ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ МОДЕРНИЗАЦІЇ НАВЧАННЯ: КОМПЕТЕНТНІСНИЙ ПІДХІД

КВНЗ «Херсонська академія неперервної освіти»

ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ МОДЕРНІЗАЦІЇ НАВЧАННЯ: КОМПЕТЕНТНІСНИЙ ПІДХІД

Колективна монографія

Херсон

2020

УДК 37 014 3 – 047 22
Т 33

Рекомендовано до друку вченою радою КВНЗ «Херсонська академія неперервної освіти» (протокол № 8 від 25 11 2019 р)

Авторський колектив: Г С Юзбашева (переднє слово, підрозділ 4 1); Л В Чумак (підрозділ 1 1); Г П Чух (підрозділ 1 2); Т В Комінарець (підрозділ 1 3); В В Вострікова (підрозділ 2 1); В І Кузьмич (підрозділ 3 1); В І Таточенко, А Л Шипко (підрозділ 3 2); О А Коновал, Т І Туркот, А О Соломенко (підрозділ 4 2); Н С Шолохова (підрозділ 4 3), О М Самойленко, І В Бацуровська (підрозділ 5 1); Т В Зайцева (підрозділ 5 2), Н В Осипова, Н О Кушнір, Н В Валько (підрозділ 5 3), І. В. Головченко (підрозділ 6 1), З В Філончук (розділ 6 2), С О Моісеєв (підрозділ 7 1), А А Кучеренко (підрозділ 8 1), А Л Владимирова (підрозділ 9 1)

Рецензенти:

Бахмат Наталія Валеріївна – доктор педагогічних наук, професор Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.

Глазунова ОленаГригорівна – доктор педагогічних наук, професор, декан факультету комп'ютерних наук і економічної кібернетики Національного університету біоресурсів і природокористування України

Сергієнко Володимир Петрович – доктор педагогічних наук, професор директор навчально-наукового інституту неперервної освіти Національного педагогічного університету імені М П Драгоманова

Теоретико-методологічні основи модернізації навчання: компетентнісний підхід: колективна монографія / за ред Г С Юзбашева. Херсон: КВНЗ «Херсонська академія неперервної освіти», 2020 351 с

Т 33

ISBN 978-617-7481-21-7

У монографії розглянуто вісім освітніх галузей Державної Нової української школи; технологічний інструментарій навчального предмета; метричний підхід до понять; шкільний підручник як елемент компетентнісного підходу; екологічна грамотність як ключова компетентність; методика розвитку критичного мислення; мережево-цифрове середовище тощо Наведений матеріал викладачами кафедри апробовано в закладах освіти та на курсах підвищення кваліфікації вчителів навчальних дисциплін КВНЗ «Херсонська академія неперервної освіти»

Видання адресовано науково-педагогічним працівникам у галузі педагогіки, методики викладання навчальних дисциплін, аспірантам, студентам, методистам, учителям та керівникам закладів освіти та методичних установ

УДК 37.014.3 – 047.22

Матеріали представлено в авторській редакції

ISBN 978-617-7481-21-7

ЗМІСТ

V

ПЕРЕДНЄ СЛОВО

Проблема розвитку особисто орієнтованого навчання починаючи з кінця XX століття в педагогіці стала розглядатися в площині компетентнісного підходу: по-перше, у зв'язку з появою змін у Державному стандарту базової і повної загальної середньої освіти; по-друге, з необхідністю дослідити розвиток особистісно орієнтованого навчання на основі конструювання предметних компетентностей. У літературі з методики навчання базових предметів компетентнісний підхід почав висвітлюватися порівняно недавно. Науковці, методисти досліджують як теоретичні, так і практичні аспекти проблеми, а саме: Н. М. Буринська, Л. П. Величко, Т. І. Воронюк, І. А. Гурняк, О. І. Лашевська, Г. А. Локшина, Н. І. Лукашова, О. В. Овчарук, Л. І. Паращенко, О. Я. Савченко, М. М. Савчин, Н. В. Титаренко, П. В. Хоменко, Н. Н. Чайченко та ін.

Тому викладачі кафедри вирішили дослідити розвиток та складові предметної компетентності в навчанні базових предметів. Аналіз педагогічних досліджень у сфері компетентністного навчання показав, що серед учених немає єдиної думки в розумінні понять «компетенція» і «компетентність», тому виділення специфічних ознак кожній дефініції представлялося важливим завданням. Перш за все з'ясуємо тлумачення понять «компетенція», «компетентність», «предметна компетенція».

Поняття «компетентність» та «компетенція» трактуються по-різному у різних джерелах. Якщо заглянути в словники іноземних мов то можна сказати, що competent (франц.) – компетентний, повноважний, competents (лат.) – відповідальний, здатний, compete – вимогати, відповідати, бути придатним, competence (анг.) – здібний.

Відомі педагоги П. В. Симонов, В. М. Шепель у визначенні компетентності включає знання, вміння, досвід, теоретико-практичну підготовку до використання знань. У психології існує достатньо стійка точка зору, згідно якої поняття «компетентність» включає знання, вміння, навички, здійснення педагогічної діяльності (А. М. Журавльов, Н. Ф. Тализіна, Р. К. Шакуров, А. І. Щербаков).

Л. М. Мітіна у структурі педагогічна компетентність учителя виділяє дві підструктури: діяльнісну (знання, вміння, навички і способи здійснення педагогічної діяльності)) і комунікативну (знання, вміння, навички і способи здійснення педагогічного спілкування).

Ірландський вчений-педагог Дж. Кулахан розуміє під компетентністю загальні здібності, які базуються на знаннях, досвіді, цінностях, здібностях, що особистості розвинула шляхом освіти та практики.

Французький педагог Ж. Перре під компетентністю розуміє взаємозв'язок між навичками, уміннями, ситуативною діяльністю та особистісною.

Б. Рей, автор праці «Ключові уміння для Європи», вживає термін «ключові уявлення», маючи на уяві те як людина розуміє світ. «Ключові уявлення» допомагають вирішити їх, застосовуючи логіку та раціоналізм отриманих знань, умінь і навичок.

Педагогіка і психологія 1997 №1 С 118–123
16 Капська А Й Основні закономірності моделювання виховного процесу *Нові технології виховання* Київ: ЮДО, 1995 С 91–95
17 Книга методиста: довідково-методичне видання / упоряд Б М Литвиненко, О М Вернидуб Харків: Торсингплюс, 2006 672 с
18 Кон И С В поисках себя: Личность и ее самосознание Москва, 1984 335 с
19 Крягжде С П Психология формирования профессиональных интересов Вільнюс: Мокслас, 1981 195 с
20 Кузьмина Н В Очерки психологии труда учителя: психологическая структура деятельности учителя и формирование его личности Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1967 183 с
21 Маркова А К Психология труда учителя Москва: Просвещение, 1993 191 с
22 Мельник О В Ділові ігри як засіб активізації професійного самовизначення старшокласників *Профорієнтаційна робота із школярами*: метод посіб / за ред М П Тименка Рівне, 1992 С 83–97
23 Мельник О В Використання імітаційних ігор у процесі групової профконсультації *Соціально-психологічні проблеми професійної підготовки майбутнього вчителя* : тези допов і пов міжвуз наук -практ конференції Київ: КДПІ, 1992 С 319–321
24 Моргун В Ф Профессиональная ориентация будущих педагогов *Учитель, которого ждут*/ под ред И А Зязюна Москва: Педагогика, 1988 С 64–86
25 Моргун В Ф Монистическая концепция многомерного развития личности: Аннотированный библиографический указатель с 1988 по 1989 год Полтава : ПГПИ, 1989 56 с
26 Нікітіна І В Суб'єктне самовизначення особистості у період повноліття: логіка здійснення *Вісник Харківського університету* 1999 № 432 С 261–271
27 Павлютенков Е М Профессиноальная ориентация учащихся Київ : Радянська школа, 1983 152 с
28 Платонов К К Структура и развитие личности Москва: Наука, 1985 256 с
29 Сухомлинська О В Цінності в історії розвитку школи в Україні *Цінності освіти і виховання* наук -метод зб / за заг ред О В Сухомлинської Київ: АПНУ, 1997 С 3–8
30 Федоров Л М Ценностные ориентации личности и их формирование *Вестник Ленинградского университета* 1997 Вип 1 С 19–22
31 Хрестоматия по истории зарубежной педагогики: учебное пособие для студентов пед ин-тов / сост и автор вводных статей А И Пискунов 2-е изд , перераб Москва : Просвещение, 1995 528 с
32 Ядов В А Социологическое исследование методология, программа, методы Самара : Самарский ун-т, 1995 329 с

Розділ III

МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Кузьмич В. І.

3.1. Метричний підхід до формування основних геометричних понять

Програма шкільного курсу математики за останні півстоліття зазнала значних змін, обумовлених широким застосуванням новітніх математичних методів досліджень. Так, у курсі геометріїзначна частина матеріалу вивчається із застосуванням векторів та граничного переходу,у курсі алгебри й початків аналізувивчаються елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики, похідна функції, невизначений та визначений інтеграл.

З другої половини XIX сторіччя розпочинається стрімкий розвиток неевклідових геометрій, спричинений побудовою Миколою Івановичем Лобачевським (1792–1856) нової геометрії, яка базувалась на запереченні п'ятого постулату геометрії Евкліда. У 1906 році французький математик Моріс Рене Фреше (1878–1973) увів у розгляд поняття метричного простору, що базувалось на понятті відстані між двома точками (метрики простору). З цього часу розпочинається розвиток метричної геометрії – геометричних структур та співвідношень між ними, що базуються лише на понятті відстані між точками метричного простору. Таким чином, метрична геометрія значною міроюмає аналітичний характер, і меншою мірою пов'язана з інтуїтивним сприйняттям таких основних геометричних понять як точка, пряма, площина, кут і т. п. З іншого боку, метрична геометрія розвивається як узагальнення геометрії Евкліда, і тому основні факти геометрії Евкліда можна отримати як частинні випадки відповідних фактів метричної геометрії. Це дає можливість застосувати метричний підхід до вивчення основних понять геометрії Евкліда, відійшовши від їх інтуїтивного сприйняття.У свою чергу, такий підхід дає можливість адекватно сприйняти особливості неевклідових геометрій, не вступаючи у логічні протиріччя з геометрією Евкліда та інтуїтивним розумінням її основних понять. Слід відзначити достатньо прості аналітичні перетворення при встановленні елементарних фактів метричної геометрії, оскільки вони базуються на зрозумілих аксіомах відстані між точками метричного простору. За висловленням авторів курсу метричної геометрії «...метрична геометрія залишається, можливо, одним із самих «елементарних» математичних методів» [1, с. XIV].

У зв'язку з відкриттям 28.02.1826 р. Миколою Івановичем Лобачевським (01.12.1792 – 24.02.1856) не евклідової геометрії (у цей день на зборах фізико-математичного факультету Казанського університету ним був представлений рукопис роботи «Короткий виклад начал геометрії») особливо гостро постало питання обґрунтування основ геометрії. Цими питаннями займались такі визначні математики як Карл Фрідріх Гаусс (30.04.1777 – 23.02.1855), Георг Фрідріх Бернхард Ріман (17.09.1826 – 30.07.1866), Герман Людвіг Фердінанд Гельмгольц (31.08.1821 – 08.09.1894), Давид Гільберт (23.01.1862 – 14.02.1943), Фелікс ХрістіанКлейн (25.04.1849 – 22.06.1925), СофусМаріус Лі (17.12.1842 – 18.02.1899), Джузеппе Пеано (27.08.1858 – 20.04.1932), Герман Клаус Хуго Вейль (09.11.1885 – 08.12.1955) та інші.

