7;1)$, $M_2(-1;0;2)$, $M_3(-2;1;0)$;

1.24 $M_0(1;0;2)$, $M_1(0;1;2)$, $M_2(-1;4;12)$, $M_3(1;6;0)$;

1.25 $M_0(3;2;-2)$, $M_1(-4;-9;0)$, $M_2(6;9;-1)$, $M_3(2;-3;1)$;

1.26 $M_0(2;-1;5)$, $M_1(-1;1;3)$, $M_2(3;2;-6)$, $M_3(1;2;0)$;

1.27 $M_0(2;3;1)$, $M_1(1;2;1)$, $M_2(-2;1;-4)$, $M_3(-4;3;2)$;
1.28 $M_0(0;-1;1)$, $M_1(-1;4;12)$, $M_2(0;-5;1)$, $M_3(0;1;-1)$;
1.29 $M_0(0;8;-2)$, $M_1(3;-4;-1)$, $M_2(-2;5;-1)$, $M_3(0;4;6)$;
1.30 $M_0(0;-2;1)$, $M_1(13;-3;-4)$, $M_2(-10;2;5)$, $M_3(2;-2;1)$.

Приклад 2 Обчислити об'єм піраміди, обмеженої площиною $3x+5y+2z-30=0$ і координатними площинами. Знайти відстань від початку координат до площини. Побудувати рисунок.

Розв'язання:

Оскільки піраміда прямокутна, то її об'єм зручно обчислюється за формулою $V=\frac{1}{6}|OA|\cdot|OB|\cdot|OC|$, де A, B, C – точки перетину площини з осями координат (рис. 4.1).

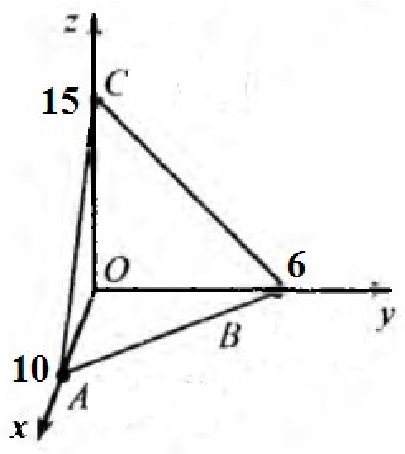

Рисунок 4.1

На осі Ox дорівнюють нулю координати y і z, тому, підставивши у рівняння площини значення $y=0$ та $z=0$, дістанемо $3x-30=0$, або $x=10$.

Отже, $A(10;0;0)$ – точка перетину площини з віссю Ox.

Аналогічно визначимо точки перетину площини з осями Oy і Oz – $B(0;6;0)$ і $C(0;0;15)$.

Звідси $|OA|=10$, $|OB|=6$, $|OC|=15$ і $V=\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 6\cdot 15=150$ (куб. од.).

Завдання за варіантами

Приклад 2 Обчислити об'єм піраміди, обмеженої заданою площиною і координатними площинами. Знайти відстань від початку координат до площини. Побудувати рисунок.

2.1 $4x-3y+12z-60=0$;
2.2 $5x-4y+3z+120=0$;
2.3 $2x-3y+z-20=0$;
2.4 $6x-2y+3z+12=0$;
2.5 $4x-5y+2z-20=0$;
2.6 $3x+4y+6z+24=0$;
2.7 $2x-5y+5z-20=0$;
2.8 $x-3y+4z+12=0$;
2.9 $2x-3y+10z-30=0$;
2.10 $5x-3y+z+15=0$;
2.11 $4x-y+6z-12=0$;
2.12 $7x+2y-z+14=0$;
2.13 $3x-2y+8z-24=0$;
2.14 $3x+y-7z+21=0$;
2.15 $x-4y+2z-8=0$;
2.16 $x-5y-3z+15=0$;
2.17 $6x-2y-3z-18=0$;
2.18 $5x+y-z+10=0$;
2.19 $9x-15y+5z-45=0$;
2.20 $6x+6y-7z+42=0$;
2.21 $9x-4y+12z-36=0$;
2.22 $6x+5y-10z+30=0$;

2.23 $11x-4y+11z-44=0$;

2.24 $4x+7y-14z+28=0$;

2.25 $12x-9y+4z-36=0$;

2.26 $2x+9y-3z-18=0$;

2.27 $13x-2y+13z-26=0$;

2.28 $2x-7y-14z-14=0$;

2.29 $6x-4y+3z-24=0$;

2.30 $x-3y-5z-15=0$.

