Кравченко Є. О.
Херсонська державна морська академія

ОБЕРЕЖНО: РУХ ТІЛА ЗІ ЗМІННОЮ МАССОЮ!

Звичайна форма запису другого закону Ньютона ($m\vec{a}=\vec{F}_\text{р}$) є справедливою лише у випадку руху тіла зі сталою масою. Спробуємо ґрунтовно відповісти на наступні запитання:

Чи є справедливим для випадку руху тіла зі змінною масою другий закон Ньютона у формі $d\vec{p}/dt=\vec{F}_\text{р}$? Відповідь: так, якщо під імпульсом $\vec{p}$ розуміти сумарний імпульс взаємодіючих частин системи. В цьому випадку рівнодійна сила $\vec{F}_\text{р}$ є векторною сумою зовнішніх сил, що діють на окремі частини системи.

Чи є справедливим для випадку руху тіла зі змінною масою другий закон Ньютона у формі $d(m\vec{v})/dt=md\vec{v}/dt+\vec{v}dm/dt=\vec{F}_\text{р}$? Відповідь: Ні! Цей вираз є неінваріантним відносно перетворення Галілея (містить доданок пропорційний першому ступеню швидкості тіла).

Який вираз, що містить масу тіла, є аналогом для другого закону Ньютона у випадку руху тіла зі змінною масою? Відповідь:

$$m(t)d\vec{v}/dt=\vec{F}_\text{р}+\left[dm(t)/dt\right]\vec{u}, \quad (1)$$

де $\vec{u}$ – відносна швидкість маси, що виходить або надходить до тіла, відносно центру маси тіла; $dm(t)/dt$ – зміна маси тіла за одиницю часу. Другий доданок у правій частині цього виразу зветься реактивной силой і виникає за рахунок внутрішніх сил, що діють у системі «тіло+маса dm». У російськомовній літературі це рівняння помилково називають рівнянням Мещерського (англомовний і загальноприйнятий у світі аналог – «the equation of variable-mass system») оскільки його ще у 1812-1814 роках встановив чеський вчений Георг Бюкуа.

Рівняння (1) застосовується для розв'язку різноманітних задач, пов'язаних з рухом об'єктів з реактивними рушіями, зокрема для опису руху ракет. Нижче ми наведемо детальний аналіз і розв'язок двох цікавих та повчальних задач на застосування рівняння руху тіла змінної маси.

Припустимо, що з горизонтальної підставки опускається вниз важкий ланцюг (канат, мотузка), елементи якої безперервно приєднуються до рухомої частини ланцюга. Частина ланцюга, що залишилася, знаходиться в стані спокою у краю підставки. Припускаючи, що ланцюг рухається вздовж вертикальної прямої а маса одиниці довжини ланцюга є рівною ρ, необхідно дослідити процес падіння ланцюга з підставки, нехтуючи силами опору (задача Кейлі; рис. 1).

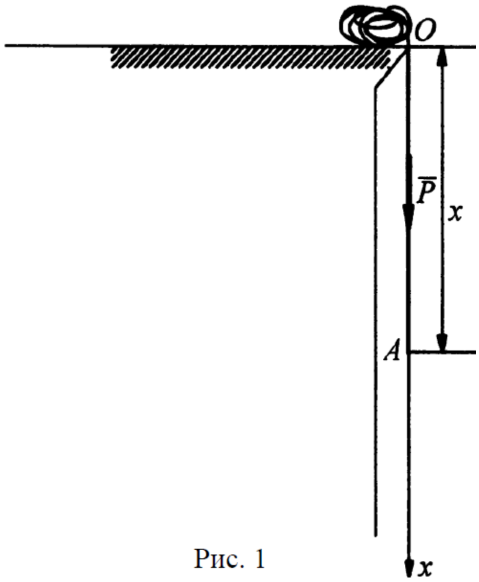


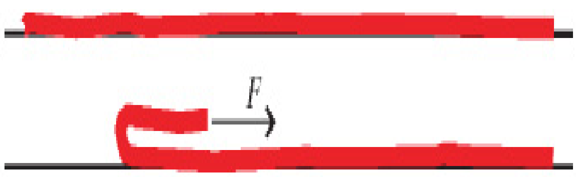
Рис. 1

Нехай в певний момент часу довжина рухомої ділянки ланцюга дорівнює x. Тоді рухома ділянка має масу $m=\rho x$; при цьому на неї діє сила тяжіння $\rho g x$. За одиницю часу маса цієї ділянки збільшується на $\rho\dot{x}$. Швидкість елемента ланцюга, що лежить на столі, відносно його рухомої ділянки кола дорівнює $u_x=-\dot{x}$. У такому разі рівняння (1) в проекціях на вісь Ox прийме вигляд:

$$x\ddot{x}=gx-\dot{x}^2. \quad (2)$$

Таким чином, реактивна сила спрямована проти руху ланцюга і являє собою ніщо інше як змінну в часі силу натягу, що діє з боку нерухомої частини ланцюга на рухому. Розв'язок диференціального рівняння другого порядку (2) будемо шукати у вигляді: $x(t)=at^2/2$. Безпосередня підстановка цього виразу в (2) дає: $a=g/3$. Отже, рухома частина ланцюга рухається зі сталим прискоренням втричі меншим за прискорення вільного падіння. Причина цього ефекту ($a<g$) полягає в тому, що робота сили тяжіння іде не лише на збільшення швидкості рухомої частини ланцюга але й на приведення в рух нерухомої частини. В момент часу, коли весь ланцюг зісковзне з підставки, прискорення стрибкоподібно збільшиться до величини g і далі змінюватися не буде. Зауважимо, що за умови нерозтяжності всі точки рухомої частини ланцюга мають однакові прискорення і швидкість.

Розглянемо тепер вузький довгий килим (килимова доріжка), що лежить на підлозі (рис. 2). Кінець килима загинають і тягнуть назад зі швидкістю $\vec{v}$. Маса одиниці довжини килима дорівнює ρ. Яка сила $\vec{F}$ при цьому має прикладатися до кінця килима?



Не дивлячись на те, що до кінця килима прикладено силу, він рухається зі сталою швидкістю ($\vec{a}$). Це пояснюється тим, що зміна імпульсу килима виникає лише за рахунок зміни маси рухомої частини. Маємо: $dm(t)/dt=\rho v$, $\vec{u}=-\vec{v}/2$ (шлях, пройдений кінцем килима відносно початкової точки є вдвічі більшим за шлях, який пройдено точкою перегину канату відносно ж цієї початкової точки, тобто відносна швидкість руху точки перегину килима відносно його кінця є вдвічі меншою за абсолютну швидкість кінця килима). Тоді, користуючись рівнянням (1), дістанемо: $F=\rho v^2/2$.

Рекомендує до друку
науковий керівник **доцент Володимир Івченко**