Основоположниками метричної геометрії вважають англійського математика Артура Келі (1821–1895) та австрійсько-американського математика Карла Менгера (1903–1985). Значний вклад у розвиток метричної геометрії зробив російський математик О. Д. Александров (1912–1999). Останнім часом метрична геометрія знайшла свої застосування у найрізноманітніших сучасних дослідженнях з біології, астрономії, ядерної фізики, комп'ютерних наук (комбінаторна оптимізація), архітектури та інженерії. Зокрема, геометрія Фінслера (Пауль Фінслер (1894–1970) – швейцарський математик та астроном), яка є природним узагальненням метричної геометрії, застосовується для опису фізичних взаємодій та наслідків з них у мікросвіті.З основними положеннями метричної геометрії можна ознайомитись як по підручнику [1], так і по монографіях відомих математиків Герберта Буземана [2] та Марселя Берже [3].

До математиків, які внесли значний вклад у розвиток метричної геометрії слід віднести також Веніаміна Федоровича Кагана (1869–1953), який значну частину своєї наукової діяльності провів на фізико-математичному факультеті Одеського університету.У 1902 році В. Ф. Каган, обґрунтовуючи основи геометрії Евкліда, побудував геометричну систему, у якій незалежно від М. Р. Фреше використовував поняття точки, що не означується, та на основі якого означаються інші геометричні образи, що розглядаються як сукупності точок.Він увів поняття «відстані» між точками, що не змінюється при русі у просторі. Це дозволяє побудувати геометрію Евкліда не спираючись на інтуїтивне сприйняття її основних понять [4]. В. Ф. Каган побудував вичерпну теорію прямої лінії, встановивши ізоморфізм множини дійсних чисел і точок прямої [5, розділXIX]. При побудові теорії В. Ф. Каган використовував поняття «прямолінійної розміщеності» точок [6, с. 527]. Це поняття буде головним при викладенні основного матеріалу даної роботи.

У недавніх роботах з метричної геометрії активно досліджувались питання прямолінійного та плоского розміщення точок метричного простору [7-11]. Слід зазначити, що ці дослідження використовують специфічне означення кута, утвореного трьома точками метричного простору, та кутової характеристики.

У даній роботі буде показано, яким чином можна застосувати засоби метричної геометрії до формування поняття відстані між двома точками та поняття прямолінійності, на базі шкільного курсу математики.

3.1.1. Формування понять відстані та прямолінійності у 7-9 класах засобами метричної геометрії.

Як правило, вперше майбутні вчителі математики знайомляться з метричними просторами у курсі математичного аналізу,під час вивченняфункцій декількох змінних. При введенні поняття n–вимірного евклідового простору дається узагальнене поняття відстані між двома точками цього простору. Воно узагальнює поняття відстані між двома

точками на числовій осі, відстані між двома точками на координатній площині, та відстані між двома точками трьох вимірного координатного простору, з якими студенти знайомі зі шкільного курсу математики.Загальне означення метричного простору, та детальне вивчення конкретних метричних просторів пропонується у курсі функціонального аналізу. Наведемо основні означення, що стосуються метричних просторів.

Означення 1. *Метричним простором називається сукупність непорожньої множини X елементів якої завгодно природи й однозначної дійсної невід'ємної функції $\rho(x;y)$ означеної для будь-яких елементів x і y з X і яка задовольняє такі умови:*

1) $\rho(x;y) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x = y$,

2) $\rho(x;y) = \rho(y;x)$ (аксіома симетрії);

3) для будь-яких трьох елементів x, y і z виконується нерівність $\rho(x;y) \le \rho(x;z) + \rho(z;y)$(аксіома трикутника).

(дивись, наприклад, [12, с. 102]).

При цьому елементи множини X називають точками метричного простору, функцію ρ – метрикою простору X, а числове значення функції $\rho(x;y)$ – відстанню між елементами (точками) x і y. Метричний простір X з метрикою ρпозначають $(X;\rho)$.Умови 1), 2) і 3) Означення 1 ще називають аксіомами відстані.

Зрозуміло, що у такому вигляді, як це наведено в Означенні 1, знайомити учнів з поняттям метрики і метричного простору недоцільно, оскільки при цьому використовується поняття функції двох змінних, а якщо точніше, то функціоналу, оскільки точками простору X можуть бути не лише числа.

Звернемо увагу на те, що в Означенні 1 елементи множини X можуть мати будь-яку природу. Евклід описував точку наступним чином: «Точка є те, що не має частин» [13, с. 11], у Герона – «точка те, що не має величини (протяжності)» [там само, с. 224]. Це узгоджується з описом точки у шкільнихпідручниках: «Точка найпростіша геометрична фігура. Це єдина фігура, яку неможливо розбити на частини» [14, с. 12]; «Точка не має ані довжини, ані ширини, її форму ми не можемо визначити» [15, с. 15].Інколи точку описують за допомогою графічного її представлення: «Якщо на аркуш паперу натиснути добре загостреним олівцем, то залишиться слід, який дає уявлення про точку» [16, с. 9]; «Уявлення про точку можна отримати, якщо на аркуш паперу натиснути добре загостреним олівцем або на шкільну дошку – добре загостреним шматком крейди»[17, с. 6], або простіше: «Найпростіша геометрична фігура –точка» [18, с. 6].

На наш погляд, поняття точки можна було б описати більш детальніше, вказавши, що точкою можна вважати будь-який об'єкт у тих випадках, коли не використовуються його структура, форма, властивості і т.п. Наприклад, у випадку коли потрібно порахувати кількість будівель на певній території та встановити відстані між ними, не враховуючи при цьому розміри, форму, кількість поверхів та приміщень цих будівель, хоча кожна з будівель має ці характеристики й вони можуть використовуватись надалі. При знайомстві з поняттям множини слід наголосити, що це сукупність об'єктів (елементів) об'єднаних між собою за певною ознакою: множина *учнів одного класу*, множина *парних чисел* і т. п. Усі елементи (точки) множини рівноправні між собою, однак при операціях з ними необхідно перевіряти точки на виконання ознаки, за якою вони належать до множини, а також можна використовувати цю ознаку при операціях з точками множини. Таке поняття точки дещо ширше від поняття точки у геометрії Евкліда, однак воно точніше відбиває сучасний погляд на точку, як елемент множини. Запропонований опис точки повністю узгоджується з Означенням 1, і готує учнів до узагальненого сприйняття понять точки та відстані між точками у конкретних метричних просторах.

Перше знайомство з поняттям відстані між двома точками на рівні означення відбувається у сьомому класіпри знайомстві з основними геометричними поняттями: «Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB. Якщо точки Aі B збігаються, то вважають, що відстань між ними дорівнює нулю» [14, с. 17]; «Відстань між двома точками – це довжина відрізка з кінцями в цих точках» [15, с. 18]; «Довжину відрізка AB називають також відстанню між точками A і B» [16, с. 17].На цьому етапі вивчення математики, на наш погляд, ще рано говорити про інші означення відстані між точками, хоча можна звернути увагу учнів на те, що при русі по місту найменша відстань, яку вони повинні подолати між двома об'єктами, не завжди вимірюється довжиною відрізка що з'єднує ці об'єкти, а може її перевищувати. Навіть більше, таких шляхів (геодезичних ліній) може бути декілька. Це може стати першим прикладом неоднозначності (відносності) поняття відстані між двома точками, крім того, це допоможе підготувати учнів до сприйняття у подальшому нерівності трикутника (умова 3) Означення 1). З цією нерівністю учні знайомляться теж у 7 класі: «Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін...» [14, с. 113; 15, с. 109; 16, с. 74; 17, с. 115; 18, с. 108-109].

У зв'язку з нерівністю трикутника, як правило, робиться висновок про характеристичну властивість трьох точок, що належать одній прямій, та вводиться поняття «точка B міститься між точками A і C», що є ознакою «прямолінійного розміщення» [6, с. 527] точок A, B, C: «якщо для трьох точок A, B і C виконується рівність $AB = AC + CB$, то точка C є внутрішньою точкою відрізка AB» [14, с. 114]; «Якщо для трьох точок A, B, C виконується рівність $AB + BC = AC$, то ці точки лежать на одній прямій і точка B міститься між точками A і C» [15, с. 109]; «...якщо точка C лежить між точками A і B..., то правильні такі співвідношення: $AB = BC + CA$, $BC < CA + AB$,$CA < AB + BC$» [18, с. 109]. Ці факти повністю узгоджуються з аксіомами розміщення, запропонованими В.Ф. Каганом при побудові теорії прямої лінії [5, с. 260].

Цілеспрямоване і більш детальне знайомство учнів з елементами метричної геометрії слід розпочати, на наш погляд, у дев'ятому класі. У курсі геометрії дев'ятого класу вивчається такий базовий для елементів метричної геометрії матеріал, як елементи тригонометрії, теорема косинусів, теорема синусів, нерівність трикутника, розв'язування трикутників, декартові координати на площині, скалярний добуток векторів.Крім того, паралельне

вивчення у курсі алгебри властивостей функцій дає можливість розпочати вивчення конкретних метричних просторів, наприклад, простору лінійних (або квадратичних) функцій, означених на відрізку. Досвідчений вчитель, відповідно до наявного часу на вивчення математики, легко зможе поділити окремі факти з метричної геометрії на ті, що можна вивчати у класі, і на ті, що слід вивчати у позаурочний час.

Матеріал з метричної геометрії може значно збагатити палітру геометричних та алгебраїчних задач, що пропонуються учням для самостійного опрацювання. Ще ж і надто, учні, користуючись відомостями з геометрії Евкліда, самі можуть формулювати та перевіряти достовірність аналогічних фактів у інших метричних просторах, будувати в них фігури, що є аналогами відповідних фігур у геометрії Евкліда та встановлювати їхні властивості. Цей процес можна порівняти з конструктором, у якому з окремих частин можна зібрати цілий об'єкт. Якнайкраще це характеризують слова відомого угорського математика, одного з перших творців неевклідової геометрії, Яноша Больяі (1802-1860): «Я створив дивний новий світ з нічого!»

Тепер перейдемо до фактичного матеріалу, який пропонується для вивчення. Спочатку сформулюємо дещо спрощене,але більш об'ємне,означення метричного простору та відстані між його точками. Це означення використовує поняття множини та її елементів, що сформовані у восьмому класі [19, с. 24].

Означення 2. *Непорожню множину X елементів якої завгодно природи будемо називати метричним простором, якщо кожній парі $(x;y)$ різних елементів цієї множини за певним правилом ρ поставлене у відповідність єдине додатне число $\rho(x;y)$, що називається відстанню між елементами x і y, і яке задовольняє умовам:*

1) для будь-яких двох різних елементів x і yвідстань між елементами x і y дорівнює відстані між елементами y і x, тобто виконується рівність $\rho(x;y) = \rho(y;x)$ (умова симетрії),

2) для будь-яких трьох різних елементів x, y, zвідстань між елементами x і y не більша ніж сума відстаней між елементамиx і z та між елементами z і y, тобто виконується нерівність

$\rho(x;y) \le \rho(x;z) + \rho(z;y)$(нерівність трикутника).