Приклад 3 Скласти канонічне рівняння прямої $\begin{cases}2x-5y+2z-10=0,\\ x-2y-z+1=0.\end{cases}$.

Розв'язання:

Щоб записати канонічне рівняння прямої, достатньо знати координатні точки, через яку проходить пряма, і напрямний вектор цієї прямої.

Нехай $y=0$, тоді система набуває вигляду

$\begin{cases}2x+2z-10=0,\\ x-z+4=0.\end{cases}$ або $\begin{cases}x+z=5,\\ x-z=-1,\end{cases}$

Розв'язок останньої системи $x=2$, $z=3$.

Отже точка $M(2;0;3)$ належить шуканій прямій.

Напрямний вектор знайдемо за формулою

$$\bar{n}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -5 & 2\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=9\bar{i}+4\bar{j}+\bar{k} \text{ або } \bar{a}=\{9;4;1\}.$$

Отже, канонічне рівняння прямої: $\dfrac{x-2}{9}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-3}{1}$.

Завдання за варіантами

Приклад 3 Скласти канонічне рівняння прямої.

3.1 $\begin{cases}x-4y+4z-10=0,\\ 2x+y-2z-6=0;\end{cases}$

3.2 $\begin{cases}x-2y+3z-6=0,\\ 2x+3y-z-8=0;\end{cases}$

3.3 $\begin{cases}x+4y+z+10=0,\\ 2x-y-2z+5=0;\end{cases}$

3.4 $\begin{cases}x+5y+2z-20=0,\\ 4x+2y-z-8=0;\end{cases}$

3.5 $\begin{cases}x-6y+3z-12=0,\\ 3x+2y-3z-6=0;\end{cases}$

3.6 $\begin{cases}x-2y+3z+5=0,\\ 5x+y-4z-12=0;\end{cases}$

3.7 $\begin{cases}x+3y+2z+6=0,\\ 2x+2y-3z-6=0;\end{cases}$

3.8 $\begin{cases}x-6y+2z-14=0,\\ 4x-y-2z-8=0;\end{cases}$

3.9 $\begin{cases}x-3y+3z-7=0,\\ 2x+y-z-3=0;\end{cases}$

3.10 $\begin{cases}2x-3y+4z-15=0,\\ 2x+y-3z-4=0;\end{cases}$

3.11 $\begin{cases}3x-2y+z-8=0,\\ 2x+y-z-7=0;\end{cases}$

3.12 $\begin{cases}4x-2y+z-10=0,\\ 2x+3y-2z-12=0;\end{cases}$

3.13 $\begin{cases} 3x + y + 4z + 6 = 0, \\ 4x - y - 2z - 3 = 0; \end{cases}$

3.14 $\begin{cases} -2x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x + 2y - 3z - 4 = 0; \end{cases}$

