МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп’ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

КОНТИНУУМ-ГІПОТЕЗА У КУРСІ МАТЕМАТИКИ У ЗАКЛАДАХ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти “магістр”

Виконав: студент 2 курсу, 221М групи

Спеціальності 014 Середня освіта

Спеціалізації 014.04 Математика

Освітньо-професійної програми

«Середня освіта (математика)»

Човник Антоній Віталійович

Керівник доктор фізико-математичних наук,

професор Савченко Олександр Григорович

Рецензент доцент кафедри інформаційних

технологій та фізико-математичних дисциплін

Херсонської філії Національного університету

кораблебудування імені адмірала Макарова

Штанько Олександр Дмитрович

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Теорія множин – це розділ математики, в якому вивчаються загальні властивості множин. Теорія множин лежить в основі більшості математичних дисциплін. Поняття множини є одним з фундаментальних, невизначених математичних понять [14]. В основі практично усіх основних понять лежать множини простих у сукупності об’єктів. До другої половини XIX століття поняття «множина» не розглядалося в якості математичного. Проте положення змінилося, коли німецький математик Георг Кантор розробив свою програму стандартизації математики, в межах якої будь-який математичний об’єкт повинен був виявитися тією чи іншою «множиною» [20]. Проте не дивлячись на значні результати, отримані Кантором, в теорії множин існувала серйозна прогалина. Питання про потужність континуума дійсних чисел залишалося нерозв’язним.

Натуральний ряд чисел є множиною і будь-яка множина, яка еквівалентна натуральному ряду, називається зчисленною. Потужність множини усіх дійсних чисел називається потужністю континууму. Кантор довів, що множина раціональних чисел зчисленна, а множина потужності континуум незчисленна. Множина усіх точок площини або тривимірного простору має потужність континууму [11].

У 1878 році Кантор висловив гіпотезу про те, що не існує множини, потужність якої була б проміжною між потужністю зчисленної множини та потужністю континууму. Ця гіпотеза отримала назву континуум-гіпотези. Це твердження залишилося недоведеним і саме з тих пір виникла проблема континууму, яка полягає в доведенні або спростуванні континуум-гіпотези. Досить багато спеціалістів в галузі теорії множин займалися цією проблематикою, проте вона залишалася невирішеною включно до праць П. Коена [17], який довів саме нерозв’язність цієї проблеми.

В теорії множин є постулат, який має назву аксіоми вибору. Він полягає у тому, що для будь-якої системи непустих множин, які попарно не перетинаються, існує множина, яка має з кожною множиною системи в точності один єдиний спільний елемент. Як довів Цермело [6], з цієї аксіоми вибору випливає, що будь-яка множина еквівалентна деякій досить впорядкованій множині (вірним є і обернене твердження).

Проблема континууму тісно пов’язана з проблемою про те, чи можливо досить впорядкувати множину дійсних чисел, не залучаючи проблему вибору. Ця проблема також залишилася нерозв’язною. Кажучи про важливість континуум-гіпотези, часто стверджують, що вона дала би можливість достатньо спростити побудову теорії дійсних чисел, а також теорії функцій дійсної змінної; через відсутність її в числі прийнятих положень в цих теоріях виникають спеціальні проблеми, викликані необхідністю відрізняти потужність континууму від «найменшої незчисленної множини».

Мета дослідження – розглянути основні положення, що стосуються проблеми континууму в теорії множин.

Об'єктом дослідження виступає загальна теорія множин, а ***предметом дослідження*** – безпосередньо множини потужності континуум.

Виходячи з мети, визначені основні завдання дослідження:

- розглянути основні теоретичні положення, що стосуються множин потужності континуум;
- розкрити історичний аспект постановки проблеми континууму та розглянути питання про основні спроби вирішення цієї проблеми;
- розглянути елементи теорії множин та пов’язаного з ними поняття потужності множини, що розглядаються при вивченні тем шкільного курсу математики.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що були узагальнені основні факти, які стосуються напрямків вирішення проблеми континууму в теорії множин. ***Практичне значення*** дипломної роботи полягає в можливості застосування матеріалу студентами та вчителями загальноосвітніх шкіл при викладанні відповідних тем в школі.

Для вирішення поставлених завдань було застосовано наступні ***методи***: вивчення літератури з теми дослідження, порівняльний аналіз та узагальнення.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Апробація результатів дослідження. За результатами виконаного дослідження було опубліковано тези в збірнику тез Всеукраїнської науково-практичної конференції «Актуальні проблеми природничо-математичної освіти в Україні» (16-17 вересня 2021 р., Херсонський державний університет).

Робота складається з трьох основних розділів. Перший розділ містить теоретичні положення, які стосуються поняття множин потужності континуум. В другому розділі розкрито питання про історію виникнення проблеми континууму, а також про спроби видатних математиків вирішити цю проблему, спираючись на наявні аксіоматичні теорії. Третій розділ носить прикладний характер та містить методичні рекомендації стосовно вивчення елементів теорії множин в шкільному курсі математики.

Матеріал роботи може бути використаний студентами та викладачами вищих навчальних закладів, а також вчителями загальноосвітніх шкіл, ліцеїв та гімназій.

РОЗДІЛ 1
МНОЖИНИ ПОТУЖНОСТІ КОНТИНУУМ

1.1. Поняття потужності континуум

Множини X і Y називаються *еквівалентними* (X~Y)? якщо існує бієкція $\varphi: X \to Y$, (тобто $\forall x \in X$ ставиться у відповідність елемент y$\in$Y, причому різним *x* відповідають різні *y* і кожен y$\in$Y відповідає деякому *x є X*).

Введене відношення $X\Re Y$ є відношенням еквівалентності (воно задовольняє умовам рефлексивності, симетричності і транзитивності [6]).

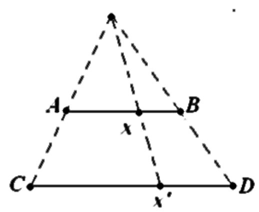
Теорема 1.1. Нехай при кожному *n* множини B_n еквівалентні множинам A_n, тоді $B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \sim A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Доведення. З метою спрощення сприйняття доведення будемо припускати, що множина B_n та A_n попарно не перетинаються.

Нехай φ_n – бієкція і $B_n \to A_n$, тоді $\varphi(x)=\varphi_n(x)$, якщо $x \in B_n$ буде бієкцією: $B \to A$. Тобто B~A. Відношення еквівалентності розбиває сукупність усіх множин на класи еквівалентності. Множини одного класу еквівалентності мають однакову кількість елементів (рівнопотужні), а різних класів – різну кількість.

Приклад.

1. Множини точок двох відрізків – рівнопотужні. Взаємно-однозначно співставити елементи цих множин слід таким чином:



2. Множини точок півінтервалів $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ і $[0;+\infty)$ – рівнопотужні. Взаємно-однозначно співставлення елементів цих множин відбувається за допомогою функції *y = tg x*.

Рівнопотужними є множини натуральних чисел і парних натуральних чисел: N~{2n}, n↔2n.

Клас, якому належить множина *X*, називається *потужністю* множини X або *кардинальним числом* множини X (card X). Множини одного класу мають однакове кардинальне число, а різних класів – різне.

У класі кардинальних чисел існує відношення порядку: якщо α – кардинальне число деякої підмножини множини потужності β, то $\alpha \le \beta$. Іншими словами: cardX $\le$ cardY $\overset{def}{=} \exists Z \subset Y \middle| cardZ = cardX$.

Подібно відношенню порядку на числовій прямій [4], введене відношення упорядковує потужності, а саме:

1. card X $\le$ card Y і card Y $\le$ card Z $\mapsto$ card X $\le$ card Z.

2. card X $\le$ card Y і card Y $\le$ card X $\mapsto$ card X = card Y (теорема Шредера-Берштейна [7]).

3. $\forall$ x, $\forall$ y (card X < card Y) або (card Y< card X) (теорема Кантора). Таким чином, клас кардинальних чисел впорядкований.

Потужність X менша за потужність Y (card X < card Y), якщо card X $\le$ card Y і card X $\neq$ card Y.

Для будь-якої множини X позначимо через P(X) множину всіх підмножин множини X.

Теорема (Кантор). Потужність непустої множини X менша потужності множини усіх її підмножин: card X < card P (X).

Доведення. Оскільки P(X) містить одноелементні підмножини, то card X$\le$card P(X). Доведемо, що card X $\neq$card P(X), тобто X$\nsim$P(X). Припустимо обернене $\varphi : X \to P(X)$ – бієкція. Розглянемо $A = \{x \in X | x \notin \varphi(x)\}$. Оскільки A$\in$P(X), то $\exists a \in X$ такий, що φ(a) =A. Тоді:

1. Якщо $a \in A \mapsto a \notin A$ (за означенням A).

2. Якщо $a \notin A \mapsto a \in A$ (за означенням А).
Отримали протиріччя, що й доводить теорему.

Розглянемо найбільш важливі трансфінітні (потужності нескінчених множин [9]) потужності.

Множина X називається зчисленною, якщо вона еквівалентна множині натуральних чисел N, тобто card X = card N = a.

Теорема (необхідна і достатня умова зчисленності). Для того, щоб множина А була зчисленною, необхідно і достатньо, щоб її елементи можна було представити у вигляді послідовності.

Доведення. Необхідна умова. Нехай card A=a $\mapsto$ A~N, тобто існує бієкція $\varphi : A \to N$. Для будь-якого a$\in$A існує єдине $n = \varphi(a)$, тобто елемент *a* розташуємо на *n*-му місці у послідовності. Таким чином, всі елементи множини А розташуються у послідовності.

Достатня умова. Нехай $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, тоді $a_n \leftrightarrow n$, тобто $\varphi(a_n) = n$, бієкція: A→N. Отже A~N, що і доводить теорему.

Розглянемо теореми про властивості зчисленних множин.

Теорема 1.2. У будь-якій нескінченій множині можна вибрати зчисленну підмножину.

Доведення. Нехай А – нескінченна множина. Візьмемо будь-яке $a \in A$ і позначимо a_1. Оскільки А нескінченна, то у множині A\$\{a_1\}$ є елементи. Візьмемо будь-який елемент з A\$\{a_1\}$ та позначимо його a_2. У множині A\$\{a_1, a_2\}$ є елементи. Продовжуючи процес отримуємо множину $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\} \subseteq A$, що й треба довести.

Теорема 1.3. Об'єднання скінченної або зчисленної множин – зчисленне.

