А. Г. Савченко, Критерий изоморфности функтора конечной степени степенному функтору, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1989, номер 3, 18–21

Первая сумма равна $\sqrt{g}\,\frac{1}{2}\cdot\partial g_{ij}/\partial y^{\alpha}g^{ij}g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}X^{\gamma}$, где $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}X^{\gamma}=X^{\alpha}$, так как $g_{i\alpha}=0$; вторая сумма равна $-\sqrt{g}\,\partial g_{\alpha i}/\partial y^{k}g^{ki}g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}X^{\gamma}$. Поэтому

$$d\omega(q, T_qA)(X, \partial/\partial y^1, \ldots, \partial/\partial y^p) = -\langle H, E\rangle\sqrt{g}.$$

Это доказывает вторую часть равенства и завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2 является несложным следствием теоремы 1.

Авторы благодарны Р. Ф. Полищуку за полезные обсуждения и А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Simons J. Minimal varieties in riemannian manifolds//Ann. Math. 1968. **88**, N 1. 62—105.
2. Lawson H. B., Simons J. On stable currents and their application to global problems in real and complex geometry//Ann. Math. 1973. **98**, N 3. 427—450.
3. Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия (сводка результатов). М., 1975.

Поступила в редакцию
19.06.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1989. № 3

УДК 515.12

А. Г. Савченко

КРИТЕРИЙ ИЗОМОРФНОСТИ ФУНКТОРА КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ СТЕПЕННОМУ ФУНКТОРУ

В настоящей статье в терминах 1-мягких отображений компактов получены необходимые и достаточные условия, при которых нормальный функтор конечной степени n изоморфен функтору возведения в n-ю степень Id^n. Мы рассматриваем только ковариантные функторы $F:\mathrm{Comp}\to\mathrm{Comp}$. Для таких функторов введен ряд понятий, составляющих определение нормального функтора. Ознакомиться с этими определениями можно в работе [1].

Обозначим через $\pi: Q\times Q\to Q$ отображение проектирования произведения двух гильбертовых кубов на один из сомножителей. В 1979 г. В. В. Федорчук [2] показал, что если G-симметрическая степень $\mathrm{SP}_G{}^n$ сохраняет мягкость проектирования π, то функтор $\mathrm{SP}_G{}^n$ изоморфен Id^n. Затем более общие результаты были получены Е. В. Щепиным [1], доказавшим, что нормальный финитный функтор F, сохраняющий мягкость отображения π, изоморфен Id^n для некоторого n, и М. В. Смуровым [3]. В работе [4] В. В. Федорчук поставил вопрос: будет ли степенным нормальный функтор, сохраняющий мягкость отображений бикомпактов? Следующая теорема, являющаяся основным результатом работы, дает положительный ответ на этот вопрос для функторов конечной степени (даже в категории компактов).

Теорема 1. *Если F — нормальный функтор конечной степени n, то F изоморфен функтору Id^n тогда и только тогда, когда отображение $F(\pi): F(Q\times Q)\to F(Q)$ 1-мягко.*

Отметим, что для функторов, рассматриваемых в категории компактов и непрерывных отображений, теорема 1 в некотором смысле является окончательным результатом. А именно: нельзя отказаться от условия $\deg F = n$, поскольку в этой категории функтор всех вероятностных мер P сохраняет мягкость отображений [5].

Используя теорему 1 и применяя методы спектрального анализа (по аналогии с доказательством теоремы 4.7 из [1]), можно показать, что справедлива

Теорема 2. *Если нормальный функтор F конечной степени не является мультипликативным, то $F(I^{\aleph_1})$ не является абсолютным ретрактом.*

Следствие. *Для нормального функтора F конечной степени равносильны следующие условия:*

а) $F(I^{\aleph_1})$ гомеоморфно $I^{\aleph_1}$;

б) функтор F мультипликативен.

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теоремы 1. Нам понадобятся следующие утверждения.

