Пошук молодих. Випуск 20: Збірник матеріалів Всеукраїнської студентської науково-практичної конференції «Інноваційні технології навчання природничо-математичних дисциплін у закладах загальної середньої та вищої освіти», (Херсон, 16 червня 2020 року.). – Херсон: Видавництво ХДУ, 2020. – 95 с.

Степанець Є.О.
Херсонський державний університет

МНОЖНИКИ ПІДСУМОВУВАНОСТІ РЯДІВ

Базовим поняттям математичного аналізу є поняття граничного переходу. Зокрема, розглядають поняття збіжної послідовності, або збіжного ряду.

Означення 1. *Послідовність чисел* $\{s_n\}$ *називають збіжною до границі* S *при* n *прямуючому до нескінченості* $(n \to \infty)$, *якщо для довільного додатного числа* ε *існує додатне число* $N(\varepsilon)$*таке, що для усіх номерів* n, *які більші за число* $N(\varepsilon)$, *виконується нерівність* $|s_n - S| < \varepsilon$. *Це позначають:* $lim_{n\to\infty} s_n = S$.

Вираз $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ (нескінчену суму чисел) називають числовим рядом і позначають $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Поняття числового ряду і числової послідовності тісно пов'язані між собою.

Означення 2. *Числовий ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *називається збіжним, якщо послідовність* $\{s_n\}$ *його частинних сум* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n = 1,2,\dots)$ *збігається до границі* S *при* n *прямуючому до нескінченості* $(n \to \infty)$. *При цьому число* S *називають сумою ряду і записують:* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ *[1, с. 272-274].*

Поняття збіжності ряду можна дещо узагальнити. У математичному аналізі розглядають поняття множників збіжності ряду. У цьому випадку члени досліджуваного числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ представляють у вигляді добутку: $a_n = \gamma_n u_n$ $(n = 1,2,\dots)$. Якщо поведінка ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ відома, то збіжність досліджуваного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ буде залежати від числової послідовності $\{\gamma_n\}$. У випадку збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n$ числа γ_n називають множниками збіжності ряду. За допомогою множників збіжності можна отримати багато ознак достатніх для збіжності числових рядів, зокрема і ряд класичних ознак. Тобто, множники збіжності можна розглядати як певне узагальнення поняття збіжності ряду.

Поняття підсумовування рядів є узагальненням поняття збіжності числового ряду. Числовому ряду можна приписати певну суму і за іншим правилом. Наприклад, на послідовність $\{s_n\}$ частинних сум цього ряду можна подіяти дискретним матричним оператором $C(c_{nk})$, з нескінченою кількістю рядків і стовбців:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots \\ c_{21} & c_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

утворивши нову послідовність $\{t_n\}$ за наступним правилом: $t_n = \sum_{k=1}^{\infty} s_k c_{nk}$. При цьому слід вимагати збіжності відповідного числового ряду для кожного значення n.

Означення 3. *Числовий ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *(або послідовність* $\{s_n\}$*) називається підсумованим матрицею (методом)* C *до суми* S, *якщо послідовність* $\{t_n\}$, *де*

$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} s_k c_{nk}$ $(n = 1,2, \dots)$*, збігається до границі* S $(n \to \infty)$. *При цьому число* S *називають* C*-сумою ряду і записують:* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S(C)$ *[2, с. 417-418].*

Найбільш відомим класичним методом підсумовування рядів є метод середніх арифметичних, елементи c_{nk} якого мають вигляд: $c_{nk} = \frac{1}{n}$ $(1 \le k \le n)$; $c_{nk} = 0$ $(k > n)$. Цей метод підсумовує кожен збіжний до суми S ряд (або послідовність) до тієї ж самої суми S. Такі методи підсумовування називають регулярними (правильними).

Якщо розглядати множники збіжності стосовно до послідовностей, утворених матрицею $C(c_{nk})$ з ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (або послідовності $\{s_n\}$ його частинних сум), то можна говорити про множники підсумовування числового ряду. Крім того, можна досліджувати підсумовуваність іншим методом $B(b_{nk})$ послідовностей утворених матрицею $C(c_{nk})$, у цьому випадку говорять про множники підсумовування типу (C, B).

Означення 4. *Нехай* C *і* B *– методи підсумовування рядів. Числа* γ_n $(n = 1,2, \dots)$ *називаються множниками підсумовуваності типу* (C, B)*, якщо для кожного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$*, що підсумовується методом* C*, ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n$ *підсумовується методом B [3, с. 169].*

Для таких множників справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Числа* γ_n $(n = 1,2, \dots)$ *будуть множниками підсумовуваності типу* (C, B) *тоді і тільки тоді, коли із* C*-підсумовуваності ряду кожен раз буде слідувати його підсумовуваність методом* $D(d_{nk})$*, елементи* d_{nk} *матриці якого мають вигляд:* $d_{nk} = b_{nk}\gamma_k$ $(n, k = 1,2, \dots)$ *[3, с. 170].*

Дана робота присвячена дослідженням множників підсумовуваності типу (C, B) для випадку, коли один з двох методів є методом середніх арифметичних, а другий є регулярним методом підсумовування, що визначається нижньою трикутною нормальною (без нулів на головній діагоналі) матрицею. За допомогою цих досліджень можна встановити узагальнення класичних достатніх умов збіжності числових рядів, таких як ознаки Лейбніца, Діріхле, Абеля, що значно розширює множину рядів, які можна досліджувати на збіжність.

Література

1. Давидов М. О. Курс математичного аналізу, ч. 1. К.: Вища школа, 1976, 368 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II. М.: Наука, 1970, 800 с.
3. Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин: Валгус, 1977, 280 с.

Рекомендує до друку
науковий керівник **доцент Валерій Кузьмич**