Доведення. Нехай $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, де card A_i = *a*, *i* =1,… . Покажемо, що card A = *a*, тобто A~N. Оскільки A_i ~ N, то для кожного *i* =1,… множини A_i можна подати у вигляді послідовності: $A_i = \{a_{1,i}; a_{2,i}, ... a_{n,i}, ...\}$, i =1, 2, … .

Множину A можна подати у вигляді

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\begin{Bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \dots & a_{n,1} & \dots \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{n,2} & \dots \\ a_{1,3} & a_{2,3} & \dots & \dots & a_{n,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{Bmatrix},$$

тоді $A_i=\{a_{1,1},a_{1,2},a_{2,1},a_{1,3},a_{2,2},a_{3,1},...\}$, де розташування елементів відбувається у порядку зростання суми індексів. Згідно теореми A~N, що і треба було довести.

Теорема 1.4. Декартовий добуток скінченого числа зчисленних множин – зчисленний.

Доведення. Нехай А $=A_1\times...\times A_n=\{(a_1,...,a_n)|a_i\in A_i \quad i=1,..,n\}$, де A_i – зчисленні. Доведемо по індукції. Нехай n = 2

$$A=\{(a_1,a_2)|a_1\in A_1,\quad a_2\in A_2\}=\bigcup_{a_2\in A_2}A_{a_2}\ ,$$

де $A_{a_2}=\{(a_1,a_2)|a_1\in A_1\}$ – зчисленна, оскільки A_1 – зчисленна. Оскільки A_2 – зчисленна, то $A=\bigcup_{a_2\in A_2}A_{a_2}$ – зчисленне об’єднання зчисленних множин, тобто зчисленна множина згідно з властивістю 2.

Нехай при $n = k$ (А=$A_1\times...\times A_k$), А – зчисленна. Доведемо, що при $n = k+1$ А=$A_1\times...\times A_{k+1}$ – зчисленна. Отже, А=$(A_1\times...\times A_k)\times A_{k+1}$, множина $A_1\times...\times A_k$ – зчисленна, згідно припущення, а A_{k+1} – зчисленна за умовою. Згідно доведення для n = 2 добуток $(A_1\times...\times A_k)\times A_{k+1}$ – зчисленна множина, що й треба було довести.

Нехай А – множина алгебраїчних чисел, тоді $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, де A_n – множина коренів многочленів порядку n з раціональними коефіцієнтами [26]. Позначимо $A_{a_0,...,a_n}$ – множина коренів многочлена $a_0x^n+...+a_n$ (вона скінченна), тоді $A_n=\bigcup_{\substack{a_i\in Q\\ i=0,...,n}}A_{a_0,...,a_n}$.

Множина наборів ($a_0, ..., a_n$), $a_i\in Q$, $i = 0,\dots n$ зчисленна згідно властивості 3, тобто об’єднання $A_n = \bigcup\limits_{\substack{a_i \in Q \\ i=0,\dots,n}} A_{a_0,\dots,a_n}$ – зчисленне об’єднання скінченних множин. Згідно з властивістю 2 A_n – зчисленне, тоді $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ теж зчисленне.

1.2. Основні властивості множин потужності континуум

Теорема 1.5. Нехай X – нескінчена множина і card A = *a*, тоді $X \cup A \sim X$.

Доведення. Оскільки X – нескінченна, то існує зчисленна множина $M \subset X$, тоді $X = M \cup (X \setminus M)$

$$X \cup A = A \cup M \cup (X \setminus M) \quad (\text{card } A \cup M = a)$$

$$\begin{matrix} A \cup M \sim M \\ X \setminus M \sim X \setminus M \end{matrix} \mapsto (A \cup M) \cup (X \setminus M) \sim M \cup (X \setminus M), \text{ тобто } A \cup A \sim X.$$

Теорема 1.6. Множина U = $[0;1]$ не еквівалентна множині натуральних чисел N.

Доведення. Припустимо, що U = [0;1] – зчисленна та її елементи можна подати у вигляді послідовності $x_l, x_2, \dots, x_n, \dots$. Розглянемо $\varepsilon = 0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots$, ξ_i та виберемо довільне ціле число від 1 до 8 включно, відмінне від j–го десяткового знаку числа x_j. Таким чином, ξ – десятковий дріб, відмінний від x_n (так як *n*-й знак відмінний від 0,9 і *n*-го знаку x_n).

Числа 0 і 9 не використовуються, так як у противному випадку можливий різний запис числа (0,10200...=0,101999...). Отже, $x_l, x_2, \dots, x_j, \dots$ не містить число $\xi \in [0;1]$, це протиріччя свідчить, що наше припущення невірно, тобто $U \nsim N$.

Множини, еквівалентні [0; 1], – множини потужності континуум, нижче це будемо позначати card A = c.

Теорема 1.7. Скінчене або зчисленне об'єднання множин потужності континуум має потужність континуум.

Доведення. Нехай $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ та card A_n = c. Для кожного n $A_n \sim [n, n+1)$, тоді $A \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n+1) = [1, +\infty)$, тобто $cardA = card[1, +\infty) = c$.

Теорема 1.8. Множина $B = \{(n_1, ..., n_j, ...) | n_j \in N, \quad j = 1, ...\}$ має потужність континуум.

Доведення теореми випливає з відношення $(n_1, n_2, ...) \leftrightarrow \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + ...}} \in (0,1]$. Оскільки будь-яке число з $(0,1]$ можна подати вказаним дробом [24], то множина $\{(n_1, n_2, ...) | n_j \in N, \quad j = 1, ...\} \sim (0,1]$, що і треба було довести.

Теорема 1.9. Декартовий добуток скінченої або зчисленної кількості множин потужності континуум має потужність континуум.

Доведення. Нехай А= $A_1 \times ... \times A_n \times ...$, де card A_n = с, для кожного *n?* тобто $A = \{(a_1, ..., a_n, ...) | a_n \in A_n \quad n = 1, 2 ...\}$. Оскільки card A_n = с, *n* =1, 2,... маємо, що для кожного *n* = 1, 2,... $A_n \sim \mathrm{B} = \{(n_1, ..., n_j, ...) | n_j \in N \quad j = 1, 2 ...\}$ (згідно з попередньою властивістю). Тоді будь-якому $a_k \in A_k$ однозначно відповідає послідовність $(n_1^{(k)}, ..., n_j^{(k)}, ...)$ натуральних чисел, а набору $(a_1, ..., a_k, ...)$ множина

$$\begin{matrix} n_1^{(1)} & n_2^{(1)} & \dots & n_j^{(1)} & \dots \\ n_1^{(2)} & n_2^{(2)} & \dots & n_j^{(2)} & \dots \\ n_1^{(3)} & n_2^{(3)} & \dots & n_j^{(3)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

яку можна розташувати у послідовність $(n_1^{(1)}, n_1^{(2)}, n_2^{(1)}, ...)$ за зростанням суми індексів. Таким чином, елементу $(a_1, ..., a_k, ...)$ множини А взаємно-однозначно відповідає елемент множини В. Отже А~В, що й треба було довести.

РОЗДІЛ 2
ПЕРША ПРОБЛЕМА ГІЛЬБЕРТА

2.1. Проблема Кантора

Кантор називає дві сукупності, тобто дві множини звичайних дійсних чисел (або точок), еквіалентними або рівнопотужними, якщо вони можуть бути поставлені в таку відповідність, при якому кожному числу однієї множини відповідає одне і тільки одне певне число другої множини.

Дослідження цих точкових множин, здійснені Кантором, роблять досить ймовірною справедливість припущення, доведення якого, однак, нікому ще до сих пір не вдалося отримати, незважаючи на найнаполегливіші зусилля. Зміст цього припущення полягає у наступному.

Кожна нескінченна сукупність чисел, тобто кожна нескінченна числова (або точкова) множина, еквівалентна або множині цілих натуральних чисел 1, 2, 3, ... , або множині всіх дійсних чисел, а отже континууму, тобто еквівалентна точкам відрізка; з точки зору еквівалентності можливі тільки два типи (нескінченних) числових множин: зчисленна множина і континуум. З цього припущення випливало б негайно, що потужність континууму є найближча потужність до потужності зчисленної множини. Доведення цієї теореми проклало б новий міст між зчисленними і континуальними множинами.

Існує ще одне чудове припущення, висловлене Кантором, яке найтіснішим чином пов'язане зі згаданим припущенням і яке, можливо, і містить ключ до доведення цього припущення. Сукупність дійсних чисел називається упорядкованою, якщо відоме правило, за яким для будь-яких двох чисел цієї сукупності можна встановити, яке з цих чисел передує іншому і яке за іншим слідує; при цьому правило повинно бути таким, що якщо число a передує числу b і число b передує числу c, то число a передує числу c [15]. Природним упорядкуванням сукупності чисел нехай називається таке, при якому менше число множини передує більшому, а більше слідує за меншим. Легко зрозуміти, що існує ще нескінченна множина інших способів впорядковувати множини чисел.

Якщо розглянути якусь впорядковану множину чисел і з неї виділити якусь частину, так звану підмножину, то ця підмножина також буде впорядкованою. Кантор розглядав особливого сорту впорядковані множини, які він називав цілком впорядкованими і які характеризувались тим, що не тільки у всій множині, але в будь-якій її підмножині можна вказати перший елемент. Сукупність цілих чисел 1, 2, 3, … , в цьому своєму природному порядку являє собою, очевидно, цілком впорядковану множину. Між тим, сукупність всіх дійсних чисел, тобто континуум, що розглядається в своєму природному порядку, не є цілком впорядкованою. Дійсно, якщо ми як підмножини точок виділимо точки скінченого відрізку без його початкової точки, то ця підмножина першого елемента не має. При цьому виникає питання, чи не можна якимось іншим способом упорядкувати сукупність всіх дійсних чисел так, щоб кожна її підмножина мала перший елемент, тобто чи можна континуум також розглядати як цілком упорядковану множину. Кантор припускав, що на це питання повинна існувати позитивна відповідь. Звісно, надзвичайно бажаним видається можливість отримати пряме доведення цього чудового припущення Кантора, тобто справді вказати те, що ефективне впорядкування множини чисел, при якому в кожній його частині можна було б вказати перший елемент.

2.2. Континуум-гіпотеза та спроби її вирішення

Щоб сформулювати цю проблему, нагадаємо основні поняття канторовської теорії кардинальних чисел (потужностей) [20].