3.15 $\begin{cases} x - 5y + 3z - 11 = 0, \\ 2x + 3y - z - 3 = 0; \end{cases}$

3.16 $\begin{cases} x + 6y + 2z - 2 = 0, \\ 3x + y - 3z = 0; \end{cases}$

3.17 $\begin{cases} x - 7y + 2z - 14 = 0, \\ 2x + 4y - z - 6 = 0; \end{cases}$

3.18 $\begin{cases} x - 4y - 4z + 10 = 0, \\ 2x - y + 2z + 6 = 0; \end{cases}$

3.19 $\begin{cases} 3x - 4y + 2z - 15 = 0, \\ x + 2y - 2z - 10 = 0; \end{cases}$

3.20 $\begin{cases} 5x - y + 2z - 20 = 0, \\ 2x + 2y - z - 4 = 0; \end{cases}$

3.21 $\begin{cases} x + 3y + 3z - 9 = 0, \\ 4x + 2y - z - 7 = 0; \end{cases}$

3.22 $\begin{cases} x - 8y + 4z + 6 = 0, \\ 2x + y - z + 4 = 0; \end{cases}$

3.23 $\begin{cases} x - 2y + 4z + 10 = 0, \\ 5x + y - 3z - 16 = 0; \end{cases}$

3.24 $\begin{cases} x - 2y + 4z - 2 = 0, \\ 3x + 2y - z - 36 = 0; \end{cases}$

3.25 $\begin{cases} x - y + z - 5 = 0, \\ 3x - 2y - 2z - 4 = 0; \end{cases}$

3.26 $\begin{cases} x - 2y + 4z - 12 = 0, \\ 2x + y - 2z - 6 = 0; \end{cases}$

3.27 $\begin{cases} x + 3y + 2z - 13 = 0, \\ 2x + y + z - 16 = 0; \end{cases}$

3.28 $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0, \\ 2x + y - 4z - 8 = 0; \end{cases}$

3.29 $\begin{cases} x - 3y + 6z - 11 = 0, \\ x + 2y - 2z - 5 = 0; \end{cases}$

3.30 $\begin{cases} x - 4y + 5z = 0, \\ 2x - y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$

Приклад 4 Дано пряма $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{1}$, площина $4x - 3y - 4z + 15 = 0$. Знайти:

а) точку перетину прямої і площини;

б) кут між прямою і площиною.

Розв'язання:

а) Запишемо рівняння прямої у параметричному вигляді:

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{1} = t$, тоді $x = -1 + 2t$, $y = 1 + 4t$, $z = 2 + t$.

Тепер підставимо значення x, y, z у рівняння площини:

$4(-1 + 2t) - 3(1 + 4t) - 4(2 + t) + 15 = 0$;

$-4 + 8t - 3 - 12t - 8 - 4t + 15 = 0$;

$-8t = 0$;

$t = 0$.

Знаходимо значення для координат, знаючи, що $t = 0$:

$x = -1 + 2 \cdot 0 = -1$, $y = 1 + 4 \cdot 0 = 1$, $z = 2 + 0 = 2$.

Звідки маємо координати точки: $(-1;1;2)$, яка є точкою перетину заданих прямої і площини.

б) знайдемо синус кута між напрямним вектором прямої, яка задана канонічним рівнянням, та нормальним вектором площини, яка задана загальним рівнянням:

$$\sin\varphi = \frac{\left|2\cdot 4 + 4\cdot(-3) + 1\cdot(-4)\right|}{\sqrt{2^2+4^2+1^2}\cdot\sqrt{4^2+(-3)^2+(-4)^2}} = \frac{|8-12-4|}{\sqrt{4+16+1}\cdot\sqrt{16+9+16}} =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{41}} = \frac{8}{\sqrt{861}}.$$

Тоді кут між прямою і площиною: $\varphi = \arcsin\dfrac{8}{\sqrt{861}}$.

Завдання за варіантами

Приклад 4 Знайти:

а) точку перетину прямої і площини;

б) кут між прямою і площиною.

4.1 $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{4}$, $x+2y+3z-14=0$;

4.2 $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-5}{-4} = \dfrac{z+1}{5}$, $x+2y-5z+20=0$;

4.3 $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-1}{2}$, $x-3y+7z-24=0$;

4.4 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+3}{2}$, $2x-y+4z=0$;

4.5 $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-2}{0}$, $3x+y-5z-12=0$;

4.6 $\dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$, $x+3y-5z+9=0$;

4.7 $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$, $x-2y+5z+17=0$;

4.8 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+4}{1}$, $x-2y+4z-19=0$;

4.9 $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-4}{-1}$, $2x-y+3z+23=0$;

4.10 $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+3}{0}$, $2x-3y-5z-7=0$;

4.11 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$, $4x-2y-z-11=0$;

4.12 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{0} = \dfrac{z-1}{-1}$, $3x-2y-4z-8=0$;

4.13 $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+3}{2}$, $x+2y-z-2=0$;

4.14 $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{3}$, $5x-y+4z+3=0$;

4.15 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$, $x+3y+5z-42=0$;

4.16 $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-4}{2}$, $7x+y+4z-47=0$;

4.17 $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5}$, $2x+3y+7z-52=0$;

4.18 $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}$, $3x+4y+7z-16=0$;

4.19 $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{-1}$, $2x-5y+4z+24=0$;