Предложение 1 [1]. *Пусть F — нормальный функтор. Тогда для непрерывного отображения f бикомпакта X в бикомпакт Y и точки $a \in F(X)$ имеем $f(\operatorname{supp}_{F,X} a) = \operatorname{supp}_{F,Y} F(f)a$.*

Напомним, что функтор F называется финитным, если пространство $F(X)$ конечно для любого конечного компакта X.

Теорема 3 [3]. *Пусть $f: X \to Y$ — 1-мягкое отображение компакта X на компакт Y, причем существует такая неизолированная точка $y \in Y$, что $|f^{-1}(y)| \geqslant 2$. Тогда для любого нормального финитного функтора F, не изоморфного степенному, отображение $F(f): F(X) \to F(Y)$ не является 1-мягким.*

Доказательство теоремы 1. Достаточность. Для функтора F, компакта X и натурального числа k определим отображение $\pi_{F,X,k}: X^k \times F(k) \to F(X)$ формулой $\pi_{F,X,k}(\xi, a) = F(\xi)a$ при $\xi \in X^k$ и $a \in F(k)$ [6]. Подфунктор F_k нормального функтора F задается естественным образом.

На пространстве $Z = F(n) \setminus F_{n-1}(n)$ определим действие симметрической группы S_n следующим образом: для гомоморфизма $\sigma \in S_n$ и точки $a \in Z$ положим $\sigma_{F,n}(a) = F(\sigma)a$. Согласно предложению 1 такое определение корректно. Таким образом, мы получили некоторое множество орбит, причем каждая орбита состоит не более чем из $n!$ точек пространства Z.

Обозначим через $\pi_i: n_1 \times n_2 \to n_i$, где $i = 1, 2$ и $n_i = n$, отображение проектирования произведения $n_1 \times n_2$ на i-й сомножитель. Покажем, что диагональное произведение $F(\pi_1)$ и $F(\pi_2)$ сюръективно. Действительно, так как отображение $F(\pi)$ 1-мягко, то оно открыто. Следовательно, функтор F бикоммутативный (это вытекает из предложений 3.20 и 3.15 работы [1]). Поэтому отображение $F(\pi_1) \triangle F(\pi_2):$ $: F(n_1 \times n_2) \to F(n_1) \times F(n_2)$ как совпадающее с характеристическим отображением бикоммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} F(n_1 \times n_2) & \xrightarrow{F(\pi_2)} & F(n_2) \\ {\scriptstyle F(\pi_1)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle F(j_2)} \\ F(n_1) & \xrightarrow{F(j_1)} & F(1) = 1 \end{array}$$

(где $j_i: n_i \to 1$ — постоянное отображение) сюръективно.

Пусть $x \in F(n_1)$ и $y \in F(n_2)$ — такие точки, что $\operatorname{supp}_{F,n_1} x = n_1$ и $\operatorname{supp}_{F,n_2} y = n_2$. Рассмотрим отображение $F(\pi_1)$. Согласно предложению 1.18 из [6] имеем $\pi^{-1}_{F,n_1 \times n_2, n} F(\pi_1)^{-1} x = \bigcup \{M_\varphi : \varphi \in n_1^n\}$, где $M_\varphi = \{\xi : \xi \in (n_1 \times n_2)^n,$ $\pi_1 \circ \xi(i) = \varphi(i)$ при $i \in \varphi^{-1}(n_1)\} \times F(\varphi)^{-1} x$. Но так как $|\operatorname{supp}_{F,n_1} x| = n$, то в силу предложения 1 в качестве отображений $\varphi: n \to n_1$ можно брать только гомеоморфизмы, а потому гомеоморфизмами будут и отображения $F(\varphi)$. Определим в пространстве Z множество $\mathrm{Orb}_{\pi_1} x = \{F(\varphi)^{-1} x : : \varphi : n \to n_1$ — гомеоморфизм$\}$, соответствующее точке x и отображению $F(\pi_1)$. Легко проверить, что это множество является орбитой некоторой точки из Z относительно действия группы S_n. Покажем, что для любой точки $c \in \mathrm{Orb}_{\pi_1} x$ и только для таких точек существует вложение $\xi : n \to n_1 \times n_2$, для которого $F(\pi_1) F(\xi) c = x$. Действительно, если $c \in \mathrm{Orb}_{\pi_1} x$, то существует такой гомеоморфизм $\psi : n \to n_1$, что $c = F(\psi)^{-1} x$. Зададим отображение $\xi : n_1 \times n_2$ таким образом, чтобы $\xi(i) \in \pi_1^{-1} \psi(i)$ для любого $i \in n$. Тогда отображение ξ есть вложение и удовлетворяет равенству $F(\pi_1) \circ F(\xi) c = F(\pi_1 \circ \xi) c = F(\psi) c = x$. Предположим теперь, что существует такое вложение $\xi : n \to n_1 \times n_2$, что $F(\pi_1) F(\xi) c = x$, но $c \notin \mathrm{Orb}_{\pi_1} x$. Тогда поскольку $|\mathrm{supp}_{F, n_1} x| = n$, то согласно предложению 1 отображение $\psi = \pi_1 \circ \xi$ сюръективно и, следовательно, гомеоморфизм. Поэтому $c = F(\psi)^{-1} x$, что противоречит предположению $c \notin \mathrm{Orb}_{\pi_1} x$. Аналогичным образом определяется множество $\mathrm{Orb}_{\pi_2} y$, являющееся орбитой некоторой точки пространства Z относительно действия группы S_n и обладающее тем свойством, что для любой точки $c \in \mathrm{Orb}_{\pi_2} y$ и только для таких точек существует вложение $\xi : n \to n_1 \times n_2$, такое, что $F(\pi_2) F(\xi) c = y$.