Термін «множина» означає те ж, що і «сукупність». Об'єкти, з яких складається множина або сукупність, називаються *елементами* цієї множини; зазвичай передбачається, що можна розглядати множини об'єктів будь-якої природи. Якщо кожен елемент множини X є елементом множини Y, то множина X називається *частиною* або *підмножиною* множини Y (позначається: $X \le Y$). Поняття взаємно однозначної відповідності в звичайній, «наївній» теорії множин, не визначається і розглядається як первинне. Вважається, що воно виражає деяку інтуїтивно ясну ідею, а саме: між пальцями лівої і правої рук нескаліченої людини можна встановити взаємно однозначну відповідність, зіставивши з лівим мізинцем правий мізинець, з лівим безіменним пальцем – правий безіменний палець і т. д. Між усіма натуральними числами і між усіма парними натуральними числами також можна встановити взаємно однозначну відповідність, зіставивши кожному натуральному числу *n* парне число 2*n*.

Дві множини називаються *еквівалентними* або *рівнопотужними*, якщо існує взаємно однозначна відповідність, що ставить у відповідність кожному елементу будь-якої з цих множин деякий (єдиний) елемент іншої множини. Про дві еквівалентні множини кажуть також, що вони мають однакову потужність. Запис $\bar{X} = \bar{Y}$ означає, що множини X і Y мають однакову потужність.

Кажуть, що потужність множини X менша, ніж потужність множини Y (і пишуть $\bar{X} \subset \bar{Y}$), якщо множина X еквівалентна частині множини Y і притому множини X і Y не еквівалентні.

Натуральний ряд чисел 0, 1, 2, ... є нескінченною множиною, і будь-яка множина, еквівалентна натуральному ряду, називається *зчисленною*. Потужність зчисленної множини позначається $\aleph_0$.

Потужність множини всіх дійсних чисел називається *потужністю континууму*. Часто вона позначається через $\mathfrak{C}$. Очевидно, що $\aleph_0 \subseteq \mathfrak{C}$.

Ще Кантор довів, що множина всіх раціональних чисел зчисленна, а множина потужності континууму незчисленна [6]. Множина всіх точок площини або тривимірного простору має потужність континууму.

У 1878 р. Кантор висловив гіпотезу про те, що не існує множини, потужність якого була б проміжної між $\aleph_0$ ат $\mathfrak{C}$. Ця гіпотеза називається *гіпотезою континууму* (або *континуум-гіпотезою*). В кінці минулого століття Кантору один час здавалося, що він може довести цю гіпотезу, однак насправді йому це не вдалося. З тих пір виникла проблема континууму, яка полягала у доведенні або у спростуванні континуум-гіпотези [16]. Дуже багато вчених, в тому числі й найбільші фахівці в області теорії множин, займалися цією проблемою, але вона залишалася невирішеною аж до робіт П. Коена, який довів саме її нерозв'язність [4].

Кажучи про важливість континуум-гіпотези, часто стверджують, що вона дала б можливість багато в чому спростити побудову теорії дійсних чисел, а також теорії функцій дійсної змінної; через відсутність її в числі прийнятих пропозицій в цих теоріях, а також в топології виникають спеціальні проблеми, викликані необхідністю відрізняти потужність континууму від «найменшої незчисленної потужності».

Але хоча це і вірно, роль континуум-гіпотези проявилася швидше в якості однієї з головних цілей багатьох досліджень, ніж як засіб для побудови теорій. (З цього приводу доречно згадати, що коли вдається виключити з побудови будь-який фрагмент теорії, наприклад, аксіому вибору [5], не більше дорогою ціною, ніж та, якою ми розплачуємося за неприйняття континуум-гіпотези в згаданих областях математики, то кажуть, що цей фрагмент теорії, по суті, не залежить від аксіоми вибору.

Множина X називається *лінійно впорядкованою*, якщо існує певне відношення R таке, що для двох різних елементів a і b множини X або a знаходиться у відношенні R до b (в символах: aRb), або b знаходиться у відношенні R до a (bRa), причому з aRb і bRc випливає, що aRc, які б не були елементи a, b і c множини X. Впорядкована множина (з його відношенням порядку R) називається *цілком упорядкованою*, якщо у будь-якій непустій множині Y, що є частиною множини X, є такий елемент a, що aRb для будь-якого відмінного від a елемента b множини Y. (Пустою множиною називається множина, що не містить жодного елемента, скажімо, множина всіх чисел, які є одночасно парними і непарними [7]).

Будь-яку скінчену множину можна розглядати як цілком упорядковану, також і натуральний ряд є цілком упорядкованою множиною (за відношення R можна прийняти відношення "<").

В теорії множин є постулат, йменований аксіомою вибору [5]. Він полягає в тому, що для будь-якої системи *m* непустих множин, які попарно не перетинаються, існує множина N, що має з кожною множиною системи *m* в точності один-єдиний спільний елемент. Як довів Цермело [10], з цієї аксіоми вибору випливає, що будь-яка множина еквівалентна деякій цілком впорядкованій множині (вірно і обернене твердження).

Проблема континууму тісно пов'язана з проблемою про те, чи можна цілком впорядкувати множину дійсних чисел, не вдаючись до аксіоми вибору (тобто чи можна, не вдаючись до цієї аксіоми, визначити в цій множині таке відношення порядку R, при якому ця множина є цілком упорядкованою). Ця проблема також до останнього часу залишалася невирішеною.

Легко доводиться, що потужність континууму є потужністю множини всіх частин натурального ряду. Потужність множини всіх

частин множини M позначається (якщо M звичайна, то це позначення узгоджується з тим, що будь-яка множина потужності M дійсно має частин). Згідно широко відомої теоремі Кантора [11], завжди m < 2^M, де m – потужність множини М.

Узагальнена континуум-гіпотеза полягає в тому, що якщо потужність m не є потужністю скінченої множини, то між потужностями

m і немає ніякої проміжної потужності.

Серпінський у 1947 р. і Шпеккер в 1952 р. довели, що з узагальненої континуум-гіпотези випливає аксіома вибору [2]. Внаслідок безуспішності спроб вирішення континуум-проблеми виникло припущення про її нерозв'язність, і в наш час постановка проблеми полягає в доведенні неможливості довести або спростувати континуум-гіпотезу в тій чи іншій системі аксіом для теорії множин. Ідея такого роду виникла у Гільберта.

Першого великого успіху в цьому напрямку домігся Курт Гедель, найбільший з сучасних вчених в галузі математичної логіки. Для деякої системи аксіом Σ він довів (1940 р.), що якщо ця система несуперечлива, то до неї можна приєднати без протиріччя аксіому вибору і узагальнену континуум-гіпотезу [5]. У 1963 р. молодий американський вчений Паул Коен довів незалежність аксіоми вибору і континуум-гіпотези для системи Σ, тобто, що якщо ця система несуперечлива, то до неї можна без протиріччя приєднати заперечення аксіоми вибору і заперечення континуум-гіпотези, а також аксіому вибору і заперечення континуум-гіпотези. (Замість Σ Коен розглядає досить близьку до неї систему ZF Цермело-Френкеля [16]).

Щоб дати деяке уявлення про результати Геделя і Коена, треба сказати декілька слів про загальні принципи побудови аксіоматизованої теорії множин.

Будь-яка система аксіом для теорії множин містить аксіоми наступних видів:

1) Принцип згортання, згідно з яким для будь-якої властивості Р існує множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які мають властивість Р. При цьому Р може бути будь-якою властивістю, яку можна виразити за допомогою логічних операторів «якщо ..., то ...», «і», «або», «не», «для всякого», «для деякого» і відносин X = Y і X є Y (читається: «X є елемент Y»). Для кожної такої властивості Р цей принцип дає аксіому згортання (для цієї Р). Передбачається, що в формулюванні Р не входить ім'я тієї множини, що вводиться цією аксіомою.

2) Аксіома об'ємності, згідно з якою дві множини рівні (тобто збігаються), якщо вони складаються з одних і тих же елементів.

3) Аксіома про існування нескінченної множини.

4) Аксіома вибору (якщо тільки вона приймається в даній системі).

Такий перелік аксіом представляється дуже природним і цілком достатнім для теорії множин, але біда в тому, що вже сам принцип згортання, без будь-яких подальших аксіом, призводить до протиріч. Наприклад, якщо в якості властивості Р обрати властивість «X не є елементом X», то вийде відомий парадокс Рассела [17] (а саме, якщо Y означає множину тих множин X, які не є елементами самих себе, то Y є елементом Y в тому і тільки в тому випадку, якщо Y не є елементом Y, звідки випливає, що одночасно Y є і не є елементом самої себе). Зважаючи на це та деякі інші парадокси доводиться обмежити принцип згортання, тобто постулювати аксіоми згортання не для всіх властивостей Р, а все ж для настільки широкого класу цих властивостей, щоб за допомогою відповідних властивостей цього класу аксіом згортання можна було побудувати теорію множин в обсязі, достатньому для всіх теоретико-множинних розділів математики.

Е. Цермело вказав найбільш природну сукупність аксіом згортання, яка разом з аксіомами 2) і 3) утворює так звану *систему Цермело*. А саме, в цій системі є наступні три аксіоми згортання: аксіома існування пари будь-яких двох множин (причому пара також вважається множиною), аксіома існування множини, що є об'єднанням будь-якої множини множин, і аксіома існування множини всіх підмножин; окрім цього, в цій системі прийнята система аксіом виділення, тобто аксіом, які полягають в тому, що для будь-якої множини X і будь-якої властивості P вищеописаного виду існує множина всіх елементів X, що володіють властивістю P. Ці аксіоми згортання разом з аксіомами об'ємності і нескінченності і утворюють систему Цермело (вірніше, перелік її «нелогічних» аксіом). Хоча цієї системі достатньо для побудови теорії функцій та інших розділів класичної математики (окрім тих випадків, коли потрібно залучення аксіом вибору), для вільної побудови теорії порядкових чисел і потужності, треба, як вперше вказав А. Френкель [23], додаткова схема аксіом підстановки, яка полягає в тому, що для всякого однозначного відображення *P (t, z)* (яке подано формулою системи, що розглядається, та яка включає вільні змінні *t* і *z*; однозначність виражається в цій схемі умовою: для всякого *t* існує не більше одного *z* з властивістю P *(t, z)*) і для всякої множини X існує множина всіх таких *z*, для яких існує $t \in X$ з властивістю *P (t, z).* Сенс цих аксіом полягає в тому, що однозначний образ будь-якої множини «є множиною, якщо вже саме це відображення може бути виражено в мові системи»; аксіоми виділення випливають з аксіом згортання (без допомоги інших аксіом цієї теорії), а тому можуть бути виключені з переліку аксіом, що містять аксіоми підстановки. Система, що утворюється з системи Цермело заміною аксіом виділення аксіомами підстановки, називається системою Цермело-Френкеля (ZF); польський математик Мицєльський довів, що аксіома пари є в цій системі наслідком інших аксіом, а тому може бути виключена з переліку аксіом ZF [12].

