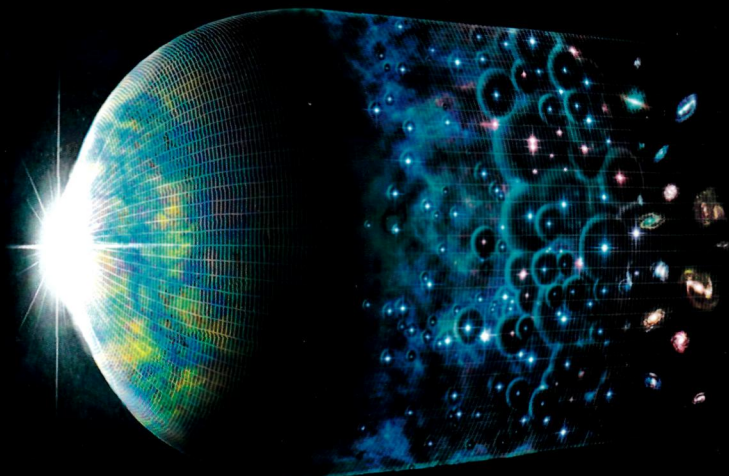




С. Г. КУЗЬМЕНКОВ



ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ФІЗИЧНІ ТА МАТЕМАТИЧНІ КОНСТАНТИ

ЗАДАЧІ З РОЗВ'ЯЗАННЯМИ

ХЕРСОН -2021

С. Г. КУЗЬМЕНКОВ

**ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ФІЗИЧНІ ТА
МАТЕМАТИЧНІ КОНСТАНТИ**

ЗАДАЧІ З РОЗВ'ЯЗАННЯМИ

ХЕРСОН

2021

УДК [51+52+53]–022.322(076.3)

ББК 22.3я73

К89

Схвалено науково-методичною радою Херсонського державного університету (від 16.04.2021, протокол № 7)

Затверджено відповідно до рішення вченої ради Херсонського державного університету (від 26.04.2021, протокол № 13)

Рецензенти:

Баннікова О.Ю., доктор фіз.-мат. наук, доцент кафедри астрономії та космічної інформатики, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Железняк О.О., доктор фіз.-мат. наук, професор, Національний авіаційний університет

Кузьменков С.Г.

К89 Фундаментальні фізичні та математичні константи: Задачі з розв'язаннями: навч. посібник. – Херсон, 2021. – 96 с.

ISBN 978-617-7917-08-2

Подано задачі, які ілюструють причини появи фундаментальних математичних констант π та e у фізичних формулах і законах, задачі, присвячені: вимірюванню фундаментальних фізичних констант (зокрема, і історичним дослідом), системам одиниць вимірювання фізичних величин, характеристичним параметрам мікро- і мегасвіту. Окремі розділи висвітлюють зв'язок параметрів космічних тіл з фундаментальними константами, досліджують вплив числових значень констант на властивості нашого Всесвіту, аналізують антропний принцип. Задачі вирізняються пізнавальним і творчим характером. Для усіх задач наведено докладні розв'язання з поясненнями і коментарями.

Для студентів фізичних спеціальностей вищих навчальних закладів, передусім педагогічних університетів.

УДК [51+52+53]–022.322(076.3)

ISBN 978-617-7917-08-2

© С.Г. Кузьменков

ЗМІСТ

Передмова.....	4
ВСТУП.....	6
1. ФУНДАМЕНТАЛЬНІ МАТЕМАТИЧНІ КОНСТАНТИ.....	16
2. ВИМІРЮВАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ КОНСТАНТ ФІЗИКИ.....	20
3. СИСТЕМИ ОДИНИЦЬ ВИМІРЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН.....	24
4. ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ПАРАМЕТРИ МІКРО- І МЕГАСВІТУ І ФУНДАМЕНТАЛЬНІ КОНСТАНТИ...	27
5. ХАРАКТЕРНІ ПАРАМЕТРИ КОСМІЧНИХ ТІЛ І ФУНДАМЕНТАЛЬНІ КОНСТАНТИ.....	28
6. СТІЙКІСТЬ ОСНОВНИХ СТРУКТУРНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ВСЕСВІТУ І ЧИСЛОВІ ЗНАЧЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ КОНСТАНТ.....	30
7. АНТРОПНИЙ ПРИНЦИП.....	31
РОЗВ'ЯЗАННЯ ТА ВІДПОВІДІ.....	32
Довідкові дані.....	89
Список використаних джерел.....	90

ПЕРЕДМОВА

*Що мене дійсно глибоко цікавить,
так це – чи міг Бог створити світ іншим?*

А. Ейнштейн

*Старий сірий віслучок Іа-Іа стояв
наодинці у захаращеному будяком
куточку Лісу, ... і думав про Серйозні Речі.
Іноді він думав із сумом:
«Чому?», а іноді: «З якої причини?»,
а іноді він думав навіть так:
«Який звідси впливає висновок?»*

А. Мілн. Вінні-Пух та усі-усі-усі.

Задачі, зібрані в цьому навчальному посібнику є надважливою частиною спецкурсу **«Фундаментальні фізичні та математичні константи»**, який вже більше 20 років викладається в Херсонському державному університеті (за авторською програмою, розробленою для студентів другого (магістерського) рівня освіти). Справа в тому, що одним з головних завдань, які мають ставитись під час підготовки вчителя фізики та астрономії, є формування єдиної астрофізичної картини світу як синтез фізичної та астрономічної картин світу. Водночас ця астрофізична картина має бути органічною складовою загальнонаукової картини світу. Наукова картина світу за А.Й. Єремеевою – це *внутрішньо узгоджена система уявлень про навколишній світ* (або його аспект, наприклад, астрономічний – курсив мій), абсолютизація, «твердий зліпок» науки сучасної епохи, тимчасова модель дійсності [14].

З іншого боку, фізика в університетах традиційно викладається окремими розділами (які склалися історично) і, зазвичай, різними викладачами. Це відповідає принципу наступності і послідовності навчання, логічно і методично виправдано. Проте наслідком цього є фрагментарність фізичної картини, що формується в голові студента, окремі фрагменти часто не з'єднуються в єдиний пазл. Не завжди очевидним для студента є синтез астрономічної та фізичної картин світу. До того ж студенти часто сприймають усі фізичні константи просто як коефіцієнти пропорційності між фізичними величинами, не усвідомлюючи глибокий зміст деяких з них.

Тому метою даного спецкурсу є формування уявлень про основи єдиної природничо-наукової картини світу, яка базується на досягненнях сучасної математики, теоретичної та експериментальної фізики, астрофізики.

Автор виражає глибоку вдячність М.О. Бабенко за допомогу у підготовці частини рисунків.

ВСТУП

Відкриття фундаментальних констант можна вважати одним із видатних досягнень фізичної науки. Цілком можна погодитись з К.О. Томіліним [35, с. 8], що фундаментальні фізичні константи – один із найважливіших елементів сучасної фізичної картини світу. «Еволюція цього поняття безпосередньо пов'язана з еволюцією фізики і відображає головну закономірність розвитку фізичного знання – перехід від класичної фізики, що не містила сталих, які мали фундаментальний статус, до сучасної фізики, в якій центральну роль грають фундаментальні сталі» [35, с. 8].

Найбільш ґрунтовно проблемою фундаментальних констант фізики займались П. Девіс [10], Й. Розенталь [28–30], Л. Окунь [26], О. Спірідонов [33], К. Томілін [35].

За твердженням К.О. Томіліна [35, с. 173] на сучасному етапі розвитку фізики домінує описувальний підхід до визначення фундаментальних констант – їм не дається визначення, а просто перелічується низка деяких фізичних сталих, яким *за визначенням* надається статус фундаментальних.

Врешті-решт, Томілін не наводить єдиного, універсального визначення поняття «фундаментальна фізична константа».

У своїй книзі «Фундаментальні фізичні сталі: Від започаткування фізики до космології» О.П. Спірідонов детально аналізує існуючі визначення поняття «фундаментальні сталі» і приходить до невтішного висновку: у науковій і навчальній літературі відсутнє єдине й чітке визначення цього поняття [33, с. 43].

Зрештою, здійснений Спірідоновим аналіз, дав йому можливість сформулювати таке визначення: «фундаментальними фізичними сталими слід вважати константи, що надають інформацію про найбільш загальні, основоположні властивості матерії» [33, с. 43]. Проте ці слова про «найбільш загальні, основоположні властивості матерії», які відображають фундаментальні константи, очевидно, потребують уточнення і конкретизації. Потрібні чіткі критерії, за якими певні фізичні константи можна відносити до фундаментальних, а інші – ні.

У контексті цього ми пропонуємо наступні критерії фундаментальності фізичних констант. Фундаментальними, на нашу думку, слід вважати константи, які, по-перше, не можна виразити через інші константи (незалежність – для розмірних

констант); а, по-друге, варіації (уявні) числових значень цих констант спричиняють кардинальні зміни у нашому Всесвіті. З цього погляду повною (на сьогодні) групою фундаментальних констант, які є необхідними й достатніми для характеристики нашого Всесвіту, слід вважати константи, що наведені в табл. 1 [23].

Як відомо, математичні константи – числа π і e присутні в багатьох фізичних і астрономічних формулах. Наявність у формулах числа π зумовлена *симетричними властивостями простору* (його *ізотропністю*) [9; 15]. З іншого боку, числове значення π , тобто значення відношення довжини кола до свого діаметра у світах, що описуються геометріями Евкліда, Лобачевського або Рімана (що відповідає різним сценаріям розширення Всесвіту), буде різним [2; 15; 16; 25].

Таблиця 1

Фундаментальні математичні та фізичні константи

Константа	Числове значення	Автор і рік введення	Автор і рік першого вимірювання
π	3,141593	У. Джонс, 1706, Л. Ейлер, 1736	?
e	2,718282	Л. Ейлер, 1736	Л. Ейлер, 1736
c	299792458 м/с	Дж. Максвелл, 1864	О. Рьомер, 1676
G	$6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$	І. Ньютон, 1687	Г. Кавендіш, 1798
e	$1,602176 \cdot 10^{-19}$ Кл	Дж. Стоней, 1891	Р. Міллікен, 1906–1916
\hbar	$1,054573 \cdot 10^{-34}$ Дж·с	М. Планк, 1900	Р. Міллікен, 1914
m_e	$9,109382 \cdot 10^{-31}$ кг	Дж. Томсон, 1897	Р. Толмен, Т. Стюарт, 1916
m_p	$1,672622 \cdot 10^{-27}$ кг	Е. Резерфорд, 1919	Е. Резерфорд, 1919
m_n	$1,674927 \cdot 10^{-27}$ кг	Е. Резерфорд, У. Харкінс, 1920	Дж. Чедвік, 1932
N	3	І. Кант, 1747	Арістотель, IV ст. до н. е.
H_0	$(67,8 \pm 1,3)$ км/(с·Мпк)	Е. Габбл, 1929	Е. Габбл, 1929

Число Ейлера e (основа натуральних логарифмів) – математична константа, що має величезний спектр застосування: від теорії комплексних чисел і функцій комплексної змінної, теорії диференціальних рівнянь і теорії ймовірностей до хвильової оптики і теорії хвиль густини в спіральних галактиках. Причини появи числа e у фізичних і астрономічних формулах наступні:

1. Виникає як друга чудова границя.

2. Як результат інтегрування диференціальних рівнянь, в яких зміна якоїсь величини пропорційна самій величині. Так розвивається, наприклад, радіоактивний розпад або інфляція (як грошова, так і розширення Всесвіту на ранньому етапі його еволюції, яку так і називають – «інфляційна стадія»).

3. Як результат інтегрування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, оскільки розв'язком таких рівнянь є функція комплексної змінної з основою e (рівняння хвилі). Це зумовлене симетричними властивостями простору-часу, а саме їх однорідністю [9]. Справа в тому, що в однорідному просторі-часі (де виконуються закони збереження енергії та імпульсу) закони перебігу фізичних процесів є сталими і тому описуються саме такими рівняннями.

4. Як наслідок застосування універсального психофізичного закону Вебера-Фехнера [9], надзвичайно важливого для всього живого на Землі (і наслідком якого є, наприклад, формула Погсона, що пов'язує зоряні величини й освітленості).

Слід зазначити, що ми наводимо список фундаментальних фізичних констант, який дещо відрізняється від списків інших авторів – списків П. Девіса, Й. Розенталя, Л. Окуня, О. Спірідонова, К. Томіліна. Наприклад, О.П. Спірідонов наполягає на включенні до нього сталої Больцмана k . Його аргументи такі: «Стала Больцмана пов'язує макрохарактеристики системи частинок – її температуру – з мікрохарактеристиками руху складових її мікрочастинок – їх середньою кінетичною енергією E . Наприклад, середня кінетична енергія руху частинки, що припадає на одну ступінь свободи, дорівнює $E = kT/2$. Константа k зв'язує разом макро- і мікросвіти і тому грає у фізиці фундаментальну роль. Вона ж входить в отриманий Л. Больцманом фундаментальний фізичний закон, що пов'язує ентропію системи S і термодинамічну ймовірність W : $S = k \ln W$. Цей закон вперше виразив у математичній формі фундаментальну властивість природи – спрямованість фізичних процесів від нерівноваги до

рівноваги, від менш імовірних станів фізичних систем до більш імовірних» [33, с. 22].

З цим важко не погодитись. Слід зазначити, що приблизно ті самі аргументи на користь фундаментальності сталої Больцмана k наводить і К.О. Томлін [35]. Проте, якщо варіювати сталу Больцмана, то, як неважко переконатись, це не призведе до зміни властивостей нашого Всесвіту. Зміна k спричинить лише зміну температурних шкал, які мають суб'єктивний характер. Щодо ентропії, то можна, наприклад, згадати, що має значення не абсолютне значення ентропії, а її зміна. Отже, хоча стала Больцмана дійсно грає у фізиці величезну роль, їй, на нашу думку, не доцільно надавати статус фундаментальної.

Ми також не згодні з включенням Спірідоновим до списку фундаментальних фізичних констант сталої Авогадро N_A . Адже згадаємо визначення цієї сталої. За одиницю кількості речовини приймається моль (СІ), який визначається як кількість речовини, що містить стільки ж атомів, молекул, скільки атомів міститься у 0,012 кг ізотопу Карбону ^{12}C [33, с. 16]. Відношення молярної маси речовини M до маси молекули m_0 цієї самої речовини однаково для усіх речовин і дорівнює сталій Авогадро.

Відтак виявляється, що стала Авогадро асоціюється з молям, а моль асоціюється з певною масою Карбону ^{12}C . Тобто все це – просто результат домовленості («людський фактор»). У такому разі ця стала не може об'єктивно характеризувати наш Всесвіт. До того ж із співвідношення $kN_A = R$, де R – універсальна газова стала, випливає, що добуток двох фундаментальних (за Спірідоновим) сталих дорівнює зовсім не фундаментальній константі.

Спірідонов вводить ще штучно сконструйовану ним величину, яку пропонує вважати фундаментальною сталою, а саме *квант простору-часу* [33, с. 41]:

$$st = \frac{\hbar^2 G^2}{c^7} \approx 10^{-148} \text{ м}^3 \text{ с}.$$

Не обговорюючи доцільність введення цієї константи, зазначимо, що її серйозною вадою, на нашу думку, є те, що вона виражається через відомі фундаментальні константи (але не є безрозмірною, як у випадку безрозмірних констант фундаментальних взаємодій).

Лунають пропозиції (див., наприклад [10; 35]) включити до переліку фундаментальних констант сталу Фермі G_F (характеризує слабку взаємодію), космологічну сталу Λ (характеризує так звану «темну енергію», яка відповідає за прискорене розширення Всесвіту), масу електронного нейтрино m_ν . Можна сказати, що ці пропозиції ще проходять стадію обговорення, (є аргументи як за, так і проти) і тому ми обмежимося переліком, наведеним у табл. 1.

Фундаментальні константи фізики є однією з великих нерозв'язаних проблем сучасної науки. Вимірні експериментально з великою точністю, вони досі не мають скільки-небудь переконливої теоретичної інтерпретації. Чому фундаментальні константи мають саме такі числові значення [33]? Донедавна такі запитання у фізиці взагалі було не прийнято задавати

Числове значення жодної константи не виводиться з існуючих фізичних теорій. На перший погляд це здається зрозумілим, оскільки відомі числові значення природно залежать від сваволі у виборі одиниць фізичних величин. Проте й перехід до безрозмірних констант, що характеризують електромагнітну ($\alpha_e \approx 1/137$), сильну ($\alpha_s \sim 1$), слабку ($\alpha_w \sim 10^{-5}$) та гравітаційну ($\alpha_g \sim 10^{-39}$) взаємодії, не знімає цю проблему. Цілковито можна погодитись з О.П. Спірідоновим [33], що все ж таки фізику важко вважати досконалою, поки проблема фундаментальних констант не знайде свого теоретичного розв'язання.

До того ж під кінець XX століття завдяки дослідженням цієї проблеми передусім Й.Л. Розенталем, П. Девісом, Л.Б. Окунем та іншими [10; 26; 28–30] вдалося з'ясувати, що характерні параметри і стійкість основних структурних елементів Всесвіту – ядер, атомів, планет, зір, галактик – надзвичайно чутливі до числових значень фундаментальних констант.

Порівняно невелике уявне «ворушіння» числових значень фундаментальних констант спричиняє катастрофічні наслідки для нашого Всесвіту. Стало зрозуміло, що за трохи іншого набору фундаментальних констант наш світ буде зовсім іншим, наприклад, без звичайних для нас зір або без складних хімічних елементів, без відомого нам життя. Більше того, значення констант мають не просто перебувати в певних межах, а мають бути відповідним чином збалансовані між собою. Проблема

фундаментальних констант набуває таким чином глобального значення.

У сімдесяті роки ХХ ст. Б. Картер формулює антропний принцип [18], який відразу привертає увагу багатьох учених. Сутність його (див., наприклад, [21]) полягає в тому, що існує тонке підстроювання спостережуваного Всесвіту під людину.

На думку відомого еволюційного біолога Річарда Докінза саме антропний принцип є альтернативою релігійним поглядам [12]. Справа в тому, що антропний принцип у його сильному формулюванні («сильний» АП, [18]) підштовхує нас до теологічного погляду на світ, приводить до ідеї Творця цього світу. Матеріалістичною альтернативою таким поглядам є ідея «ансамблю світів» – всесвітів із різними фундаментальними властивостями, в одному з яких умови випадково виявилися сприятливими для виникнення життя й людини [21].

Антропний принцип висвітлює глибинні, сутнісні зв'язки між мікро, макро і мегасвітом, засади існування спостережуваного Всесвіту і життя в ньому. Ці зв'язки і засади становлять сучасну наукову картину світу, є основою її цілісного сприйняття [21].

Аналіз цих проблем дає змогу з єдиних позицій підійти до розгляду практично всіх основних розділів фізики та астрофізики. Фундаментальні константи ніби зв'язують їх в одне ціле, являючись невід'ємними характеристичними параметрами всіх найважливіших фізичних і астрофізичних теорій – теорії відносності (спеціальної та загальної), атомної та ядерної фізики, хвильової оптики, статистичної фізики та термодинаміки, квантової механіки, теорії будови та еволюції зір, фізики елементарних частинок і космології. Розуміння суті проблеми неможливе без синтезу досягнень усієї фізики, її сучасних теорій взаємодій, астрофізики. В процесі такого аналізу виникають питання загальнонаукового, методологічного, світоглядного характеру [23].

Все це зумовило завдання спецкурсу «Фундаментальні фізичні та математичні константи» і його програму.

Завданнями спецкурсу є [23]:

1. Розкрити місце і значення фундаментальних констант у загальній і професійній освіті; провести методологічний аналіз самого поняття «фундаментальна константа», аналіз змісту існуючих таблиць фізичних констант, їх розмірностей; розглянути термінологічні питання та проблеми точного вимірювання числових значень констант.

2. Показати, наскільки характерні параметри мікро- і мегасвіту залежать від числових значень фундаментальних констант.

3. З'ясувати залежність фундаментальних фізичних констант від часу, вплив числових значень констант на стійкість основних структурних елементів спостережуваного Всесвіту (ядер, атомів, зір, галактик).