4.20 $\frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12}$, $x-2y-3z+18=0$;

4.21 $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{0}$, $x-7y+3z+11=0$;

4.22 $\frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{2}$, $3x+7y-5z-11=0$;

4.23 $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{2}$, $4x+y-6z-5=0$;

4.24 $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-8}{0}$, $5x+9y+4z-25=0$;

4.25 $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3}$, $x+4y+13z-25=0$;

4.26 $\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{3}$, $3x-2y+5z-3=0$;

4.27 $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{-2}$, $3x-y+4z=0$;

4.28 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-3}{-2}$, $x+2y-5z+16=0$;

4.29 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{-2}$, $3x-7y-2z+7=0$;

4.30 $\frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+5}{11}$, $5x+7y+9z-32=0$.

Приклад 5 Побудувати дані поверхні та визначити їх вид (назву):

а) $-\frac{x^2}{6}+4y^2+\frac{1}{2}z^2-2=0$; б) $3x^2+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=0$.

Розв'язання:

а) Зводимо рівняння $-\frac{x^2}{6}+4y^2+\frac{1}{2}z^2-2=0$ до канонічного вигляду. Маємо: $-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}+\frac{z^2}{4}=1$.

Отримали рівняння гіперболоїда, зображеного на рисунку 4.2: півосі його еліпса $OB=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $OC=2$.

б) Зводимо рівняння $3x^2+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=0$ до канонічного вигляду. Маємо: $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{12}=0$.

Це рівняння конуса другого порядку, орієнтованого таким чином як це показано на рисунку 4.3.

Його перерізи площинами $z=const$ є еліпсами.

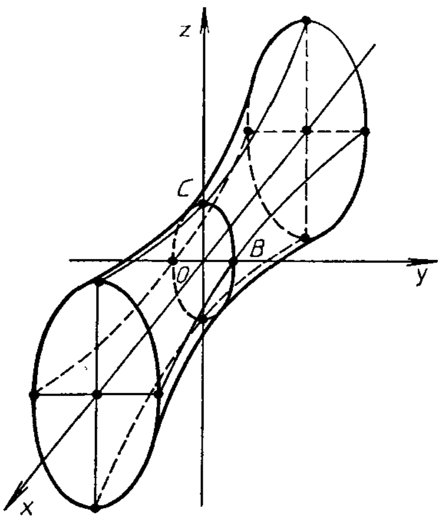

Рисунок 4.2

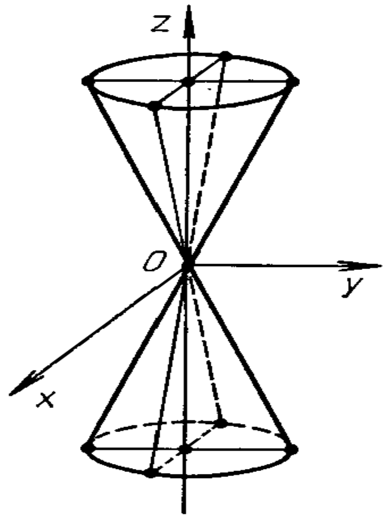

Рисунок 4.3

Завдання за варіантами

Приклад 5 Побудувати дані поверхні та визначити їх вид (назву):

5.1 а) $4x^2-y^2-16z^2+16=0$; б) $x^2+4z=0$;

5.2 а) $3x^2+y^2+9z^2-9=0$; б) $x^2+2y^2-2z=0$;

5.3 а) $-5x^2+10y^2-z^2+20=0$; б) $y^2+4z^2=5x^2$;

5.4 а) $4x^2-8y^2+z^2+24=0$; б) $x^2-y=-9z^2$;

5.5 а) $x^2-6y^2+z^2=0$; б) $7x^2-3y^2-z^2=21$;

5.6 а) $z=8-x^2-4y^2$; б) $4x^2+9y^2+36z^2=72$;

5.7 а) $4x^2+6y^2-24z^2=96$; б) $y^2+8z^2=-20x^2$;

5.8 а) $4x^2-5y^2-5z^2+40=0$; б) $y=5x^2+3z^2$;

5.9 а) $x^2=8\left(y^2+z^2\right)$; б) $2x^2+3y^2-z^2=18$;