Згадана система $\sum$ Геделя лише несуттєво відрізняється від системи ZF (саме, наряду з множинами в ній є класи множин, що володіють довільною властивістю, що виражається у мові ZF і здатним, крім того, залежати, як від параметрів, так і від інших класів; це дозволяє замінити схему підстановки однієї аксіомою і обмежитися в формулюванні системи скінченим числом «нелогічних» аксіом). Кожна з систем $\sum$ і ZF несуперечлива, якщо несуперечлива інша, і результати Геделя і Коена, будучи отримані для однієї з цих систем, легко переносяться на іншу. Метод Гьоделя полягає в побудові (засобами його системи $\sum$) деякої «моделі», тобто системи об'єктів цієї теорії, що задовольняє аксіомам $\sum$, а також аксіомі вибору і узагальненій континуум-гіпотезі. Тим самим встановлюється відносна несуперечливість аксіоми вибору і узагальненої континуум-гіпотези для кожної з систем ZF чи $\sum$.

Система ZF (як і $\sum$) володіє тією особливістю, що елементами розглянутих в ній множин (або множин і класів) можуть бути тільки множини. Це не узгоджується із загальним духом канторовської теорії множин, в якій дозволялося повністю абстрагуватися від природи елементів і розглядати множини об'єктів будь-якої природи, в тому числі і тих, що не є множинами. Такі об'єкти (індивідууми) можуть бути введені в систему, що призводить до незначних змін її формулювань.

З іншого боку, в системи ZF і $\sum$ часто включають *аксіому фундування*, згідно з якою будь-яка непуста множина містить елемент, що не перетинається з цією множиною. З цієї аксіоми (за допомогою інших аксіом ZF) випливає аналогічне твердження для непустих класів, і це дає можливість довести те, що довільна множина X володіє властивістю P (що виражено у мові ZF), шляхом своєрідної індукції, що засновано на посиланні: якщо будь-який елемент довільної множини Y володіє властивістю P, то і Y володіє властивістю P. (З цього посилання, згідно зі щойно висловленим твердженням випливає, що будь-яка множина має властивість P. При наявності індивідуумів до цього посилання слід додати, що усі індивідууми мають властивість P, а також відповідно розширити поняття «перетину» в аксіомі фундування, поширивши його на індивідууми.)

Індукція, про яку йде мова, була відсутня у Кантора, але вона виражає ту думку, що в теорії множин розглядаються лише множини, які можуть бути введені (хоча б шляхом трансфінітної індукції [7]) за допомогою послідовного утворення множин вже введених елементів (починаючи з пустої множини або з пустої множини та індивідуумів), а жодні інші множини для канторовської теорії й не потрібні. (Ці множини називають «фундованими».) Іншими словами, аксіома фундування полягає в тому, що в теорії множин розглядаються лише такі множини, які можуть виникнути в процесі теоретико-множинних побудов. Аксіомою фундування відразу виключаються множини X, для яких $X \in X$, пари X, Y, для яких $X \in Y$ і $Y \in X$, тощо. Для аксіоми фундування її несуперечливість відносно інших аксіом типу $\sum$ або ZF була доведена ще фон Нейманом [14]. (Фон Нейман ввів у 1925 р. свою систему, схожу з $\sum$ і рівноцінну їй в плані несуперечливості), для цієї системи він і розглядав питання про аксіому фундування, незалежність якої також доводиться без складнощів.)

Що стосується незалежності аксіоми вибору, то для системи з індивідуумами вона була доведена польським вченим А. Мостовським в 1939 р. (причому подібні ідеї висловлював А. Френкель ще в 1922 р.). Більш того, їм було доведено, що до системи з індивідуумами можна без протиріччя приєднати заперечення аксіоми вибору і в той же час аксіому про те, що будь-яка множина може бути впорядкована; в інших роботах замість цієї останньої аксіоми поряд із запереченням аксіоми вибору в несуперечливу систему включається аксіома про існування так званої *«дедекиндової множини»*, тобто нескінченної множини, що не містить жодної зчисленної підмножини (або, що те саме, не еквівалентного жодній своїй правильній частині). В силу згаданого результату Серпинського, в цій системі порушується і узагальнена континуум-гіпотеза.

Звичайно, при цьому йдеться про несуперечність отриманої системи від відносно деякої вихідної системи, яка у праці Мостовського містить нескінченну множину індивідуумів, а в іншому може вважатися достатньо близькою до системи $\sum$ або ZF (тобто якщо несуперечлива вихідна система, то несуперечлива й отримана).

Як Гедель, так і Мостовський включали в свої системи аксіому фундування. У своїх роботах Мостовський дуже істотно користувався індивідуумами [19], але можна було б легко обійтися і без них, відмовившись від аксіоми фундування. Це пов'язано з тим, що, при відмові від аксіоми фундування легко замінити індивідууми x такими множинами x, які ототожнюються з $\{x\}$ (в результаті чого $\{x\}$ ототожнюється з $\{\{x\}\}$ і т. п.; $\{x\}$означає множину, що складається з одного й єдиного елемента x).

Як було відзначено, роботи Мостовського істотно залежать від використання індивідуумів або таких множин, які за своєю природою не відповідають цілям класичної математики. Це не означає, що і питання про їх включення в систему не відповідають цим цілям. Але континуум-гіпотеза за самою своєю суттю відноситься до області фундованих множин, так що її узагальнення, недовідність якого доводиться методом Мостовського, можна вважати занадто далекосяжним. Так чи інакше, після роботи Мостовського 1939 р. прослідував ряд інших робіт в цьому напрямку (найважливіші з яких належать саме Мостовському), але виявилося, що від них ще дуже далеко до доказу незалежності континуум-гіпотези. Принципова складність, подолана лише Коеном, полягала в тому, щоб отримати модель для Σ або для ZF, в якій були б множини, істотно відмінні від тих, які є в згаданій моделі Геделя (вони називаються «конструктивними»). Дуже важливо було, щоб в цій моделі виконувалися аксіоми фундування і щоб клас індивідуумів був в ній цілком упорядкований (чого не було у Мостовського). Остання умова, з точки зору можливості моделі, по суті не відрізняється від того, щоб цей клас був порожній.

Шефердсон довів в 1951 р. теорему (в більш загальній формі отриману близько того ж часу автором цих рядків), згідно з якою така модель (з деякими застереженнями, відпадають для системи ZF при належному уточненні поняття «моделі») повинна бути «нестандартною», тобто клас її порядкових чисел, упорядкований ставленням «менше» цієї моделі, не може бути цілком упорядкованим по відношенню до тієї «вихідної» системі, засобами якої будується модель. Звичайно, така «нестандартність» можлива тільки завдяки тому, що не всі множини порядкових чисел моделі, наявні в «вихідної» системі, будуть представлятися множинами моделі. Хоча «нестандартні» моделі були давно відомі (по суті, вони були відкриті Сколемом ще на початку 20-х років), побудова «нестандартної» моделі, в якій саме в зв'язку з її «нестандартністю» були б «неконструктивні» (в сенсі Геделя) множини, і викликало ті труднощі, які вперше (правда, іншим шляхом) вдалося подолати саме Коену. (Модель Геделя була стандартною.)

Як вже сказано, в 1963 р. Паул Коен довів, що якщо несуперечлива система ZF, то до цієї системи можна без протиріччя приєднати заперечення континуум-гіпотези. Коен розглядає систему ZF, але, як і у випадку з роботою Геделя, його результати переносяться на Σ. Результати Коена поширюються і на системи з аксіомою вибору, і на системи з запереченням аксіоми вибору, однак при відсутності аксіоми вибору сама постановка континуум-проблеми втрачає свою однозначність. Справа в тому, що з аксіоми вибору випливає еквівалентність наступних двох суджень: α) не існує потужностей, проміжних між $\aleph_0$ та $\mathfrak{c}$, і β) потужність $\mathfrak{c}$ збігається з найменшою потужністю $\aleph_1$ незліченної цілком упорядкованої множини. Тому континуум-гіпотезу часто формулюють у вигляді $\mathfrak{c} = \aleph_1$ або $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, але при відсутності аксіоми вибору можливо, що це формулювання не є еквівалентною α), і α) також можна називати континуум-гіпотези. Незалежність континуум-гіпотези в формі β) була доведена Коеном ще в 1963 р., але виклад містив деякі неясні місця; проте його пізніша публікація (Proc. Nat. Acad. Sci. USA 50, № 6 (1963) і 51, № 1 (1964)) внесла ясність в ці питання (хоча формально в ній розглядалася лише модель для системи з аксіомою вибору, але можна було зрозуміти, як уточнюється його попередня робота і в частині, що стосується заперечення цієї аксіоми). У 1966 р. вийшла книга Коена «Set theory and the continuum-hypothesis», N. Y., 1966. У ній систематично розглянуті всі результати, які Коену вдалося отримати його методом. Зокрема, для системи без аксіоми вибору доведена несуперечність (щодо ZF) того твердження, що континуум містить дедекіндову підмножину $\mathfrak{M}$. Звідси випливає і порушення α), бо потужність $\aleph_0 + \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ повинна бути проміжною між $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$. (Очевидно, $\aleph_0 \leq \aleph_0 + \overline{\overline{\mathfrak{M}}} \leq \mathfrak{c}$; рівність $\aleph_0 = \aleph_0 +$

$\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ неможлива, так як множина $\mathfrak{M}$ з зазначеною властивістю не може бути цілком впорядкована, а рівність $\aleph_0 + \overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \mathfrak{c}$ неможлива, так як без аксіоми вибору доводиться $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, але $(\aleph_0 + \overline{\overline{\mathfrak{M}}}) + (\aleph_0 + \overline{\overline{\mathfrak{M}}})$ не еквівалентне $\aleph_0 + \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$. Це останнє твердження легко випливає із зазначеної властивості $\mathfrak{M}$ і того факту, що без допомоги аксіоми вибору доводиться, що будь-яка множина еквівалентна своєї правильної частини в тому і тільки в тому випадку, коли вона містить рахункову підмножину.) Таким чином, і питання про незалежність континуум-гіпотези в формі α) було фактично вирішене в роботах Коена. (Слід зауважити, що сам Коен відзначає не стільки порушення α), скільки ту обставину, що континуум зовсім не може бути цілком упорядкований; це безпосередньо випливає з наявності в ньому дедекіндової підмножини.)