4. Детально обговорити антропний принцип, його різні формулювання, проілюструвати його зміст достатньою кількістю прикладів. Провести аналіз можливих інтерпретацій антропного принципу. Зосередити увагу студентів на можливому трактуванні числових значень фундаментальних констант як флуктуацій (гіпотеза «ансамблю світів»), обговорити проблему формування цих числових значень на ранніх етапах еволюції Всесвіту.

5. Прослідкувати шляхи розвитку фізики від єдиної теорії поля в розумінні А. Ейнштейна до «теорії всього». Розглянути астрофізичний аспект.

6. Завершити формування сучасної астрофізичної картину світу як складової частини природничо-наукової картини світу.

7. Здійснювати інтелектуальне, естетичне та гуманітарне виховання студентів.

8. Підвищити методологічну та креативну культуру майбутнього вчителя.

Програма спецкурсу, що розроблена автором, виглядає так [23]:

1. Вступ. Постановка проблеми фундаментальних констант.

Таблиці фізичних сталих. Визначення поняття «фундаментальна фізична константа». Які фізичні сталі можуть вважатися фундаментальними? Перелік та числові значення фундаментальних констант фізики і математики. Обґрунтування фундаментальності певних математичних і фізичних констант.

2. Фундаментальні математичні константи.

Визначення числа π . Число π і евклідова геометрія. Число π і симетричні властивості простору. Визначення числа e . Друга чудова границя. Експоненціальна функція. Застосування експоненціальної функції у розв'язанні диференціальних рівнянь. Закон Вебера–Фехнера. Логарифмічна спіраль і спіральні галактики.

3. Фундаментальні константи і розмірність фізичних величин.

Значення точності вимірювання фундаментальних фізичних констант. Системи одиниць фізичних величин. Основні одиниці в системі СІ: історія і сучасні значення. Умовність одиниць фізичних величин. Природні одиниці величин квантової електродинаміки. Визначення безрозмірних констант фундаментальних взаємодій: α_e , α_g , α_s , α_w .

4. Суперконстанти: c , G , \hbar .

c , G , \hbar – фізика. «Куб фізичних теорій» в системі координат c , G , \hbar . Шкала Планка. Знаходження планківських величин методом аналізу розмірностей.

5. Характерні параметри космічних тіл і фундаментальні константи.

Вираз характерних параметрів зір і планет через фундаментальні константи: характерна маса планети; характерний розмір планети; характерна маса зорі; характерний розмір зорі; характерні маса і розмір білого карлика, характерний розмір чорної діри.

6. Стійкість основних структурних елементів Всесвіту і фундаментальні константи.

Уявні експерименти із зміни: швидкості світла, мас електрона, протона та нейтрона, вимірності простору, сталої Габбла. Уявні експерименти зі зміни безрозмірних констант фундаментальних взаємодій.

7. Антропний принцип.

Збіги «великих чисел». «Гіпотеза великих чисел» (гіпотеза Дірака). Приклади підстроювання параметрів спостережуваного Всесвіту під існування людини. Слабкий антропний принцип. Проблема утворення Карбону у Всесвіті. Сильний антропний принцип. Інтерпретація слабого антропного принципу. Числові значення фундаментальних констант як флуктуації. Інтерпретація сильного антропного принципу.

8. Куди прямує фізика?

Залежність фундаментальних констант від часу. Залежність безрозмірних констант фундаментальних взаємодій від енергії процесів. Шляхи розвитку фізики: від єдиної теорії поля в розумінні А. Ейнштейна до «теорії всього». Теорія «Великого об'єднання». Супероб'єднання.

Крім лекцій програма спецкурсу передбачає проведення практичних занять. Щоб ці заняття проходили ефективно і був створений цей навчальний посібник. Подані задачі розміщені у

певній послідовності, що відповідає визначеній логіці вивчення матеріалу. Спеціально підібрані і сформульовані задачі згруповано за сімома темами (див. Зміст):

1. У першому розділі, присвяченому математичним константам, присутні задачі, які допомагають глибше усвідомити їх сутність, демонструють їх взаємозв'язок між собою, ілюструють причини їх появи у фізичних формулах і законах.

2. У другому розділі зібрані задачі, які стосуються вимірювання фундаментальних фізичних констант, деякі з них сформульовані на основі історичних дослідів. Фактично ці задачі мають підтвердити відомі числові значення фундаментальних констант.

3. Третій розділ присвячений проблемі, яку формулюють так: «Чи можуть фундаментальні фізичні константи мати розмірність?» Задачі цього розділу демонструють умовність, відносність і суб'єктивність одиниць вимірювання фізичних величин.

4. Задачі четвертого розділу демонструють зв'язок характеристичних параметрів мікро- і мегасвіту з фундаментальними константами. Тут містяться також задачі, що стосуються шкали Планка.

5. У п'ятому розділі розміщено задачі, які демонструють у явному вигляді зв'язок характерних параметрів космічних тіл (мас, радіусів, світностей) з фундаментальними константами. Цей зв'язок чітко показує, наскільки сильно ці параметри залежать від числових значень фундаментальних фізичних констант.

6. Задачі шостого розділу досліджують вплив числових значень фундаментальних констант на стійкість основних структурних елементів спостережуваного Всесвіту. Наслідки цього впливу наочно демонструють, наскільки чутливим є наш Всесвіт навіть до невеликого уявного «ворушіння» сучасних числових значень фундаментальних констант.

7. Сьомий розділ присвячений антропному принципу. Тут присутні задачі з розрахунку так званих «великих чисел», з'ясування прикладів на користь як «слабкого», так і «сильного» антропних принципів, можливих інтерпретацій цих принципів.

Всі задачі мають не тільки відповіді, а й докладні та розгорнуті розв'язання з поясненнями і коментарями. Це виправдано в умовах інтенсифікації освітнього процесу,

збільшення частки самостійної роботи студента, поширення дистанційної форми навчання.

За цих умов особливої актуальності набувають задачі пізнавального характеру. Вкрай корисними, на нашу думку, є задачі з історичним змістом, які підкреслюють важкий шлях здобування істини. У навчальному посібнику багато творчих задач, які сформульовані, наприклад, за схемою «що б сталося, якби ...».

Сподіваємось, що цей навчальний посібник сприятиме розвитку творчого мислення, формуванню цілісної астрофізичної картини світу як частини природничо-наукової картини світу, наукового світогляду.

1. ФУНДАМЕНТАЛЬНІ МАТЕМАТИЧНІ КОНСТАНТИ

1.1. **Визначення числа π .** Отримайте з відомого ряду Грегорі (Джеймс Грегорі, 1670 р.) [5]:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (|x| \leq 1)$$

відомий ряд Ляйбніца (Готфрід Вільгельм Ляйбніц) для визначення числа π .

1.2. **Поширеність числа π .** Наведіть десять фізичних формул, куди б входило число π .

1.3. **Задача Бюффона (1777 р.).** Площина розграфлена паралельними прямими на відстані L одна від одної (рис. 1). На цю площину навмання кидається голка довжиною $l < L$. Знайдіть ймовірність того, що голка перетне одну з прямих.

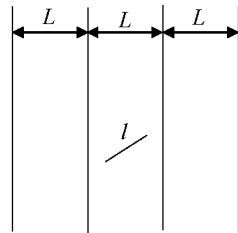


Рис. 1

1.4. **Математичний маятник.** Поясніть, звідки число π з'являється у формулі для періоду коливань математичного маятника.

1.5. **Свічка між дзеркалами.** Свічка розташована посередині між паралельними дзеркалами на відстані a від кожного з них (рис. 2).

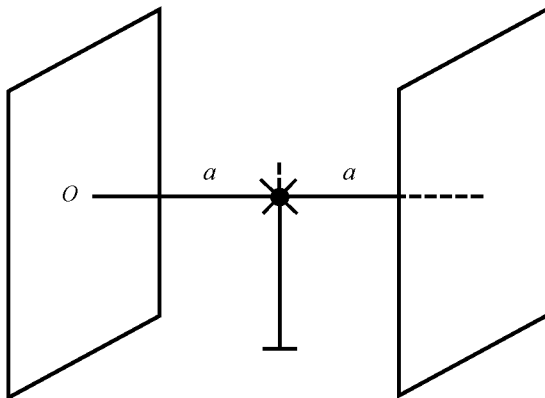


Рис. 2

Нехай сила світла свічки дорівнює I . Знайдіть освітленість у точці O , яка є основою перпендикуляра, опущеного з вогника свічки на площину дзеркала [15].

1.6. Чи завжди відношення довжини кола до діаметру дорівнює π ? Як відомо, існують неевклідові геометрії – геометрії з ненульовою кривизною простору. У просторі з додатною кривизною реалізуються геометрії Рімана або сферична, у просторі з від'ємною кривизною – геометрія Лобачевського. Як змінюється відношення довжини кола до діаметру в неевклідових геометріях?

1.7. Зв'язок між π і e – 1. Напишіть відому формулу, що пов'язує числа π , e та уявну одиницю i (тотожність Ейлера, 1748 р.).

1.8. Зв'язок між π і e – 2: інтеграл Ейлера–Пуассона. Доведіть, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

1.9. Обчислення числа e . Відоме розкладання функції e^x у степеневий ряд за формулою Маклорена [5]:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x),$$

де залишковий член у формі Лагранжа не перевищує

$$R_{n+1}(x) < \frac{e}{(n+1)!}.$$

Запропонуйте спосіб обчислення числа e з визначеною точністю.

1.10. Що більше? З'ясуйте, що більше e^π або π^e .

1.11. Гамма-функція і число π . За Ейлером гамма-функція $\Gamma(x)$ визначається так [5]:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Ця функція має низку цікавих властивостей, зокрема, для $x=n$, де n – ціле додатне число, $\Gamma(n+1) = n!$. Використовуючи закон доповнення для гамма-функції:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

визначте значення $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

1.12. Формула Стірлінга. Відомо, що для наближеного обчислення факторіалу $n!$ у випадку надто великих чисел n використовують формулу Стірлінга [5]:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

яка пов'язує факторіал і числа e та π . З якою відносною похибкою «працює» формула Стірлінга?

Вказівка: знайдіть у літературі більш точну залежність, яку розрахував П. Лаплас ще у 1812 р.

1.13. Поширеність числа e . Наведіть десять фізичних формул, куди б входило число e .

1.14. Зіткнення частинок. Ймовірність того, що частинка на ділянці шляху $[l, l + \Delta l]$ зіткнеться з іншою частинкою, дорівнює $\mu \Delta l$, де μ деяка стала. Знайдіть ймовірність зіткнення частинок на шляху l .

1.15. Радіоактивний розпад. Ймовірність розпаду радіоактивного атома за час Δt дорівнює $\lambda \Delta t$. Ймовірність розпаду не залежить від того, як довго атом вже існує, не розпадаючись, тому λ від часу не залежить (λ – так звана стала розпаду). Яка ймовірність розпаду атома за час t ? Знайдіть також співвідношення між сталою розпаду λ та періодом піврозпаду [1].

1.16. Розподіл Гіббса. Розподіл Гіббса або канонічний розподіл був відкритий Джеймсом Гіббсом у 1901 р. для класичної статистики. Він має вигляд [24]:

$$w_n = A e^{-\frac{E_n}{kT}},$$

де w_n – ймовірність такого стану усієї системи, за якого дане тіло (як мала частина великої системи) або підсистема перебуває в деякому визначеному стані з енергією E_n , k – стала Больцмана, T – температура системи (температура тіла і системи однакова, оскільки система перебуває в рівновазі), A – сталий множник. Ця формула – одна з найважливіших у статистичній фізиці. З розподілу Гіббса, наприклад, випливають розподіли Максвелла і Больцмана [3; 37]. Обґрунтуйте появу експоненти у розподілі Гіббса.

1.17. Доляння мікрочастинками потенціальних бар'єрів. Визначте коефіцієнт прозорості потенціального бар'єра прямокутної форми (рис. 3), якщо

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \quad x > a; \\ U_0, & 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

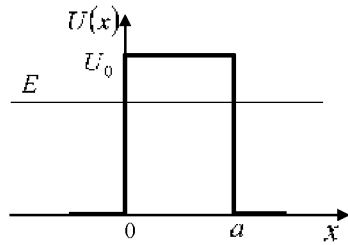


Рис. 3

для значень енергії частинки $E < U_0$ [6].

1.18. Формула Погсона. У 1856 р. англійський астроном Норман Погсон, порівнюючи блиск зір різних величин, виявив, що інтервалові в 5 зоряних величин відповідає відношення величин освітленості, яке дорівнює 100. Врешті-решт він отримав формулу, яку ми тепер називаємо формулою Погсона:

$$m_2 - m_1 = -2,5 \lg \frac{E_2}{E_1},$$

де m_1 і m_2 – зоряні величини двох зір, а E_1 та E_2 – освітленості, які створюють ці зорі на Землі відповідно. Отримайте цю формулу, застосовуючи психофізіологічний закон Вебера–Фехнера [2; 9], який можна сформулювати так: зміна будь-якого відчуття прямо пропорційна відносній зміні подразнювального чинника.

2. ВИМІРЮВАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ КОНСТАНТ ФІЗИКИ

2.1. Швидкість світла – 1. Перше експериментальне підтвердження скінченності швидкості світла було здійснене датським астрономом О. Рьомером у 1676 р. Спостерігаючи один з галілеєвих супутників Юпітера, а саме Іо, він виявив порушення періодичності його затемнень планетою. За півроку спостережень початок затемнень все більше і більше затримувався, досягаючи приблизно 22 хвилини (насправді ця затримка не має перевищувати 17 хвилин) [19, 33]. Визначте за цими даними величину швидкості світла у вакуумі.

2.2. Швидкість світла – 2. Другий астрономічний метод визначення швидкості світла був використаний у 1725 р. англійським астрономом Дж. Бредлі. Спостерігаючи впродовж року зорю γ Дракона, Бредлі відкрив явище *аберації світла* – зміщення положення зорі на небесній сфері, зумовлене зміщенням телескопа (внаслідок руху Землі навколо Сонця) за час проходження світлового променя від об'єктива до окуляра [2]. Тому, щоб обране світило залишалось в центрі поля зору, інструмент потрібно дещо нахилити в напрямку руху Землі. Унаслідок руху Землі зі швидкістю $v = 29,8$ км/с зміщення кожної зорі за рік створює певну фігуру. Для тих зір, що розташовані біля полюсу екліптики (а γ Дракона відноситься саме до таких зір), – це маленькі кола радіусом $\sigma = 20,5''$. Слід зазначити, що крім руху спостерігача причиною аберації є також скінченність швидкості поширення світла. Визначте за наведеними даними швидкість світла.

2.3. Швидкість світла – 3. В історичному досліді А.І.Л. Фізо із визначення швидкості світла відстань між колесом, яке мало $N = 720$ зубців, та джерелом було $l = 8633$ м. Світло зникло в перший раз за частоти обертання зубчатого колеса $\nu = 12,67\text{с}^{-1}$ [33]. Яке значення швидкості отримав Фізо?

2.4. Швидкість світла – 4. У 1875 році метод Фізо був використаний французьким фізиком М.-А. Корню, який значно збільшивши частоту обертання колеса, зареєстрував 28 послідовних зникнень та появ світла. Яке значення швидкості світла одержав Корню, якщо відстань від колеса до дзеркала була 23000 м, число зубців 200, а 28-а поява світла спостерігалась за частоти обертання колеса $914,3\text{с}^{-1}$ [32]?

2.5. Швидкість світла – 5. У 1924–1927 роках А. Майкельсон розробив установку (рис. 4), в якій промінь

світла посилався з вершини гори Вільсон на вершину Сан-Антоніо (відстань 35,41 км [19]). Як затвор, було використано восьмигранну дзеркальну призму, що могла обертатися з частотою до 529 обертів в секунду. Частота підбиралась таким чином, щоб за час проходження світлом туди й назад, призма встигала повернутись на $1/8$ оберта. За допомогою цієї установки Майкельсону вдалося отримати найбільш точне значення швидкості світла. Визначить за наведеними даними це значення.

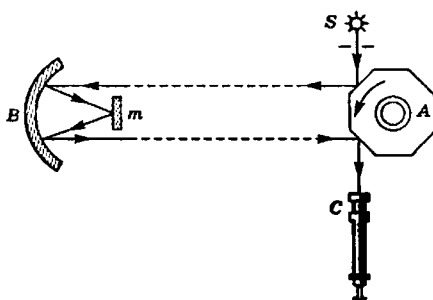


Рис. 4

2.6. Гравітаційна стала. У 1798 р. Г. Кавендіш здійснив досліди з вимірювання середньої густини Землі з використанням крутильних терезів. Дві малих кулі, масою 729 г кожна, були закріплені на кінцях коромисла, довжиною 182,88 см і підвішеного на мідній нитці, довжиною 101,6 см та діаметром 0,27 мм. Поблизу малих куль розташовувалися великі кулі, масою 158 кг. Коли кут між коромислом та лінією, яка з'єднує великі кулі, становив менше 4,38°, нитка переставала здійснювати крутильні коливання (гравітаційна взаємодія куль збільшувала жорсткість нитки) [33]. Розрахуйте на основі цих даних гравітаційну сталу.

Вказівка: зв'язок між модулем кручення D та модулем Юнга E (для міді прийняти $E = 112$ ГПа) визначається співвідношенням [39]:

$$D = \frac{\pi d^4}{48l} E,$$

де d – діаметр нитки, l – її довжина.

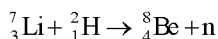
2.7. Стала Планка. За вимірюваннями Луммера і Принсгейма довжина хвилі $\lambda_{\text{макс}}$, що відповідає найбільшій спектральній густині розподілу випромінювання за температури

$T = 1000\text{K}$, дорівнює 2901 нм . Розрахуйте за цими даними сталу Планка [37].

2.8. Заряд електрона. Величину «атома електрики» вперше теоретично розрахував ірландський фізик Дж. Стоней (1891 р.). Відомо, що для виділення одного молю одновалентної речовини під час електролізу потрібний заряд $96\,484,56\text{ Кл}$ (стала Фарадея) [33]. Обчисліть кількість електрики, яка необхідна для виділення одного атому речовини.

2.9. Маса електрона і протона. Запропонуйте метод визначення мас електрона і протона.

2.10. Маса нейтрона. У зв'язку з відсутністю електричного заряду у нейтрона він не відхиляється в електричному та магнітному полях. Тому маса нейтрона визначається за енергетичним виходом ядерних реакцій. Відомо, що в результаті реакції



виділяється енергія 15 МеВ . Знайдіть за цими даними масу нейтрона.

2.11. Розмірність простору. Напишіть фізичні та астрофізичні формули, які б засвідчували тривимірність простору нашого Всесвіту.

2.12. Стала Габбла. У 1929 р. Е. Габбл, зіставивши емпіричні дані про спектри 23 галактик та відстані до них, встановив закономірність: $v_r = H_0 r$, де v_r – променева швидкість галактики (визначалась за ефектом Доплера), r – відстань до неї, а H_0 – коефіцієнт пропорційності, який ми нині називаємо сталою Габбла. Відстані були визначені на основі даних про блиск найяскравіших зір, встановлених спектральних класів та виявлених цефеїд в інших галактиках. Отримане ним значення величини H становило $(465 \pm 50)\text{ км}/(\text{с} \cdot \text{Мпк})$, що було надто неточно. Ще менш точне значення отримав Ж. Леметр, але на 2 роки раніше. Виявлену закономірність нині називають законом Габбла–Леметра.

Одним із найбільш надійних методів визначення сталої Габбла є метод стандартних «свічок», в якості яких виступають наднові Ia типу [2]. Феномен наднової цього типу є наслідком термоядерного вибуху виродженого карбон-оксигенового ядра у зір помірної маси на завершальному етапі їх еволюції або карбон-оксигенового білого карлика у тісній подвійній системі, і тому наднові Ia типу мають практично однакові параметри. Їх абсолютна зоряна величина у максимумі блиску

$M_V = -19,52^m \pm 0,07^m$. Із спостережень для трьох наднових визначено їх червоні зміщення ($z = \Delta\lambda/\lambda$): $z_1=0,0227$; $z_2=0,0151$; $z_3=0,0312$ і відповідні видимі зоряні величини: $m_1 = 15,43^m$; $m_2 = 14,26^m$; $m_3 = 15,63^m$ [40]. Знайдіть за цими даними сталу Габбла.

