Ткаченко І.О.
Херсонський державний університет

ГЕОМЕТРИЧНІ ОБРАЗИ У МЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ

Дана робота присвячена питанням геометризації довільного метричного простору. Такі питання вивчаються у метричній геометрії. Це окрема галузь геометрії що виникла порівняно недавно, і в даний час відбувається значне збільшення наукових та прикладних робіт пов'язаних з метричною геометрією [1-3]. У більшості випадків це викликано великою кількістю практичних застосувань результатів, отриманих за допомогою метричної геометрії. Серед областей її застосування слід назвати інженерію, ядерну фізику, астрономію, комп'ютерні науки, біологію, хімію, геодезію, картографію та багато інших.

Особливістю метричної геометрії є те, що на відміну від класичної геометрії Евкліда у розпорядженні дослідника є лише один інструмент – віддаль між точками множини. Це поняття є основним у теорії метричних просторів. На даний час існує багато його видів і означень. У даній роботі ми будемо використовувати класичне означення відстані між двома точками множини, а саме:

Означення 1. *Якщо кожній парі точок x і yмножиниXза певним правилом ρпоставлено у відповідність єдине дійсне число $\rho(x, y)$, що задовольняє наступним трьом умовам:*

а)$\rho(x, y) \geq 0$, причому $\rho(x, y) = 0$тоді і лише тоді, коли точкиx і y співпадають (невід'ємність відстані);

б) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$(комутативність, або симетричність відстані);

в) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для будь-якої точки zмножиниX (нерівність трикутника), то множину X називають метричним простором, правило ρ називають метрикою простору X, а число $\rho(x, y)$– відстанню між точками x і y у метричному просторі X. Метричний простір X з метрикою ρ позначають (X, ρ)[4, с.30].

За мету роботи поставлено вивчення геометричних образів: кута, прямолінійного та плоского розміщення точок метричного простору.

У роботі [5] введено поняття такого кута, як упорядкованої трійки точок метричного простору.

Означення 2. *Нехай a, b, c – три різні точки множини X. Упорядковану трійку (a, b, c) цих точок будимо називати кутом з вершиною у точці b, і позначати $\angle(a, b, c)$. Пари точок $(a, b,)$ і (b, c), при цьому, будемо називати сторонами цього кута.*

З метою порівняння кутів між собою введенопоняття числової характеристики кута, яке основане на класичній теоремі косинусів. На можливість такого підходу вказав О.Д. Александров [5, с. 36].

Означення 3. *Нехай* a, b, c *- три різні точки простору*(X, ρ). *Характеристикою кута* $\angle(a, b, c)$ *(або кутовою характеристикою) будемо називати дійсне число* $\varphi(a, b, c)$*, що знаходиться за формулою*

$$\varphi(a, b, c) = \frac{\rho^2(a,b)+\rho^2(b,c)-\rho^2(a,c)}{2\rho(a,b)(b,c)}. \quad (1)$$

З формули (1) та властивостей метрики ρ легко отримуються наступні властивості характеристики кута: $\varphi(a, b, c) = \varphi(c, b, a)$, і $-1 \leq \varphi(a, b, c) \leq 1$.

Такі означення кута та його характеристики дають можливість, по аналогії з геометрією Евкліда, ввести у довільному метричному просторі поняття прямолінійного розміщення точок простору [6, с. 527].

Означення 4. *Будемо казати, що точки* a, b, c *простору* (X, ρ, φ) *прямолінійно розміщені, якщо* $\varphi(a, b, c) = \pm 1$.

Наведені вище означення дають можливість ввести поняття плоского розміщення точок метричного простору [7, с.11-12].

Означення 5. *Будемо казати, що точки* a, b, c, d *простору* (X, ρ, φ) *плоско розміщені, якщо виконується рівність*

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a, b, c) & \varphi(a, b, d) \\ \varphi(a, b, c) & 1 & \varphi(c, b, d) \\ \varphi(a, b, d) & \varphi(c, b, d) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

хоча б для однієї з цих точок (наприклад, для точки b*).*

Для множини точок природно ввести наступне означення плоского розміщення її точок.

Означення 6. *Будемо казати, що множина точокпростору* (X, ρ, φ) *плоско розміщена, якщо будь-які її чотириточки плоско розміщені.*

Із рівності (2) можна отримати еквівалентну їй рівність, яка теж дає критерій плоского розміщення чотирьох точок простору (X, ρ, φ)[7, с.11].

Теорема 1. *Для того, щоб точки* a, b, c, d *простору*(X, ρ, φ) *були плоско розміщені, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\varphi(a, b, c) = \varphi(a, b, d)\varphi(c, b, d) \pm \sqrt{(1 - \varphi^2(a, b, d))(1 - \varphi^2(c, b, d))} \quad (3)$$

хоча б для однієї з цих точок (наприклад, для точки b*).*

Рівність (3) для довільного метричного просторуєаналогом формули косинуса суми та різниці двох кутів у геометрії Евкліда.

Література

1. Distance Geometry: Theory, Methods and Applications / A.Mucherino, C.Lavor, L.Liberty, N.Maculan // Springer. – 2013.

2. Menger K. Untersuchungen uber allgemeine Metric / K.Menger // Math. Ann. – 1928. – P. 75-163.
3. Crippen G.M. Distance Geometry and Molecular Conformation / G.M.Crippen, T.F.Havel// John Wiley and Sons. – 1988.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ/ Л.В. Канторович, Г.П. Акилов – М.:Наука, 1977.–742с.
5. Александров, А.Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей/ А.Д. Александров, – М.-Л.:Гостехиздат, 1948. – 388с.
6. Каган В.Ф. Основания геометрии. Часть 2/В.Ф.Каган – М.-Л.: Гостехиздат, 1956.– 344с
7. Кузьмич В.І.Кутова характеристика у метричному просторі [Електронний ресурс]//Algebraicandgeometricmethodsofanalysis:Informationalscientificconference: bookofabstracts.– May 31-June 5,2017, Odessa, Ukraine. – C.11-12. – Режим доступу:https://www.imath.kiev.ua/topology/conf/agma2017/agma2017_abstracts.pdf.

Рекомендує до друку
науковий керівник **доцент Валерій Кузьмич**