При виконанні умов Означення 2 елементи множини будемо називати точками метричного простору, правило ρ – метрикою простору. Метричний простір X з метрикою ρ будемо позначати (X,ρ).

Слід звернути увагу на те, що це означення нагадує означення функції, яке подається у курсі алгебри у дев'ятому класі [20, с. 11]. Однак, є декілька суттєвих відмінностей: елементами множини можуть бути не лише числа, число ставиться у відповідність двом елементам множини і це число повинно бути лише додатнім, потрібно перевіряти виконання умови симетрії та нерівність трикутника для усіх пар елементів множини.

Означення 2 метричного простору,у такій формі як воно записане, слід подавати у старших класах, а у дев'ятому класі його доцільно подати (як і означення функції) у описовій формі, використовуючи достатню кількість прикладів. При цьому, можна розділити формулювання умов 1) і 2) означення на словесну і аналітичну форми.

Укажемо декілька найпростіших прикладів метричних просторів, доступних для легкого засвоєння учнями.

Приклад 1. Найпростішим прикладом метричного простору є множина усіх точок числової осі. Такий простір називають одновимірним арифметичним евклідовим простором, і позначають R^1. Як відомо [21, с. 82], відстань між двома точками x і y числової осі знаходять як абсолютну величину (модуль) різниці відповідних чисел x і y: $\rho(x;y) = |x-y|$.

Це значення завжди додатне для різних значень x і y, що слідує із означення модуля числа. Умова симетрії слідує з рівностей:

$\rho(x;y) = |x-y| = |-(x-y)| = |y-x| = \rho(y;x)$.

Виконання нерівності трикутника перевіряти завжди найважче, оскільки це пов'язано з доведенням нерівностей – достатньо складною задачею. Для цього випадку нерівність трикутника має вигляд:

$\rho(x;y) = |x-y| \le |x-z+z-y| = \rho(x;z) + \rho(z;y)$ (1)

При її доведенні використовується нерівність для модуля суми двох чисел [22, с. 60]:

$|a+b| \le |a| + |b|$ (2).

Якщо у нерівності (2) покласти: $a = x - z$, $b = z - y$, то отримуємо нерівність (1).

У випадку, коли нерівність (2) не розглядалась, то її легко довести користуючись властивостями нерівностей і означенням модуля числа. Дійсно, якщо додати почленно дві очевидні подвійні нерівності: $-|a| \le a \le |a|$ і $-|b| \le b \le |b|$, то в результаті отримаємо подвійну нерівність: $-|a| - |b| \le a + b \le |a| + |b|$, або подвійну нерівність: $-(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b|$, яка рівносильна нерівності (2).

Оскільки виконані усі умови Означення 2, то розглянутий простір R^1 є метричним.

Таке доведення нерівності (1) може бути проведене у дев'ятому класі. Однак, користуючись числовою прямою, можна спробувати довести її навіть у сьомому класі. Для цього доведеться розглянути шість різних можливих випадків розміщення точок x, y, z на числовій осі. Велику кількість аналітичних перетворень можна компенсувати графічним зображенням точок на числовій осі, це полегшить розуміння таких перетворень.

1. Нехай, наприклад, точки x, y, z розміщені на числовій прямій у наступному порядку: $x < z < y$ (рис. 1).

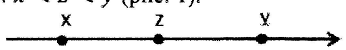

Рис. 1.

Тоді матимемо:

$\rho(x;y) = |x-y| = -(x-y)$; $\rho(x;z) = |x-z| = -(x-z)$;

$\rho(z;y) = |z-y| = -(z-y)$.

Додавши почленно останні дві рівності будемо мати:

$\rho(x;z) + \rho(z;y) = -(x-z) - (z-y) = -x + z - z + y =$

$= -(x-y) = \rho(x;y)$.

2. Нехай точки x, y, z розміщені на числовій прямій у наступному порядку: $x < y < z$ (рис. 2).

Рис. 2.

Тоді матимемо:

$\rho(x;y) = |x-y| = -(x-y)$; $\rho(x;z) = |x-z| = -(x-z)$;

$\rho(z;y) = |z-y| = z-y$.

Додавши почленно останні дві рівності будемо мати:

$\rho(x;z) + \rho(z;y) = -(x-z) + (z-y) = -x + z + z - y =$

$= -x + y + 2z - 2y = -(x-y) + 2(z-y) = \rho(x;y) + 2(z-y) >$

$\rho(x;y)$.

3. Нехай точки x, y, z розміщені на числовій прямій у наступному порядку: $y < x < z$ (рис. 3).

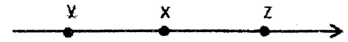

Рис. 3.

Тоді матимемо:

$\rho(x;y) = |x-y| = x-y$; $\rho(x;z) = |x-z| = -(x-z)$;

$\rho(z;y) = |z-y| = z-y$.

Додавши почленно останні дві рівності будемо мати:

$\rho(x;z) + \rho(z;y) = -(x-z) + (z-y) = -x + z + z - y =$

$= x - y - 2x + 2z = (x-y) + 2(z-x) = \rho(x;y) + 2(z-x) > \rho(x;y)$.

4. Нехай точки x, y, z розміщені на числовій прямій у наступному порядку: $y < z < x$ (рис. 4).

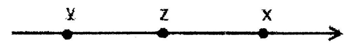

Рис. 4.

Тоді матимемо:

$\rho(x;y) = |x-y| = x-y$; $\rho(x;z) = |x-z| = x-z$;

$\rho(z;y) = |z-y| = z-y$.

Додавши почленно останні дві рівності будемо мати:

$\rho(x;z) + \rho(z;y) = (x-z) + (z-y) = x - z + z - y = x - y = \rho(x;y)$.

5. Нехай точки x, y, z розміщені на числовій прямій у наступному порядку: $z < x < y$ (рис. 5).

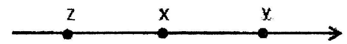

Рис. 5.

Тоді матимемо:

$\rho(x;y) = |x-y| = -(x-y)$; $\rho(x;z) = |x-z| = x-z$;

$\rho(z;y) = |z-y| = -(z-y)$.

Додавши почленно останні дві рівності будемо мати:

$\rho(x;z) + \rho(z;y) = (x-z) - (z-y) = x - z - z + y =$

$= -x + y + 2x - 2z = -(x - y) + 2(x - z) = \rho(x;y) + 2(x - z) > \rho(x;y)$.

6. Нехай точки x, y, z розміщені на числовій прямій у наступному порядку: $z < y < x$ (рис. 6).

Рис. 6.

Тоді матимемо:

$$\rho(x;y) = |x - y| = x - y;\ \rho(x;z) = |x - z| = x - z;$$
$$\rho(z;y) = |z - y| = -(z - y).$$

Додавши почленно останні дві рівності будемо мати:

$$\rho(x;z) + \rho(z;y) = (x - z) - (z - y) = x - z - z + y =$$
$$= x - y + 2y - 2z = (x - y) + 2(y - z) = \rho(x;y) + 2(y - z) > \rho(x;y).$$

Приклад 2. Прикладом метричного простору є множина точок координатної площини, яка детально вивчається у курсі геометрії для дев'ятого класу [21, с. 81; 23, с. 8; 24, с. 6; 25, с. 6; 26, с. 9].Такий простір називають двовимірним арифметичним евклідовим простором, і позначають R^2.

За відстань між двома точками $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ простору R^2 беруть довжину відрізка M_1M_2, що знаходиться за формулою [21, с. 82; 23, с. 8; 24, с. 24; 25, с. 32; 26, с. 12]:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Для двох різних точок координатної площини ця відстань додатна і має властивість симетрії:

$$\rho(M_1;M_2) = \sqrt{x_1 - x_2{}^2 + y_1 - y_2{}^2} =$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \rho(M_2;M_1).$$

Доведення нерівності трикутника дещо складніше. Однак, воно полегшується при використанні нерівності Коші-Буняковського [20, с. 209]. Для випадку довільних чотирьох значень: a_1, a_2, b_1, b_2 вона має вигляд: $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$. Цю нерівність легко довести виконавши піднесення до квадрата у її лівій частині і перемноживши вирази у дужках у правій частині нерівності. Оскільки обидві частини нерівності невід'ємні, то добувши з них квадратний корінь отримаємо нерівність:

$$a_1b_1 + a_2b_2 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2\ \ b_1^2 + b_2^2} \ (3).$$

Нерівність трикутника для трьох точок $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M_1(x_1;y_1)$ має вигляд:

$$\rho(M_1;M_2) = \sqrt{x_1 - x_2{}^2 + y_1 - y_2{}^2} \le$$
$$\le \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} =$$
$$= \rho(M_1;M_3) + \rho(M_3;M_2).$$

Позначимо: $x_1 - x_3 = a_1$, $x_3 - x_2 = a_2$, $y_1 - y_3 = b_1$, $y_3 - y_2 = b_2$. Ці значення підставимо у нерівність трикутника:

$$\sqrt{a_1 + a_2{}^2 + b_1 + b_2{}^2} \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Оскільки обидві частини нерівності невід'ємні, то при піднесенні їх до квадрата отримаємо тотожну нерівність:

$$(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \le a_1^2 + a_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} + b_1^2 + b_2^2 \ (4).$$

Перетворимо ліву частину нерівності (4) і використаємо нерівність (3):

$$(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 + b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2 =$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1a_2 + b_1b_2) + b_1^2 + b_2^2 \le$$
$$\le a_1^2 + a_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} + b_1^2 + b_2^2.$$

Отримали нерівність (4). От же, нерівність трикутника виконується.

Оскільки виконані усі умови Означення 2, то розглянутий простір R^2 є метричним.

На координатній площині можна вибрати іншу метрику і таким чином точки площини будуть утворювати інший метричний простір, відмінний від простору R^2.

Приклад 3. Візьмемо у якості відстані між точками $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ координатної площини число: $\rho(M_1;M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Це число для двох різних точок є додатнім. Виконання умови симетрії очевидне внаслідок властивостей модуля числа. Нерівність трикутника для трьох точок $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M_1(x_1;y_1)$ має вигляд:

$$\rho(M_1;M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \le$$
$$\le (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) + (|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|) =$$
$$= \rho(M_1;M_3) + \rho(M_3;M_2).$$

Виконання цієї нерівності очевидне, оскільки кожен з модулів у лівій частині нерівності не перевищує суми модулівсвоїх доданків.

Виконані усімови Означення 2, отже розглянутий простір є метричним. Цей простір позначають R_1^2.

Простір R_1^2 цікавий тим, що його суть легко пояснити навіть учням сьомого класу. За цією метрикою на координатній площині найменшу відстань між точкамиM_1 і M_2можна подолати йдучи паралельно координатним осям (по катетах прямокутного трикутника, для якого відрізок M_1M_2 є гіпотенузою). Подібна ситуація виникає у місті з прямокутним розташуванням вулиць. Це один із прикладів, де поняття відстані між точками не збігається з класичним, як довжини відрізка, що з'єднує ці точки.