3. СИСТЕМИ ОДИНИЦЬ ВИМІРЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН

3.1. Чия система краще (з доповненням із [36])? Джим і Джо, два фахівця з космічної фізики, що зросли на різних планетах, зустрічаються на міжпланетному симпозиумі Палати мір і ваги, присвяченому затвердженню універсальної системи фізичних одиниць. Джим з гордістю описує заслуги системи MKSA, якою користуються всі цивілізовані люди на Землі. Джо з неменшою гордістю звеличує принадності системи M'K'S'A', якою користуються цивілізовані люди по всій Сонячній системі, крім Землі. Якщо стали множники, що зв'язують одиниці маси, довжини і часу в цих двох системах, дорівнюють μ , λ і τ , так що

$$m' = \mu m, \quad l' = \lambda l, \quad t' = \tau t,$$

то які множники будуть потрібні для переведення одиниць вимірювання з однієї системи в іншу:

- а) швидкості;
- б) прискорення;
- в) сили;
- г) енергії;
- д) гравітаційної сталої;
- е) сталої Планка.

3.2. Величина гравітаційної сталої в стандартах Сонячної системи. Визначте, чому буде дорівнювати числове значення величини GM_{\odot} , якщо відстань вимірювати в астрономічних одиницях, а час у роках [36]?

3.3. В яких одиницях вимірювати електричний заряд? Заряд електрона в системі СГС дорівнює $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ СГСЕ q . Розпишіть розмірність електричного заряду через грами, сантиметри та секунди.

3.4. Система СІ та фундаментальні константи. Виразіть існуючі еталони кілограма, метра та секунди через фундаментальні константи.

3.5. Атомні лінійка та годинник. За допомогою трьох фундаментальних констант m_e , e , \hbar у системі СГС можна отримати розмірності усіх фізичних величин (у системі СІ треба використовувати ще додаткову величину — електричну сталу $\varepsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12}$ Кл 2 /Н \cdot м 2). Так, за одиницю довжини можна вибрати борівський радіус — по суті радіус атома Гідрогену

$$r_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}.$$

Виразіть за допомогою вище зазначених величин «атомну» одиницю часу.

3.6. Геометризована система одиниць. Можна ввести так звану «геометризовану» систему одиниць, в якій $G=c=1$ або $\hbar=c=1$. Отже, час, масу й довжину можна виразити в одних й тих самих одиницях, наприклад, у метрах. Дехто вважає таку систему навіть зручною, оскільки до звичайних розмірностей можна переходити наприкінці обчислень.

Виразіть у метрах у системі $G=c=1$ значення наступних величин: 1 рік, масу і світність Сонця.

3.7. Найслабкіші взаємодії. Константа слабкої чотириферміонної взаємодії або константа Фермі у системі СІ дорівнює $G_F = 1,4 \cdot 10^{-62} \text{ Дж} \cdot \text{м}^3$. Але наочніше виразити G_F в електрон-вольтах, виділивши в явному вигляді множники \hbar та c :

$$G_F = 1,2 \cdot 10^{-5} (\hbar c)^3 \text{ Гев}^{-2}.$$

Виразіть гравітаційну сталу також в електрон-вольтах через константи \hbar та c і порівняйте з величиною G_F у системі $\hbar=c=1$.

3.8. Безрозмірні константи фундаментальних взаємодій – 1. Електромагнітна взаємодія. Виразіть у так званих природних одиницях квантової електродинаміки (маса електрона m_e – одиниця маси, $m_e c^2$ – одиниця енергії, комптонівська довжина хвилі $\lambda_e = \hbar/m_e c$ – одиниця довжини, $\hbar/m_e c^2$ – одиниця часу) електростатичну енергію відштовхування двох електронів, що розташовані на відстані λ_e .

3.9. Безрозмірні константи фундаментальних взаємодій – 2. Гравітаційна взаємодія. Аналогічно введенню фундаментальної безрозмірної константи електромагнітної взаємодії введіть фундаментальну безрозмірну константу гравітаційної взаємодії. Оскільки основний внесок у видиму матерію дають баріони, то замість маси електрона у природних одиницях квантової електродинаміки у цьому разі логічно використовувати масу протона.

3.10. Всесвіт з іншими значеннями c , G , \hbar . Уявіть собі всесвіт, в якому значення c , G , \hbar , виражені в наших кілограмах, метрах та секундах інші, ніж у нас, але усі безрозмірні

фундаментальні константи ($\alpha_e, \alpha_g, \alpha_s, \alpha_w$) ті ж самі, що й в нас.
Чи буде фізика в тому всесвіті відмінною від нашої?

4. ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ПАРАМЕТРИ МІКРО- І МЕГАСВІТУ І ФУНДАМЕНТАЛЬНІ КОНСТАНТИ

4.1. Характеристичні довжини у мікросвіті. За допомогою чотирьох фундаментальних констант: c , \hbar , m_e та e можна скласти три комбінації з розмірністю довжини: комптонівську довжину хвилі електрона λ_e , класичний радіус електрона r_e та борівський радіус електронної орбіти основного стану атома Гідрогену r_B . Згадайте ці формули та виведіть останні дві величини через першу – λ_e та через безрозмірну фундаментальну константу електромагнітної взаємодії α_e (сталу тонкої структури). Укажіть, які області взаємодії випромінювання з речовиною визначають величини λ_e , r_e та r_B .

4.2. Гравітаційна довжина. Прирівнюючи повну енергію спокою тіла його власній гравітаційній енергії, отримайте характеристичну довжину, яку можна назвати *гравітаційною довжиною* [19]. Який зміст може мати ця величина? Оцініть гравітаційну довжину спостережуваного Всесвіту, якщо прийняти для його маси значення $M_{\text{вс}} \sim 10^{53}$ кг.

4.3. Шкала Планка – 1. Методом аналізу розмірностей побудуйте «природні» одиниці довжини, часу і маси за допомогою фундаментальних фізичних констант c , G , \hbar .

4.4. Шкала Планка – 2. Використовуючи планківські одиниці маси, довжини і часу (див. попередню задачу), побудуйте «природні» (планківські) одиниці густини, енергії і температури.

4.5. Планківська світність? Складіть із фундаментальних констант c та G величину з розмірністю важливого астрономічного параметру – світності. Порівняйте її числове значення зі світністю Сонця і світністю нашої Галактики. Який зміст може мати визначена таким чином величина? З'ясуйте, яка маса змогла б випромінювати подібну величину енергії за характерний час життя Всесвіту.

5. ХАРАКТЕРНІ ПАРАМЕТРИ КОСМІЧНИХ ТІЛ І ФУНДАМЕНТАЛЬНІ КОНСТАНТИ

5.1. Характерна маса планет [29]. Для існування атомів у космічному тілі необхідно, щоб кінетична енергія їх руху була не більше енергії зв'язку електронів в атомах. Обмежувачись розглядом тільки атомів Гідрогену (енергія зв'язку та розміри складних атомів, решті-решт, визначаються борівськими значеннями W_B та r_B), виразіть характерну масу планет через фундаментальні фізичні константи.

Вказівка: зробіть такі спрощення: 1) замість розподілу фізичних величин за радіусом космічного тіла, використовуйте їх середні значення; 2) наявністю складних ядер знехтуйте; 3) обертання космічного тіла та його магнітне поле не враховуйте; 4) опускайте усі безрозмірні числові множники ~ 1 .

5.2. Характерна маса зір. Виразіть характерну масу зір через фундаментальні фізичні константи [22].

Вказівка: скористайтесь вказівкою до попередньої задачі та розгляньте випадок достатньо гарячої зорі, коли тиск випромінювання зрівнюється з кінетичним (газовим) тиском.

5.3. Мінімальна маса зорі. Вважаючи, що для ефективного перебігу термоядерних реакцій необхідно, щоб середня кінетична енергія протонів в центрі зорі за порядком величини дорівнювала

$$kT \sim \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} W_B,$$

де W_B – борівська енергія зв'язку електрона в атомі Гідрогену, m_p , m_e – маси протона і електрона, оцініть мінімальну масу зорі. Це припущення спирається на достовірний факт перебігу термоядерних реакцій всередині Сонця за середньої теплової енергії протонів $kT \sim 1$ кеВ.

5.4. Гранична маса білого карлика. Виразіть граничну масу білого карлика (масу Чандрасекара) через фундаментальні фізичні константи [22].

Вказівка: скористайтесь вказівкою до задачі 5.1.

5.5. Характерна маса нейтронних зір та чорних дір. Виразіть характерну масу нейтронних зір і чорних дір через фундаментальні константи.

Вказівка: скористайтесь вказівкою до задачі 5.1.

5.6. Характерні розміри космічних тіл – 1. Планети і зорі. Визначте через фундаментальні фізичні константи характерні розміри [22]:

- а) планет;
- б) зір головної послідовності.

Вказівка: скористайтесь вказівкою до задачі 5.1.

5.7. Характерні розміри космічних тіл – 2. Кінцеві стадії еволюції зір. Визначте через фундаментальні фізичні константи характерні розміри [22]:

- а) білих карликів;
- б) чорних дір;
- в) нейтронних зір.

Вказівка: скористайтесь вказівкою до задачі 5.1.

5.8. Характерна світність. Використовуючи теоретичне співвідношення маса–світність, виразіть характерну світність зір через фундаментальні константи [22].

5.9. Характерний час життя зорі. Оскільки характерний час життя зорі переважно визначається її ядерною еволюцією, виразіть через фундаментальні константи так званий «ядерний час» зорі [22].

5.10. Основні параметри спостережуваного Всесвіту. Виразіть через фундаментальні фізичні константи:

- а) радіус спостережуваного Всесвіту;
- б) масу спостережуваного Всесвіту;
- в) його середню густину.

6. СТИЙКІСТЬ ОСНОВНИХ СТРУКТУРНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ВСЕСВІТУ І ЧИСЛОВІ ЗНАЧЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ КОНСТАНТ

6.1. Уявні експерименти зі швидкістю світла – 1. Розрахуйте тиск випромінювання в центрі Сонця ($T = 1,55 \cdot 10^7 \text{ K}$, $\rho = 1,49 \cdot 10^5 \text{ kg/m}^3$) за умови, що швидкість світла зменшилась у 1000 разів, і порівняйте його з газовим тиском. Зробіть висновки.

6.2. Уявні експерименти зі швидкістю світла – 2. Чи зміниться кулонівська сила притягання між протоном і електроном в атомі Гідрогену (в основному стані), якщо швидкість світла зменшиться (збільшиться) у 1000 разів?

6.3. Уявні експерименти зі швидкістю світла – 3. З'ясуйте, як зміняться безрозмірні константи електромагнітної та гравітаційної взаємодії внаслідок уявної зміни швидкості світла.

6.4. Уявні експерименти з гравітаційною сталою. Проаналізуйте наслідки для Сонця і Сонячної системи у разі збільшення (зменшення) гравітаційної сталої вдвічі.

6.5. Уявні експерименти зі сталою Габбла. Проаналізуйте наслідки для Всесвіту від збільшення (зменшення) значення сталої Габбла в 10 разів. Така зміна цілком виправдана, оскільки перше визначення цієї сталої самим Е. Габблом дало результат $\approx 500 \text{ км/(с \cdot Мпк)}$.

6.6. Електромагнітна взаємодія. Зробіть аналіз наслідків уявної зміни безрозмірної константи електромагнітної взаємодії.

6.7. Гравітаційна взаємодія. Зробіть аналіз наслідків уявної зміни безрозмірної константи гравітаційної взаємодії.

6.8. Сильна взаємодія. Зробіть аналіз наслідків уявної зміни безрозмірної константи сильної взаємодії.

6.9. Слабка взаємодія. Зробіть аналіз наслідків уявної зміни безрозмірної константи слабкої взаємодії.

7. АНТРОПНИЙ ПРИНЦИП

7.1. Збіг «великих чисел» – 1. Оцініть відношення радіусу спостережуваного Всесвіту до комптонівської довжини хвилі електрона.

7.2. Збіг «великих чисел» – 2. Визначте час, необхідний для проходження світлом характерного розміру елементарної частинки, наприклад, протона (ви, звичайно, пам'ятаєте, що протон не є елементарною частинкою, але тут це не важливо). Виразіть вік Всесвіту в цих умовних одиницях (за П. Діраком).

7.3. Збіг «великих чисел» – 3. Обчисліть кулонівську силу взаємодії електрона з протоном в атомі Гідрогену і порівняйте її з гравітаційною силою, яка діє між ними.

7.4. Збіг «великих чисел» – 4. Виразіть масу спостережуваного Всесвіту в масах протона.

7.5. Антропний принцип у прикладах – 1. Наведіть приклади, які можна інтерпретувати як прояв «слабкого» антропного принципу.

7.6. Антропний принцип у прикладах – 2. Наведіть приклади, які можна інтерпретувати як прояв «сильного» антропного принципу.

7.7. Інтерпретація антропного принципу – 1. Як можна інтерпретувати «слабкий» антропний принцип?

7.8. Інтерпретація антропного принципу – 2. Як можна інтерпретувати «сильний» антропний принцип?

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТА ВІДПОВІДІ

1. Фундаментальні математичні константи

1.1. Підставляючи у ряд Грегорі $x = 1$, отримуємо ряд Ляйбніца, що дає змогу обчислити число π із наперед заданою точністю:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

1.2. Наприклад,

1) період коливань математичного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

2) третій узагальнений закон Кеплера

$$\frac{T^2(m_1 + m_2)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G};$$

3) розподіл Максвелла

$$dw(p) = \frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mkT}} dp_x dp_y dp_z;$$

4) закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2};$$

5) потенціал поля точкового заряду

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r};$$

6) магнітна стала

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2;$$

7) формула Планка

$$B(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{kT} - 1};$$

8) світність зорі

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4;$$

9) критична густина Всесвіту

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G};$$

10) закон Гаусса для гравітаційного поля

$$\oint_S g_n dS = -4\pi Gm.$$

1.3. Цю задачу можна розв'язувати стандартним методом, застосовуючи поняття геометричної ймовірності. Проте найпростіший спосіб, що не потребує розрахунку площ і інтегрування, полягає у наступному [4].

Для спрощення покладемо, що $l = L = 1$. Нехай кількість кидань голки є N , а кількість вдалих спроб – M . Зрозуміло, що за $N \rightarrow \infty$ кількість перетинань

$$M(N) \sim pN,$$

де p – деяка стала, що дорівнює ймовірності перетинання голки з лінією в результаті одного кидання.

Замінімо голку довжини 1 вдвічі довшою голкою. Тоді кількість перетинань також збільшиться (в середньому) вдвічі. Більш того, немає необхідності, щоб голка довжини 2 була прямою. Її можна зігнути у вигляді кочерги (у середній точці) – обидві половинки дадуть ту ж саму кількість перетинань, а разом – удвічі більше.

З наведених міркувань випливає, що кидаючи будь-яку пласку «криву голку» довжини l , отримаємо у разі $N \rightarrow \infty$ асимптотично pNl точок перетинань.

Будемо, зокрема, кидати коло діаметром 1. Довжина l цього кола є π . Асимптотично це дасть після N кидків $pN\pi$ точок перетинань. Але таке коло за будь-якого кидання дає дві точки перетинання. Отже,

$$pN\pi = 2N.$$

Звідси дістаємо дивовижний результат:

$$p = \frac{2}{\pi}.$$

Значимо, що кидаючи голку багато разів і обчислюючи частоту перетинань, можна отримати непогане наближення до числа π .

Значимо також, що не покладаючи $l = L = 1$, дістанемо такий результат:

$$p = \frac{2l}{\pi L}.$$

І наостанок. Описана тут задача Бюффона породила цілу нову область математики – так звану інтегральну геометрію [4].

1.4. Скористаємось розв'язанням задачі про математичний маятник, яку подає Ф. Крауфорд у [20]. Простий маятник складається з невагомої нитки довжиною l , один кінець якої закріплений, а до другого прикріплений точковий вантаж масою m . Позначимо через φ кут (у рад) відхилення маятника від вертикалі. (Маятник коливається в заданій площині, і його положення повністю визначається кутом φ .) Зміщення вантажу маятника по периметру кола дорівнює $l\varphi$; такому зміщенню відповідають миттєва тангенціальна швидкість $ld\varphi/dt$ і тангенціальне прискорення $ld^2\varphi/dt^2$. Повертальна сила являє собою тангенціальну складову сили тяжіння mg , що діє на маятник. Ця складова дорівнює $-mg\sin\varphi$. За другим законом Ньютона

$$ml \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \sin\varphi.$$

Для достатньо малих кутів справедлива рівність $\sin\varphi \approx \varphi$ (якщо φ вимірюється в радіанах). Тоді рівняння можна переписати так:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0,$$

де позначено $\omega^2 = g/l$. Ми отримали стандартне хвильове рівняння, загальним розв'язком якого є гармонічне коливання

$$\varphi(t) = A \cos(\omega t + \psi),$$

де ω має сенс циклічної частоти коливань.

Оскільки $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то для періоду коливань математичного

маятника отримуємо відому формулу:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

1.5. Освітленість E у точці O через багатократне відбивання у двох дзеркалах дорівнює

$$E = \frac{I}{a^2} + \frac{I}{(3a)^2} + \frac{I}{(5a)^2} + \frac{I}{(7a)^2} + \dots = \frac{I}{a^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2 I}{8a^2}.$$

Тут використано один із рядів Ейлера, який визначає суму обернених квадратів непарних чисел через число π [15].

1.6. Елемент довжини у просторі з додатною сталою кривизною a у сферичних координатах має вигляд [25]:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2).$$

Довжина кола в цих координатах дорівнює $2\pi r$, а площа поверхні сфери – $4\pi r^2$. Довжина ж «радіусу» кола (або сфери) дорівнює

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = a \arcsin \frac{r}{a},$$

тобто більше r (з підінтегрального виразу і області визначення функції арксінус слідує, що має бути $a > r$). Отже, відношення довжини кола до діаметру в такому просторі менше за π .

Елемент довжини у просторі сталої від'ємної кривизни у координатах r, θ, φ має вигляд

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{a^2}} + r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2),$$

де координата r може мати будь-яке значення в діапазоні від 0 до ∞ . Відношення довжини кола до діаметру у цьому випадку більше за π .

Зазначимо, що геометрія Рімана (або сферична) може описувати замкнений Всесвіт, в якому його розширення зупиняється і змінюється на стискання, а геометрія

Лобачевського – відкритий Всесвіт, в якому розширення буде вічним.

1.7. З формули Ейлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ за $z = \pi$ матимемо:

$$e^{i\pi} = -1,$$

де уявну одиницю i визначають із умови $i^2 = -1$.

1.8. Даний інтеграл береться від гауссової функції:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Набагато зручніше знайти спочатку квадрат I , а потім здобути з нього квадратний корінь. Дійсно, матимемо

$$I^2 = 4 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Перейдемо від декартових до полярних координат

$$I^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} \frac{1}{2} d(r^2) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi (-e^{-\infty} - (-e^0)) = \pi.$$

Отже, остаточно дістаємо $I = \sqrt{\pi}$.

1.9. Підставляючи у ряд розкладання e^x за формулою Маклорена $x = 1$, отримуємо

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1),$$

де

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}.$$

Обираючи в цих двох формулах достатньо велике n , можна оцінити число e з будь-яким ступенем точності.

1.10. Результати обчислень напишемо до 5 знаку після коми:

$$e^\pi = 23,14069\dots$$

$$\pi^e = 22,45915\dots$$

Висновок очевидний.

1.11. Використовуючи закон доповнення, отримуємо

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Отже, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

1.12. Більш точна формула Лапласа для обчислення факторіалу має вигляд [15]:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{5184n^3} - \dots\right) \quad \text{за } n \rightarrow \infty.$$

Якщо обмежитись першим членом у дужках, то отримаємо формулу Стірлінга, яку найчастіше використовують на практиці. Отже, обчислення факторіалу за формулою Стірлінга має відносну похибку $1/12n$ за порядком величини, тобто за великих n є доволі точним.