Ці результати (як відзначали вже їх автори) переносяться і на розширення системи Σ, одержувані шляхом приєднання аксіом про існування так званих *недосяжних кардинальних* чисел. При цьому *регулярними* називаються такі алефи, тобто потужності цілком упорядкованих множин, які не представимо у вигляді суми - або, що те ж, межі - меншого числа менших множин; граничними називаються алефи, що не мають безпосередньо передуючі їм (по потужності) алефи; недосяжними називаються граничні регулярні алефи $> \aleph_0$.

Аксіоми про недосяжних числах споріднені аксіомі нескінченності й іноді називаються «сильними аксіомами про нескінченність». Їх незалежність легко доводиться, несуперечливість ж становить одну з глибоких проблем підстав теорії множин. (Аксіома нескінченності може бути представлена, наприклад, як аксіома про існування безлічі всіх натуральних чисел, і в такому випадку вона стає аксіомою згортання. Можна приєднувати багато аксіом різної сили про існування недосяжних чисел, і принаймні найпростіші з них можна представляти у вигляді аксіом згортання.)

Відома теорема про зчисленність суми зчисленної множини зчисленних множин залежить від аксіоми вибору. Коен у своїй книжці доводить несуперечність тверджень про те, що $\aleph_1$, а також континуум можуть бути представлені у вигляді суми рахункової множини рахункових множин. Таким чином, при відсутності аксіоми вибору $\aleph_1$ може бути нерегулярним.

У 1964 р молодий чеський учений Петро Вопенка запропонував новий спосіб побудови моделей для системи Σ, що дозволяє, крім іншого, заново отримати результати Коена. При цьому вказане твердження про проміжні потужності (для системи з аксіомою вибору) доведено і для будь-яких так званих «регулярних» $\aleph_\alpha$, тобто Між $\aleph_\alpha$ і $2^{\aleph_\alpha}$ в деякій моделі є багато проміжних потужностей. Доведено також (для тієї ж системи), що $2^{\aleph_0}$ може бути недосяжним кардинальним числом, якщо такі числа існують. (Цей результат є і в згаданій книжці Коена.)

З іншого боку, автор цих рядків ще в 1959 р. в зв'язку зі своєю ультраінтуїционістською програмою обґрунтування систем ZF і Σ (тобто програмою, спрямованою на доказ несуперечності цих систем) показав, що його спосіб обґрунтування цих систем попутно призводить до доказу незалежності аксіоми вибору і континуум-гіпотези в формі α. З приводу взаємин між α) і β) слід зауважити, що засноване на аксіомі вибору ототожнення цих формулювань використовує не стільки саму аксіому вибору, скільки її наслідок $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$. Недовідність цього слідства (в сенсі Цермело-Френкеля) без допомоги аксіоми вибору доведена в згаданій книжці П. Коена.

Вопенка довів також, що для будь-яких регулярних алефів $\aleph_\lambda$ і $\aleph_\alpha$ таких, що $\aleph_\alpha < \aleph_\lambda$, рівність $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_\lambda$ несуперечливо відносно Σ з аксіомою вибору; до Σ можна при цьому додавати будь-які аксіоми о недосяжних числах.

Є велика різниця між роботами Коена і Вопенка. Коен будує стандартні моделі; його доказ несуперечності засновані на побудові моделей, в яких виконується лише довільна кінцева множина аксіом ZF, чого, втім, досить для цілей доказу несуперечності всієї системи (бо протиріччя випливало б з кінцевого числа аксіом). Для того щоб отримати модель для всієї системи в цілому, Коену доводиться користуватися однією додатковою аксіомою (про існування лічильної стандартної моделі для ZF), яка може бути виведена з аксіоми про недосяжне число. Більшого він зі своїми стандартними моделями не міг би досягти в силу теореми Шефердсона. Для Σ він зовсім не міг би побудувати моделі (з цікавими йому властивостями) засобами Σ. Вопенка же будує нестандартні моделі, і йому вдається отримати модель для Σ (з зазначеними властивостями) засобами Σ. Для доказу несуперечності це не дає ніяких істотних переваг, але це є внеском в теорію моделей. Питання несуперечності і наявності моделі пов'язані між собою таким чином, що кожен з них можна вважати лише засобом для розгляду іншого, а для моделей завжди істотно, якими засобами вони побудовані. Тому не можна ігнорувати результати Вопенкі тільки на тій підставі, що вони до цього були отримані Коеном, – це ототожнення стосується питань відносної несуперечливості, але не питань здійсненності моделей заздалегідь вказаним засобами. Правда, в гільбертівській програмі йшлося про несуперечності, але малося на увазі довести, в кінцевому результаті, несуперечливість всієї математики, - тут же розглядаються лише питання відносно несуперечності, а питання про несуперечності вихідної системи Σ або ZF навіть не ставиться. В таких умовах важко віддати перевагу одному з цих видів проблем (несуперечливість і моделі) перед іншим.

Як уже зазначалося, Вопенка довів, що якщо

$\aleph_\lambda > \aleph_\alpha, \aleph_\lambda$

- негранична або недосяжна потужність і $\aleph_\alpha$ – недосяжне кардинальне число або безпосередньо слідує за іншою потужністю в ряді потужностей цілком упорядкованих множин, то несуперечлива рівність . Що стосується систем з недосяжними числами, то принаймні для скінченної кількості таких чисел їх несуперечливість може бути доведена ультраінтуїціоністськи. Коен довів (1963-1964 рр.) Несуперечливість рівності (В чому полягала гіпотеза Лузіна).

При всій важливості цих новітніх досягнень не можна забувати про те, що вони відносяться до певних формальних систем типу ZF або Σ . Між тим Кантор заснував і заповів нам теорію множин не у вигляді ZF, і саме в цій первісній, «наївній» теорії множин виникла континуум-проблема. Наївна теорія була суперечлива і потребувала заміни несуперечливою формальною системою, але, не дивлячись на те, що система ZF достатня для нормальних математичних конструкцій і я доводжу її несуперечливість, я вважаю необхідним нагадати про те, що проблема ототожнення ZF або іншої подібної системи, з теорією множин зовсім не тривіальна.

Між іншим, теорія трансфінітних рекурсій досі ще слабо вивчена. Дуже правдоподібно, що для ZF можна вказати розумні схеми визначення функцій шляхом тієї чи іншої форми такої рекурсії, які неможливо обгрунтувати за допомогою ZF, причому сьогодні ще немає теорем, що дозволяють стверджувати достатність додаткової аксіоми про недосяжне число для формалізації цих рекурсій (розглянутих хоча б стосовно нерозширеної області). Тому не спростовано припущення про те, що ZF потребує, для природного поповнення аксіоматичної теорії, приєднання нових, поки ще невідомих аксіом. У зв'язку з кожним таким розширенням питання про несуперечність та незалежність як аксіоми вибору, так і континуум-гіпотези доведеться ставити заново, і ще немає підстав стверджувати, що методи Геделя і Коена виявляться при цьому застосовними.

Гедель відзначав, що його результати про відносну несуперечність можна довести і для більш слабких систем (Цермело та теорії типів), але докладного викладу доведень досі не з'явилося. Правдоподібно (внаслідок результатів Шпеккера про зв'язок між теорією типів і системою New Foundations Куайна), що ці результати можна перенести і на систему New Foundations. (Мова йде про аксіоматичну теорію множин, запропоновану в 1937 р. Куайном і мало схожу на систему Цермело-Френкеля. Аксіома вибору в її загальній формі була для цієї системи спростована Шпеккером, а тому мова може йти лише про відносну несуперечність її обмежених форм[12]). Найважче стверджувати (хоча правдоподібно і це), що все це можна застосувати і до результатів Коена.

В принципі, слід ставити подібні питання для будь-яких систем аксіом, що містять лише аксіоми згортання і об'ємності (та логічні постулати). Такі системи природно називати «канторівськими». П.С. Новікову належить просте доведення того, що якщо в канторівській системі доказове існування пустої множини, то в ній доказова і будь-яка формула виду $\exists y \forall z (z \in y \sim \neg z \in z \,\&\, \neg A) \equiv A$ (де A не містить вільно y і z). Ліва частина цієї еквівалентності є аксіомою згортання. Звідси легко випливає, що якщо A (наприклад, континуум-гіпотеза або її заперечення) несуперечлива щодо ZF, то є несуперечливе відносно канторівської розширення ZF, в якому A доказова.

Доведення тільки що зазначеної еквівалентності засноване на тому, що парадокс Рассела використовує лише одну аксіому згортання: $\exists y \forall z (z \in y \sim \neg z \in z)$, з якою природно пов'язана ліва частина еквівалентності. З будь-яким іншим парадоксом можна аналогічним чином зв'язати відповідні аксіоми згортання, одержувані приєднанням

«& ¬ A» до правих частин еквівалентностей, що входять в ті аксіоми згортання, які використовуються в цьому парадоксі. Тому про кожну формулу A, несуперечливість якої щодо ZF доведена, можна стверджувати її доказовість в деякій канторівській системі, несуперечливій щодо ZF, і до того ж в будь-який такій системі, тільки що зазначеним чином пов'язаної з парадоксами.

Такі канторівські системи природно називати «парадоксальними». Навіть в разі своєї несуперечності вони, виходить, не можуть вважатися природними розширеннями систем типу ZF. Звичайно тому виключити їх з розгляду. При цьому виникає багато питань про характер обмежень, що вводяться на аксіоми згортання в зв'язку з цією «проблемою парадоксальності». Наприклад, кидається в очі відсутність будь-якого зв'язку частин ¬ A з іншими частинами формули $\exists y\ \forall z\ (z \in y \sim \neg\, z \in z\ \&\ \neg A)$ і природно ставити питання про накладення на аксіоми канторівських систем обмеження «зв'язності» (що складається, грубо кажучи, в поєднувані будь-яких двох «атомарних» частин виду і $u \in v$ ланцюжками таких частин кожної аксіоми, причому будь-які два сусідніх члени ланцюжка повинні мати спільну змінну). Питання про доказовість континуум-гіпотези та її заперечення в канторівських системах з такими обмеженнями слід включити в загальну проблематику континуум-проблеми (і аналогічно для інших проблем).