Приклад 4. Візьмемо у якості відстані між точками $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ координатної площини число: $\rho(M_1;M_2) = max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}$. Це число для двох різних точок є додатнім. Виконання умови симетрії очевидне внаслідок властивостей модуля числа. Нерівність трикутника для трьох точок $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M_1(x_1;y_1)$ має вигляд:

$$\rho(M_1;M_2) = max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\} \le max\{|x_1 - x_3|; |y_1 - y_3|\} +$$
$$+ max\{|x_3 - x_2|; |y_3 - y_2|\} = \rho(M_1;M_3) + \rho(M_3;M_2).$$

Використовуючи нерівність для модуля суми двох чисел отримуємо:

$$|x_1 - x_2| = |(x_1 - x_3) + (x_3 - x_2)| \le |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \le$$
$$\le max\{|x_1 - x_3|; |y_1 - y_3|\} + max\{|x_3 - x_2|; |y_3 - y_2|\}.$$

Аналогічно отримуємо нерівність:

$$|y_1 - y_2| = |(y_1 - y_3) + (y_3 - y_2)| \le |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \le$$
$$\le max\{|x_1 - x_3|; |y_1 - y_3|\} + max\{|x_3 - x_2|; |y_3 - y_2|\}.$$

Порівнюючи обидві отримані нерівності, остаточно отримуємо:

$$\rho(M_1;M_2) = max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\} \le$$
$$\le max\{|x_1 - x_3|; |y_1 - y_3|\} + max\{|x_3 - x_2|; |y_3 - y_2|\} =$$

$= \rho(M_1; M_3) + \rho(M_3; M_2)$.

Таким чином, виконані усі умови Означення 2, тому розглянутий простір є метричним, його позначають R_0^2. Інколи такий простір є зручнішим ніж простір R^2.

Простір R_0^2 теж може бути прикладом простору, у якому відстань між точками не завжди є довжиною відрізка, що з'єднує ці точки.

Приклад 5. Розглянемо у просторі R_0^2 чотири точки: $M_1(0;1)$, $M_2(0;-1)$, $M_3(-1;0)$, $M_4(1;0)$. Знайдемо за метрикою простору відстані між цими точками: $\rho(M_1; M_2) = 2$, $\rho(M_1; M_3) = 1, \rho(M_1; M_4) = 1, \rho(M_2; M_3) = 1, \rho(M_2; M_4) = 1, \rho(M_3; M_4) = 2$.

Слід звернути увагу на рівності, які при цьому виконуються:

$\rho(M_1; M_2) = \rho(M_1; M_3) + \rho(M_2; M_3) = 1 + 1 = 2$;

$\rho(M_1; M_2) = \rho(M_1; M_4) + \rho(M_2; M_4) = 1 + 1 = 2$;

$\rho(M_3; M_4) = \rho(M_1; M_3) + \rho(M_1; M_4) = 1 + 1 = 2$;

$\rho(M_3; M_4) = \rho(M_2; M_3) + \rho(M_2; M_4) = 1 + 1 = 2$.

Геометрично, на координатній площині, точки M_1, M_2, M_3, M_4 є вершинами квадрата, довжина сторони якого дорівнює $\sqrt{2}$. У геометрії Евкліда довжина діагоналі квадрата менша за суму довжин двох його сторін, а у цьому прикладі вони виявляються рівними. Навіть більше, з кожної із отриманих чотирьох рівностей у геометрії Евкліда слідує, що усі три точки, які беруть участь у рівності, повинні лежати на одній прямій.

Цей приклад наочно демонструє відмінність понять відстані між точками однієї і тієї ж множини при різному їх означенні. Крім того, цей приклад вказує на неоднозначність (відносність) поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору.

Поняття прямої лінії є одним із основних (первісних) понять у класичній геометрії Евкліда (приблизно 365 – 300 роки до нашої ери). У своїх «Началах» він означав пряму лінію як лінію «…що рівно розміщена по відношенню до точок на ній». Саму ж лінію він означав як «довжину без ширини» [13, с. 11]. Інші давньогрецькі вчені – Архімед (приблизно 287 – 212 роки до нашої ери) та Герон Александрійський (приблизно I-е століття нашої ери) характеризували пряму лінію, як найкоротшу з усіх ліній, що мають однакові кінці [там само, с. 223]. Існували інші описи прямої лінії. Одне з них приписують давньогрецькому філософу Платону (427 – 347 роки до нашої ери). Пряму лінію він розглядав як лінію, що не змінює свого положення при обертальному русі із закріпленими двома кінцями. Такого ж опису дотримувався грецький філософ Прокл Діадох (приблизно 410 – 485 роки нашої ери), а також німецький математик Лейбніц (01.07.1646 – 14.11.1716), вважаючи, що пряма в цілому має ті ж властивості що і будь-яка її частина. У XIX столітті інколи наводилось означення прямої лінії французького математика Луї Бертрана (1731 – 1812). Він характеризував пряму лінію як таку, що розділяє площину на дві частини, що мають абсолютно однакові властивості стосовно цієї прямої [13, с. 226]. Д. Гільберт у своїй аксіоматиці, на відміну від Евкліда, не давав конкретних означень основних геометричних понять: точки, прямої, площини, а лише описував їх властивості через співвідношення між ними [27, с. 3-4].

Розглянемо більш детально поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору. Воно є частинним випадком Означення 2 у випадку коли нерівність трикутника перетворюється у рівність.

Означення 3. Будемо казати, що точки x, y, z метричного простору (X, ρ) розміщені прямолінійно у цьому просторі, якщо виконується рівність

$\rho(x; y) = \rho(x; z) + \rho(z; y)$ (5). [6, с. 527]).

При виконанні рівності (5) природно казати, що точка z «лежить між» точками x і y, або називати її «внутрішньою» для точок x,y,z. Одночасно, про точку x (точку y) можна казати, що вона «лежить поза» точками y і z (точками x і z), або називати її «крайньою» для точок x,y,z (порівняйте [14, с. 16]).

Можна звернути увагу учнів на те, що рівність (5) повинна виконуватись для деяких двох точок із трьох заданих (наприклад, для точок x і y). Для інших пар точок при цьому буде виконуватись рівність $\rho(x; z) = \rho(x; y) - \rho(z; y)$ або рівність $\rho(z; y) = \rho(x; y) - \rho(x; z)$, які теж можуть указувати на прямолінійне розміщення точок x,y,z.

Можна дати означення прямолінійного розміщення множини точок метричного простору. Для цього слід вимагати прямолінійного розміщення будь-яких трьох точок цієї множини.

Означення 4. Будемо казати, що множина точок метричного простору прямолінійно розміщена, якщо будь-які три точки цієї множини прямолінійно розміщені(див. [6, с. 527]).

Означення 3 і 4 дають можливість вивчати окремі властивості прямолінійності без використання означення прямої лінії та без введення аксіом для прямої лінії. Їх можна використати для побудови прямолінійно розміщених множин точок довільного метричного простору. Властивості таких множин значною мірою будуть залежати від способу задання метрики у відповідному просторі.

Тепер розглянемо декілька прикладів прямолінійного розміщення точок у різних метричних просторах.

Приклад 6. Найпростішим прикладом прямолінійно розміщеної множини є простір R^1. Дійсно, з властивостей множини дійсних (натуральних, цілих, раціональних) слідує, що з трьох різних чисел x,y,z одне з них буде найменшим, друге – найбільшим, а третє – проміжним. Нехай, наприклад, виконується подвійна нерівність: $x < z < y$. Як і у Прикладі 1, за метрикою простору R^1, знайдемо відстані: $\rho(x; y) = |x - y| = y - x$, $\rho(x; z) = |x - z| = z - x$, $\rho(z; y) = |z - y| = y - z$. Оскільки виконується рівність: $\rho(x; y) = y - x = z - x + y - z = \rho(x; z) + \rho(z; y)$ то за Означенням 3 точки x,y,z прямолінійно розміщені у просторі R^1. Ці точки були довільні, тому виконується Означення 4 й увесь простір R^1 є прямолінійно розміщеним.

Приклад 7. Наведемо більш складніший приклад прямолінійно розміщеної множини. Для цього розглянемо множину лінійних функцій $y = kx$, означених на відрізку $x \in [0; 1]$. Графіками цих функцій є прямі лінії, що проходять через початок координат. На відрізку $[0; 1]$ графіками будуть відрізки цих прямих. Досить ґрунтовно з властивостями функцій учні знайомляться у дев'ятому класі [20, с. 24; 22, с. 65; 28, с. 72; 29, с. 68; 30, с. 73]. Однак, з окремими елементарними функціями та їх найпростішими властивостями, зокрема з лінійною функцією, знайомство розпочинається ще із сьомого класу [31, с. 137; 32, с. 139; 33, с. 103; 34, с. 96; 35, с. 130; 36, с. 141]. Зауважимо, що дві функції,означені на деякому проміжку, ми будемо вважати різними, якщо хоча б в одній точці цього проміжку вони мають різні значення. При умові неперервності цих функційна проміжку, вони матимуть різні значення на деякому проміжку.

Уведемо метрику у цій множині, вибравши за відстань між двома різними її елементами $y = k_1 x$ і $y = k_2 x$ число: $\rho(k_1 x; k_2 x) = max_{x \in [0;1]} |k_1 x - k_2 x|$. Покажемо, що при такому виборі відстані між елементами множина функцій $y = kx$ є метричним простором. Надалі, для зручності, будемо користуватись позначеннями: $k_i x = y_i$, $\rho(k_i x; k_j x) = \rho(y_i; y_j) = \rho_{ij}$ $(i, j = 1,2,3, \dots)$.

Для двох різних функцій відстаньρ_{12} є додатною внаслідок означення модуля числа. Якщо припустити, що ця відстань дорівнює нулю, то у кожній точці відрізка $[0; 1]$ значення обох функцій повинні бути однаковими, тобто функції повинніспівпадати.

Із властивостей модуля числа слідує властивість симетрії відстані: $\rho(y_1; y_2) = max_{x \in [0;1]} |k_1 x - k_2 x| = max_{x \in [0;1]} |k_2 x - k_1 x| = \rho(y_2; y_1)$.

Розглянемо на відрізку $[0; 1]$ три функції: $y_1 = k_1 x$, $y_2 = k_2 x$, $y_3 = k_3 x$, де k_1, k_2, k_3 – різні числа. Нехай, наприклад, виконуються нерівності: $k_1 < k_2 < k_3$. Знайдемо відстані між функціями:

$$\rho_{12} = max_{x \in [0;1]} |k_1 x - k_2 x| = max_{x \in [0;1]} |k_1 - k_2||x| = k_2 - k_1,$$
$$\rho_{13} = max_{x \in [0;1]} |k_1 x - k_3 x| = max_{x \in [0;1]} |k_1 - k_3||x| = k_3 - k_1,$$
$$\rho_{23} = max_{x \in [0;1]} |k_2 x - k_3 x| = max_{x \in [0;1]} |k_2 - k_3||x| = k_3 - k_2$$

(рис. 7).

Із отриманих значень слідує справедливість рівності:

$$\rho_{13} = k_3 - k_1 = (k_2 - k_1) + (k_3 - k_2) = \rho_{12} + \rho_{23}. \quad (6)$$

Отже, нерівність трикутника для точок y_1, y_2, y_3 виконується. Таким чином, вибрана відстань є метрикою, а множина функцій $y = kx$, означених на відрізку $x \in [0; 1]$, є метричним простором.