1.13. Наприклад,

1) розподіл Гіббса

$$w_n = A e^{-\frac{E_n}{kT}};$$

2) розподіл Максвелла

$$dw(p) = \frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mkT}} dp_x dp_y dp_z;$$

3) розподіл Больцмана

$$dw(x, y, z) = \text{const} \cdot e^{-\frac{W_{\Pi}(x, y, z)}{kT}} dx dy dz;$$

4) барометрична формула

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}; \quad P = P_0 e^{-\frac{mgh}{kT}};$$

5) функція розподілу Фермі-Дірака (середня кількість

частинок в одному стані)

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\frac{W_i - \mu}{kT}} + 1}$$

б) функція розподілу Бозе-Ейнштейна (середня кількість частинок в одному стані)

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\frac{W_i - \mu}{kT}} - 1}$$

7) закон радіоактивного розпаду

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

8) закон Бугера-Ламберта

$$I = I_0 e^{-\mu d}$$

9) формула Планка

$$B(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

10) хвильова функція вільної мікрочастинки

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\omega t - (\vec{k}\vec{r}))}$$

1.14. Подія, яка полягає в тому, що частинка зіткнеться з іншою частинкою на шляху l фактично означає, що частинка не зіттовхується на попередній ділянці від 0 до l і зіттовхується саме у момент, коли вона пролетіла весь шлях l . Переходячи до протилежної події, знайдемо ймовірність того, що частинка не зіттовхується на ділянці Δl , — вона дорівнює $1 - \mu\Delta l$.

На шляху l відрізок Δl вкладається $l/\Delta l$ разів. Ймовірність того, що частинка не зіттовхується на шляху l дорівнює, згідно з правилом множення ймовірностей, добутку $l/\Delta l$ множників $(1 - \mu\Delta l)$:

$$(1 - \mu\Delta l)^{\frac{l}{\Delta l}}$$

Переходячи до границі за $\Delta l \rightarrow 0$, дістаємо

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} (1 - \mu \Delta l)^{\frac{l}{\Delta l}} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{-\mu l \alpha} = \left[\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} \right]^{-\mu l} = e^{-\mu l}.$$

Отже, ймовірність зіткнення частинок на шляху l дорівнює

$$P = 1 - e^{-\mu l}.$$

1.15. Застосуємо спосіб розв'язання, як і у попередній задачі. Подія, яка полягає в тому, що атом (насправді, ядро атома) розпадається за час t фактично означає, що атом не розпадається за весь час, попередній до t , і розпадається саме у момент t . Ймовірність того, що атом не розпадеться за час Δt дорівнює $1 - \lambda \Delta t$.

У проміжку часу t відрізок Δt міститься $t/\Delta t$ разів. Ймовірність того, що за час t атом не розпадеться, дорівнює, згідно з правилом множення ймовірностей, добутку $t/\Delta t$ множників $1 - \lambda \Delta t$:

$$(1 - \lambda \Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}}.$$

Переходячи до границі за $\Delta t \rightarrow 0$, отримуємо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - \lambda \Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{-\lambda t \alpha} = \left[\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} \right]^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}.$$

Отже, шукана ймовірність дорівнює

$$P = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Якщо ймовірність того, що атом не розпадається за час T , дорівнює точно $1/2$, то величину T називають часом (періодом) піврозпаду атома. Покладаючи в останній формулі $P = 1/2$, знаходимо

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

Закон радіоактивного розпаду можна також отримати, виходячи з очевидного припущення, що зміна кількості радіоактивних ядер з часом прямо пропорційна кількості самих ядер:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

де λ має той самий зміст, що і раніше, а саме – сталої розпаду.

Розділяючи в цьому рівнянні змінні, інтегруємо. Тоді матимемо

$$\ln N = -\lambda t + C,$$

де C – стала інтегрування. Покладаючи в початковий момент часу $t = 0$ кількість ядер $N = N_0$, остаточно дістаємо

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

1.16. Можна показати, що ймовірність перебування тіла (підсистеми) у стані з енергією E_n у системі з енергією E визначається виразом [38]:

$$w_n = B(E - E_n)^\nu = BE^\nu \left(1 - \frac{E_n}{E}\right)^\nu = BE^\nu \left[\left(1 - \frac{E_n}{E}\right)^{\frac{E}{E_n}} \right]^{\frac{E_n \nu}{E}}.$$

Тут E енергія всієї системи і $E_n \ll E$, показник степеню ν визначається кількістю підсистем, а B – деяка стала. Якщо система – ідеальний газ, то $\nu \sim N$, де N – кількість частинок, атомів або молекул. Позначаючи $E/E_n = \alpha$, вираз у квадратних дужках можна представити як другу чудову границю:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha = e^{-1}.$$

Енергія системи передбачається величиною сталою (для ідеального газу $E = 3NkT/2$), система перебуває у термодинамічній рівновазі і характеризується таким макропараметром як температура T . Тоді остаточно матимемо

$$w_n = Ae^{-\frac{E_n}{kT}}.$$

Отже, появу експоненти у розподілі Гіббса можна пояснити застосуванням під час його отримання другої чудової границі. При цьому слід зазначити, що розподіл Гіббса можна отримати також через нормальний розподіл [3], що цілком логічно.

1.17. Розв'язки рівняння Шрьодінгера

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi = 0$$

для ділянок $x < 0$, $0 < x < a$, $x > a$ мають вигляд [6]:

$$\psi_1 = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}, \quad x < 0;$$

$$\psi_2 = A_2 e^{-qx} + B_2 e^{qx}, \quad 0 < x < a;$$

$$\psi_3 = A_3 e^{ikx}, \quad x > a,$$

де

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad q = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}.$$

Коефіцієнт прозорості бар'єру визначають так:

$$D = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2.$$

Застосувавши умови зшивання хвильової функції в точках $x = 0$ та $x = a$, а саме

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad \frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx}, \quad \psi_2(a) = \psi_3(a), \quad \frac{d\psi_2(a)}{dx} = \frac{d\psi_3(a)}{dx},$$

отримаємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2,$$

$$ikA_1 - ikB_1 = -qA_2 + qB_2,$$

$$A_2 e^{-qa} + B_2 e^{qa} = A_3 e^{ika},$$

$$-qA_2 e^{-qa} + qB_2 e^{qa} = ikA_3 e^{ika}.$$

Розв'язуючи систему рівнянь (наприклад, за допомогою правила Крамера), знаходимо

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{4ikqe^{-ika}}{(k^2 - q^2)(e^{qa} - e^{-qa}) + 2ikq(e^{qa} + e^{-qa})}.$$

Тоді для коефіцієнта прозорості після нескладних перетворень дістаємо

$$D = \frac{16k^2 q^2}{(k^2 - q^2)^2 (1 - e^{-2qa})^2 + 4k^2 q^2 (1 + e^{-2qa})^2} e^{-2qa}.$$

Для коректних значень q та a матимемо $e^{-2qa} \ll 1$, відтак

$$D = D_0 e^{-\frac{2}{h} \sqrt{2m(U_0 - E)} a},$$

де позначено

$$D_0 = \frac{16k^2 q^2}{(k^2 + q^2)^2}.$$

Зазвичай $0 < D_0 < 4$.

1.18. Очевидно, що освітленість E — подразнювальний чинник, а зоряна величина m — відчуття (сприйняття) освітленості, причому за традицією, що походить від Гіппарха, їхні зміни dE і dm протилежні за знаком, оскільки із зростанням освітленості E зоряна величина m зменшується. Тоді згідно з законом Вебера-Фехнера [2]:

$$dm = -k \frac{dE}{E} \Rightarrow m = -k \ln E + C,$$

де k — коефіцієнт пропорційності, C — стала інтегрування. Для двох світил з величинами освітленості від них E_1 і E_2 різниця відповідних зоряних величин дорівнює

$$m_2 - m_1 = -k \ln \frac{E_2}{E_1}.$$

Переходячи до десяткових логарифмів і враховуючи пропозицію Погсона (щодо п'яти зоряних величин), отримуємо шукану формулу:

$$m_2 - m_1 = -2,5 \lg \frac{E_2}{E_1}.$$

Звертаємо увагу на те, що натуральний логарифм є функцією оберненою експоненті, тобто експонента (і/або натуральний логарифм) з'являються там, де діє закон Вебера-Фехнера.

2. Вимірювання фундаментальних констант фізики

2.1. З рис. 5 видно, що затримка затемнення t через пів року спричинена віддаленням Землі від Юпітера майже точно на діаметр D земної орбіти.

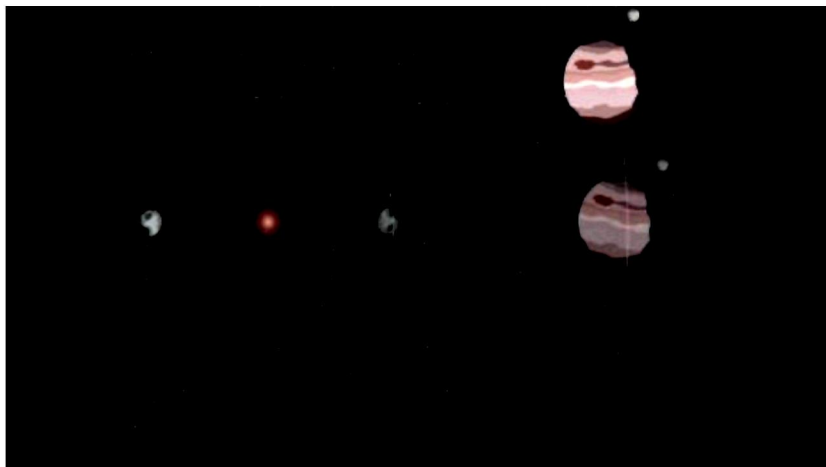


Рис. 5. Спостереження затемнень Юпітером супутника Іо з інтервалом у пів року

Отже, для швидкості світла дістаємо

$$c = \frac{D}{t}.$$

Оскільки $D = 2 \text{ а.о.} \approx 2 \cdot 150 \text{ млн км}$, то для $t = 22 \text{ хв}$, дістаємо $c \approx 227 \text{ 000 км/с}$, (у Рьомера вийшло $\approx 214 \text{ 000 км/с}$, але він використав неточне значення діаметра земної орбіти), а для $t = 17 \text{ хв}$ отримуємо $c \approx 300 \text{ 000 км/с}$.

2.2. З рис 6. видно, що за теоремою синусів:

$$\sin \sigma = \frac{v}{c} \sin(\pi - \theta) = \frac{v}{c} \sin \theta,$$

де θ — кут між видимим напрямком на зорю і вектором швидкості спостерігача.

Оскільки швидкість орбітального руху Землі $v \ll c$, то через малість кута σ матимемо:

$$\sigma = 206265'' \frac{v}{c} \sin \theta.$$

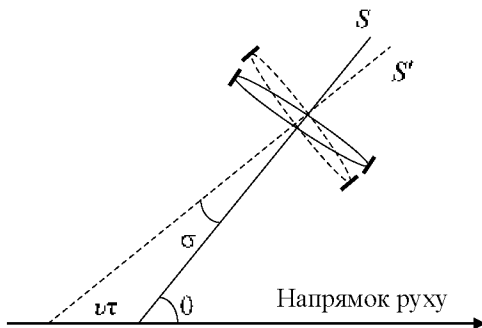


Рис. 6. Аберация світла: спостерігач, який рухається зі швидкістю v , побачить світило не в напрямку S , а в напрямку S'

Враховуючи, що для зорі γ Дракона $\theta \approx \pi/2$, для швидкості світла дістаємо

$$c = \frac{206265}{\sigma} v.$$

Підставляючи наведені в умові задачі дані, знаходимо $c \approx 299839$ км/с.

2.3. З рис. 7, на якому зображено установку Фізо, видно, що світло двічі проходить відстань між дзеркалами. Тому швидкість світла можна визначити так:

$$c = \frac{2l}{t}.$$

Час t проходження світла пов'язаний з періодом обертання зубчастого колеса T таким співвідношенням:

$$t = \frac{T}{2N},$$

де N – кількість зубців. Двійка у знаменнику зумовлена тим, що світло проходить лише в отвір між зубцями.

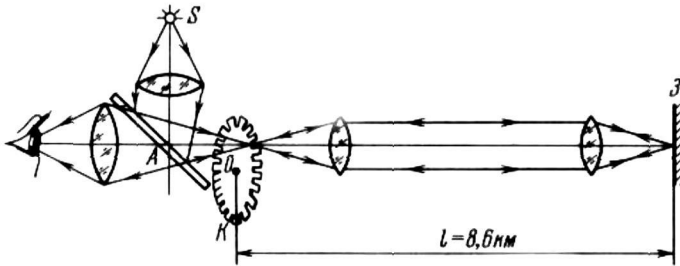


Рис. 7. Установка Фізо для вимірювання швидкості світла

З іншого боку, $T = 1/\nu$. Отже, остаточно матимемо

$$c = 4lN\nu$$

Підставляючи числові дані в цю формулу, отримуємо $c = 315\,000$ км/с.

2.4. Спираючись на розв'язок попередньої задачі і враховуючи зміни, внесені Корню в установку Фізо і сам процес вимірювання, матимемо

$$c = 4lN\nu_1,$$

де $\nu_1 = \nu/2n$, а $n = 28$ – кількість появ і зникнень світла внаслідок зміни частоти обертання колеса. Отже, остаточно дістаємо

$$c = 2lN \frac{\nu}{n}.$$

За розрахунками $c = 300\,400$ км/с.

2.5. Оскільки експеримент Майкельсона є вдосконаленням досліду Фізо, то, очевидно, що $c = 2l/t$, $t = T/8 = 1/8\nu$, де T – період обертання призми, ν – відповідно частота обертання. Тоді остаточно матимемо

$$c = 16/\nu.$$

Якщо підставити $l = 35,41$ км і $v = 529$ с⁻¹, то отримаємо 299 710 км/с. Майкельсон у результаті вимірювань отримав $299\,796 \pm 4$ км/с.

2.6. Дійсно, гравітаційна стала не була вказана явно у працях Кавендіша. Замість неї було визначено середню густину Землі, а, відтак, і масу Землі. Це було перше точне визначення цих параметрів нашої планети. Проте можна скористатись описаним в умові задачі пристроєм для визначення гравітаційної сталої (див. рис. 8).

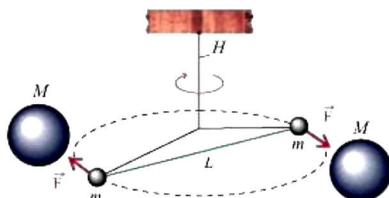


Рис. 8. Модель дослідів Кавендіша

Згідно із законом Гука крутильний момент, що виникає у крутильних терезах можна визначити так [39]:

$$M = D \frac{\varphi}{l},$$

де D – модуль кручення нитки; φ – кут між коромислом та лінією, яка з'єднує великі кулі, за якого нитка, внаслідок гравітаційної взаємодії куль (великих з малими), переставала здійснювати крутильні коливання; l – довжина нитки. Крутильний момент спричиняється моментом сили, що діє між великою і малою кулями. Оскільки у пристрої задіяна пара куль, то можна записати

$$D \frac{\varphi}{l} = F \frac{L}{2} + F \frac{L}{2} = FL,$$

де L – довжина коромисла. Сила F за законом всесвітнього тяжіння дорівнює

$$F = G \frac{Mm}{r^2},$$

де r – відстань між великою і малою кулями. Очевидно, що цю відстань можна визначити так:

$$r = \frac{L}{2} \varphi,$$

якщо кут вимірювати в радіанах. Виконуючи нескладні перетворення, для гравітаційної сталої дістаємо вираз:

$$G = \frac{DL\varphi^3}{4Mml}.$$

Скориставшись вказівкою до розв'язання задачі, яка визначає модуль кручення D через модуль Юнга E , остаточно знаходимо

$$G = \frac{\pi d^4 L \varphi^3 E}{192 M m l^2}.$$

Підставляючи числові значення, отримуємо

$$G = 6,69 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2.$$

2.7. Відомо, що довжина хвилі $\lambda_{\text{макс}}$, яка відповідає найбільшій густині випромінювання, згідно з законом зміщення Віна дорівнює [37]:

$$\lambda_{\text{макс}} = \frac{1,265 \hbar c}{kT}.$$

Звідси матимемо

$$\hbar = \frac{\lambda_{\text{макс}} kT}{1,265c} = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

2.8. Якщо для виділення одного молю одновалентної речовини під час електролізу потрібний заряд, що дорівнює 96484,56 Кл, а в одному молі, як знаємо, міститься $6 \cdot 10^{23}$ атомів, то поділивши сталу Фарадея F на сталу Авогадро N_A , отримуємо кількість електрики, яка необхідна для виділення одного атома речовини. Цю порцію електрики традиційно позначають через e .

Отже,

$$e = \frac{F}{N_A} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

У 1891 р. Дж. Стоней запропонував називати цю мінімальну порцію електрики «електроном» [33].

2.9. Маса елементарних частинок (які трапляються у вільному стані) і ядер визначають зазвичай за допомогою мас-спектрометрів. Вилітаючи з джерела випромінювання, частинка (наприклад, електрон) прискорюється електричним полем U . При цьому енергія поля визначає кінетичну енергію частинки:

$$eU = \frac{mv^2}{2}.$$

Частинка рухається в магнітному полі, індукція \vec{B} якого перпендикулярна вектору швидкості \vec{v} частинки. Відтак на частинку діє сила Лоренца, примушуючи її рухатись по дузі кола радіусом R . Отже, можна записати ще одне рівняння:

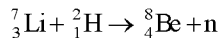
$$m \frac{v^2}{R} = eBv.$$

Розв'язучи систему цих двох рівнянь, отримуємо

$$m = \frac{eB^2 R^2}{2U}.$$

Передбачається, що заряд частинки відомий. Наприклад, заряд електрона можна визначити окремо (див. задачу 2.8). Так можна визначити маси електрона і протона.

2.10. Наведена в умові задачі ядерна реакція



має задовольняти закону збереження енергії. Випишемо значення мас ядер, які беруть участь у цій реакції з додатку у монографії Р. Спроула [34]:

Хімічний елемент	Маса ядра, а.о.м.
${}^2_1\text{H}$	2,014102
${}^7_3\text{Li}$	7,016005
${}^8_4\text{Be}$	8,005308

Враховуючи, що 1 а.о.м. = 931,49 Мев, можна записати рівняння енергетичного балансу для визначення маси нейтрона:

$$\begin{aligned} & (7,016005 + 2,014102) \cdot 931,49 \text{ Мев} = \\ & = (8,005308 + x) \cdot 931,49 \text{ Мев} + 15 \text{ Мев}, \end{aligned}$$

де символом x позначено масу нейтрона. Розв'язуючи це рівняння відносно x , для маси нейтрона дістаємо $m_n = 939,087 \text{ Мев}$ (в енергетичних одиницях) або $m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$.

2.11. Наприклад: закон всесвітнього тяжіння

$$F = G \frac{Mm}{r^2},$$

закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

освітленість планети Сонцем

$$E = \frac{L}{4\pi r^2},$$

або освітленість від точкового джерела із силою світла I і кутом падіння φ

$$E = \frac{I \cos \varphi}{r^2}.$$

Про тривимірність простору свідчить квадрат відстані у знаменниках (так званий закон «обернених квадратів»).

2.12. Сталу Габбла можна знайти, використовуючи закон Габбла—Леметра, якщо для конкретної надвної відома променева швидкість і відстань до цієї надвної:

$$H_0 = \frac{v_r}{r}.$$

Променеву швидкість знаходять за спектром, використовуючи ефект Доплера:

$$v_r = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = cz.$$

Наведена формула справедлива у нерелятивістському випадку, тобто для малих v_r ($v_r \ll c$, а, отже, $z \ll 1$).

Відстань до надвної можна визначити зі співвідношення між абсолютною і видимою зоряними величинами:

$$M = m - 25 - 5 \lg r,$$

де r виражено у Мпк (для далеких наднових це цілком логічно, до того ж у розмірність сталої Габбла входять саме Мпк). В астрономії прийнято використовувати таку величину як модуль відстані $\mu = m - M$. Тоді для відстані отримаємо

$$r = 10^{\frac{\mu}{5} - 5}.$$

Отже, для сталої Габбла остаточно дістаємо

$$H_0 = cz 10^{\frac{5-\mu}{5}}.$$

Підставляючи числові дані з умови задачі, знаходимо: $H_{01} = 69,69$ км/(с·Мпк); $H_{02} = 79,44$ км/(с·Мпк); $H_{03} = 87,35$ км/(с·Мпк). Обчислюючи середнє, отримуємо $\bar{H}_0 = 78,83$ км/(с·Мпк), що дещо відрізняється від прийнятого на сьогодні.