5.10 а) $5z^2+2y^2=10x$; б) $4z^2-5x^2-3y^2+60=0$;

5.11 а) $x^2-7y^2-14z^2-21=0$; б) $2y=x^2+4z^2$;

5.12 а) $6x^2-y^2+3z^2-12=0$; б) $8y^2+2z^2=x$;

5.13 а) $-16x^2+y^2+4z^2-32=0$; б) $6x^2+y^2-3z^2=0$;

5.14 а) $5x^2-y^2-15z^2+15=0$; б) $x^2+3z=0$;

5.15 а) $6x^2+y^2+6z^2-18=0$; б) $3x^2+y^2-3z=0$;

5.16 а) $-7x^2+14y^2-z^2+21=0$; б) $y^2+2z^2=6x^2$;

5.17 а) $-3x^2+6y^2-z^2-18=0$; б) $x^2-2y=-z^2$;

5.18 а) $4x^2-6y^2+3z^2=0$; б) $4x^2-y^2-3z^2=12$;

5.19 а) $z=4-x^2-y^2$; б) $3x^2+12y^2+4z^2=48$;

5.20 а) $4x^2+5y^2-10z^2=60$; б) $7y^2+z^2=14x^2$;

5.21 а) $9x^2-6y^2-6z^2+1=0$; б) $15y=10x^2+6y^2$;

5.22 а) $x^2=5\left(y^2+z^2\right)$; б) $2x^2+3y^2-z^2=36$;

5.23 а) $4x^2+3y^2=12x$; б) $3x^2-4y^2-2z^2+12=0$;

5.24 а) $8x^2-y^2-2z^2-32=0$; б) $y-4z^2=3x^2$;

5.25 а) $x^2-6y^2+z^2-12=0$; б) $x-3z^2=9y^2$;

5.26 а) $2x^2-3y^2-5z^2+30=0$; б) $2x^2+3z=0$;

5.27 а) $7x^2+2y^2+6z^2-42=0$; б) $2x^2+4y^2-5z=0$;

5.28 а) $-4x^2+12y^2-3z^2+24=0$; б) $2y^2+6z^2=3x$;

5.29 а) $3x^2-9y^2+z^2+27=0$; б) $z^2-2y=-4x^2$;

5.30 а) $27x^2-63y^2+21z^2=0$; б) $3x^2-7y^2-2z^2=42$.

Приклад 6 Звести до нормального вигляду рівняння поверхні $3x^2+4y^2-8z^2-18x+8y+32z-1=0$ та визначити її назву.

Розв'язання:

Виконаємо перетворення лівої частини рівняння, виділивши повні квадрати:

$3x^2+4y^2-8z^2-18x+8y+32z-1=0$;

$3\left(x^2-6x+9\right)+4\left(y^2+2y+1\right)-8\left(z^2-4z+4\right)-1-27-4+32=0$;

$3(x-3)^2+4(y+1)^2-8(z-2)^2=0$.

Після ділення обох частин рівняння на 24 отримуємо:

$$\frac{(x-3)^2}{8}+\frac{(y+1)^2}{6}-\frac{(z-2)^2}{3}=0.$$

Дане рівняння визначає конус з вершиною у точці $(3;-1;2)$.

Завдання за варіантами

Приклад 6 Звести до нормального вигляду рівняння поверхні та визначити її назву.

6.1 $36x^2+4y^2-8y+9z^2-32=0$;

6.2 $x^2+2y^2-4x+4y-4z+6=0$;

6.3 $x^2+16y^2-4z^2-4x+8z=0$;

6.4 $3x^2+y^2-6x+4-2z+7=0$;

6.5 $x^2+4y^2-4x-24y-4z+40=0$;

6.6 $x^2+y^2-z^2-2x+4y+6z-4=0$;

6.7 $x^2+y^2-z^2+4x+2y+4z+1=0$;

6.8 $x^2+y^2-z^2-6x-2y-2z+9=0$;

6.9 $x^2+y^2-z^2-4x-4y-4z+4=0$;

6.10 $4x^2+y^2-2z^2-8x+4z+2=0$;

6.11 $12x^2+3y^2+4z^2-24x+12y+8z+16=0$;