Оскільки для точок y_1, y_2, y_3виконується рівність (5), а точки ми вибрали довільно, то з рівності (6), за Означенням 4, слідує прямолінійне розміщення усієї множини функцій.

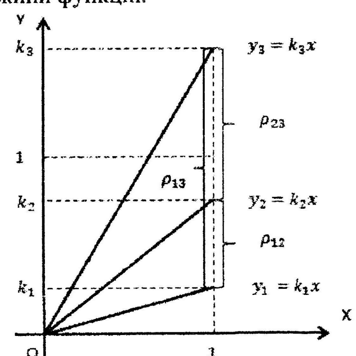

Рис. 7. Прямолінійно розміщені функції $y_1 = k_1 x$, $y_2 = k_2 x$, $y_3 = k_3 x$.

Приклад 8. Простір R^1, розглянутий у Прикладі 1, а також простір R_1^2, розглянутий у Прикладі 3, є частинними випадками більш загального метричного простору – R_1^n. Цей простір складається з упорядкованих груп n дійсних чисел: $x(x_1, \dots, x_n)$. Відстань між двома точками $x(x_1, \dots, x_n)$ і $y(y_1, \dots, y_n)$ простору знаходиться за формулою:

$$\rho(x; y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|. \quad (7)$$

Виконання усіх аксіом відстані для такого задання метрики проводиться аналогічно, як і у Прикладі 3.

Розглянемо множину P точок простору R_1^n таку, що для довільних трьох точок $x(x_1, \dots, x_n)$, $y(y_1, \dots, y_n)$ і $z(z_1, \dots, z_n)$ виконуються нерівності: $x_k \le y_k \le z_k$для усіх значень$k = 1,2, \dots, n$. Така множина є прямолінійно розміщеною у просторі R_1^n [9, с. 60]. Дійсно, використовуючи рівність (7) будемо мати:

$$\rho(x; z) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k| = \sum_{k=1}^{n} (z_k - x_k) = \sum_{k=1}^{n} ((z_k - y_k) + (y_k - x_k)) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k) + \sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k) = \sum_{k=1}^{n} |z_k - y_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k| =$$
$$= \rho(z; y) + \rho(y; x) = \rho(x; y) + \rho(y; z).$$

Отже, для точок x, y, z виконується рівність (5), тому за Означенням 3 вони прямолінійно розміщені у просторі R_1^n. Оскільки ці точки ми взяли довільно з множини P, то за Означенням 4 ця множина прямолінійно розміщена у просторі R_1^n.

Прямолінійне розміщення точок у Прикладах 6–8 може інтуїтивно асоціюватись з прямолінійністю розміщення точок у геометрії Евкліда, однак, це не завжди вірно. Наступний приклад демонструє цю своєрідність прямолінійного розміщення точок у метричному просторі.

Приклад 9. У Прикладі 5 ми встановили, що для будь-яких трьох точок, із розглянутих чотирьох M_1, M_2, M_3, M_4 у цьому прикладі, виконується рівність (5), і тому кожні три точки за Означенням 3 розміщені прямолінійно, а отже, за Означенням 4, усі чотири точки розміщені прямолінійно у просторі R_0^2. Цей результат дещо відрізняється від інтуїтивного сприйняття поняття прямої лінії у геометрії Евкліда, оскільки ці чотири точки, як відзначалось вище, на координатній площині є вершинами квадрата (рис. 8).

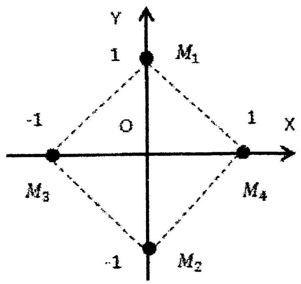

Рис. 8. Прямолінійно розміщеніу просторі R_0^2точкиM_1, M_2, M_3, M_4.

Ми розглянули декілька основних понять метричної геометрії та декілька найпростіших метричних просторів, з якими можна познайомити учнів середніх класів. Учитель може на власний розсуд вибрати рівень обґрунтованості результатів – інтуїтивний, графічний або строгий аналітичний. У старших класах можна розглянути більш складніші метричні простори, що потребують понять неперервності, диференційованості та інтегрованості функції.

3.1.2. Формування понять відстані та прямолінійності у 10-11 класах засобами метричної геометрії.

Можливості використання елементів метричної геометрії у старших класах значно зростають. Це зумовлено більш детальним та ґрунтовним вивченням властивостей функцій, зокрема на основі диференціального та інтегрального числення. Наприклад, знайомство з властивостями функцій неперервних на відрізку дає можливість розглянути відповідний метричний простір. Слід зазначити, що у старших класах подібний матеріал доцільно розглядати лише при умові вивчення математики на поглибленому рівні.

Після знайомства з неперервними функціями, їх властивостями та другою теоремою Вейєрштрасса [37, с. 318]про існування найбільшого та найменшого значень функції неперервної на відрізку, можна розглянути метричний простір $C_{[a;b]}$ – множину функцій неперервних на відрізку $[a;b]$, для яких відстань між функціями $f(x)$і $g(x)$ множини визначається за формулою:

$\rho(f;g) = max_{x\in[a;b]}|f(x) - g(x)|$ (8).

При такому виборі метрики множина функцій стає метричним простором, оскільки виконуються усі аксіоми відстані (див. Приклад 7). По перше, права частина рівності завжди невід'ємна. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ хоча б у одній точці відрізка $[a;b]$ мають різні значення (тобто, ці функції різні), то права частина рівності (8) додатна. Властивість симетрії виконується внаслідок властивості модуля числа: $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$.Виконання нерівності трикутника слідує з очевидних нерівностей:

$$|f(x) - g(x)| = |(f(x) - h(x)) + (h(x) - f(x))| \le$$
$$\le |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \le$$

$$\le max_{x\in[a;b]}(|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|) \le$$
$$\le max_{x\in[a;b]}|f(x) - h(x)| + max_{x\in[a;b]}|h(x) - g(x)| = \rho(f;h) + \rho(h;g).$$

Так як ці нерівності виконуються для довільного значення x з відрізка $[a;b]$, то остаточно отримуємо нерівність:

$$\rho(f;g) = max_{x\in[a;b]}|f(x) - g(x)| \le$$
$$\le max_{x\in[a;b]}|f(x) - h(x)| + max_{x\in[a;b]}|h(x) - g(x)| = \rho(f;h) + \rho(h;g)$$

Слід зазначити, що усі максимуми, які входять до складу нерівностей, існують внаслідок неперервності на відрізку $[a;b]$відповідних функцій [37, с. 305-308].

Оскільки усі основні елементарні функції що вивчаються у шкільному курсі математики є неперервними у своїх областях визначення, то метрику (8) можна використовувати, як для вивчення однойменних функцій (лінійних, квадратичних, степеневих, тригонометричних), так і для встановлення метричних співвідношень між різнойменними функціями. При цьому можна використовувати властивості монотонних функцій [20, с. 35]: «*якщо функція f зростає на відрізку* $[a;b]$, *то* $min_{x\in[a;b]}f(x) = f(a)$, $max_{x\in[a;b]}f(x) = f(b)$, *якщо функція f спадає на відрізку* $[a;b]$, *то* $min_{x\in[a;b]}f(x) = f\ b$, $max_{x\in[a;b]}f(x) = f\ a$ ». Ці дві властивості можна об'єднати у одну і сформулювати більш загально: «*монотонна на відрізку функція приймає свої найменше і найбільше значення на кінцях цього відрізка*». Таке формулювання може дещо полегшити пошук екстремальних значень функції на відрізку.

Наведемо приклад знаходження відстані між двома лінійними функціями у просторі $C_{[a;b]}$.

Приклад 10. Розглянемо дві точки y_1 і y_2 простору $C_{[a;b]}$, що є лінійними функціями: $y_1 = k_1x + b_1$ і $y_2 = k_2x + b_2$. Знайдемо відстань між цими точками за метрикою простору $C_{[a;b]}$.У Прикладі 7 ми вже розглядали окремий випадок лінійних функцій: $y = kx$. Внаслідок відсутності вільного члена у правій частині рівності відстань між такими функціями знаходилась достатньо легко (див. Рис. 7). У нашому випадку розглянемо функцію:

$$y = |y_1 - y_2| = |(k_1x + b_1) - (k_2x + b_2)| = |(k_1 - k_2)x + (b_1 - b_2)|.$$

Можливі наступні випадки взаємного розміщення графіків функцій $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$.

Нехай виконуються рівності: $k_1 = k_2 = 0$. У цьому випадку графіки обох функцій паралельні осі OX. Тоді за рівністю (8) матимемо:

$$\rho(y_1;y_2) = max_{x\in[a;b]}|y_1 - y_2| = max_{x\in[a;b]}|(k_1 - k_2)x + (b_1 - b_2)| =$$
$$= max_{x\in[a;b]}|(k_1 - k_2)x + (b_1 - b_2)| = max_{x\in[a;b]}|b_1 - b_2| = |b_1 - b_2|.$$

Нагадаємо, що ми розглядаємо різні точки простору, отже $b_1 \ne b_2$ (рис. 9).

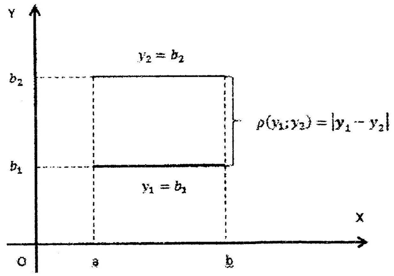

Рис. 9. Відстань між функціями y_1 і y_2 при $k_1 = k_2 = 0$.

Нехай тепер хоча б одне з чисел k_1 або k_2 відмінне від нуля, наприклад, $k_1 \neq 0$. Припустимо, що графіки функцій y_1 і y_2 на відрізку $[a;b]$ не перетинаються. У цьому випадку один з них розміщений вище ніж інший у кожній точці відрізка. Нехай, наприклад, виконується нерівність $y_1 > y_2$ у кожній точці відрізка $[a;b]$, тоді матимемо:

$$y = |y_1 - y_2| = y_1 - y_2 = k_1 - k_2\ x + (b_1 - b_2).$$

Оскільки функція $y = (k_1 - k_2)x + (b_1 - b_2)$ є лінійною, а отже монотонною, то своїх найменшого і найбільшого значень вона набуває на кінцях відрізка. Тому матимемо:

$$\rho(y_1;y_2) = \max_{x\in[a;b]}|y_1 - y_2| = \max_{x\in[a;b]}((k_1 - k_2)x + (b_1 - b_2)) =$$
$$= \max\{(k_1 - k_2)a + (b_1 - b_2);\ (k_1 - k_2)b + (b_1 - b_2)\}.$$

Цей максимум може досягатись не лише на кінці відрізка. Зокрема, якщо виконується рівність $k_1 = k_2$, то максимум досягається у кожній точці відрізка $[a;b]$, у цьому випадку графіки функцій паралельні між собою.

На рисунку 10 зображено випадок, коли виконується, наприклад, рівність: $\rho(y_1;y_2) = (k_1 - k_2)b + (b_1 - b_2)$.