3. Системи одиниць вимірювання фізичних величин.

3.1. Усі величини в системі М'К'С'А' будемо позначати літерою зі штрихом. Без штриха будемо позначати ті ж величини в системі МКSA. Очевидно,

$$\text{а) } v' = \frac{dl'}{dt'} = \frac{\lambda}{\tau} \frac{dl}{dt} = \frac{\lambda}{\tau} v;$$

$$\text{б) } a' = \frac{d^2l'}{dt'^2} = \frac{d}{dt} \frac{dl'}{dt'} = \frac{\lambda}{\tau^2} \frac{d^2l}{dt^2} = \frac{\lambda}{\tau^2} a;$$

$$\text{в) } F' = m' a' = \mu m \frac{\lambda}{\tau^2} a = \frac{\mu \lambda}{\tau^2} m a = \frac{\mu \lambda}{\tau^2} F;$$

г) У системі одиниць М'К'С'А' сила тяжіння матиме вигляд

$$F' = G' \frac{m'_1 m'_2}{r'^2},$$

де G - гравітаційна стала. Виходить,

$$G' = \frac{F' r'^2}{m'_1 m'_2} = \frac{\lambda^3}{\mu \tau^2} \frac{F r}{m_1 m_2} = \frac{\lambda^3}{\mu \tau^2} G.$$

(У процесі одержання цієї формули був використаний результат пункту в) $F' = (\mu \lambda / \tau^2) F$);

$$\text{д) } W' = \frac{m' v'^2}{2} = \frac{\mu m \left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^2 v^2}{2} = \mu \left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^2 W;$$

е) Стала Планка має розмірність фізичної величини – дії або моменту імпульсу, а саме $[\hbar] = \text{Дж} \cdot \text{с}$. Тому, використовуючи результат пункту д), матимемо

$$\hbar' = \mu \left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^2 \tau \hbar = \frac{\mu \lambda^2}{\tau} \hbar.$$

3.2. Зазначимо насамперед, що величина GM_\odot в штрихованій системі одиниць і в системі MKS зв'язані між собою співвідношенням:

$$G' M'_\odot = \frac{\lambda^3}{\mu \tau^2} G \mu M_\odot = \frac{\lambda^3}{\tau^2} G M_\odot.$$

У системі MKS $GM_\odot = 1,334 \cdot 10^{20} \text{ м}^3/\text{с}^2$. Обчислимо λ і τ .

За одиницю довжини в розглянутій системі одиниць береться довжина великої півосі орбіти Землі, тобто відстань у $1,496 \cdot 10^{11}$ м. Тому довжина l' в а.о. через довжину l виражається так:

$$l' = \frac{l}{1,496 \cdot 10^{11}} \quad (\text{тобто } \lambda^{-1} = 1,496 \cdot 10^{11}).$$

Аналогічно, $\tau^{-1} = 3,156 \cdot 10^7$ (число секунд в одному році). Отже,

$$G'M'_\odot = 3 \cdot 10^{-19} GM_\odot \approx 40 \frac{(\text{а.о.})^3}{\text{рік}^2}.$$

Величину $G'M'_\odot$ можна легко обчислити й іншим способом, якщо використати третій узагальнений закон Кеплера:

$$\frac{T^2(M_1 + M_2)}{r^3} = \frac{(2\pi)^2}{G}.$$

Застосовуючи цю формулу для системи Сонце–Земля і зневажаючи масою Землі порівняно з масою Сонця, отримуємо

$$GM_\odot = \frac{(2\pi)^2 r^3}{T^2}.$$

Але $r=1$ а.о., а $T=1$ рік, відтак $G'M'_\odot = (2\pi)^2 \approx 40 \left(\frac{(\text{а.о.})^3}{\text{рік}^2} \right)$.

3.3. $e = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{Г}^{\frac{1}{2}} \text{см}^{\frac{3}{2}} \text{с}^{-1}$.

3.4. Кілограм визначений міжнародною згодою як маса невеликого циліндра із сплаву Платини та Іридію, який зберігається у Парижі. Цей циліндр містить відповідне число нуклонів – N_1 . Точне значення N_1 невідомо, але в принципі може бути підраховано [7], тобто

$$1 \text{кг} = N_1 k_1 m_p,$$

де k_1 – відношення маси нуклона (середньої для маси даних ядер) до маси протона m_p .

У наш час метр визначається як довжина, яка дорівнює деякому числу довжин хвиль визначеної жовто-гарячої лінії у спектрі Криптону-86 (перехід між рівнями $2p_{10}$ та $5d_5$). Це

число за міжнародною угодою прийнято таким, що дорівнює $N_2 = 1650763,73$.

Довжина хвилі вибраної лінії Кг може бути в принципі розрахована, та її можна записати у вигляді

$$\lambda = \frac{c}{\nu} k_2 \frac{\hbar c}{W_B} = k_2 \frac{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3 c}{m_e e^4} = k_2 \left(\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar c}{e^2} \right)^2 \cdot \frac{\hbar}{m_e c} = k_2 \alpha_e^{-2} \lambda_e,$$

де k_2 – деяка стала, W_B – борівська енергія, α_e – фундаментальна безрозмірна константа електромагнітної взаємодії, λ_e – комптонівська довжина хвилі електрона.

Тоді

$$1\text{м} = N_2 k_2 \alpha_e^{-2} \lambda_e.$$

Одиниця СІ часу – секунда визначається нині як величина, що дорівнює 9192631770 періодам випромінювання, що відповідає переходу між двома надтонкими рівнями основного стану атома Цезію-133. Отже,

$$1\text{с} = N_3 T_0,$$

де $N_3 = 9192631770$.

Квантова електродинаміка дає теоретичний вираз для частоти цього випромінювання [7]:

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = k_3 \alpha_e^4 \frac{m_e}{m_p} \left(\frac{m_e c^2}{\hbar} \right),$$

де k_3 – деяка стала. Отже,

$$1\text{с} = N_3 k_3^{-1} \alpha_e^{-4} \frac{m_p}{m_e} \cdot \frac{\lambda_e}{c}.$$

3.5. Як одиницю часу можна взяти величину

$$t_B = \frac{\hbar}{W_B},$$

де W_B борівська енергія

$$W_B = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_B} \approx 27 \text{ еВ}.$$

Як було визначено експериментально, а також на основі більш строгої теорії, енергія зв'язку електрона з протоном в атомі Гідрогену (або інакше енергія іонізації) дорівнює 13,6 еВ.

Тоді матимемо

$$t_B = (4\pi\epsilon_0)^2 \frac{\hbar^3}{m_e e^4} = 2,43 \cdot 10^{-17} \text{ с.}$$

3.6. Нехай, $G = c = 1$. Оскільки $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$, а $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$, то у «геометризованих» одиницях $1 \text{ с} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м}$. Тоді

$$1 \text{ кг} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3}{9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2} = 7,4 \cdot 10^{-28} \text{ м.}$$

У цьому випадку $1 \text{ рік} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ с} = 9,45 \cdot 10^{15} \text{ м}$.

Маса Сонця $M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг} = 1480 \text{ м}$.

Світність Сонця $L_\odot = 4 \cdot 10^{26} \text{ Вт} = 4 \cdot 10^{26} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3} \approx 10^{-26}$.

3.7. Гравітаційна стала в електрон-вольтах з виділенням множників \hbar та c дорівнює

$$G = 6,67 \cdot 10^{-39} \hbar c^5 \text{ ГеВ}^{-2}.$$

В одиницях $\hbar = c = 1$ константа G майже на 33 порядки менше константи слабкої взаємодії.

3.8. Матимемо

$$\alpha_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137,04}.$$

Цю константу іноді звать «сталою тонкої структури» (така назва має історичні причини, пов'язані з теорією розщеплення спектральних ліній).

Зверніть увагу, що маса електрона не входить у формулу для величини α_e , тому α_e є константою зв'язку з електромагнітним полем для будь-якої елементарної частинки, заряд якої дорівнює e , тобто ця константа має універсальний характер.

Цікаво, що якщо визначити характерну швидкість електрона в атомі Гідрогену, як величину

$$v_B = \frac{r_B}{t_B},$$

або з умови квантування Бора

$$v_B = \frac{\hbar}{m_e r_B},$$

де r_B – борівський радіус, а $t_B = \hbar/W_B$, і W_B – борівська енергія (див задачу 3.5), то неважко переконатись, що

$$\alpha_e = \frac{v_B}{c}.$$

Дивлячись на останню формулу, можна сказати, що величина α_e характеризує роль релятивістських ефектів в атомі Гідрогену.

$$3.9. \quad \alpha_g = \frac{Gm_p^2/(\hbar/m_p c)}{m_p c^2} = \frac{Gm_p^2}{\hbar c} = 5,9 \cdot 10^{-39}.$$

3.10. За однаковості безрозмірних констант, що характеризують усі фундаментальні взаємодії, а також за наявності тривимірності простору фізика у «тому» всесвіті і в нашому буде однаковою.

4. Характеристичні параметри мікро- і мегасвіту і фундаментальні константи.

4.1. Одна з важливих характеристичних довжин, що часто трапляється у квантовій фізиці — це комптонівська довжина хвилі електрона.

$$\lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c} = 3,86 \cdot 10^{-13} \text{ м.}$$

Класичний радіус електрона був визначений у свій час в результаті порівнювання власної електростатичної енергії електрона його енергії спокою, а саме

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e} = m_e c^2.$$

Звідси

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = \alpha_e \lambda_e = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ м.}$$

За словами авторів чудового підручника [19]: «Ця величина має якесь відношення до електрону, але ми точно не знаємо, яке. Тим не менше вона є характеристичною довжиною».

Ще одна важлива характеристична довжина — борівський радіус основного стану атома Гідрогену. За найпростішої форми теорії Бора (1913 р.) рух електрона в атомі Гідрогену здійснюється по коловій орбіті радіусу r_B навколо протона. Ця орбіта визначається рівнянням руху:

$$\frac{m_e v_B^2}{r_B} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_B^2},$$

а також квантовою вимогою Бора

$$J = m_e v_B r_B = \hbar.$$

Тут v_B — швидкість електрона (борівська швидкість), J — його момент імпульсу. Виключаючи v_B з цих рівнянь, отримуємо

$$r_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = \frac{r_e}{\alpha_e^2} = \frac{\lambda_e}{\alpha_e} = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м.}$$

Найпростішим механізмом взаємодії випромінювання та речовини є томсонівське розсіювання світла на вільних електронах. Його ефективний переріз дорівнює

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = \frac{8\pi}{3} \alpha_e^2 \lambda_e^2.$$

Борівський радіус з'являється у формулі для ефективного перерізу поглинання під час іонізації атомів. Наприклад, під час іонізації атома Гідрогену з основного стану [7]:

$$\sigma_\nu = \frac{64\pi}{3\sqrt{3}} r_B \lambda_e \left(\frac{\nu_1}{\nu} \right)^3 g(\nu),$$

де $\nu_1 = \frac{W_H}{h}$ – частота порогу іонізації, W_H – енергія іонізації, $g(\nu)$ – безрозмірна функція частоти, яка змінюється надто повільно.

4.2. Із умови

$$Mc^2 = \frac{GM^2}{R_0},$$

отримуємо

$$R_0 = \frac{GM}{c^2}.$$

Ця величина точно в два рази менше так званого гравітаційного радіусу R_g , що визначається як

$$R_g = \frac{2GM}{c^2}.$$

Гравітаційний радіус (інакше, радіус горизонту подій) має велике значення в теорії чорних дір [2; 16].

Гравітаційна довжина спостережуваного Всесвіту

$$R_{0Bc} = \frac{GM_{Bc}}{c^2} \approx 10^{26} \text{ м},$$

що узгоджується з оцінками радіусу спостережуваного Всесвіту.

4.3. Достатньо знайти методом аналізу розмірностей планківську масу. Для цього складемо матрицю розмірності [11]:

$$\begin{array}{cccc} [c] & [G] & [\hbar] & [m_{\text{Pl}}] \\ \text{кг} & 0 & -1 & 1 \\ \text{м} & 1 & 3 & 2 \\ \text{с} & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

Безрозмірний комплекс у нашому випадку матиме вигляд

$$\Pi = c^{k_1} G^{k_2} \hbar^{k_3} m_{\text{Pl}}^{k_4},$$

де k_1, k_2, k_3, k_4 – шукані показники степеню. Використовуючи матрицю розмірності, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -k_2 + k_3 + k_4 = 0, \\ k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 0, \\ -k_1 - 2k_2 - k_3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки, очевидно, що $k_4 = 1$, то система рівнянь має єдиний розв'язок:

$$k_1 = -\frac{1}{2}; \quad k_2 = \frac{1}{2}; \quad k_3 = -\frac{1}{2}.$$

За умовою задачі $\Pi = 1$. Тоді остаточно матимемо

$$m_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \approx 1,2 \cdot 10^{19} \frac{\text{Гев}}{c^2}.$$

Планківську довжину можна визначити таким чином

$$l_{\text{Pl}} = \frac{\hbar}{m_{\text{Pl}} c} = \sqrt{\frac{G \hbar}{c^3}} \approx 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ м}.$$

Планківський час, очевидно, дорівнює

$$t_{\text{Pl}} = \frac{l_{\text{Pl}}}{c} = \sqrt{\frac{G \hbar}{c^5}} \approx 5,4 \cdot 10^{-44} \text{ с}.$$

4.4. Планківську густину можна визначити так

$$\rho_{\text{Pl}} = \frac{m_{\text{Pl}}}{l_{\text{Pl}}^3} = \frac{c^5}{G^2 \hbar} \approx 5 \cdot 10^{96} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Планківську енергію можна визначити, скориставшись відомим співвідношенням між масою і енергією (формулою Ейнштейна):

$$W_{\text{Pl}} = m_{\text{Pl}} c^2 = \frac{\hbar}{t_{\text{Pl}}} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 2 \cdot 10^9 \text{ Дж} \approx 1,2 \cdot 10^{19} \text{ ГеВ}.$$

Планківську температуру можна оцінити, використовуючи сталу Больцмана k :

$$T_{\text{Pl}} = \frac{W_{\text{Pl}}}{k} \approx 1,4 \cdot 10^{32} \text{ К}.$$

4.5. Методом аналізу розмірностей отримуємо [11]:

$$L_{\text{Pl}} = \frac{c^5}{G} \approx 3,6 \cdot 10^{52} \text{ Вт}.$$

Цю величину можна також визначити таким чином

$$L_{\text{Pl}} = \frac{m_{\text{Pl}} c^2}{t_{\text{Pl}}},$$

де m_{Pl} та t_{Pl} – планківські маса та час.

Числове значення L_{Pl} на 26 порядків більше світності Сонця і на 14 порядків більше світності Галактики. Можна уявити, що ця величина відповідає максимальній потужності випромінювання гравітаційних хвиль якимось гравітуючим об'єктом [11].

Розглянемо тепер, яка маса змогла б випромінювати таку кількість енергії за час існування Всесвіту t_{Bc} . Матимемо

$$L_{\text{Pl}} = \frac{Mc^2}{t_{\text{Bc}}}.$$

Оцінкою t_{Bc} може слугувати габблівський час, відтак $t_{\text{Bc}} \approx H_0^{-1}$, де H_0 – стала Габбла. Тоді для шуканої маси отримуємо

$$M = \frac{c^3}{GH_0} \approx 10^{53} \text{ кг} \approx 10^{80} m_{\text{p}},$$

(див. задачу 7.4).

Цікаво, що такий самий результат виходить, якщо гравітаційний радіус Всесвіту

$$R_{\text{gBc}} = \frac{2GM_{\text{Bc}}}{c^2},$$

прирівняти радіусу спостережуваного Всесвіту, визначеному як радіус так званого світлового горизонту

$$R_{\text{Bc}} = ct_{\text{Bc}} \approx \frac{c}{H_0}.$$

5. Характерні параметри космічних тіл і фундаментальні константи.

5.1. Розв'язання цієї задачі спирається на розрахунки Й. Розенталя [29]. Масу планети з урахуванням вказівок можна визначити таким чином

$$M \sim n m_p R^3,$$

де m_p – маса протона, R – радіус планети. Середня концентрація

$$n \sim \frac{1}{r^3},$$

де r – середня відстань між частинками.

За умовою задачі для існування атомів необхідно, щоб

$$kT \approx W_B \approx \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = \alpha_e^2 m_e c^2,$$

де α_e – фундаментальна безрозмірна константа електромагнітної взаємодії (див. задачу 3.8). Тоді

$$r \approx r_B = \frac{\hbar}{\alpha_e m_e c} = \frac{\lambda_e}{\alpha_e},$$

де λ_e – комптонівська довжина хвилі електрона.

Космічне тіло буде цілісним, якщо

$$\frac{GMm_p}{R} \approx kT,$$

і, отже,

$$\frac{GMm_p}{R} \approx \alpha_e^2 m_e c^2.$$

Тоді, повертаючись до самого першого співвідношення, матимемо

$$M \sim \left(\frac{\alpha_e m_e c}{\hbar} \right)^3 m_p R^3 = \left(\frac{GMm_p}{\alpha_e \hbar c R} \right)^3 m_p R^3.$$

Звідси остаточно отримуємо

$$M \sim \left(\frac{\alpha_e \hbar c}{G} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{m_p^2} = \left(\frac{\alpha_e \hbar c}{G m_p^2} \right)^{\frac{3}{2}} m_p = \left(\frac{\alpha_e}{\alpha_g} \right)^{\frac{3}{2}} m_p \approx 10^{27} \text{ кг}.$$

Нагадаємо, що маса Юпітера $\approx 1,9 \cdot 10^{27}$ кг.

Цілком закономірно, що характерна маса планет визначається фундаментальними константами електромагнітної та гравітаційної взаємодії.

Для твердих планет врахування важких елементів приводить до формули [11]:

$$M \sim \frac{30}{A^2} \left(\frac{\alpha_e}{\alpha_g} \right)^{\frac{3}{2}} m_p,$$

де A – атомна маса. Для $A \approx 50$ отримуємо $M \sim 10^{25}$ кг, що мало відрізняється від маси Землі.

5.2. У випадку достатньо гарячої зорі, коли тиск випромінювання стає порівняним із кінетичним тиском, маємо

$$\frac{aT^4}{3} \approx nkT,$$

де a – стала густина випромінювання, яка виражається через фундаментальні константи

$$a = \frac{\pi^2 k^4}{15(\hbar c)^3}.$$

Тоді

$$\frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} \approx nkT,$$

звідки

$$n \approx \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3.$$

Зоря буде перебувати в рівновазі і буде цілісним об'єктом, якщо

$$kT \approx \frac{GMm_p}{R},$$

де R – радіус зорі.

Тоді матимемо

$$M \sim \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{m_p^2} = \left(\frac{\hbar c}{G m_p^2} \right)^{\frac{3}{2}} m_p = \alpha_g^{\frac{3}{2}} m_p \approx 4 \cdot 10^{30} \text{ кг} \approx 2M_{\odot},$$

де α_g – фундаментальна безрозмірна константа гравітаційної взаємодії (див. задачу 3.9).

Характерна маса зір виявляється так само, як і для планет, прямо пропорційною масі протона. За істотно іншої маси протона маси зір були б істотно відмінними від теперішніх.

Зазначимо, що, якщо замість α_g ввести планківську масу m_{Pl} (див. задачу 4.3), то результат буде не менш красивим –

$$M = \left(\frac{m_{Pl}}{m_p} \right)^3 m_p.$$

Величину $\left(\frac{m_{Pl}}{m_p} \right)^3 = N_p \approx 10^{57}$ можна трактувати як фундаментальну кількість баріонів всередині зорі [22]. І тоді

$$M = N_p m_p.$$

5.3. Аналогічно розв'язку задачі 5.2 остаточно матимемо

$$M_{\min} \sim \left[\frac{\alpha_e \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_g} \right]^{\frac{3}{2}} m_p.$$

Порівняйте із результатом задачі 5.1 Обчислення дають $M_{\min} \approx 0,3M_{\odot}$.

Моделювання зір показує, що термоядерні реакції не виникають у протозорях з масою $\leq 0,08M_{\odot}$ [2].