Отображение $F(\pi_1) \triangle F(\pi_2)$ сюръективно, поэтому прообраз точки $z = (x, y)$ не пуст. Пусть $r \in (F(\pi_1) \triangle F(\pi_2))^{-1} z$. Поскольку $\deg F = n$, то $|\mathrm{supp}_{F, n_1 \times n_2} r| \leqslant n$. Но $F(\pi_1) r = x$ и $F(\pi_2) r = y$, следовательно, $|\mathrm{supp}_{F, n_1 \times n_2} r| = n$, так как носитель точки $r \in F(n_1 \times n_2)$ должен проектироваться и на n_1 и на n_2. Согласно предложению 1.7 из [6] существуют такая точка $c \in Z$ и такое вложение $\xi : n \to n_1 \times n_2$, что $\pi_{F, n_1 \times n_2, n}(\xi, c) = F(\xi) c = r$. Таким образом, точка c лежит в $\mathrm{Orb}_{\pi_1} x \cap \mathrm{Orb}_{\pi_2} y$. Но орбиты, имеющие непустое пересечение, совпадают. Поэтому $\mathrm{Orb}_{\pi_1} x = \mathrm{Orb}_{\pi_2} y$. А поскольку точки x и y выбирались с условием, чтобы они имели n-точечные носители, то в Z любая орбита имеет непустое пересечение с любой другой. Следовательно, все орбиты совпадают и, значит, $|Z| \leqslant n!$.

Исходя из конечности пространства $F(n) \setminus F_{n-1}(n)$ и определения нормального функтора конечной степени n, несложно показать, что пространство $F(n_1 \times n_2) \setminus F_{n-1}(n_1 \times n_2)$ также конечно. Рассмотрим отображение $F(\pi_1) \triangle F(\pi_2)$ и зафиксируем такую точку $x_0 \in F(n_1)$, что $\mathrm{supp}_{F, n_1} x_0 = n_1$. Для любой точки $y \in F(n_2)$ существует такая точка $q \in F(n_1 \times n_2)$, что $F(\pi_1) \triangle F(\pi_2) q = (x_0, y)$. Так как $F(\pi_1) q = x_0$ и $\mathrm{supp}_{F, n_1} x_0| = n$, то в силу предложения 1 имеем $|\mathrm{supp}_{F, n_1 \times n_2} q| = n$. Кроме того, $F(\pi_2) q = y$. Итак, любая точка из $F(n_2)$ является образом при отображении $F(\pi_2)$ некоторой точки из $F(n_1 \times n_2) \setminus F_{n-1}(n_1 \times n_2)$. Но поскольку последнее пространство конечно, то пространство $F(n)$ также конечно. Следовательно, функтор F финитный.