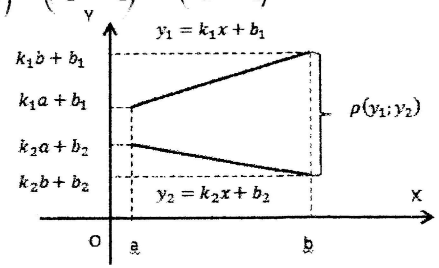

Рис. 10. Випадок, коли графіки функцій y_1 і y_2 не перетинаються.

Тепер розглянемо випадок, коли графіки обох функцій перетинаються. Це буде означати, щофункція $y = |(k_1 - k_2)x + (b_1 - b_2)|$ перетинає вісь OX (або дотикається до неї) у точці x_0відрізка $[a;b]$, $x_0 = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}$.Один із таких можливих випадків зображений на рисунку 11.

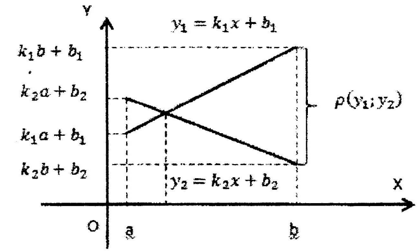

Рис. 11. Випадок, коли графіки функцій y_1 і y_2 перетинаються.

У цьому випадку функція $y = |(k_1 - k_2)x + (b_1 - b_2)|$ буде приймати невід'ємні значення на відрізку $[a;b]$, буде монотонною на кожному з відрізків $[a;x_0]$та$[x_0;b]$ і буде дорівнювати нулю у точці x_0. Отже, найбільше значення вона може прийняти лише на кінцях відрізка $[a;b]$ (рис. 12).

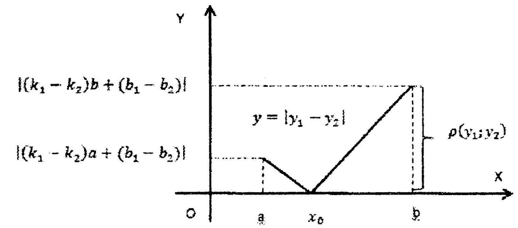

Рис. 12. Графік функції $y = |y_1 - y_2|$.

Оскільки ми розглянули усі можливі випадки взаємного розміщення обох функцій, то можна зробити висновок про те, що відстань між двома лінійними функціями за метрикою простору $C_{[a;b]}$ дорівнює більшій з абсолютних величин різниць значень обох функцій на кінцях відрізка $[a;b]$.

Зауважимо, що узагальнити Приклад 10 на випадок довільних двох монотонних, і навіть неперервних на відрізку функцій, не можна (рис. 13).

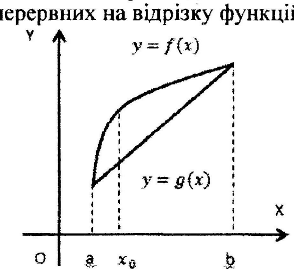

Рис. 13. Максимальне значення різниці функцій у внутрішній точці x_0.

Приклади 6-8 можуть навести на думку, що для прямолінійного розміщення точок метричного простору необхідна певна «монотонність» розміщення цих точок. Однак, це не завжди вірно.

Приклад 11. На відрізку $[0;1]$ розглянемо функції: $y_1 = x$, $y_2 = -x$, $y_3 = -x + 1$, $y_4 = x - 1$ (рис. 14).

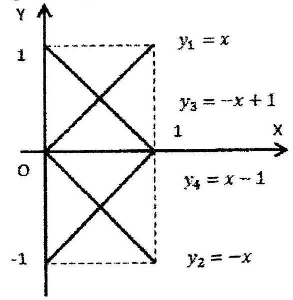

Рис. 14. Прямолінійно розміщені у просторі $C_{[a;b]}$ функції y_1, y_2, y_3, y_4.

З рисунка 14 видно, що графіки функцій y_1, y_2, y_3, y_4 важко назвати «монотонно» розміщеними. Покажемо, що у просторі $C_{[a;b]}$ ці функції прямолінійно розміщені. Для цього знайдемо за метрикою простору $C_{[a;b]}$ відстані між цими функціями (точками). За формулою (8) будемо мати:

$\rho_{12} = 2$; $\rho_{13} = 1$; $\rho_{14} = 1$; $\rho_{23} = 1$; $\rho_{24} = 1$; $\rho_{34} = 2$.

Оскільки виконується рівність: $\rho_{12} = 2 = 1 + 1 = \rho_{13} + \rho_{23}$, то точки y_1, y_2, y_3 розміщені прямолінійно у просторі $C_{[a;b]}$, причому, точка y_3 лежить між точками y_1 і y_2, тобто є внутрішньою для точок y_1, y_2, y_3. Аналогічно, з рівності $\rho_{12} = 2 = 1 + 1 = \rho_{14} + \rho_{24}$ слідує що точки y_1, y_2, y_4 теж розміщені прямолінійно і точка y_4 є внутрішньою для них.

З іншого боку, рівність $\rho_{34} = 2 = 1 + 1 = \rho_{13} + \rho_{14}$ свідчить про те, що точки y_1, y_3, y_4 розміщені прямолінійно, і точка y_1 лежить між точками y_3 і y_4. Крім того, з рівності $\rho_{34} = 2 = 1 + 1 = \rho_{23} + \rho_{24}$ отримуємо, що точки y_2, y_3, y_4 теж розміщені прямолінійно і точка y_2 є для них внутрішньою.

Оскільки ми перебрали усі можливі трійки точок і вони виявились прямолінійно розміщеними, то за Означенням 4 усі чотири точки розміщені прямолінійно у просторі $C_{[a;b]}$.

Звернемо увагу на те, що кожна з чотирьох точок лежить між деякими двома з них, тобто, серед цих точок немає крайніх точок. Такої ситуації не може бути у геометрії Евкліда. Там з чотирьох точок, що лежать на прямій лінії, дві будуть крайніми, а дві – внутрішніми для цих точок. Отже, у цьому прикладі,як і у прикладах 5 і 9, ми маємо справу з елементами неевклідової геометрії.

Особливість розміщення точок y_1, y_2, y_3, y_4 можна пояснити, якщо відійти від інтуїтивного сприйняття прямолінійності. Його можна проілюструвати на прикладі простору точок одиничного кола. Якщо за відстань між двома точками кола взяти довжину меншої з двох дуг кола що сполучає ці точки, то легко впевнитись, що простір стає метричним. У цьому випадку, точки y_1, y_2,y_4, y_3 будуть кінцями двох взаємно перпендикулярних діаметрів кола (рис. 15).

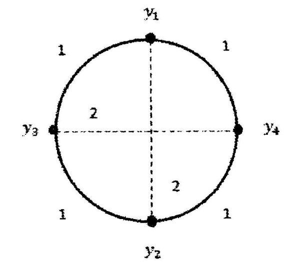

Рис. 15. Неевклідова інтерпретація прямолінійного розміщення точок y_1, y_2,y_4, y_3 у просторі $C_{[a;b]}$.

Поняття прямолінійності у метричному просторі є неоднозначне. У геометрії Евкліда дві точки визначають єдину пряму, що містить ці точки, цей факт встановлюється відповідною аксіомою [27, с. 3]. У метричному просторі інша ситуація. Продемонструємо на прикладі лінійних функцій неоднозначність поняття прямолінійного розміщення точок у просторі $C_{[a;b]}$ [9, с. 60–61].

Приклад 12. Розглянемо функції: $y_1 = x + 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x - 2$, $y_4 = -x$, що означені на відрізку $[0;1]$ (рис. 16).

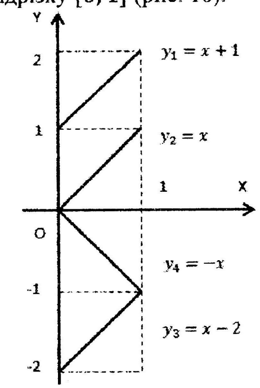

Рис. 16. Графіки функцій y_1, y_2, y_3, y_4 у декартовій системі координат

Знайдемо відстані між цими функціями за формулою (8), враховуючи при цьому результати прикладу 10:

$\rho_{12} = 1$; $\rho_{13} = 3$; $\rho_{14} = 3$; $\rho_{23} = 2$; $\rho_{24} = 2$; $\rho_{34} = 2$.

З отриманих рівностей слідує, що точки (функції) y_1, y_2, y_3 розміщені прямолінійно, оскільки виконується рівність: $\rho_{13} = 3 = 1 + 2 = \rho_{12} + \rho_{23}$. При цьому, точка y_2 лежить між точками y_1, y_3.

З іншого боку, точки y_1, y_2, y_4 теж розміщені прямолінійно, оскільки виконується рівність: $\rho_{14} = 3 = 1 + 2 = \rho_{12} + \rho_{24}$. При цьому, точка y_2 лежить також між точками y_1, y_4.

Оскільки у обох випадках точки y_1, y_2присутні у кожній з рівностей, то у геометрії Евкліда усі чотири точки y_1, y_2, y_3, y_4 повинні належати одній прямій лінії. Однак, з отриманих значень відстаней між ними слідує, що точки y_2, y_3, y_4 не можуть бути прямолінійно розміщеними, оскільки між ними однакові відстані (вони утворюють рівносторонній трикутник, довжини сторін якого дорівнюють 2). Водночас, з Рисунка 16 видно, що графіки функцій розміщені один під одним, тобто у кожній точці відрізка [0; 1] виконуються нерівності:

$$y_1 \geq y_2 \geq y_4 \geq y_3. \qquad (9)$$

Цей факт свідчить про те, що у просторі $C_{[a;b]}$ поняття прямолінійності відрізняється своїми властивостями від поняття прямолінійності у геометрії Евкліда. Нижче ми покажемо, що при зміні метрики простору властивість монотонності розміщення можна зберегти.

Отримані результати можна пояснити тим, що властивості прямолінійного розміщення точок у геометрії Евкліда закріплені відповідними постулатами (аксіомами) [5, с. 260; 27, с. 3-5]. У метричному просторі є лише аксіоми відстані між точками, і тому можлива певна неоднозначність поняття прямолінійності.

Якщо припустити дещо іншу інтерпретацію прямолінійності, то отримані результати легко зрозуміти. Наприклад, рухаючись по земній кулі ніби прямолінійно, ми усе ж таки рухаємось по колу, центр якого знаходиться у центрі Землі. Тому наклавши певні обмеження на шлях по якому можна рухатись від точки до точки,а за відстань між точками взявши найменшу довжину шляху між точками, можна отримати неевклідову інтерпретацію прямолінійності розміщення точок. На рисунку 17 наведено інтерпретацію результатів Прикладу 10 для випадку, коли за відстань між двома точками вибрано довжину дуги певної лінії (коло, парабола, гіпербола і таке інше) що з'єднує ці точки.