5.4. Оскільки для білих карликів у разі релятивістського вирождення електронів їх середня кінетична енергія теплового руху $kT \geq m_e c^2$, то за співвідношенням невизначеностей Гейзенберга для середньої відстані між частинками матимемо

$$r \sim \frac{\hbar}{m_e c}.$$

Тоді для концентрації частинок отримуємо

$$n \sim \frac{1}{r^3} = \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3.$$

Враховуючи умову цілісності зорі

$$\frac{GMm_p}{R} \approx kT,$$

і покладаючи $kT \approx m_e c^2$ для граничної маси білого карлика (маси Чандрасекара) знаходимо

$$M_{\text{Ch}} \sim nm_p R^3 = \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 m_p R^3 = \left(\frac{m_e c^2}{\hbar c} \right)^3 m_p R^3 = \left(\frac{GMm_p}{\hbar c R} \right)^3 m_p R^3.$$

Звідси остаточно дістаємо

$$M_{\text{Ch}} \sim \alpha_g^{\frac{3}{2}} m_p.$$

Або інакше (див. задачу 5.2)

$$M_{\text{Ch}} = \left(\frac{m_{\text{Pl}}}{m_p} \right)^3 m_p.$$

Те, що вираз для граничної маси білого карлика збігається з виразом для характерної маси нормальних зір, не має дивувати. Адже оцінки для мас отримані за певних спрощень та за порядком величини.

5.5. Для нейтронних зір та чорних дір можна покласти

$$kT \sim m_p c^2.$$

Для середньої відстані між частинками матимемо

$$r \sim \frac{\hbar}{m_p c}.$$

Тоді концентрація

$$n \sim \frac{1}{r^3} = \left(\frac{m_p c}{\hbar} \right)^3.$$

Враховуючи умову цілісності зорі

$$\frac{GMm_p}{R} \approx kT,$$

для шуканої маси отримуємо

$$M \sim nm_p R^3 = \left(\frac{m_p c}{\hbar} \right)^3 m_p R^3 = \left(\frac{m_p c^2}{\hbar c} \right)^3 m_p R^3 = \left(\frac{GMm_p}{\hbar c R} \right)^3 m_p R^3.$$

Остаточно знаходимо

$$M \sim \alpha_g^{\frac{3}{2}} m_p.$$

Як і у попередній задачі те, що вирази для характерної маси нейтронних зір, чорних дір (зоряного походження), граничної маси білих карликів збігаються з виразом для характерної маси нормальних зір не має дивувати. Адже, по-перше, оцінки для маси отримані (за певних спрощень) за порядком величини, по-друге, ці оцінки дуже добро відповідають спостереженням.

5.6. Радіус планети або зорі можна визначити так (див. задачі 5.1–5.5):

$$R \sim \left(\frac{M}{nm_p} \right)^{\frac{1}{3}},$$

Оскільки

$$n \sim \frac{1}{r^3},$$

де r — середня відстань між частинками, то, враховуючи результат задач 5.1, 5.2, отримуємо, що характерні розміри космічних тіл є прямо пропорційними середній відстані між частинками, які утворюють тіло. Отже,

$$\text{а) } R \sim \left(\frac{\alpha_e}{\alpha_g} \right)^{\frac{1}{2}} r_B,$$

де r_B — борівський радіус.

Цей результат можна переписати таким чином

$$R \sim (\alpha_e \alpha_g)^{\frac{1}{2}} \lambda_e,$$

де λ_e — комптонівська довжина хвилі електрона. За розрахунками $R \approx 6 \cdot 10^7$ м, що майже точно дорівнює екваторіальному радіусу Сатурна.

б) В припущенні, що $r \sim r_B$, отримуємо

$$R \sim \alpha \frac{1}{g^2} r_B \approx 7 \cdot 10^8 \text{ м.}$$

Це майже точно радіус Сонця!

Зуваження. Як неважко переконатись у випадку, коли тиск випромінювання починає перевищувати кінетичний тиск (див. задачу 5.2), характерний радіус зорі за порядком величини буде дорівнювати

$$R \sim \alpha \frac{1}{g^2} \frac{\hbar c}{kT}.$$

Отже, рівноважна конфігурація за заданого значення маси M можлива для будь-якого радіуса, який визначається середньою температурою зорі. Виникає стан так званої байдужої рівноваги. Такий стан спричиняє радіальні коливання (пульсації) зорі. Вони підтримуються за рахунок термоядерних реакцій. Із збільшенням маси зорі швидкість термоядерних реакцій зростає, що призводить до розгойдування коливань. За достатньо великих амплітуд коливань зоря або руйнується, або втрачає поверхневі шари.

Більш детальні розрахунки показують, що цей ефект стає значним за $M \sim 30 \alpha \frac{3}{g^2} m_p \approx 55 M_\odot$ [29], що підтверджується спостереженнями.

5.7. а) Оскільки для білого карлика (див. задачу 5.4)

$$r \sim \frac{\hbar}{m_e c} = \lambda_e,$$

то, враховуючи розв'язок задачі 5.4, дістаємо

$$R \sim \left(\frac{M_{\text{Ch}}}{m m_p} \right)^{\frac{1}{3}} = \alpha \frac{1}{g^2} \lambda_e = \frac{m_{\text{Pl}}}{m_p} \lambda_e \approx 5 \cdot 10^6 \text{ м.}$$

Це добре узгоджується з характерними розмірами планет земної групи – як і має бути.

б) Гравітаційний радіус чорної діри за порядком величини дорівнює

$$R_g \sim \frac{GM}{c^2}.$$

Враховуючи розв'язок задачі 5.5, матимемо

$$R_g \sim \frac{G\alpha_g^{\frac{3}{2}}m_p}{c^2} = \frac{Gm_p^2}{\hbar c} \cdot \alpha_g^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\hbar}{m_p c} = \alpha_g^{\frac{1}{2}} \frac{\hbar}{m_p c} \approx 3 \text{ км (!)}$$

Як бачимо, це гравітаційний радіус Сонця.

в) Для нейтронних зір Й. Розенталь [29] пропонує оцінку

$$R \sim \alpha_g^{\frac{1}{2}} \frac{\hbar}{(m_p m_\pi)^{\frac{1}{2}} c} \approx 8 \text{ км},$$

де у знаменнику стоїть середнє геометричне із мас протона та π -мезона.

Отже, отримані формули дають числові значення, які добре відповідають спостереженням.

5.8. Опускаючи числовий коефіцієнт та залежність від відносної молекулярної маси (μ від зорі до зорі змінюється мало) теоретичне співвідношення маса-світність для середньої частини головної послідовності можна подати у вигляді [22]:

$$L \sim \left(\frac{Gm_p}{k} \right)^4 \frac{\sigma}{\kappa} M^3,$$

де m_p – маса протона, k – стала Больцмана, σ – стала Стефана-Больцмана, κ – коефіцієнт непрозорості зоряної речовини.

Коефіцієнт непрозорості за томсонівського розсіяння дорівнює

$$\kappa_T = \frac{8\pi}{3\mu_e m_p} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha_e^2 \lambda_e^2}{\mu_e m_p},$$

де μ_e – відносна електронна молекулярна маса (кількість нуклонів, які припадають на один вільний електрон), m_e – маса електрона, $\lambda_e = \hbar/(m_e c)$ – комптонівська довжина хвилі, α_e – фундаментальна безрозмірна константа електромагнітної взаємодії (див. задачу 3.8).

Стала Стефана-Больцмана виражається через фундаментальні константи відомою формулою

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 \hbar^3 c^2}.$$

Підставивши вирази для κ_T , σ і характерної маси зорі (див. задачу 5.2) в початкове співвідношення, та опускаючи знову ж таки числові множники, остаточно отримуємо

$$L \sim \frac{(m_e c^2)^2}{\hbar} \frac{1}{\alpha_e^2 \alpha_g^{\frac{1}{2}}} \sim 10^{31} \text{ Вт}.$$

Насправді це значення близько до верхньої межі світностей, що спостерігаються. До того ж виявляється, що, якщо записати еддінгтонівську світність [22]:

$$L_E = \frac{4\pi c G M}{\kappa_T}$$

через фундаментальні константи, то виходить такий самий результат.

Слід зазначити, що непрозорість κ у різних зір надто різноманітна. У найбільш масивних та гарячих зір вона визначається томсонівським розсіянням, у найбільш холодних – іонізацією важких хімічних елементів. Різниця між обома граничними випадками надзвичайно велика – у випадку холодних зір непрозорість у $\alpha_e^{-3} \sim 2,5 \cdot 10^6$ разів більша. Тому для характерної світності зір можна запропонувати такі межі [11]:

$$\frac{(m_e c^2)^2}{\hbar} \frac{\alpha_e}{\alpha_g^{\frac{1}{2}}} \leq L \leq \frac{(m_e c^2)^2}{\hbar} \frac{1}{\alpha_e^2 \alpha_g^{\frac{1}{2}}}.$$

Числове значення нижньої межі дорівнює $\sim 10^{24}$ Вт, що так само, як і верхня границя, непогано узгоджується зі спостереженнями.

5.9. Очевидно, що характерний час життя зорі (так званий «ядерний» час, який визначає час перебування зорі на головній послідовності – найдовшу стадію еволюції зорі) можна знайти, поділивши запаси ядерної енергії зорі на її витрати в одиницю часу, тобто

$$t \sim \frac{\eta M c^2}{L},$$

де M – характерна маса зорі, L – її характерна світність, η – коефіцієнт енерговиділення, який визначає ефективність виділення енергії під час термоядерних реакцій.

Згідно з розв'язком задачі 5.2 маємо

$$M \sim \alpha_g^{\frac{3}{2}} m_p,$$

де α_g – фундаментальна безрозмірна константа гравітаційної взаємодії (див. задачу 3.9).

Як характерну світність можна взяти середнє геометричне із нижньої та верхньої границь світності, визначених у задачі 5.8. Дістаємо

$$L \sim \frac{(m_e c^2)^2}{\hbar} (\alpha_e \alpha_g)^{\frac{1}{2}},$$

де α_e – фундаментальна безрозмірна константа електромагнітної взаємодії (див. задачу 3.8)

Тоді оцінкою характерного часу буде

$$t \sim \eta \left(\frac{m_p}{m_e} \right) \frac{\tilde{\lambda}_e \alpha_e^{\frac{1}{2}}}{c \alpha_g},$$

де $\tilde{\lambda}_e = \hbar/m_e c$ – комптонівська довжина хвилі електрона.

Максимальне значення коефіцієнта енерговиділення $\eta = 0,007$ відповідає термоядерному горінню Гідрогену – найбільш спокійному та тривалому періоду в житті зорі. Виявляється, що у цьому разі

$$\eta \left(\frac{m_p}{m_e} \right) \alpha_e^{\frac{1}{2}} \approx 1.$$

Отже, остаточно отримуємо

$$t \sim \frac{\tilde{\lambda}_e}{c} \alpha_g^{-1}.$$

За розрахунками $t \approx 2,2 \cdot 10^{17} \text{ c} \approx 7 \cdot 10^9$ років, що добре узгоджується з терміном життя зір, подібних за масою до Сонця.

5.10. Основні параметри Всесвіту можна знайти таким чином:

а) радіус Всесвіту можна визначити як радіус світлового горизонту [11]:

$$R_{\text{Bc}} = ct_{\text{Bc}},$$

де $t_{\text{Вс}}$ – вік Всесвіту від початку «Великого вибуху». Можна вважати, що $t_{\text{Вс}}$ за порядком величини дорівнює характерному часу життя такої зорі як Сонце (див. попередню задачу), тобто

$$t_{\text{Вс}} \sim \frac{\lambda_e}{c} \alpha_g^{-1}.$$

Тоді, очевидно

$$R_{\text{Вс}} \sim \frac{\lambda_e}{\alpha_g} \approx 10^{26} \text{ м}.$$

Цей результат добре узгоджується з розмірами спостережуваного Всесвіту.

б) Маса спостережуваного Всесвіту можна знайти, якщо гравітаційний радіус Всесвіту прирівняти її радіусу, визначеному у пункті а). Тоді матимемо

$$M_{\text{Вс}} \sim \frac{\lambda_e c^2}{G \alpha_g} = \left(\frac{m_p}{m_e} \right) \alpha_g^{-2} m_p.$$

Підставляючи числові значення, дістаємо $M_{\text{Вс}} \approx 5,3 \cdot 10^{79} m_p$ (див. задачі 4.5 і 7.4).

в) Враховуючи результати пунктів а) та б), отримуємо

$$\rho \sim \frac{M_{\text{Вс}}}{R_{\text{Вс}}^3} = \left(\frac{m_p}{m_e} \right) \alpha_g \frac{m_p}{\lambda_e^3} \approx 3,1 \cdot 10^{-25} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Це надто близько до значення критичної густини $\rho_{\text{кр}} \approx 10^{-26} \text{ кг/м}^3$, яка відповідає пласкому Всесвіту, розрахованої за сталої Габбла $H_0 = 68 \text{ км/(с} \cdot \text{Мпк)}$.

6. Стійкість основних структурних елементів Всесвіту і числові значення фундаментальних констант

6.1. Відомо, що тиск випромінювання визначається формулою

$$P_B = \frac{a}{3} T^4 = \frac{4}{3} \frac{\sigma}{c} T^4,$$

де $a = 7,55 \cdot 10^{-16} \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$ – стала густини випромінювання чорного тіла, σ – стала Стефана-Больцмана.

Знайдемо відношення тиску випромінювання до газового тиску P_T у центрі Сонця

$$\frac{P_B}{P_T} = \frac{4}{3} \frac{\sigma \mu_H T^3}{c \rho}.$$

Для $T = 1,55 \cdot 10^7 \text{ К}$, $\rho = 1,49 \cdot 10^5 \text{ кг}/\text{м}^3$ та $\mu = 0,6$ [22] дістаємо

$$\frac{P_B}{P_T} = 4,6 \cdot 10^{-3}.$$

Якби швидкість світла зменшилась у 10^3 разів, то тиск світла став би перевищувати газовий майже у 5 разів. У сучасному Сонці гравітація стримується практично лише газовим тиском, тобто для перебування Сонця в рівновазі (фактично для існування Сонця) достатньо лише газового тиску. Внаслідок такого зменшення значення швидкості світла, рівновага б істотно порушилась і Сонце зруйнувалось би.

6.2. Якщо згадати, як обчислюється сила Кулона:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2},$$

де $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2$ – електрична стала, то на перший погляд – ні.

Проте слід згадати ще одне співвідношення:

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2},$$

де μ_0 – магнітна стала. Виникає запитання: як змінюватимуться ϵ_0 і μ_0 у зв'язку зі зміною (уявною) швидкості світла?

Відомо, що сила Ампера, яка припадає на метр довжини кожного з двох паралельних провідників зі струмом I (в

амперах), розташованих на відстані r (в метрах) один від одного, дорівнює

$$f[\text{Н/м}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I^2 [A^2]}{r[\text{м}]}.$$

Згадаймо цю формулу в системі СГС:

$$f[\text{дин/см}] = \frac{2I^2 \left[\left(\frac{\text{СГСЕ}_q}{c} \right)^2 \right]}{rc^2 \left[\frac{\text{см}^3}{c^2} \right]}.$$

Із порівняння цих двох формул випливає, що величина $\mu_0/4\pi$ має дорівнювати 10^{-7} ($1 \text{ Н} = 10^5 \text{ дин}$, а $1 \text{ м} = 10^2 \text{ см}$). Отже, стала μ_0 має дорівнювати

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2 \text{ (точно)}.$$

У системі СІ кулон визначається не законом Кулона, а силою Ампера, тобто силою, яка діє між струмами, а не силою, яка діє між зарядами.

Отже, «якби нові експериментальні вимірювання швидкості світла змінили прийняте значення c , то ми повинні були б виправити величину ϵ_0 , а не μ_0 » [27].

Відповідаючи на запитання, поставлене в задачі, можна стверджувати, що зменшення c у 10^3 разів збільшило б ϵ_0 у 10^6 , а, отже, зменшило б силу Кулона у 10^6 разів.

6.3. Безрозмірні константи електромагнітної та гравітаційної взаємодії дещо схожі (див. задачі 3.8 та 3.9):

$$\alpha_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \quad \text{та} \quad \alpha_g = \frac{Gm_p^2}{\hbar c}.$$

Очевидно, що і α_e , і α_g обернено пропорційні швидкості світла. Проте у вираз для α_e входить ще електрична стала ϵ_0 , яка, як з'ясовано у задачі 6.2, обернено пропорційна квадрату швидкості світла. Тому зрештою безрозмірна константа електромагнітної взаємодії α_e є прямо пропорційною c . Отже, виявляється, що α_e , і α_g протилежним чином залежать від швидкості світла.

6.4. Як вже згадувалось у задачі 5.8, теоретичне співвідношення маса-світність для середньої частини головної послідовності можна подати у вигляді (опускаючи залежність

від відносної молекулярної маси μ) [22]:

$$L \sim \left(\frac{Gm_p}{k} \right)^4 \frac{\sigma}{\kappa} M^3,$$

де m_p – маса протона, k – стала Больцмана, σ – стала Стефана-Больцмана, κ – коефіцієнт непрозорості зоряної речовини. Очевидно, що у цьому разі світність L прямо пропорційна четвертому степеню гравітаційної сталої.

Можна показати, що для зір сонячної маси і нижче справедливе співвідношення [22]:

$$L \sim \left(\frac{G\mu m_H}{k} \right)^{7,8} \frac{M^{5,5}}{\kappa_0^{1,1}},$$

де κ_0 – числовий множник у законі Крамерса для коефіцієнту непрозорості зоряної речовини.

З цієї формули видно, що у цьому разі світність прямо пропорційна гравітаційній сталій у надто високому степеню – $G^{7,8}$.

У разі уявного збільшення G удвічі світність Сонця зросте більш, ніж у 220 разів, що катастрофічно не тільки для Землі, а й для усіх планет земної групи. Зменшення ж G удвічі спричинило б зменшення світності Сонця більш, ніж у 220 разів, і зробило б неможливим життя на будь-якій планеті Сонячної системи. До того ж таке зменшення G еквівалентно зменшенню маси центрального тіла удвічі, а це б призвело до руйнування Сонячної системи. Справа в тому, що для усіх планет, які рухаються коловими (або майже коловими, як для Землі) орбітами, їх сучасні колові швидкості дорівнюватимуть параболічним швидкостям на відповідних відстанях від Сонця. Тільки Меркурій і Марс серед класичних планет, унаслідок помітної еліптичності своїх орбіт, змогли б зберегтися біля Сонця, якщо б на момент такого зменшення G перебували поблизу своїх афеліїв.

6.5. Критична густина Всесвіту визначається формулою:

$$\rho_{\text{кр}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G},$$

де H_0 – стала Габбла, а G – гравітаційна стала. За сучасного значення $H_0 = 67,8 \text{ км/(с}\cdot\text{Мпк)}$ $\rho_{\text{кр}} \sim 10^{-26} \text{ кг/м}^3$. На сьогодні спостереження свідчать про те, що з урахуванням внесків

темної матерії і темної енергії реальна середня густина Всесвіту майже точно дорівнює критичній.

Відомо [2], що у випадку, коли дійсна середня густина Всесвіту дорівнює критичній, то геометрія Всесвіту є *евклідовою* (*кривизна простору дорівнює нулю*). У цьому разі розширення Всесвіту відбувається необмежено, проте швидкість розширення на нескінченності спадає до нуля.

Якщо величину H_0 збільшити у 10 разів, то значення критичної густини зросте у 100 разів і тоді реальна середня густина Всесвіту буде на два порядки менше критичної. У цьому разі геометрія Всесвіту вже буде описуватись *геометрією Лобачевського* (*простір від'ємної кривизни*), розширення не обмежене в часі і навіть на нескінченності швидкість розширення завжди більше нуля (модель «відкритого Всесвіту») [2; 16].