Предположим, что функтор F не изоморфен Id^m ни при каком натуральном числе m. Так как отображение $\pi : Q \times Q \to Q$ и по доказанному функтор F удовлетворяют условиям теоремы 3, то отображение $F(\pi)$ не является 1-мягким, что противоречит условию теоремы 1. Следовательно, F изоморфен Id^m при некотором m. Но поскольку $\deg F = n$, то $m = n$.

Теорема доказана.

Автор признателен профессору В. В. Федорчуку за внимание к работе и поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов//Успехи матем. наук. 1981. 36, вып. 3. 3—62.
2. Федорчук В. В. Некоторые функторы, ретракты и многообразия//IV Тираспольский симпозиум по общей типологии и ее приложениям. Кишинев, 1979. 148—150.
3. Смуров М. В. Действие функторов на $AE(1)$-бикомпакты//V Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. Кишинев, 1985. 225—226.
4. Федорчук В. В. Вероятностные меры и абсолютные ретракты//Докл. АН СССР. 1980. 225, № 6. 1329—1333.
5. Федорчук В. В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q-многообразия//Успехи матем. наук. 1981. 36, вып. 3. 177—195.
6. Басманов В. Н. Ковариантные функторы, размерность и абсолютные ретракты: Канд. дис. М., 1983.

Поступила в редакцию
22.06.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1989. № 3

УДК 519.45

А. П. Блохина

О ЦЕНТРАЛИЗАТОРЕ ЭЛЕМЕНТА КОКСТЕРА

В настоящей работе теорема о том, что для конечной группы Кокстера централизатором элемента Кокстера является циклическая группа, порожденная самим этим элементом, переносится на бесконечные группы Кокстера, графами которых являются деревья, а также на группу $\tilde{A}_n$.

1. Пусть Γ—группа Кокстера: $\Gamma=\langle s \mid s^2=e\ \forall s\in S,\ (s_1s_2)^{m(s_1,s_2)}=e\ \forall s_1, s_2\in S\rangle$, причем $m(s_1, s_2)$ или целое число, большее либо равное двум, или ∞. При условии, что S — конечное множество, элементом Кокстера w в группе Γ называется произведение всех образующих группы Γ, взятых в каком-то порядке. Докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть Γ — группа Кокстера, граф которой является конечным деревом. Если w — элемент Кокстера в Γ и $cw=wc$, $c\in\Gamma$, то $c=w^q$, $q\in\mathbf{Z}$.*

Такой же результат будет получен для группы Γ типа $\tilde{A}_n$.

Для конечных групп Кокстера эта теорема доказана в [1, 2].

Мы приведем ее доказательство в остальных случаях.

2. Пусть сначала группа Γ не аффинна и ее граф является деревом с n вершинами. Рассмотрим Γ как группу отражений в представлении Титса в вещественном векторном пространстве $V=\langle e_1, \ldots, e_n\rangle$. В V введено скалярное произведение B так, что $B(e_i, e_i)=1$, $B(e_i, e_j)=-\cos\pi/m_{ij}$, $i\neq j$, где $m_{ij}=m(s_i, s_j)$. При этом образующему элементу s_i группы Γ соответствует отражение $R_i\in GL(V)$, $R_i(x)=$ $=x-2(e_i, x)e_i\ \forall x\in V$.

Существует и единствен инъективный гомоморфизм $\sigma:\Gamma\to GL(V)$, при котором $\sigma(s_i)=R_i$. Элементы из $\sigma(\Gamma)$ сохраняют скалярное произведение B [3]. Таким образом, Γ можно отождествить с подгруппой в $GL(V)$, порожденной отражениями R_i.

Камерами пространства V для построенного выше линейного представления $\sigma:\Gamma\to GL(V)$ называются выпуклые многогранные конусы, получаемые из конуса $C=\{x: B(e_i, x)\leqslant 0,\ i=1,\ldots,n\}$ преобразованиями из $\sigma(\Gamma)$. Конусом Титса называется объединение всех камер. Он является выпуклым множеством [3].