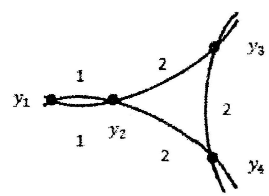

Рис. 17. Неоднозначність прямолінійного розміщення точок

Розглянемо ще один приклад, що демонструє іншу особливість простору $C_{[a;b]}$. Якщо на прямій лінії, у геометрії Евкліда, розмістити три точки, і одну з двох крайніх точок рухати вздовж цієї прямої у напрямі інших двох точок, то рухаючись неперервно, ця точка спочатку суміститься з однією з двох інших точок (внутрішньою), а потім і з другою (іншою зовнішньою) точкою, після чого буде продовжувати рух по цій прямій. У просторі $C_{[a;b]}$ це не завжди виконується. Інколи дві точки простору при прямолінійному русі не можна сумістити одна з одною.

Приклад 13. Розглянемо функції: $y_1 = 0$, $y_2 = x$, $y_3 = C$, де C – деяка константа. У Прикладі 6 ми показали, що усі точки простору R^1 прямолінійно розміщені, тому змінюючи константу C ми рухаємо цю точку прямолінійно, причому як у цьому просторі, так і у просторі $C_{[a;b]}$ (див. приклад 10, рис. 9).

Спочатку розглянемо випадок, коли константа C задовольняє нерівність: $0 < C \leq 0{,}5$. У цьому випадку, відстані між точками (функціями) y_1, y_2, y_3знаходимо за формулою (8), будемо мати: $\rho_{12} = 1$; $\rho_{13} = C = |C|$; $\rho_{23} = 1 - C = 1 - |C|$ (рис. 18).Оскільки виконується рівність:

$$\rho_{12} = 1 = |C| + (1 - |C|) = \rho_{13} + \rho_{23},$$

то точки y_1, y_2, y_3 розміщені прямолінійно у просторі $C_{[a;b]}$.

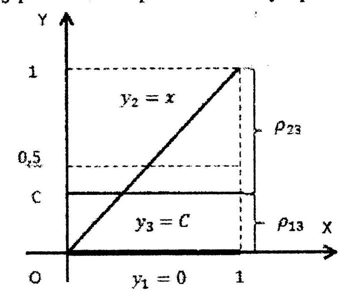

Рис. 18. Прямолінійне розміщення точок y_1, y_2, y_3 при $0 < C \leq 0{,}5$.

На Рисунку 19 зображено випадок, коли константа C задовольняє нерівність: $C < 0$. У цьому випадку, відстані між точками (функціями) y_1, y_2, y_3 будуть: $\rho_{12} = 1$; $\rho_{13} = -C = |C|$; $\rho_{23} = 1 - C = 1 + |C|$ (рис. 16). Оскільки виконується рівність:

$\rho_{23} = 1 + |C| = \rho_{12} + \rho_{13}$,то точки y_1, y_2, y_3і у цьому випадкурозміщені прямолінійно у просторі $C_{[a;b]}$.

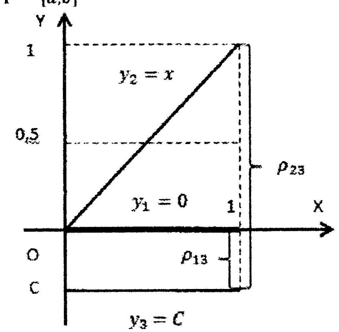

Рис. 19. Прямолінійне розміщення точок y_1, y_2, y_3 при $C < 0$.

Нехай тепер константа C задовольняє нерівність: $C > 0{,}5$ (рис. 20).

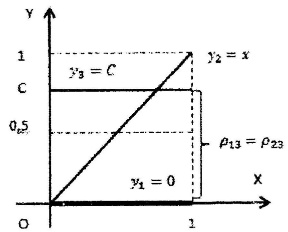

Рис. 20. Не прямолінійне розміщення точок y_1, y_2, y_3при $C > 0{,}5$.

У цьому випадку, відстані між точками (функціями) y_1, y_2, y_3 будуть: $\rho_{12} = 1$; $\rho_{13} = \rho_{23} = C$. При цих значеннях відстаней, точки y_1, y_2, y_3 утворюють рівнобедрений трикутник з довжиною основи, що дорівнює ρ_{12} і бічними сторонами, довжини яких дорівнюють C (константа C перевищує 0,5). Таким чином, для точок y_1, y_2, y_3 порушилась прямолінійність розміщення у просторі $C_{[a;b]}$, хоча точка y_3 рухалась прямолінійно.

Приклад 13 свідчить про те, що не зважаючи на рівноправність усіх точок метричного простору, у конкретних просторах не лише метрика, а і внутрішні властивості кожної точки (елемента) простору можуть значно впливати на геометричні властивості усього простору.

Після вивчення визначеного інтеграла та його застосувань, можна ознайомити учнів ще з одним метричним простором, пов'язаним з геометричним змістом визначеного інтеграла. Ці теми вивчаються в одинадцятому класі [38, с. 254-256; 39, с. 373-374; 40, с. 235-238; 41, с. 112-113].

Розглянемо множину неперервних на відрізку $[a; b]$ функцій. За відстань між двома функціями $f(x)$ і $g(x)$ цієї множини візьмемо число, що знаходиться за формулою:

$\rho(f; g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$(10).

При такому виборі метрики розглядувана множина функцій стає метричним простором, який позначають C_L.

Для перевірки виконання аксіом відстані у цьому просторі необхідно знати ряд властивостей визначеного інтеграла, які фактично не згадуються у чинних підручниках. Зокрема, не згадується властивість монотонності визначеного інтеграла: «*Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[a; b]$, і в кожній точці цього відрізка виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$, то виконується також нерівність $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$*».Ця властивість достатньо просто отримується у випадку, коли визначений інтеграл означається як границя інтегральної суми [39, с. 367-368; 40, с. 225-226; 41, с. 112-113]. Таке означення історично виправдане, і робить достатньо простим отримання різноманітних застосувань визначеного інтеграла.Для обчислень визначених інтегралів функцій, що мають первісні, зручніше користуватись формулою Ньютона-Лейбніца.

Слід зазначити, що з властивостей визначеного інтеграла у чинних підручниках з математики згадуються, як правило, лише арифметичні дії над інтегралами, а умові існування інтеграла, фактично не приділяється увага. Тому учням слід наголосити, що будь-яка неперервна на відрізку функція є інтегрованою, тобто неперервність функції на відрізку є достатньою умовою її інтегрованості на цьому відрізку.На наш погляд, це значно посилить важливість вивчення поняття неперервності функції. Умову неперервності підінтегральної функції можна включити при знайомстві з формулою Ньютона-Лейбніца[39, с. 360; 40, с. 223]. Можна також обмежитись лише неперервними функціями при означенні первісної, вказавши, що для будь-якої неперервної функції існує первісна. У будь-якому випадку, при використанні інтеграла слід завжди згадувати неперервністьпідінтегральної функції, як достатню умову існування інтеграла. Це зробить більш обґрунтованими результати отримані за допомогою інтегрування.

Перейдемо до перевірки аксіом відстані для метрики, заданої формулою (10). З неперервності функцій $f(x)$ і$g(x)$ слідує неперервність, а отже і інтегрованість функції $|f(x) - g(x)|$, тому відстань, що визначається формулою (10), існує. Будь-яка інтегральна сума, складена для функції $|f(x) - g(x)|$ на відрізку $[a; b]$ є сумою невід'ємних доданків, тому і її границя не може бути від'ємною. Нерівність трикутника для функцій $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, неперервних на відрізку $[a; b]$, отримується з використанням властивості монотонності визначеного інтеграла:

$$\rho(f; g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^b |(f(x) - h(x)) + (h(x) - g(x))| dx \leq$$

$$\leq \int_a^b (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|) dx =$$

$$= \int_a^b |f(x) - h(x)| dx + \int_a^b |h(x) - g(x)| dx = \rho(f; h) + \rho(h; g).$$

Геометрично, відстань між двома функціями $f(x)$ і $g(x)$ простору C_L означає площу фігури, що обмежують графіки цих функцій на відрізку $[a; b]$ (рис. 21). У шкільних підручниках користуються менш загальною формулою площі фігури обмеженої графіками функцій $f(x)$ і$g(x)$, що задовольняють нерівність $f(x) \geq g(x)$ на відрізку $[a; b]$: $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ [38, с. 261; 39, с. 373-374; 40, с. 236-237; 41, с. 115].

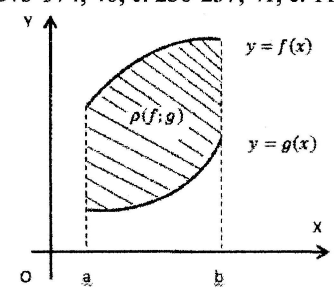

Рис. 21. Відстань між функціями $f(x)$ і $g(x)$ у просторі C_L.

Метрика визначена формулою (10) є менш чутливою до особливостейструктури окремого елемента простору. Про це може свідчити наступний приклад.

Приклад 14.Повернемось доПрикладу 12 і розглянемо функції: $y_1 = x+1$, $y_2 = x$, $y_3 = x-2$, $y_4 = -x$, що означені на відрізку $[0;1]$ (рис. 16). Раніше ми встановили, що усі чотири функції не є прямолінійно розміщеними у просторі $C_{[a;b]}$. Знайдемо відстані між ними за метрикою простору C_L. За формулою (10) будемо мати:

$$\rho_{12} = \int_0^1 |(x+1) - x|dx = \int_0^1 dx = 1 - 0 = 1;$$

$$\rho_{13} = \int_0^1 |(x+1) - (x-2)|dx = \int_0^1 3dx = 3(1-0) = 3;$$

$$\rho_{14} = \int_0^1 |(x+1) - (-x)|dx = \int_0^1 (2x+1)dx = (1^2 - 0^2) + (1-0) = 2;$$

$$\rho_{23} = \int_0^1 |x - (x-2)|dx = \int_0^1 2dx = 2(1-0) = 2;$$

$$\rho_{24} = \int_0^1 |x - (-x)|dx = \int_0^1 2xdx = 1^2 - 0^2 = 1;$$

$$\rho_{34} = \int_0^1 |(x-2) - (-x)|dx = \int_0^1 (2-2x)dx = 2(1-0) - (1^2 - 0^2) = 1.$$

Зауважимо, що ці значення можна обчислити без використання формули (10), порахувавши по Рисунку 16 площіфігур обмежених графіками відповідних функцій.

Оскільки виконується рівність: $\rho_{13} = 3 = 1 + 2 = \rho_{12} + \rho_{23}$, то точки y_1, y_2, y_3 розміщені прямолінійно у просторі C_L, причому, точка y_2 лежить між точками y_1 і y_3.

З рівності $\rho_{14} = 2 = 1 + 1 = \rho_{12} + \rho_{24}$ слідує, що точки y_1, y_2, y_4 теж розміщені прямолінійно, причому, точка y_2 лежить між точками y_1 і y_4.

Оскільки виконується рівність: $\rho_{13} = 3 = 2 + 1 = \rho_{14} + \rho_{34}$, то точки y_1, y_3, y_4 розміщені прямолінійно у просторі C_L, причому, точка y_4 лежить між точками y_1 і y_3.

З рівності $\rho_{23} = 2 = 1 + 1 = \rho_{24} + \rho_{34}$ слідує, що точки y_2, y_3, y_4 теж розміщені прямолінійно, причому, точка y_4 лежить між точками y_2 і y_3.