Час, обернений сталої Габбла, називають *габблівським часом*:

$$t_H = \frac{1}{H_0} \approx 1,5 \cdot 10^{10} \text{ (років)}.$$

Цей час можна вважати мірою віку Всесвіту. З точністю до множника порядку одиниці це той час, який минув з початку розширення Всесвіту [16]. Якщо величину H_0 збільшити у 10 разів, то габблівський час стає таким, що дорівнює $\approx 1,5 \cdot 10^9$ років, що істотно менше віку Землі. За сучасними уявленнями життя на Землі виникло десь між 4,4 і 3,6 млрд років тому. Отже, для виникнення сучасної цивілізації знадобився такий величезний проміжок часу. На сьогодні ми не знаємо, наскільки цей проміжок часу є характерним для процесу створення цивілізації. Проте, якщо орієнтуватися на нашу історію, то таке збільшення сталої Габбла ставить під загрозу виникнення розумного життя.

Якщо ж величину H_0 зменшити у 10 разів, то значення критичної густини зменшиться у 100 разів і тоді реальна середня густина Всесвіту буде на два порядки більше критичної. Якщо $\rho > \rho_{кр}$, то розширення Всесвіту з часом змінюється стисканням. У такому Всесвіті властивості простору визначає *сферична геометрія* (*простір додатної кривизни*). Цю модель називають «закритою (замкнутою) моделлю Всесвіту» [2; 16].

Габблівський час у цьому разі збільшується у 10 разів, тобто вік Всесвіту становитиме ~ 100 млрд років. Можна припускати, що наша цивілізація була б при цьому вже надцивілізацією.

6.6. Існує кілька міркувань, які обмежують значення безрозмірної константи електромагнітної взаємодії α_e . Перший приклад пов'язаний з можливістю реалізації термоядерних реакцій в зорях. Вважатимемо, як у задачі 5.3, що для ефективного перебігу термоядерних реакцій необхідно, щоб середня кінетична енергія протонів в центрі зорі за порядком величини дорівнювала

$$kT \sim \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} W_B,$$

де W_B – борівська енергія. Виходячи з цієї умови, було знайдено мінімально можливу масу зорі:

$$M_{\min} \sim \left[\frac{\alpha_e}{\alpha_g} \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{3}{2}} m_p.$$

Для забезпечення перебігу термоядерних реакцій в зорях необхідно, щоб їх маса перевищувала мінімальну, тобто $M \geq M_{\min}$. Враховуючи розв'язок задачі 5.2 матимемо:

$$\alpha_g^{-\frac{3}{2}} m_p \geq \left[\frac{\alpha_e}{\alpha_g} \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{3}{2}} m_p.$$

Звідси випливає, що

$$\alpha_e \leq \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оскільки $m_p \approx 1836m_e$, то остаточно дістаємо вимогу:

$$\alpha_e < \frac{1}{40}.$$

Другий приклад пов'язаний із нестабільністю протона. Одним із важливих передбачень теорії Великого об'єднання (об'єднання електрослабкої і сильної взаємодії) є розпад

протона. Теорія дає елегантну апроксимацію для часу розпаду t_p [30]:

$$t_p \sim \frac{\hbar}{\alpha_e^2 m_p c^2} e^{\frac{1}{\alpha_e}} \sim 10^{32} \text{ років.}$$

Величезне значення часу t_p визначається експоненціальною залежністю і малістю (порівняно з одиницею) величини α_e . Очевидне обмеження на час t_p — нерівність:

$$t_p > t_{\text{Вс}} \sim 10^{17} \text{ с,}$$

де $t_{\text{Вс}}$ — час існування Всесвіту. Щоб задовільнити цю нерівність, необхідно, виконання умови (це впливає з формули для часу розпаду):

$$\alpha_e < \frac{1}{80}.$$

Якби ця нерівність не виконувалась, то практично усі протони розпались би врешті решт на позитрони, фотони і нейтрино. Позитрони і електрони анігілювали б і Всесвіт перетворився б на нейтринно-фотонну пустелю.

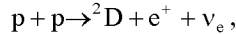
6.7. Як вже знаємо, параметри зір плавно залежать від безрозмірної константи гравітаційної взаємодії α_g (див. задачі 5.2–5.6). Тому в результаті збільшення константи α_g навіть на кілька порядків (нагадаємо, що вона становить $\sim 10^{-39}$ — див. задачу 3.9) із зорями «нічого жахливого» (як пише Й. Розенталь [30]) не відбудеться. Вони будуть існувати, хоча їх маса істотно зменшиться. Проте, якщо придивитись до формули, яка визначає характерний час життя зорі (див. задачу 5.9), то видно, що цей час обернено пропорційний α_g у першому степеню:

$$t \propto \alpha_g^{-1}.$$

Тому збільшення α_g навіть у 10 разів призведе до такого ж зменшення часу життя зорі. Відтак, час перебування, наприклад, Сонця на головній послідовності зменшиться у 10 разів і сягатиме всього ≈ 1 млрд років. Якщо згадати, що з моменту утворення Землі до виходу людини в космос минуло $\approx 4,6$ млрд років, то цілком зрозуміло, що така зміна α_g унеможливить появу «спостерігача».

Отже, навіть порівняно невелике (на 1–2 порядки) збільшення α_g неприпустиме у Всесвіті, де існують «спостерігачі» [30].

6.8. Перша реакція протон-протонного циклу, який забезпечує існування нормальних (подібних до Сонця) зір виглядає так:



де p – протон, 2D – Дейтон (ядро атома Дейтерію), e^+ – позитрон, ν_e – електронне нейтрино. Проте ця реакція відбувається у разі певних співвідношень між масами (енергіями) частинок, що беруть участь у реакції:

$$2m_p c^2 > m_p c^2 + m_n c^2 - \varepsilon_D + m_e c^2,$$

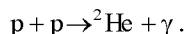
де ε_D – енергія зв'язку Дейтону. Цю нерівність можна переписати інакше:

$$\varepsilon_D > \Delta m_N c^2 + m_e c^2,$$

де Δm_N – різниця мас нейтрона і протона. Відомо, що $\Delta m_N c^2 \approx 1,3$ MeV, $m_e c^2 \approx 0,5$ MeV. Оскільки $\varepsilon_D \approx 2,2$ MeV, то остання нерівність виконується з надто малим запасом. Дивовижно, але енергія зв'язку Дейтона найменша серед енергій зв'язку усіх ядер і її не можна далі зменшувати, не змінюючи усієї структури Всесвіту. Якщо зменшувати константу сильної взаємодії α_s , то Дейтон отримає здатність спонтанно розпадатись, що спричинить зупинку космічного нуклеосинтезу. Стабільність Дейтона – наріжний камінь усієї злагодженої системи нуклеосинтезу, який відбувається в зорях. За розрахунками Й. Розенталя [30] константу α_s не можна зменшити більше, ніж на 40%.

Розглянемо обмеження, які накладаються на α_s зверху. У Всесвіті «майже» існує діпротон ${}^2\text{He}$ (система pp). Цьому заважає кулонівське відштовхування між протонами, яке трохи переважає ядерні сили. Проте, якщо збільшити α_s всього на кілька відсотків [30], то діпротон стає стабільною частинкою. А це призводить до істотної зміни структури Всесвіту.

Справа в тому, що у разі існування стабільного діпротона можлива реакція:



Ця реакція відбувається за каналом електромагнітної взаємодії, і тому надто швидко, на відміну від першої реакції протон-протонного циклу з утворенням Дейтона, яка відбувається за каналом слабкої взаємодії і тому надто повільно, що є запорукою тривалого існування зір. Отже, якщо утворюється діпротон, то всі протони «спаляться» вже в перші хвилини розширення Всесвіту, який залишиться без Гідрогену. Ізотоп Гелію ${}^2\text{He}$ дуже легко добирає баріони до ${}^4\text{He}$ і відтак головний хімічний елемент у такому Всесвіті – Гелій. Це зовсім інший Всесвіт, а для органічного життя – це катастрофа.

6.9. Слабка взаємодія грає вирішальну роль у формуванні структури Всесвіту в двох аспектах, вона визначає: 1) процес первинного нуклеосинтезу і 2) головну термоядерну реакцію гідрогенового циклу в зорях. Розглянемо вплив значення константи слабкої взаємодії α_w на обидва процеси.

1. Відомо, що нейтрон у вільному стані достатньо швидко (за ≈ 1000 с) розпадається. Теорія β -розпаду дає для часу життя нейтрона [30]:

$$\tau_n \propto \frac{1}{\alpha_w^2 (\Delta m_N)^5},$$

де Δm_N – різниця мас нейтрона і протона. Якби значення константи α_w було у 10 разів більше, то час τ_n став би у 100 разів менше, тобто $\tau_n \approx 10$ с, і практично до часу здійснення первинного нуклеосинтезу (≈ 10 – 200 с) усі нейтрони зникли би. Подальший нуклеосинтез не відбувався би і Всесвіт склався б виключно з Гідрогену.

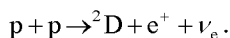
У випадку зменшення константи α_w (наприклад, у 10 разів) реакції:



які відбуваються за каналом слабкої взаємодії, будуть перебігати настільки повільно, що вони не встигнуть забезпечити статистичну рівновагу до початку первинного нуклеосинтезу. Тому відносна частка нейтронів не змінюватиметься після проходження Всесвітом епохи великих температур ($T \sim 10^{13}$ К; адронна ера), коли відношення концентрацій нейтронів і протонів становить $n_n/n_p \sim 1$ [30]. У разі статистичної рівноваги можна застосовувати формулу розподілу Гіббса, за якої на початку нуклеосинтезу ($T \leq 10^{10}$ К) відношення $n_n/n_p \approx 0,2$. І тоді

маємо існуюче співвідношення Гідрогену і Гелію у Всесвіті. Якщо ж на початку нуклеосинтезу зберігається $n_n/n_p \sim 1$, тобто існує майже однакова концентрація нейтронів і протонів, то практично всі протони врешті решт перейдуть у α -частинки (${}^4\text{He}$). Отже, Всесвіт залишиться без Гідрогену.

2. Безумовно, що значна зміна константи α_w призвела б до істотної зміни характеру еволюції зір головної послідовності (для спрощення аналізу забудемо про наслідки для первинного нуклеосинтезу). На жаль, відповідні розрахунки відсутні, тому обмежимося лише якісними міркуваннями [30]. Збільшення константи α_w спричинить і збільшення швидкості основної термоядерної реакції перетворення двох протонів у Дейтон:



Зменшення характерного часу перебігу цієї реакції, яка нині становить $\sim 10^{10}$ років і визначає тривале й спокійне життя сонцеподібних зір, становить серйозну загрозу існуванню життя, яке, якщо виникне, може не встигнути розвинути до високих форм.

Значне зменшення константи α_w призвело б до швидкого переходу нормальних зір головної послідовності, у яких відбуваються термоядерні реакції, у білі карлики та нейтронні зорі [30]. Справа в тому, що зменшення енерговиділення за рахунок термоядерних реакцій порушить теплову і механічну рівновагу зорі. Оскільки протидія гравітації зменшиться, то зоря почне стискатись. Коли радіус зорі зменшиться до характерних розмірів білого карлика, почнуть діяти квантові ефекти (принцип заборони Паулі), які припинять подальше стискання зорі. Нагадаємо, що у білих карликах гравітації додатково протидіють своїм тиском вироджені електрони, а у нейтронних зір – вироджені нейтрони.

7. Антропний принцип

7.1. На сьогодні радіус спостережуваного Всесвіту $R_{\text{Вс}}$ оцінюють у $\sim 10^{26}$ м. Комптонівська довжина хвилі електрона дорівнює:

$$\lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c} \sim 10^{-13} \text{ м.}$$

Тоді шукане відношення становить

$$\frac{R_{\text{Вс}}}{\lambda_e} \sim 10^{39}.$$

Позначимо це «велике число» N_1 .

7.2. У разі апроксимації атомного ядра сферою однорідної густини його радіус виражають формулою [7]:

$$R = 1,2 \cdot A^{\frac{1}{3}} \text{ Фм},$$

де A – масове число, а $1 \text{ Фм} = 10^{-15}$ м. Для ядра атома Гідрогену \equiv протону $A = 1$.

Отже, характерний ядерний час (який Г. Гамов називав «темпоном») становить:

$$\tau = \frac{2R}{c} \sim 10^{-23} \text{ с.}$$

Тоді, приймаючи для віку Всесвіту $t_{\text{Вс}} \approx 14$ млрд років ($\sim 10^{17}$ с), отримаємо:

$$\frac{t_{\text{Вс}}}{\tau} \sim 10^{40}.$$

Позначимо це «велике число» N_2 .

7.3. П. Дірак у 1937 р. розглянув два великих числа [21]. Перше (друге було розглянуто у попередній задачі) стосується співвідношення між кулонівською та гравітаційною силами взаємодії протона й електрона. Для відношення цих сил дістаємо

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{Gm_p m_e} \approx 0,23 \cdot 10^{40},$$

де $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд електрона, ε_0 – електрична стала (див. задачу 6.2), $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг – маса протона, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг – маса електрона, а G – гравітаційна стала.

Позначимо це «велике число» N_3 .

7.4. Масу матерії спостережуваного Всесвіту $M_{\text{Вс}}$ можна оцінити так: $M_{\text{Вс}} \sim \rho R^3$. Якщо як середню густину взяти так звану критичну густину, яка розраховується за формулою [2; 16]:

$$\rho_{\text{кр}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 10^{-26} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

то буде врахована не тільки видима матерія, а й темна матерія і темна енергія. Тоді для повної маси (див. задачу 4.5 і 5.10) матимемо $M_{\text{Вс}} \sim 10^{53}$ кг. Отже,

$$\frac{M_{\text{Вс}}}{m_p} \sim 10^{80}.$$

Слід зазначити, що останнє велике число є фактично квадратом попередніх великих чисел, отриманих в задачах 7.1–7.3.

7.5. В оригіналі (за формулюванням автора – Брендона Картера) так званий «слабкий» антропний принцип виглядає так: *«Наше положення у Всесвіті з необхідністю є привілейованим, у тому сенсі, що воно має бути сумісним з нашим існуванням як спостерігачів»* [18]. Тому слід шукати приклади такої привілейованості нашого положення у Всесвіті і сумісності з ним існування людини.

1. Унікальність Землі навіть серед планет земної групи в нашій Сонячній системі. Вона єдина, на думку багатьох фахівців (див., наприклад, [13]), перебуває у так званій «зоні існування» навколо Сонця (circumstellar habitable zone), де умови сприятливі для життя людини (відповідний температурний режим, наявність відповідної атмосфери і гідросфери). Ця зона за розрахунками С. Доула [13] простягається від 0,725 а.о. до 1,24 а.о. Ці розрахунки були отримані в припущенні, що хоча б 10% поверхні планети мають середню річну температуру у діапазоні від 0°C до 30°C, найвища середньодобова температура не перевищує 40°C, а найнижча середньодобова температура вище – 10°C. Венера перебуває

якраз на внутрішній межі цієї зони, а Марс – поза зовнішньою межею (його середня відстань від Сонця становить 1,526 а.о.). І дійсно, ці сусідні планети зараз повністю непридатні для життя. Проте слід мати на увазі, що Марс ще й істотно (у 9 разів) менше Землі за масою, тому він інтенсивно втрачає свою атмосферу, і її тиск нині такий, що унеможливує в сучасних умовах існування води у рідкому стані на його поверхні.

2. За масою Земля також перебуває в середині достатньо вузького діапазону мас планет, придатних для життя, оскільки маса має бути більшою, ніж 0,4 маси Землі, щоб могла утворитися і зберегтись придатна для дихання атмосфера, але меншою, ніж 2,35 маси Землі, щоб прискорення вільного падіння на поверхні не перевищувало $1,5g$ [13]. І за іншими важливими параметрами, як то осьовий період і нахил осі обертання, ексцентриситет орбіти, Земля займає оптимальну позицію.

3. Є ще одна важлива обставина, яка підкреслює нашу привілейованість у просторі [21]. Сонячна система перебуває близько до так званого коротаційного кола нашої Галактики, де швидкості обертання речовини диска і спіральних рукавів (хвиль густини, що поширюються по галактичному диску) збігаються. Усередині кола коротації зорі і газ диска рухаються по орбітах швидше від спіральної хвилі густини, а ззовні цього кола швидкість обертання спіральних рукавів є вищою. Це створює особливі умови для еволюції Сонячної системи, виникнення і подальшого підтримування життя на Землі. З розрахунків випливає, що «досонячна газопилова хмара» проходила крізь один з рукавів десь 5 млрд років тому, що, можливо, стимулювало формування об'єктів Сонячної системи та визначило особливості її хімічного складу (наприклад, внаслідок близького спалаху наднової зорі, що збагатило цю хмару Карбоном та іншими важкими хімічними елементами, необхідними для життя). Проте вже достатньо довго Сонячна система перебуває у спокійному місці – між двома спіральними рукавами, які ніяк не впливають на неї, в той час як у самих рукавах масово народжуються зорі, у тому числі блакитні надгіганти, які швидко еволюціонують (порівняно з віком Сонця) і вибухають як наднові. Після виникнення життя близький спалах наднової може його знищити. Оскільки від виникнення життя на Землі до створення цивілізації минуло майже 4 млрд років і цей час можна вважати певним характерним часом для створення технічно розвинутої

цивілізації, то в Галактиці теж можна ввести «зону існування», подібну до такої у Сонячній системі. Середина такої «галактичної зони існування» припадає якраз на коротацийне коло. Ця зона достатньо вузька порівняно з радіусом коротациї, ширина її не більше 2 кпк, (радіус коротациї за різними розрахунками становить від 8 до 10 кпк, а радіус Галактики, як відомо, – 15 кпк).

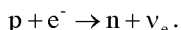
4. Привілейованість у часі, що пов'язана з існування хімічних елементів важчих, ніж Гідроген і Гелій. Основу живої матерії на Землі становить Карбон, хоча Нітроген і Оксиген також вкрай необхідні. Цих елементів не було у первісному Всесвіті. Тому їх не було й у зорях першого покоління. Їх наявність у сучасному Всесвіті зумовлена нуклеосинтезом, що відбувається у надрах зір. Саме там температура сягає десятків, сотень мільйонів кельвінів і вище, яка підтримується протягом сотень мільйонів або навіть мільярдів років. Тим самим виникають умови для перетворення певної частини зоряної речовини у важкі хімічні елементи. Але щоб ці елементи стали хімічними будівельними блоками життя, їх потрібно розсіяти по Галактиці. Це відбувається переважно завдяки спалахам наднових усіх типів. Як колись зауважив відомий англійський астрофізик Джеймс Джинс, наші тіла складаються з попелу давно згаслих зір [10].

Отже, життя у Всесвіті не може виникнути до того часу, поки щонайменше одне покоління зір не завершить свій життєвий цикл і залишки наднових не розсіються у міжзоряному середовищі, збагачуючи його Карбоном та іншими важкими хімічними елементами. Характерний час життя такої зорі як Сонце ~ 10 млрд років, що збігається за порядком величини з віком нашого Всесвіту. Життєвий цикл масивніших зір є коротшим, але для збагачення міжзоряного середовища достатньою кількістю важких хімічних елементів, мабуть, потрібно щоб не одне покоління масивних зір завершило свій життєвий шлях. Сонце зараз відноситься до зір щонайменше третього покоління. Отже, згідно з Р. Дікке людина існує саме у сучасну епоху, тому і збігаються великі числа N_2 та N_3 [21].

7.6. Неспроможність слабкого антропоного принципу пояснити багато інших збігів наштовхнула Б. Картера на формулювання «сильного» антропоного принципу (АП) згідно з яким *«Всесвіт (і, отже, фундаментальні параметри, від яких він залежить) має бути таким, щоб в ньому на певному етапі еволюції*

припускалось існування спостерігачів» [18]. Судячи з цього визначення, приклади прояву сильного АП слід шукати серед фундаментальних параметрів Всесвіту (фундаментальних констант), які мають бути такими, щоб в ньому на певному етапі еволюції з'явилася людина. Наведемо кілька «хрестоматійних» прикладів:

1. Стабільність атома Гідрогену забезпечується найсуворішим обмеженням – законом збереження енергії, який забороняє в звичайних умовах реакцію



Дійсно, адже маса електрона в енергетичних одиницях $m_e \approx 0,5\text{MeV}$ менше різниці мас нейтрона m_n і протона m_p , яка становить $m_n - m_p \approx 1,3\text{MeV}$. Така реакція відбувається тільки під час народження нейтронних зір, коли температура зоряної речовини сягає мільярдів кельвінів і швидкості електронів наближаються до швидкості світла. Легко переконатися, що зі збільшенням маси електрона, наприклад, утричі (за незмінності різниці $m_n - m_p$) ця реакція відбувалась би за скільки завгодно низьких температур. Стало б енергетично вигіднішим перетворення всіх протонно-електронних пар на нейтрони, а не навпаки, як зараз, розпад вільного нейтрона. Це призвело б до колапсу не тільки атома Гідрогену, а й до зникнення всіх атомів і молекул. Зорі і галактики цілком склалися б з нейтронів, складні форми речовини, у тому числі органічні сполуки, були б відсутні. Всесвіт змінився б кардинально [21].

