Андрєєв О.А.
Херсонський фізико-технічний ліцей Херсонської міської ради

ФОРМУЛИ УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ ГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ У КВАДРАТІ

При чисельному розв'язанні рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, його замінюють дискретним аналогом у вигляді формули усереднення. Для цього часто застосовують 8-вузлову формулу усереднення для гармонічних функцій у квадраті [1] (рис.1).

$$f_0=\frac{1}{20}\sum_{k=1,3,5,7} f_k+\frac{1}{5}\sum_{k=2,4,6,8} f_k+O(h^6). \qquad (1)$$

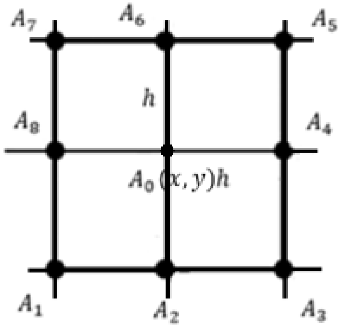

Рис. 1

У роботі [4] без доведення була запропонована 12-вузлова формула усереднення (2), яка застосовувалася для побудови квазігармонічного базису 12-вузлового квадратного скінченного елементу (рис. 2).

$$f_0=\frac{7}{352}\sum_{k=1,4,7,10} f_k+\frac{81}{704}\sum_{k=2,3,5,6,8,9,11,12} f_k+O(h^6). \qquad (2)$$

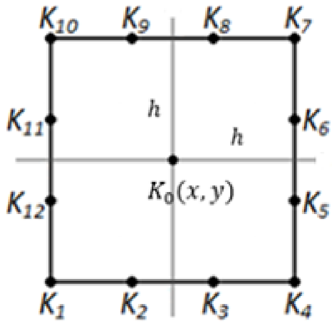

Рис. 2

У даній роботі ставилася мета за допомогою формули Тейлора для функцій двох змінних виконати доведення 8-вузлової та 12-вузлової формул усереднення для гармонічних функцій у квадраті та проаналізувати їх точність. Також ставилася задача побудувати 16-вузлову формулу усереднення для гармонічних функцій у квадраті.

Для доведення 8-вузлової формули усереднення за допомогою формули Тейлора розраховано дві суми виразів для значення гармонічної функції у вузлах на межі елемента (рис. 1), використовуючи значення цієї функції та її похідних в центральному вузлі квадрата. Завдяки рівнянню Лапласа в цих сумах коефіцієнти при h^2 і h^6 перетворюються на нуль. Тому суми мають вигляд:

$$\sum_{k=2,4,6,8} f_k=4f_0-\frac{4}{4!}f^{(4)}_{x^2y^2}h^4+O(h^8). \qquad (3)$$

$$\sum_{k=1,3,5,7} f_k=4f_0+\frac{16}{4!}f^{(4)}_{x^2y^2}h^4+O(h^8). \qquad (4)$$

Комбінуючи ці дві суми, позбавляємося доданка, що містить h^4, та отримуємо 8-вузлову формулу усереднення для гармонічних функцій у квадраті:

$$f_0=\frac{1}{20}\sum_{k=1,3,5,7} f_k+\frac{1}{5}\sum_{k=2,4,6,8} f_k+O(h^8). \qquad (5)$$

Ми отримали відому 8-вузлову формулу усереднення (1), але її точність на два порядки вища ніж зазначено у попередніх публікаціях.

Аналогічно до 8-вузлової формули усереднення, розрахуємо дві суми для 12-вузлової формули усереднення (рис. 2), в яких також коефіцієнти при h^2 і h^6 перетворюються на нуль завдяки рівнянню Лапласа:

$$\sum_{k=2,3,5,6,8,9,11,12} f_k = 8f_0 - \frac{224}{81*4!} f^{(4)}_{x^2y^2} h^4 + O(h^8), \qquad (6)$$

$$\sum_{k=1,4,7,10} f_k = 4f_0 + \frac{16}{4!} f^{(4)}_{x^2y^2} h^4 + O(h^8). \qquad (7)$$

Комбінуючи формули (6), (7) отримали 12-вузлову формулу усереднення для гармонічних функцій у квадраті:

$$f_0 = \frac{7}{352} \sum_{k=1,4,7,10} f_k + \frac{81}{704} \sum_{k=2,3,5,6,8,9,11,12} f_k + O(h^8). \qquad (8)$$

Ми отримали формулу усереднення (2), але її точність виявилася на два порядки вища.

Для побудови 16-вузлової формули усереднення розраховано вже три суми виразів для значення гармонічної функції у вузлах квадрата (рис.3), в яких коефіцієнти при h^2, h^6 і h^{10} перетворюються на нуль завдяки рівнянню Лаплпса:

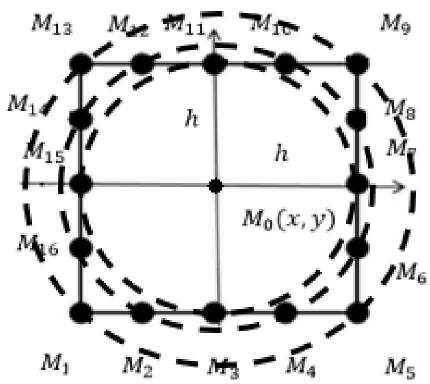

Рис. 3

$$\begin{cases} \sum_{k=1,5,9,13} f_k = 4f_0 + \frac{4h^4}{3!} f^{(4)}_{x^2y^2} + \frac{64h^8}{8!} f^{(8)}_{x^4y^4} + O(h^{12}) \\ \sum_{k=3,7,11,15} f_k = 4f_0 - \frac{h^4}{3!} f^{(4)}_{x^2y^2} + \frac{4h^8}{8!} f^{(8)}_{x^4y^4} + O(h^{12}) \\ \sum_{k=2,4,6,8,10,12,14,16} f_k = 8f_0 + \frac{4h^4}{4!}\frac{14}{16} f^{(4)}_{x^2y^2} - \frac{4h^8}{8!}\frac{1054}{256} f^{(8)}_{x^4y^4} + O(h^{12}) \end{cases} \qquad (9)$$

Комбінуючи ці три суми, позбавляємося від доданків, що містять h^4 і h^8. Таким чином ми отримали 16-вузлову формулу усереднення для гармонічних функцій у квадраті:

$$f_0 = \frac{65}{629} \sum_{k=3,7,11,15} f_k + \frac{128}{1887} \sum_{\substack{k=2,4,6,8,\\10,12,14,16}} f_k + \frac{83}{7548} \sum_{k=1,5,9,13} f_k + O(h^{12}). \qquad (10)$$

Проведене тестування показало, що формули дають результати з передбаченою точністю.

Література

1. Люстерник Л.А. О разностных аппроксимациях оператора Лапласа, Москва: Успехи математических наук, 1954. Т.IX, вып. 2(60), С. 3-5

2. Николенко Ю. И. Полные базисы бикубического конечного элемента [Текст]: Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка, 2016, №5, т. 24, вип. 20, С. 91-98.

Рекомендує до друку
науковий керівник **викладач Юрій Ніколаєнко**