Залецький М. Г.
Херсонська державна морська академія

РОЗБІЖНІСТЬ ПОТЕНЦІАЛУ – НІЧОГО СТРАШНОГО!

Традиційно, в курсі фізики вищої школи виводяться вирази для скалярного чи векторного потенціалу силових полів нескінченних об’єктів. Як правило, ці розрахунки засновані на співвідношеннях, що виражають зв'язок між напруженістю та потенціалом векторних полів. Але при спробі безпосереднього розрахунку потенціалу поля з використанням принципу суперпозиції полів у студентів виникають серйозні труднощі, пов’язані з формальною розбіжністю величини потенціалу при спрямуванні до нескінченності розмірів скінченого об’єкту. Цей удаваний парадокс пов'язаний з тим, що поле таких нескінченних об’єктів не обертається в нуль на нескінченності. Нижче, на двох прикладах, ми покажемо як легко усувається такий парадокс.

1. Нескінченна рівномірна заряджена площина.

Розглянемо рівномірно заряджений диск с поверхневою густиною σ та радіусом R. Знайдемо потенціал поля такого диска на відстані z від його центру, що відраховується вздовж осі симетрії диска. Для цього розіб’ємо останній на нескінченно тонкі кільця товщиною dr та різного радіуса r зі спільною віссю симетрії Oz (O – центр кільця). Потенціал поля кожного кільця в шуканій точці буде:

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{2\pi r dr \sigma}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}}.$$

Інтегруючи праву частину останнього виразу в межах від 0 до R, дістанемо результуючий потенціал поля зарядженого диска:

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2}-z\right). \quad (1)$$

Якщо тепер обчислити границю до якої прямує потенціал при $R \to \infty$ (нескінченна площина), то формально дістанемо нескінченність.

Для усунення цього парадоксу перепишемо вираз (1) наступним чином:

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(R\sqrt{1+\left(\frac{z}{R}\right)^2}-z\right). \quad (2)$$

Розкладаючи корінь, що фігурує у виразі (2), в ряд Тейлора за ступенями z/R, матимемо:

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(R+\frac{z^2}{2R}-\frac{z^4}{8R^3}+\cdots-z\right). \quad (3)$$

У правій частини виразу (3) перший доданок є сталим (не залежить від відстані z). Саме з точністю до цього доданку визначається шуканий потенціал. Позначаючи цей доданок як C і обчислюючи знов границю при $R \to \infty$, дістаємо коректний вираз для потенціалу нескінченної площини: $\varphi = -\sigma/(2\varepsilon_0 z) + C.$ Таким чином, розглянутий парадокс усувається шляхом «внесення нескінченності» в сталий доданок.

2. Нескінченна рівномірна заряджена лінія.

Розглянемо лінійний відрізок з лінійною густиною τ та довжиною $2L$. Знайдемо потенціал поля такого відрізку на відстані z від її центру, що відраховується вздовж перпендикуляру до нього. Для цього розіб'ємо останній на нескінченно малі елементи довжиною dl, розташовані на різній відстані l від його центра. Потенціал поля кожного елемента в шуканій точці буде:

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{l^2 + z^2}} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{l^2 + z^2}}.$$

Інтегруючи праву частину останнього виразу в межах від $-L$ до L, дістанемо результуючий потенціал поля зарядженого відрізка:

$$\varphi = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}\left[\ln\left(L + \sqrt{L^2 + z^2}\right) - \ln z\right]. \quad (4)$$

Як і в попередньому випадку границя до якої прямує потенціал при $L \to \infty$ (нескінченна лінія) обертається в нескінченність. Знов, для усунення цього парадоксу перепишемо вираз (1) наступним чином:

$$\varphi = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}\left[\ln L + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{z^2}{L^2}}\right) - \ln z\right]. \quad (5)$$

У правій частині виразу (5) два перших доданки є сталими при $L \to \infty$. Позначаючи суму цих доданків як C, отримаємо остаточний вираз для потенціалу: $\varphi = -\tau \ln z/(2\varepsilon_0) + C.$

Відзначимо, що подібні розбіжності можуть бути також усунені за допомогою добре розвиненою у теорії поля технікою ренормалізації.

Рекомендує до друку
науковий керівник **доцент Володимир Івченко**