2. «Якби нейтрон був трохи легше (спробуйте відповісти на скільки?) або протон трохи важче, то у Всесвіті після Великого вибуху протони розпалися б і залишились одні нейтрони. Не було б ані складних структур, ані атомів взагалі. Пустеля!» [31].

3. «Якби нейтрон був трохи важчим, ніж насправді, то нейтрони в атомних ядрах розпадались би, тобто ядер би просто не було. Ніякої таблиці Менделєєва, ніякої хімії, один Гідроген був би стабільним.» [31].

4. Якщо трохи збільшити константу сильної взаємодії, то з'являється стабільний діпротон (${}^2\text{He}$). «Існування діпротона жахливо тим, що він надто легко добирає баріони до ${}^4\text{He}$, який є дуже міцно зв'язаним. Увесь Гідроген Всесвіту перетворився б на Гелій – і світ залишився би без головного термоядерного палива (але ж і без води та органіки). До подібної катастрофи в потенціалі взаємодії двох протонів не вистачає всього 92 кеВ.

Насправді приклад не зовсім коректний. Справа в тому, що, як нині відомо, ми не можемо довільно змінити потенціал взаємодії протонів – він залежить від константи квантової хромодинаміки, від якої також залежать маси баріонів. Якщо її змінити – «попливе» усе. Тим не менше, приклад демонструє, наскільки крихке наше благополуччя. Він же показує, наскільки акуратним і обережним слід бути навіть в уявних експериментах.» [31].

5. «Доволі дивовижний факт: у ядра Карбону є резонанс, який на порядки підвищує ймовірність синтезу ядра Карбону з трьох ядер Гелію (про це детальніше див. у статті [21]). Енергія резонансу визначається комбінацією констант сильної та електромагнітної взаємодій, а також залежить від маси кварків. Якщо трохи змінити цю енергію, то ланцюжок синтезу елементів уривається. У Всесвіті майже зникне Карбон, Оксиген та інші елементи, на яких ґрунтується життя, з яких складається космічний пил, з якого, своєю чергою, конденсуються планети земного типу.» [31].

6. «Йдемо у дуже ранній Всесвіт. Після Великого вибуху залишились неоднорідності від попередньої стадії його еволюції, будь-то стадія космологічної інфляції, або будь-що ще. Вихідна величина цих неоднорідностей у момент утворення гарячого Всесвіту $\sim 10^{-5}$ (відносно середньої густини). Якби амплітуда неоднорідностей була у кілька разів менше, галактики не встигли б утворитися. Якби вона була у кілька разів більше, галактики виявились би надто масивними і щільними, що також фатально – часті вибухи близьких наднових, велика ймовірність відриву планет від батьківських зір. При цьому амплітуда неоднорідностей нізвідки не впливає. У межах теорії космологічної інфляції неоднорідності виникають як квантові флуктуації «важкого» вакууму і залежать від його природи – від його густини, від форми потенціалу. Ці параметри також не впливають з будь-яких відомих принципів.» [31].

7. І наостанок – розірваність простору (хоча можуть бути й інші приклади). Відомо (передусім, завдяки працям П. Еренфеста, починаючи з 1917 р.) що тільки у тривимірному евклідовому просторі (E^3) може виникнути те розмаїття явищ, які ми спостерігаємо. Так, з'ясувалось [8], що тільки у просторі E^3 можливий як стійкий фінітний (при цьому завжди замкненими траєкторіями), так і інфінітний рух. У просторі E^2 можливий лише фінітний рух, а замкненими є лише колові траєкторії. У просторі E^N з $N > 3$ фінітний рух відповідає лише

коловим траєкторіям і до того ж завжди нестійкий (яке завгодно мале збурення спричиняє або падіння на центр, або віддалення на нескінченність). Відтак для розмірності простору більше трьох за ньютоніоподібного закону тяжіння не можливі стійкі орбіти планет у гравітаційному полі зір.

Для мікросвіту результатом квантомеханічного розв'язання задачі про атом Гідрогену є «наднестабільний» атом для $N \geq 4$ (електрон самовільно падає на ядро) і «надстабільний» атом для $N \leq 2$ [8].

Слід зазначити, що наведені вище аргументи щодо розмірності простору відносяться до випадку нерелятивістського розглядання проблеми, але і цього достатньо.

7.7. Формулювання антропного принципу (див. задачу 7.5), на яке ми спираємось, належить Б. Картеру, зі статті якого [18] розпочалась сучасна історія досліджень цієї проблеми. Виходячи з цього визначення і прикладів, наведених у задачі 7.5, можна дати наступну коротку інтерпретацію слабкого антропного принципу – він вказує на привілейованість, особливе положення нас як спостерігачів у просторі-часі Всесвіту.

При цьому слід зазначити, що ідея, що ми займаємо особливе, нетипове місце у просторі взагалі то суперечить загальній спрямованості революції М. Коперника. Запереченням виділеного положення Землі у Сонячній системі (на той час – у системі світу) Коперник започаткував традицію, що впливала на наукову думку впродовж більше чотирьох століть. Дійсно, у більшості відношень Землю можна розглядати як цілком звичайну і типову планету серед величезної кількості подібних космічних тіл, що обертаються навколо інших зір сонячного типу. Сьогодні вже можна стверджувати, що результати відкриттів позасонячних планет (інакше, екзопланет, а їх вже виявлено на лютий 2021 р. близько 4700) в цілому підтверджують достатню поширеність планет взагалі і землеподібних зокрема в нашій Галактиці. Проте про певну нетиповість, навіть унікальність Землі дивиться у задачі 7.5.

Слід також зазначити, що деякі науковці (С. Вайнберг, Л. Окунь, Д. Гросс, А. Віленкін, Г. Горелик) висловлюють критичні зауваження і певні сумніви щодо антропного принципу.

7.8. Формулювання Б Картера і приклади, наведені в задачі 7.6, вказують на унікальність нашого Всесвіту і тонке підстроювання його під існування людини (спостерігача).

Сильний антропний принцип підштовхує нас до теологічного погляду на світ, приводить до ідеї Творця, Конструктора цього світу. Матеріалістичною (в межах сучасної науки) альтернативою таким поглядам є ідея «ансамблю світів» (останнім часом все частіше використовується назва «мультиверс») — всесвітів із різними фундаментальними властивостями, в одному з яких умови випадково виявилися сприятливими для виникнення життя й людини. За влучним висловлюванням відомого космолога О.Л. Зельманова ми є свідками саме такого світу та процесів, що в ньому відбуваються, оскільки в інших світах всі процеси відбуваються без свідків [17].

Одним із свідчень на користь гіпотези «ансамблю світів» може бути приклад знову ж таки з електроном (див. задачу 7.6). На рис. 9 представлений розподіл елементарних частинок за масами [28]. Оскільки розкид за масами перевищує чотири порядки, то розподіл поданий у логарифмічному масштабі. По осі ординат відкладено відношення кількості частинок на одиницю маси (в логарифмічному масштабі) і за одиницю маси прийнято масу протона. Пунктирна крива — апроксимація експериментальних даних. З рис. 9 видно, наскільки електрон є «нетиповою» частинкою. Усі частинки за масою концентруються навколо протона і тільки електрон «вискакує» далеко ліворуч, у бік надто малих мас. Нагадаємо, що електрон «легше» протона у ≈ 1840 разів, проте для існування відомого нам Всесвіту йому не можна мати масу навіть утричі більшу.

Відомий астрофізик Й.Л. Розенталь, апроксимуючи цей експериментальний розподіл простими степеневими функціями, оцінив ймовірність появи частинки з масою, що дорівнює масі електрона. Ця ймовірність виявилась надзвичайно малою — менше 10^{-5} [28]. Таке значення цілком можна розглядати як флуктуацію у низці подібних величин. На підставі цього та інших фактів Розенталь приходять до висновку: «Мабуть, наша Метагалактика (спостережуваний Всесвіт за термінологією Розенталя — *вставка наша*) — гігантська флуктуація (у сенсі числового значення фундаментальних сталих) серед інших всесвітів. Ця флуктуація — основа складної структури Метагалактики» [30].

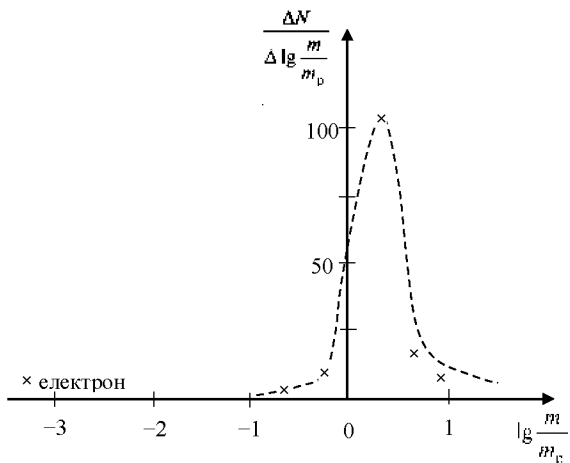


Рис. 9. Розподіл елементарних частинок за масами

Слід зауважити, що гіпотеза флуктуаційного походження усіх фундаментальних фізичних сталих давно відома і широко обговорювалась в науковій літературі. Про це говорив ще Л. Больцман. Символічна назва однієї з книжок, присвячених ролі фундаментальних сталих у спостережуваній структурі Всесвіту, — «Випадковий Всесвіт» [10].

Отже, антропний принцип дав усвідомлення нетиповості, унікальності положення людини у Всесвіті, як у просторі, так і у часі, так само, як і усвідомлення унікальності спостережуваного Всесвіту. Людина — продукт саме такої Землі, такого Сонця, такої Галактики і саме такого Всесвіту. У цьому полягає їх єдність [21].

Проте, слід зазначити, що серед науковців існує і певний скептицизм щодо сильного антропного принципу (див., наприклад, статтю В. Рубакова і Б Штерна [31]).

ДОВІДКОВІ ДАНІ

Деякі фізичні сталі та одиниці [22]

Маса атома Гідрогену	$m_{\text{H}} = 1,67356 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Стала Больцмана	$k = 1,3806503 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Радіус Бора	$r_{\text{B}} = 5,29177 \cdot 10^{-11} \text{ м}$
Комптонівська довжина хвилі	$\lambda_{\text{e}} = 3,86159 \cdot 10^{-13} \text{ м}$
Стала Стефана-Больцмана	$\sigma = 5,670400 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4$
Електрична стала	$\varepsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2$
Магнітна стала	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$
Потенціал іонізації:	
– атома Гідрогену	$\chi_{\text{H}} = 13,5985 \text{ eВ}$
– атома Гелію	$\chi_{\text{He}} = 24,5876 \text{ eВ}$
Електрон-вольт	$1 \text{ eВ} = 1,602176 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

Астрофізичні сталі та одиниці [22]

Астрономічна одиниця	$1 \text{ а.о.} = a_{\oplus} = 1,4959787 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Сонячна стала	$E_{\oplus\odot} = 1,366 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$
Радіус Землі (середній)	$R_{\oplus} = 6371,032 \text{ км}$
Маса Землі	$M_{\oplus} = 5,977 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Середня густина Землі	$\rho_{\oplus} = 5574 \text{ кг/м}^3$
Прискорення вільного падіння на Землі (стандартне)	$g_{\oplus} = 9,80665 \text{ м/с}^2$

Дані про Сонце [22]

Радіус	$R_{\odot} = 6,9599 \cdot 10^8 \text{ м}$
Маса	$M_{\odot} = 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
Середня густина	$\rho_{\odot} = 1410 \text{ кг/м}^3$
Прискорення вільного падіння	$g_{\odot} = 274 \text{ м/с}^2$
Ефективна температура	$T_{\text{e}\odot} = 5780 \text{ К}$
Світність	$L_{\odot} = 3,84 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агемян Т.А. Теория вероятностей для астрономов и физиков / Т.А. Агемян. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1974. – 264 с.
2. Андрієвський С.М. Загальна астрономія: підручник / С.М. Андрієвський, С.Г. Кузьменков, В.А. Захожай, І.А. Климишин. – Харків: ПромАрт., 2019. – 524 с.
3. Ансельм А.И. Основы статистической физики и термодинамики / А.И. Ансельм. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1973. – 424 с.
4. Арнольд В.И. Математическое понимание природы: Очерки удивительных физических явлений и их понимания математиками / В.И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2009. – 144 с.
5. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 720 с.
6. Венгер Є.Ф. Збірник задач з квантової механіки: Навч. посіб / Є.Ф. Венгер, В.М. Грибань, О.В. Мельничук. – К.: Вища шк., 2003. – 230 с.
7. Вихман Э. Квантовая физика: Учебное руководство. / Э. Вихман. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – (Берклеевский курс физики, т. IV). – 392 с.
8. Горелик Г.Е. Почему пространство трехмерно? / Г.Е. Горелик. – М.: Наука, 1982. – 168 с.
9. Горобец Б.С. Мировые константы π и e в Природе / Б.С. Горобец // Земля и Вселенная. – 2003. – № 5. – С. 69–76.
10. Девис П. Случайная Вселенная / П. Девис; пер. с англ. В.Е. Чертопрауда / Под ред. А.Г. Дорошкевича. – М.: Мир, 1985. – 160 с.
11. Дибай Э.А. Размерности и подобие астрофизических величин / Э.А. Дибай, С.А. Каплан. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
12. Докинз Р. Бог как иллюзия / Ричард Докинз; пер. с англ. Н. Смелковой. – М.: Издательство КоЛибри, 2010. – 560 с.

13. Доул С. Планеты для людей / С. Доул. – М.: Наука, 1974. – 200 с.
14. Еремеева А.И. Астрономическая картина мира и научные революции / А.И. Еремеева // Вселенная, астрономия, философия. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – С. 169–180.
15. Жуков А.В. Вездесущее число π / А.В. Жуков. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 216 с.
16. Засов А.В. Общая астрофизика. / А.В. Засов, К.А. Постнов. – Фрязино, 2006. – 496 с.
17. Зельманов А.Л. Проблема экстраполябельности, антропологический принцип и идея множественности вселенных / А.Л. Зельманов // Вселенная, астрономия, философия. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – С. 77–79.
18. Картер Б. Совпадение больших чисел и антропологический принцип / Б. Картер // Космология. Теории и наблюдения / Под ред. Лонгейра М.: Мир, 1978. – С. 369–380.
19. Киттель Ч. Механика: Учебное руководство / Ч. Киттель, В. Найт, М. Рудерман. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – (Берклеевский курс физики, т. I). – 448 с.
20. Крауфорд Ф. Волны: Учебное руководство / Ф. Крауфорд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – (Берклеевский курс физики, т. III). – 512 с.
21. Кузьменков С. Антропний принцип як стрижнева ідея фундаменталізації астрономічної освіти / Сергій Кузьменков // Фізика та астрономія в школі. – 2011. – № 4. – С. 20–24.
22. Кузьменков С.Г. Зорі: астрофізичні задачі з розв'язаннями: навчальний посібник / С.Г. Кузьменков. – Київ: Освіта України, 2010. – 206 с.
23. Кузьменков, С. Г. Спецкурс «Фундаментальні фізичні та математичні константи» як крок до фундаменталізації фізичної та астрономічної освіти / С.Г. Кузьменков // Збірник наукових праць. Педагогічні науки. Випуск 66. – Херсон: ХДУ, 2014. – С. 207–213.
24. Ландау Л.Д. Статистическая физика. Часть 1 («Теоретическая физика», т. V) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1976. – 584 с.

25. Ландау Л.Д. Теория поля («Теоретическая физика», т. II) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1976. – 584 с.
26. Окунь Л.Б. Фундаментальные константы физики / Л.Б. Окунь // УФН, 1991. – т. 161. – № 9. – С. 177–194.
27. Парселл Э. Электричество и магнетизм: Учебное руководство / Э. Парселл. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – (Берклеевский курс физики, т. II). – М.: Наука, 1983. – 416 с.
28. Розенталь И.Л. Вселенная и частицы / И.Л. Розенталь – М.: Знание, 1990. – 64 с.
29. Розенталь И.Л. Физические закономерности и численные значения фундаментальных постоянных / И.Л. Розенталь // УФН. – 1980. – Т. 131. – Вып. 2. – С. 239–256.
30. Розенталь И.Л. Элементарные частицы и структура Вселенной / И.Л. Розенталь. – М.: Наука, 1984. – 112 с.
31. Рубаков В. Антропный принцип // Валерий Рубаков, Борис Штерн. – Троицкий вариант. – 2018. – № 262. – С. 1–2.
32. Рымкевич А.П. Сборник задач по физике: Для 9–11 кл. сред. шк. / А.П. Рымкевич. – М.: Просвещение, 1992. – 224 с.
33. Спиридонов О.П. Фундаментальные физические постоянные: От начал физики до космологии: Учебное пособие / О.П. Спиридонов. – М.: ЛЕНАНД, 2015. – 304 с.
34. Спроул Р. Современная физика / Р. Спроул. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974. – 592 с.
35. Томилин К.А. Фундаментальные физические постоянные в историческом и методологическом аспектах / К.А. Томилин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 368 с.
36. Фейман Р. Фейнмановские лекции по физике: Задачи и упражнения с ответами и решениями / Р. Фейман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М.: Мир, 1969. – 624 с.
37. Шиллинг Г. Статистическая физика в примерах / Г. Шиллинг. – М.: Мир, 1976. – 432 с.
38. Школа О.В. Основи термодинаміки і статистичної фізики: [навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів] / О.В. Школа. – Донецьк: Юго-Восток, 2009. – 375 с.
39. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике: для инженеров и студентов вузов / Б.М. Яворский,

- А.А. Детлаф. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1968. — 940 с.
40. Amanullah R., Lidman C., Rubin D. et al. Spectra and Hubble Space Telescope Light Curves of Six Type Ia Supernovae at $0.511 < z < 1.12$ and the Union2 Compilation// The Astrophysical Journal. — 2010. — Vol. 716, Issue 1. — P. 712–738.

Навчальне видання

С. Г. КУЗЬМЕНКОВ

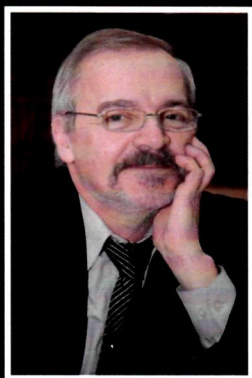
**ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ФІЗИЧНІ ТА МАТЕМАТИЧНІ
КОНСТАНТИ**

ЗАДАЧІ З РОЗВ'ЯЗАННЯМИ

Підписано до друку 26.04.2021 р.
Формат 60x84/16. Папір: офсетний.
Замовлення № 07/07-2021
Ум. друк. арк. 5,58. Наклад 100 примірників.

Надруковано у видавництві ПП «РЕЗНІК»
73008, м. Херсон, пров. 4-й Приміський, 6
Тел.: +38-050-703-23-28.

Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців,
виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції:
серія ДК №6155 від 24.04.2018 р.,
видано Управлінням Держкомтелерадіо.



Кузьменков Сергій Георгійович – доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри фізики та методики її навчання Херсонського державного університету, випускник Харківського державного університету (нині ХНУ імені В.Н. Каразіна). 12 років працював науковим співробітником Астрономічної обсерваторії Харківського державного університету. Автор понад 100 наукових і науково-методичних публікацій, серед яких збірники задач «Сонячна система» (у співавторстві з І.В. Соколом – Київ: «Вища школа», 2007), «Зорі: астрофізичні задачі з розв'язаннями» (Київ: «Освіта України», 2010), «Підготовка сучасного вчителя астрономії» (Херсон: ХДУ, 2011), «Загальна астрономія» (у співавторстві з С.М. Андрієвським, В.А. Захожаєм і І.А. Климишиним – Харків: «ПромАрт», 2019).