6.12 $4x^2+2y^2+z^2-8x-4y-4z+6=0$;

6.13 $4x^2+9y^2+36z^2-36y-72z+36=0$;

6.14 $3x^2+y^2+9z^2+12x-2y+4=0$;

6.15 $x^2+5y^2+5z^2-4x-20z-1=0$;

6.16 $3x^2+4y^2-4z^2-8y+8z-12=0$;

6.17 $3x^2+2y^2-6z^2-6x+4y-1=0$;

6.18 $x^2+3y^2-z^2-4x+4z+1=0$;

6.19 $4x^2+9y^2-36z^2+8x-18y-23=0$;

6.20 $2x^2+5y^2-10z^2+8x+20z-12=0$;

6.21 $4x^2+y^2-4z^2-16x-2y+21=0$;

6.22 $9x^2+y^2-7z^2+18x+2y+19=0$;

6.23 $2x^2+y^2-2z^2-12x-4y+22=0$;

6.24 $4x^2+4y^2-z^2+16x+8y+2z+23=0$;

6.25 $4x^2+2y^2-z^2-8y-2z+11=0$;

6.26 $2x^2-y^2-4x-2y-6z+1=0$;

6.27 $5x^2-4y^2+10x+8y-20z+1=0$;

6.28 $9x^2-4y^2-16y-36z-52=0$;

6.29 $4x^2-y^2+4y-4z+4=0$;

6.30 $4x^2-y^2-16x-2y-4z+7=0$.

Список використаних джерел

Основні:

1. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії : збірник задач / Ю.К. Рудавський, П.П. Костробій, Д.В. Уханська [та ін.]. – Львів: Видавництво «Бескид Біт», 2002. – 256 с.
2. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. підручник / Ю.К. Рудавський, П.П. Костробій, Х.П. Луник [та ін.]. – Львів: Видавництво «Бескид Біт», 2002. – 262 с.
3. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. – К. : ТВіМС, 2011. – 224 с.
4. Рябушко А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учебное пособие / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть. – Минск. : Вышэйшая шк., 1990. – 271 с.
5. Тевяшев А.Д. Вища математика у прикладах і задачах. Ч. 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної : навч. посібник / А.Д. Тевтяшев, О.Г. Литвин. – К.: Кондор, 2006. – 588 с.
6. Турчанінова Л.І. Практикум з вищої математики : навчальний посібник / Л.І. Турчанінова, О.В. Доля. – К.: Кондор, 2010. – 172 с.

Додаткові:

1. Бахвалов С.В. Сборник задач по аналитической геометрии : сборник задач / С.В. Бахвалов, П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. – М.: Наука, 1964. – 440 с.: илл.
2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учебное пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч 1 / П.Е. Данко, А.Г. Потапов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк.,1986. – 304 с.: илл.
3. Денисюк В.П. Вища математика. Модульна технологія навчання: навч. посіб. У 4 ч. Ч. 1. / В.П. Денисюк, В.К. Репета : – 4-те вид., стереотип. – К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2009. – 291 с.
4. Лейфура В.М. Математика : підручник для студентів екон. спеціальностей вищ. навч. закладів I–II рівнів акредитації / В.М. Лейфура, Г.І. Голодницький, Й.І. Файст. – К.: Техніка, 2003. – 640 с.: іл.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс : курс лекций / Дмитрий Трофимович Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 608 с.: илл.
6. Сборник задач по высшей математике. 1 курс : сборник задач / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин [и др.]. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 576 с.: илл.
7. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии : сбарник задач / Ольга Николаевна Цубербиллер. – М.: Наука, 1964. – 336 с.: илл.

Навчальне видання

БИСТРЯНЦЕВА Анастасія Миколаївна

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Практикум

Підписано до друку 30.10.2018.
Формат 60х84/16.. Гарнітура Times New Roman Cyr.
Папір Офсетний. Друк офсетний
Ум. друк. арк. 4,75. Наклад 300.
Зам. №327

Видрукувано у ТОВ «Айлант»
73000, Україна, м. Херсон, пров. Пугачова, 5/20.
Свідоцтво про реєстрацію ХС №1 від 20.08.2000 р.
Тел.: 49-33-48, 050-396-08-91