Континуум-проблема йде першою в історичному гільбертовському переліку проблем [18]. Однак з логічної точки зору питання про несуперечливу побудову теорії множин (що включає в себе питання про несуперечливі системи Цермело-Френкеля, New Foundations і т.п. систем), звичайно, набагато важливіше і глибше.

РОЗДІЛ 3
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ НАВЧАННЯ ЕЛЕМЕНТАМ ТЕОРІЇ МНОЖИН В КУРСІ АЛГЕБРИ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

3.1. Основні поняття теорії множин

Поняття множини зазвичай приймається за одне з вихідних (аксіоматичних) понять, тобто не зводиться до інших понять, а значить і не має визначення. Однак можна дати опис множині, наприклад, в формулюванні Георга Кантора: «Під «множиною» ми розуміємо з'єднання в якесь ціле М певних добре помітних (які будуть називатися «елементами» множини М)» [11].

Поняття множини на момент своєї появи в XIX столітті здавалося досить простим і ясним, щоб з легкістю об'єднати багато розділів алгебри. Незважаючи на це, розвиток теорії множин спричинило за собою несподіванки і парадокси, що призвело до необхідності створення аксіом, які сформували б її логічний і міцний фундамент [4].

Це цікаве визначення, оскільки в ньому зроблено наголос на філософському аспекті множини: об'єкти формують множину тільки тому, що хтось розглядає їх як єдине ціле.

Уявне представлення об'єктів як єдиного цілого полягає в зміні відносини. Коли ми зосереджуємо увагу на чомусь, звертаємо увагу тільки на певні речі, то формуємо множину. Про це ж думав і Георг Кантор – можливо, перший майстер теорії множин, що дав наступне означення: «Під множиною ми розуміємо з'єднання в якесь ціле певних добре помітних предметів нашого споглядання або нашого мислення» [3].

У математичній логіці та дискретній математиці часто вживається синонім множини – алфавіт.

Історія теорії множин тісно пов'язана з поняттям нескінченності, зокрема, з поняттям істинної нескінченності, і з необхідністю створювати математичні об'єкти з нескінченною множиною елементів. Незважаючи на те, що початки теорії множин визначив Бернард Больцано (1781-1848), створення теорії в цілому одноголосно приписується Георгу Кантору (1845-191) [18].

Можна сказати, що теорія множин бере початок в 1874 році, коли Кантор опублікував в журналі Крелля роботу під назвою Uber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen («Про одну властивість сукупності всіх дійсних чисел алгебри») [7].

З 1874 р. по 1897 р. (головним чином в 1872-1884 рр.) Георг Кантор опублікував ряд робіт, в яких були систематично викладено основні розділи теорії множин. У цих роботах він не тільки ввів основні поняття теорії множин, а й збагатив математику міркуваннями нового типу, які застосував для доведення теорем теорії множин, зокрема, вперше до нескінченних множин. Тому загальновизнано, що теорію множин створив Георг Кантор.

У 1903 році Бертран Рассел (1872-1970) показав, що теорія множин Кантора є непослідовною. Це поставило під сумнів можливість використання поняття множини без будь-яких обмежень. Навіть сам Кантор усвідомлював труднощі, до яких призводило існування множини всіх множин, сформулювавши проблемне визначення множини, яке містить саме себе в якості елемента. Георг Кантор наголосив: «Множина, є більшим, мислимо нами як єдине» [20].

Однак незабаром теорія Ернеста Цермело (1908) та її уточнення, розроблені Френкелем (1922), Сколемом (1923), фон Нейманом (1925) та іншими авторами, сформували фундамент, на якому і будується теорія множин в її нинішньому вигляді.

Множина може бути замкненою і незамкненою, повною і пустою, упорядкованою і неврегульованою, зліченою та зчисленною, скінченною та нескінченною. Більш того, як в наївній, так і у формальній теоріях множин будь-який об'єкт зазвичай вважається множиною.

Основи теорії множин були закладені Бернардом Больцано, який сформулював деякі з її принципів. Він визначив множини скінченні та нескінченні, поняття взаємно однозначної відповідності, поняття граничної точки і послідовності («Парадокси нескінченного», 1850) [14].

Як і всі математичні теорії, теорія множин має власну мову і особливі правила запису. Введення двох особливих множин, універсальної і пустої, вкупі з визначенням операцій об'єднання, перетину і доповнення над множинами дозволяє ввести алгебраїчну структуру – булеву алгебру, яка має надзвичайно велике теоретичне і практичне значення [8]. Джордж Буль (1815-1864) в 1847 році написав невелику працю «Математичний аналіз логіки», що зробив значний вплив на філософський світ і ознаменував початок зсуву логіки в сторону алгебри, а не метафізики. За нуль було прийнято пусту множину, а за одиницю («одиницю» при множенні) – універсальну множина. Таким чином, множини можна складати і множити аналогічно цілим числам. Буль показав, що ці операції над множинами еквівалентні математичним символам і діям, що використовується в символічній логіці [5].

Множини прийнято позначати великими латинськими літерами. Об'єкти, які утворюють множини, називають *елементами* множини і для позначення елементів використовують, як правило, малі літери латинського алфавіту.

Множина може бути задана переліченням всіх елементів або списком. В цьому випадку елементи множини записують всередині фігурних дужок, наприклад: A = {1, 2, a, x} або B = {річка Ніл, планета Уран}.

Якщо елементів множини нескінченно багато, то використовують три крапки, наприклад множина всіх натуральних чисел записується так:

N = {1; 2; 3; ...}.

Перша складність теорії множин полягає в самому визначенні того, що ж таке множина. Після того як ми подолаємо цю перешкоду, на нашому шляху не виникне ніяких труднощів.

Учневі настільки ж мало розповідають, що таке число і що таке два, як мало роз'яснюють при зображенні фігур на дошці, що таке точка, – настільки ж мало потрібно роз'яснювати, що таке множина.

Поняття множини X елементів x передбачається відомим. Синонімами множини є: сукупність, об'єднання тощо. Якщо $x_1, x_2\dots$ є елементами множини X, то використовуємо запис X = $\{x_1, x_2\dots\}$.

Множину X задано, якщо відносно кожного x відомо, чи є x елементом множини X, або ж x не є елементом множини X. Природа елементів множини може бути довільною.

Приклад 3.1.

A = {м, а, т, е, и, к} – позначає множину A букв, які використовувалися для запису слова «математика». Замість букв можуть використовуватися тварини, люди, музичні інструменти тощо.

3.2. Числові множини шкільної математики

Ми зустрічаємося в шкільному курсі математики з різними *числовими множинами*, елементами яких є числа тієї чи іншої природи (натуральні, цілі, дробові, раціональні, ірраціональні, дійсні, комплексні, алгебраїчні й ін.). Можна говорити про множину учнів в класі, дерев в лісі, коренів даного рівняння, точок на даному відрізку і т.п. Бажаючи підкреслити, що в понятті множини найголовніше – це ідея об'єднання елементів будь-якою загальною ознакою, Георг Кантор писав: «Під різноманіттям чи множиною я розумію взагалі будь-яке багато, яке можна уявляти, як єдине» [8].

Якщо відволіктися від природи і порядку елементів, то дві скінченні множини можуть відрізнятися між собою тільки кількістю своїх елементів. Для порівняння таких двох множин не обов'язково перераховувати їх елементи. Достатньо поставити їх елементи у *взаємно однозначну відповідність*. Якщо це можна повністю здійснити, то кількість елементів однієї з них (і зрозуміло якої) більше іншої.

Наведемо найбільш важливі *приклади числових множин,* розглянутих в шкільній математиці:

а) кожне рівнянням $f(x) = \varphi(x)$ пов'язане з множиною А, на якій вирази $f(x)$ і $\varphi(x)$ – числові значення, і множина Т чисел, що задовольняють цьому рівнянню.

б) Нерівності виду

$$a \le x \le b, a <\le x < b, a < x \le b, a < x < b$$

задають числові проміжки. При цьому, коли учні знайомі лише з раціональними числами, числа, a і b повинні бути раціональними, а в якості розв'язків нерівностей розглядаються лише раціональні числа (на деяких етапах навчання – лише натуральні числа). Але після введення множини дійсних чисел числові проміжки розглядаються як проміжки, що складаються з усіх дійсних чисел, що задовольняють відповідним нерівностям. Поряд з числовими проміжками розглядають числові промені (тобто нескінченні числові проміжки). Вони задаються нерівностями виду $a \le x, x \le a, x < a$. Зокрема, числовими променями є множини R_+ і R_, що складаються відповідно з додатних і від'ємних дійсних чисел, а також множини R, U {O} і R_U {O} (першу з них часто позначають R0).

в) Більш складну структуру, ніж числові проміжки, мають підмножини *Q* і *I*, що складаються відповідно з раціональних і ірраціональних чисел. Ці підмножини всюди щільні в R [23], тобто будь-який числовий проміжок має непустий перетин як з *Q*, так і з *I*.

г) Ряд числових множин можна отримати, поєднуючи і перетинаючи описані вище множини (наприклад $Q \cap$ $[a, b]$ – множина раціональних трьох чисел числових на відрізку $[a; b]$, а $[a;b] \cup [c;d] \cup [e;f]$– об’єднання трьох числових проміжків). В шкільній математиці найчастіше працюють з перетином і об'єднанням лише скінченних сукупностей проміжків. Але в тригонометрії при розв’язуванні нерівностей зустрічаємось і з об'єднаннями нескінченних сукупностей проміжків. Наприклад, розв’язок нерівності $x \leq -\frac{1}{2}$ має наступний вигляд:

$$\bigcup_{n \in Z} \left[-\frac{5\pi}{6} + 2n\pi; -\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right]$$

д) Різні підмножини можна вказати в множині C комплексних чисел, оскільки комплексні числа зображуються точками площини, то будь-яка плоска геометрична фігура задає деяку множину комплексних чисел. Відзначимо, зокрема, підмножина T, яка складається з таких чисел z, що |z| = 1.

3.3. Відношення включення множин і операції над множинами в шкільній математиці

Автори посібника для студентів «Сучасні основи шкільного курсу математики» Н. Я. Віленкін та ін. відзначили деякі факти про відношення включення і операцій над множинами [5]:

1. Відношення включення в застосуванні множин , які вивчаються в школі, дозволяє встановлювати ієрархію понять. Наприклад, при вивченні чотирикутників зустрічаються з поняттями паралелограма, трапеції, рівнобічної трапеції, ромба, прямокутника, квадрата.