Ми розглянули усі чотири можливих трійки точок, і кожна з них виявилась прямолінійно розміщеною. За Означенням 4 усі чотири точки розміщені прямолінійно у просторі C_L, причому, точки y_1, y_3 є крайніми, а точки y_2, y_4– внутрішніми для точок y_1, y_2, y_3, y_4. Усі точки розміщені у наступному порядку: y_1, y_2, y_4, y_3 (рис. 22).Цей порядок розміщення функцій збігається з порядком їх розміщення на координатній площині (рис. 16).

Рис. 22. Прямолінійне розміщення точок y_1, y_2, y_3, y_4 у просторі C_L.

Приклад 14 є наслідком більш загальної властивості простору C_L. Порівнявши результати Прикладів 12 і 14, можна зробити висновок про те, що метрика простору C_L більш «сильніша» за метрику простору $C_{[a;b]}$, оскільки навіть «монотонність» розміщення функцій не змогла забезпечити

їх прямолінійного розміщення у просторі $C_{[a;b]}$.У просторі C_L, на відміну від простору $C_{[a;b]}$, прямолінійність розміщення точок може забезпечити їх певна «монотонність розміщення», про що свідчить наступний приклад [7, с. 29-30].

Приклад 15. Розглянемо множину F функцій, неперервних на відрізку $[a;b]$, і таких, що для будь-яких функцій $f(x)$ і $g(x)$ цієї множини у кожній точці x відрізка виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$.

Покажемо, що множина F прямолінійно розміщена у просторі C_L. Для цього розглянемо довільні три елементи $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ цієї множини.Нехай для нгиху кожній точці x відрізка виконуються, наприклад, нерівності $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$. За формулою (10) знайдемо відстані між цими елементами:

$$\rho(f;g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx;$$

$$\rho(f;h) = \int_a^b |f(x) - h(x)|dx = \int_a^b (f(x) - h(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b h(x)dx;$$

$$\rho(g;h) = \int_a^b |g(x) - h(x)|dx = \int_a^b (g(x) - h(x))dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx.$$

З отриманих рівностей слідує справедливість рівності

$$\rho(f;h) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b h(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx\right) + \left(\int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx\right) = \rho(f;g) + \rho(g;h).$$

Отримана рівність означає, що елементи $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ множини F розміщені прямолінійно у просторі C_L. Оскільки елементи ми вибрали довільно, то за Означенням 4 уся множина F розміщена прямолінійно у просторі C_L.Тепер результат Прикладу 14, внаслідок нерівності (9), стає частинним випадком прикладу 15.

Наведений у роботі матеріал можна вважати першим знайомством з основами метричної геометрії. За наведеними зразками можна створювати й розв'язувати велику кількість різноманітних задач на взаємне розміщення основних елементарних функцій у різних метричних просторах, будувати і досліджувати різні геометричні образи у цих просторах.

Надалі буде розглянуто поняття кута, утвореного точками метричного простору, та плоске розміщення точок цього простору.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1 Бураго Д Ю , Бураго Ю Д , Иванов С В Курс метрической геометрии Москва; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2014 512 с

2 Буземан Г Геометрия геодезических Москва: Физматгиз, 1962 503 с
3 Берже М Геометрия В двух томах Москва: Мир, 1984 Том 1 559 с
4 Каган В Ф Система посылок, определяющих евклидову геометрию *Дневник XI-го Съезда русских естествоиспытателей и врачей*. Санкт-Петербург: тип М Меркушева, 1902 № 9 Секция математики и механики С 67–105
5 Каган В Ф Основания геометрии в 2-х ч Москва; Ленинград :Гостехиздат, 1956 Ч 2 344 с
6 Каган В Ф Очерки по геометрии Москва: Издательство Московского университета, 1963 571 с
7 Кузьмич В І Поняття кута при вивченні властивостей метричного простору *Вісник Черкаського університетуту Педагогічні науки* 2016 № 13 С 26--32
8 Кузьмич В І Кутова характеристика у метричному просторі Algebr andGeom MethodsofAnalysis: Int Sci Conf :Abstracts, 2017 С 11–12
9 Кузьмич В І Плоско розміщені множини точок у метричному просторі Вісник Львівького університету Серія: Мех -мат , 2017 Вип 83 С 58–71
10 Кузьмич В І Побудова плоских образів у довільному метричному просторі Вісник Черкаського університетуту Педагогічні науки 2017 № 11 С 40–46
11 Кузьмич В І Геометричні властивості метричних просторів Український математичний журнал 2019 № 3(71) С 382--399
12 ДавидовМ О Курсматематичногоаналізу: підручник: у трьохчастинах Частина 3 Елементитеоріїфункційіфункціональногоаналізу Київ: Вищашкола, 1987 359 с
13 Начала Евклида Книги I-VI Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1948 447 с
14 Мерзляк А Г , Полонський В Б , Якір М С Геометрія Пропедевтика поглибленого вивчення: навч посіб для 7 кл з поглибленим вивченням математики Харків: Гімназія, 2015 192 с
15 Апостолова Г В Геометрія:підруч для 7 кл загальноосвіт навч закл Київ: Генеза, 2015 216 с
16 Бурда М І , Тарасенкова Н А Геометрія: підруч для 7 кл загальноосвіт навч закл Київ : Видавничий дім «Освіта», 2015 208 с
17 Істер О С Геометрія: підруч для 7 кл загальноосвіт навч закл Київ: Генеза, 2015 184 с
18 Бевз Г П , Бевз В Г , Владімірова Н Г Геометрія: підруч для 7 кл загальноосвіт навч закл Київ: Відродження, 2015 192 с
19 Мерзляк А Г , Полонський В Б , Якір М С Алгебра: підруч Для 8 кл з поглибленим вивченням математики Харків: Гімназія, 2016 384 с
20 Мерзляк А Г , Полонський В Б , Якір М С Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч для 9 кл загальноосвіт навч закладів Харків : Гімназія, 2017 416 с
21 Мерзляк А Г , Полонський В Б , Якір М С Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч для 9 кл загальноосвіт навч закладів Харків: Гімназія, 2017 304 с
22 Тарасенкова Н А , Богатирьова І М , Коломієць О М , Сердюк З О Алгебра: підруч для 9 класу загальноосвіт навч закл Київ: УОВЦ «Оріон», 2017 272 с
23 Бурда М І , Тарасенкова Н А Геометрія: підруч для 9 кл загальноосвіт навч закл Київ: УОВЦ «Оріон», 2017 224 с
24 Істер О С Геометрія: підруч для 9 кл загальноосвіт навч закл Київ: Генеза, 2017 240 с
25 Бевз Г П , Бевз В Г , Владімірова Н Г Геометрія: підруч для 9 кл загальноосвіт навч закл Київ: Видавничий дім «Освіта», 2017 272 с
26 Апостолова Г В Геометрія: підруч для 9 кл загальноосвіт навч закл Київ: Генеза, 2015 216 с
27 Гильберт Д Основания геометрии Петроград: Сеятель, 1923 152 с
28 Кравчук В , Підручна М , Янченко Г Алгебра: підруч для 9 класу загальноосвіт навч закл Тернопіль: Підручники і посібники, 2017 264 с
29 Істер О С Алгебра: підруч для 9 кл загальноосвіт навч закл Київ: Генеза, 2017 264 с

30 Бевз Г П , Бевз В Г Алгебра: підруч для 9 кл загальноосвіт навч закл Київ: Видавничий дім «Освіта», 2017 272 с
31 Мерзляк А Г , Полонський В Б , Якір М С Алгебра Пропедевтика поглибленого вивчення: навч посіб для 7 кл з поглибленим вивченням математики Харків: Гімназія, 2015 240 с
32 Тарасенкова Н А , Богатирьова І М , Коломієць О М , СердюкЗ О Математика: підруч для 7 класу загальноосвіт навч закл Київ: Видавничий дім «Освіта», 2015 288 с
33 Мальований Ю І , Литвиненко Г М , Бойко Г М Алгебра: підручник для 7 кл загальноосвітн навч закл Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2015 256 с
34 Кравчук В Р , Підручна М В , Янченко Г М Алгебра: підруч для 7 кл загальноосвіт навч закл Тернопіль: підручники і посібники, 2015 224 с
35 Істер О Н Алгебра: підруч для 7 кл загальноосвіт навч закл Київ: Генеза, 2015 256 с
36 Бевз Г П , Бевз В Г Алгебра: підруч для 7 кл загальноосвіт навч закл Київ: Відродження, 2015 288 с
37 Мерзляк А Г , Номіровський Д А , Полонський В Б , Якір М С Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб рівні з 8 кл , проф Рівень: підруч для 10 кл закладів загальної середньої освіти Харків: Гімназія, 2018 512 с
38 Мерзляк А Г , Номіровський Д А , Полонський В Б , Якір М С Алгебра 11 клас: підруч для загальноосвіт навчальн закладів: академ рівень, проф рівень Харків: Гімназія, 2011 431 с
39 Нелін Є П , Долгова О Є Алгебра 11 клас: підруч для загальноосвіт навч закладів: академ рівень, проф рівень Харків Гімназія, 2011 448 с
40 Афанасьєва О М , Бродський Я С , Павлов О Л , Сліпенко А К Математика 11 клас : підручник для загальноосвітніх навчальних закладів Рівень стандарту Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2011 480 с
41 Бевз Г П , Бевз В Г Математика: 11 кл : підруч для загальноосвіт навч закл : рівень стандарту Київ: Генеза, 2011 294 с

Таточенко В. І., Шипко А. Л.

3.2. Підготовка майбутнього вчителя математики до ефективної професійної діяльності у сучасних умовах

Система освіти в Україні перебуває в стані оновлення відповідно до суспільних вимог, що спрямовані на формування конкуренто спрямованого фахівця. Досягти цього можливо за умов удосконалення процесу професійної освіти й упровадження новітніх педагогічних та інформаційних технологій навчання здобувачів вищої освіти. Нині в Україні відбувається переорієнтація системи освіти, що вимагає переходу від знаннєвої моделі освіти до компетентнісної. Це обумовлює принципову необхідність переосмислити усі фактори, від яких залежить якість освітнього процесу. Професійна діяльність вчителя математики – це складне, інтегральне утворення, сукупність різних за цілями та характером видів діяльності, що спрямовані на створення і внесення вчителем змін в математичну освіту, що постійно оновлюються.

У якісно нових умовах постіндустріального інформаційного суспільства, для яких характерні стрімкий розвиток і динамічність, актуалізована проблема підготовки вчителів до професійної діяльності в новому, Наукове видання

ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ МОДЕРНІЗАЦІЇ НАВЧАННЯ: КОМПЕТЕНТНІСНИЙ ПІДХІД

Колективна монографія

За редакцією Юзбашевої Г. С.

ISBN 978-617-7481-21-7

Відповідальний за випуск – Ковальський В І
Технічний редактор – Мироненко М П
Дизайн обкладинки – Кохановська О В

Підписано до друку 18.03 2020 р Формат 60x84/16 (А-5)
Папір офсетний Друк цифровий Гарнітура Times New Roman
Умовн друк арк 20,4 Наклад 50

Друк здійснено з оригінал-макету
у видавництві КВНЗ «Херсонська академія неперервної освіти»
Свідоцтво ХС № 74 від 30 11 2 2011 р

Адреса редакції й видавництва
вул Покришева, 41
м Херсон
73034
тел (0552) 37-02-00
E-mail: info@academy ks ua