2. При конструюванні різних об‘єктів шкільної математики широко використовуються операції над множинами. Майже всі числові множини, які одержуються в шкільній математиці, можуть бути

отримані з (замкнених) променів та всієї множини R за допомогою операцій об'єднання і перетину скінченних сукупностей множин, а також переходу до доповнення. Наприклад, відрізок [*a, b*] є перетином променів [-∞*, b*] і [*a,* +∞], відкритий промінь [*a,* ∞] – доповненням в *R* до променю [-∞*, a*]. Інтервал [*a, b*] – це перетин променів [-∞*, b*] і [*a,* + ∞], а окрема точка {*a*} – перетин променів [-∞*, a*] і [*a,* + ∞].

Одне з основних понять математики – множини. Коли кажуть про множину, то об'єднують в одну групу предмети або поняття за будь-якою ознакою і розглядають цю групу об’єктів як одне ціле [2].

Числові множини, що зустрічаються найчастіше, позначають так:

N – множина натуральних чисел;

Z – множина цілих чисел;

Q – множина раціональних чисел;

R – множина дійсних чисел;

C – множина комплексних чисел.

Для графічного зображення множин використовуються діаграми Ейлера – Венна. Кола Ейлера зображують множини умовно, так як коло містить нескінченну множину точок, в той час як множина, яку він може зображати, може бути скінченою [3].

Великий математик 18 століття Л. Ейлер запропонував зображувати множини колами, а елементи множин точками всередині цих множин.

Джон Венн (1834-1923) був викладачем логіки і теорії ймовірностей в Кембриджському університеті. Венн розробив просту систему діаграм, що полегшує розуміння певних операцій на множинах, ніхто й уявити не міг, що його ім'я буде відомо студентам половини земної кулі.

Діаграми Венна включають рамку, що позначає універсальну множину U з якою будемо працювати (рисунок 3.1):

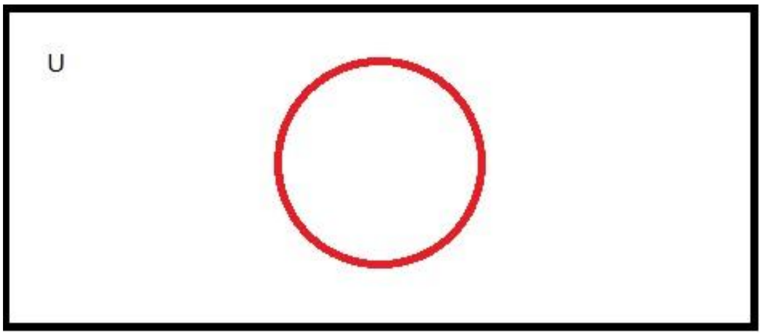


Рис. 3.1

У цій рамці внутрішня частина кола представляє дану множину (замість кола може використовуватися будь-яка замкнена крива).

Макаричєв Ю. Н. відзначає важливу особливість поняття множини. Хоча в українській мові слово «множина» зазвичай ототожнюють зі словом «багато», в математиці, кажучи про множину, не припускають, що множина містить багато елементів. Так, множина дільників числа 1 складається з одного елемента – числа 1, тобто ця множина – скінченна. Множина загальних кратних чисел 2 і 3 є нескінченною, тобто містить нескінченно багато елементів.

У математиці зустрічаються множини, в яких немає жодного елемента, наприклад, множина чисел, що діляться на нуль. Зрозуміло, чому така множина називається *пустою*.

Множина, що не містить жодного елемента, називається пустою і позначається « Ø ».

Приклад 3.2.

У квартирі проживає певна кількість людей. Ця множина може складатися з 5 чоловік, 3 чоловік, однієї людини. Можливий навіть такий випадок, що в квартирі ніхто не проживає (в даний момент квартира порожня). У цьому випадку говорять, що множина мешканців, які проживають в квартирі, – пуста множина.

Діаграми дуже зручні, тому що з їх допомогою можна наочно уявити, наприклад, об'єднання двох множин A і B (виділено синім кольором) (рис. 3.2):

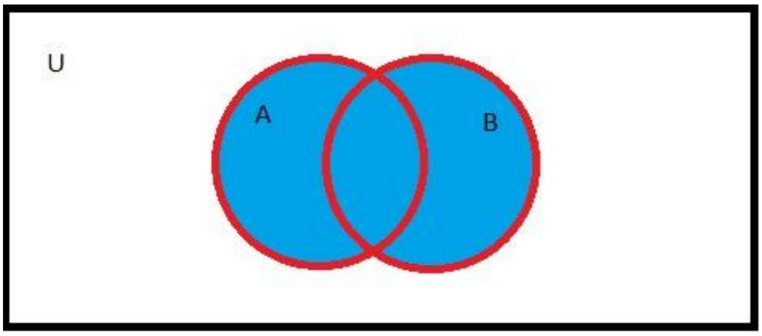


Рис. 3.2

Для множин визначені дві операції, аналогічні сумі і добутку: це об'єднання і перетин множин відповідно. Об'єднання двох множин, що позначається символом ∪ – це множина, що містить в собі всі елементи вихідних множин. Наприклад, якщо

A= {a, b, c, d, 1, 2} та B={1, 2, 3},

то A∪ B={a, b, c, d. 1,2,3 } [29, С. 77].

Об'єднанням множин A і B (позначення A∪B) називається множина елементів x таких, що x належить хоча б одній з двох множин A чи B. Символічно це можна записати в так: A∪ B = {x | x ∈ A∪ x∈ B}.

Перетин множин (виділено червоним):

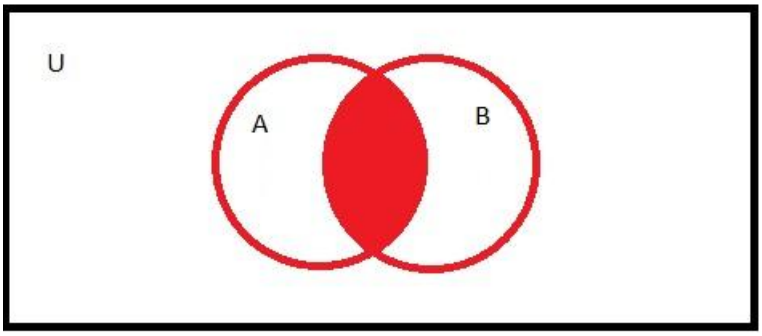


Рис. 3.3

Перетином множин A і B (позначення A∩B) називається множина, що складається з елементів x , які належать і множині A і множині B (рис. 3.3): A∩ B = {x | x ∈ A та x∈ B}.

Різницею двох множин A і B називають таку множину, в яку входять всі елементи з множини *A*, які не належать множині *B* (рис. 3.4)

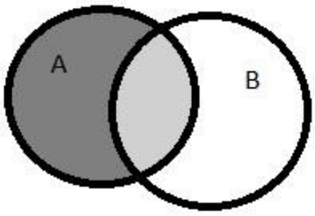


Рис. 3.4

Абсолютним доповненням множини *A* називається множина всіх елементів, які не належать *A*, тобто множина $\bar{A}$ = U \ A, де U – універсальна множина (рис. 3.5):

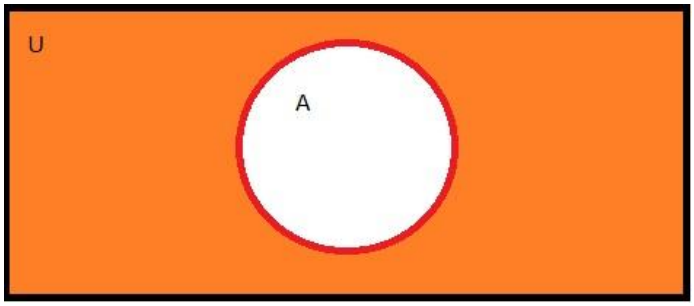


Рис. 3.5

Приклад 3.3.

Якщо U = { a, Ь, c, d, e, f, g, h }, A = { c, d, e },

B = { a, c, e, f, h }, то A∪ B = { a, c, d, c, f, h }, A∩ B = { c, e },

A\B= {d}, $\bar{A}$ = *{a,b,f,g,h}*.

Множину *A* називають *підмножиною* множини *B*, якщо кожен елемент множини *A* належить множині *B*.

Співвідношення між множинами *A* і *B* у цьому випадком записують за допомогою знаку «⊂».

Приклад 3.4.

Рівність двох чисел a = b означає, що a і b є одним і тим же числом. Так, наприклад, = 0,4. Аналогічно і рівність множин *A* = *B* означає, що множини *A і B* складаються з одних і тих же елементів або вони обидва є пустими множинами.

Відзначається, що дві множини рівні, якщо вони складаються з одних й тих самих елементів або взагалі не містять елементів.

1.4. Потужність множини

Якщо відволіктися від природи і порядку елементів, то дві скінченні множини можуть відрізнятися між собою тільки кількістю своїх елементів. Для порівняння таких двох множин не обов'язково перераховувати їх елементи. Досить поставити їх елементи у взаємно однозначну відповідність. Якщо це можна повністю здійснити, то кількість елементів однієї з них (і зрозуміло якої) більше іншої.

Саме цей принцип встановлення взаємно однозначної відповідності між елементами двох множин і поклав Г. Кантор на початку 70-х років минулого століття в основу порівняння та дослідження нескінченних множин. Якщо між елементами двох будь-яких множин можна встановити взаємно однозначну відповідність, то кажуть, що ці множини мають одну і ту ж потужність, або вони рівнопотужні, або еквівалентні. Кантор писав, що потужність збігається з кількістю елементів.

Більш вражаючим виявилося інше відкриття, зроблене Кантором в 1873 р. Всі три множини – натуральних чисел, раціональних чисел, алгебраїчних чисел – мають одну і ту ж потужність, інакше кажучи, множини раціональних чисел і множини алгебраїчних чисел є зчисленними множинами.

Приклад 3.5.

Як приклад багато математиків наводять парадокс готелю з нескінченним числом номерів, вигаданий німецьким математиком Давидом Гільбертом. Всі номери готелю пронумеровані від 1 і далі в порядку зростання. У сезон відпусток готель виявився повністю заповненим, на радість її власника. Однак раптово китайський туроператор надіслав термінове повідомлення: на наступний день має приїхати множина китайських мандрівників. Для всіх них потрібно знайти номери, але нікого з уже заселених постояльців виселяти не можна. Власник готелю прекрасно знає математику і без зусиль знайшов рішення. Він попросив усіх постояльців переїхати в кімнату, номер якої в два рази більше, ніж номер колишньої кімнати. В готелі знову з'явилося нескінченне число кімнат, і всім новоприбулим мандрівникам вистачило місць. Щасливий власник готелю з нескінченним числом номерів продовжує роботу завдяки своїм знанням нескінченності.

Кантор відкрив, що не всі нескінченні множини рівнопотужні, що існують різні ступені нескінченності. Дійсно, так як потужність дійсних чисел більше потужності множини натуральні чисел, взагалі доводиться, що будь-яка незчисленна множина має більшу потужність, ніж будь-яка зчисленна множина.

У 1874 р. Кантор поставив питання: чи можна встановити взаємно однозначну відповідність між точками квадрата і точками відрізка? У Геттінгені на святкуванні сторіччя Гаусса він звернувся з цим питанням до найвизначніших математиків. Ніхто не відповів: «Так»! Але ж і сам Кантор, який мав доведення в руках, насилу вірив йому. Він писав Дедекінду: «Я це бачу, але я цьому не вірю» (1877) [16]. Кантор визначав потужність множини М як таку властивість, яка залишається після абстрагування від якості елементів множини і від їх порядку. Щоб підкреслити цей факт подвійного абстрагування, він ввів символ . (У літературі вживалося вираз «розмір області») [7].

До Кантора вважалося, що пряма містить менше точок, ніж площина. Однак в 1878 р. Кантор довів, що в одиничному квадраті не більш точок, ніж в одиничному відрізку, вказавши спосіб встановлення взаємно однозначної відповідності між точками відрізка і квадрата.

Таким чином, потужність двовимірного континууму виявилася рівною потужності континууму одного виміру. Аналогічно можна довести, що континуум 3, 4, ..., *n*, ... нескінченної зчисленної множини вимірів мають таку ж потужність, як і одновимірний континуум [9]. Кантор ввів і символ еквівалентності множин ~.

«Про множини, між якими можна встановити взаємно однозначну відповідність, кажуть, що вони мають однакову потужність або що вони є еквівалентними» [14].

Говорячи мовою алгебри, якщо потужності замкнених множин розрізняються, то одна з них є строгою підмножиною іншої. З відкритими все інакше. Хоча прості числа – це лише мала частина множини цілих додатних чисел, її все одно можна назвати рівнопотужною по відношенню до останньої. Точно таким же чином цілі числа утворюють лише малу частину раціональних чисел (до них також відносяться і дробові).

Нескінченна множина, що має ту ж потужність, що і потужність натуральних чисел, називається зчисленною множиною.

Після визначення зчисленної множини наводиться означення замкненої множини щодо даної операції [3].

ВИСНОВКИ

Підсумовуючи результати виконаного дослідження, можна відмітити наступні положення.

Основи теорії множин були закладені відомим німецьким математиком Георгом Кантором у другій половині XX століття. Появу теорії множин авторитетні математики зустріли з ентузіазмом. Вони побачили в ній можливість створення формальної мови математики, тобто такої одностайної системи понять та принципів, за допомогою якої можна було б викласти з єдиних позицій зміст різноманітних традиційно далеких один від одного розділів математики. Перші такі досить успішні спроби були здійснені вже незабаром після виникнення канторівської теорії множин. Проте пізніші дослідники виявили в теорії Кантора чимало суперечностей, так званих парадоксів теорії множин. У зв’язку з цим виникла кризова ситуація. Одна частина математиків вважала, що краще буде не помічати ці суперечності або не надавати їм великого значення. У той же час решта математиків зосередили свої зусилля на пошуках більш обгрунтованих та точних принципів і концепцій, на яких могла б бути побудована несуперечлива теорія множин. У результаті було запропоновано декілька формальних (або аксіоматичних) систем, які служать фундаментом сучасної теорії множин, а отже, фундаментом всієї класичної математики.

Континуум-гіпотеза – це гіпотеза, яку висунув Георг Кантор у 1877 році та у подальшому намагався безуспішно її довести. Це твердження можна сформулювати наступним чином: будь-яка нескінченна підмножина континууму є або зчисленною, або континуальною. Континуум-гіпотеза стала першою з двадцяти трьох математичних проблем, про які Давид Гільберт доповів на II

Міжнародному Конгресі математиків в Парижі 1900 року. Тому континуум-гіпотеза відома також як перша проблема Гільберта.

У 1940 році К. Гедель довів, що в системі аксіом Цермело-Френкеля з аксіомою вибору (ZFC), континуум-гіпотезу не можна спростувати (за припущення про несуперечність ZFC); а у 1963 році американський математик Пол Коен довів, що континуум-гіпотезу не можна довести, спираючись на ті самі аксіоми, тобто також у припущенні про несуперечність ZFC. Таким чином, було встановлено, що континуум-гіпотеза не залежить від аксіом ZFC.

Вплив символічних та мовних засобів навчання (моделей, схем тощо) на засвоєння учнями загальноосвітніх шкіл математики позитивно впливає на розумовий розвиток їх, при цьому цей вплив є наочною основою для переходу до нового, більш високого логіко-абстрактного рівня мислення. Саме теоретико-множинний підхід є такою основою. Своєрідність шкільного курсу навчання може не приймати теоретико-множинний підхід до побудови шкільного курсу алгебри, проте можливо використовувати в ньому найпростіші теоретико-множинні поняття та їх позначення в якості допоміжних засобів навчання алгебри. Використання теоретико-множинних моделей має особливе значення для розвитку логічних структур мислення учнів.

В наш час в шкільному курсу математики тема «Множини» входить до змісту навчання математики. Причому особливе місце відводиться таким важливим операціям над множинами, як перетин, об’єднання множин, що використовуються при розв’язуванні систем та сукупностей рівнянь та нерівностей при подальшому вивченні математики. Питання, пов’язані з вивченням поняття множини та операцій над множинами, викликають в учнів деякі складності в процесі застосування їх при розв’язуванні різноманітних задач шкільного кусу математики. Нарешті, формулювання більшості понять шкільної математики стає простішим при використанні мови теорії множин. Слід відмітити, що роль теорії множин в шкільному курсі математики більше зводиться до використання мови цієї теорії, ніж до спроби обгрунтувати на ній усю шкільну математику, проте використання теоретико-множинних моделей має особливе значення для розвитку логічних структур мислення учнів. А знайомство учнів з історичними проблемами теорії множин, зокрема, з континуум-гіпотезою, сприяє не тільки розвитку логічного розвитку учнів, а й розширенню їх світогляду.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александрова Н.В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь- справочник. Изд. 2-е, перераб. и доп.- М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 248 с.

2. Акимова Н. Изучение множеств в младших классах средней школы // Я иду на урок математики: 6 класс: Книга для учителя (под общ. ред. И.Л. Соловейчик). – М.: Издательство «Первое сентября», 2002. – С.247 – 268.

3. Величко, М.В. Алгебра. 9 – 11 классы: проектная деятельность учащихся. / М.В. Величко. – 2-е изд., стереотип. – Волгоград: Учитель, 2008. – 123 с.

4. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Сурвилло Г.С. и др.: Алгебра для 9 класса с углуб. изучением. математики; под. ред. Н.Я. Виленкина.- 2- е изд..- М: Просвещение, 1998.- 384 с.

5. Виноградова Л.В. Методика преподавания алгебры в средней школе: учеб.пособие.- Ростов н/Д.: Феникс, 2013. – 252 с.

6. Глейзер Г.И. История математики в школе 9-10 классов. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1853. – 351 с.

7. Глейзер Г.И. История математики в средней школе. Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1970. – 222 с.

8. Груденов Я.И. Изучение определений, аксиом, теорем: Пособие для учителей. – М., 2014.- 95 с.

9. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя алгебры: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2014. – 224 с.

10. Далингер В.А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении алгебре: Кн. для уч-ля. – М.: Просвещение, 2014. – 80 с.

11. Иванова Т.А. Гуманитаризация общего математического образования: Монография.– Нижний Новгород: Изд-во НГПУ,2014.-206 с. Колягин Ю.М. и Луканкин Г.Л. Основные понятия современного школьного курса математики. Пособие для учителей. Под. ред. А. И. Меркушевича. – М. :Просвещение, 1974. – 382 с.

12. Колягин Ю.М., Г.Л. Луканкин Методика преподавания математики в средней школе / Мокрушин Е.Л., Саннинский В.Я. Частные методики. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. факультета педагогических институтов. – М., Просвещение, 1977. – 480 с.

13. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. – 176 с.

14. Ляпин С.Е. Методика преподавания алгебры. – М.: Москва, 2014. – 451с.

15. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Алгебра: Доп. Главы к шк. учеб. 8 кл.: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. Математики / Под. ред. Г.В. Дорофеева. – 5-е изд.- М.: Просвещение, 2003. - 207с.

16. Манвелов С.Г. Конструирование современного урока алгебры. Кн. для учителя. - М.: Просвещение, 2014. - 175 с. Методика преподавания алгебры в средней школе. Общая методика: учеб.пособие для ст. пед.ин-тов /Сост. Р.С. Черкасов, А.А.Столяр.- М.: Просвещение, 2013.-336 с.

17. Мордкович А.Г. Беседы с учителями алгебры. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2013. – 336 с.

18. Нугмонов М. Введение в методику обучения алгебре (методологический аспект). – М.: Прометей, 2014. – 153 с.

19. Онищук В.А. Урок в современной школе: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 2014. - 191 с.

20. Рогановский Н.М. Методика преподавания алгебры в средней школе: учеб. пособие для студ.пед.ин-тов по физ-мат. спец..- Мн.: Выс.шк., 2014.- 267 с.

21. Русский перевод – Кантор Г. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985. – 173 с.

22. Саранцев Г.И. Общая методика преподавания математики: Учебное пособие для студентов математических спец. педагогических вузов и университетов. – Саранск: Тип. «Красный Октябрь», 1999.– 208 с.

23. Словарь по теории и методике обучения алгебре / Под ред. Г.В.Дорофеева, Г.Е.Сенькиной.- Смоленск: СмолГУ, 2014.- 370 с.

24. Современные основы школьного курса математики: Пособие для студентов пед. ин-тов Н.Я. Виленкин, К.И. Дуничев, Л.А. Калужин, А.А. Столяр.- М.: Просвещение, 1980. –240с.

25. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. Ч. 1. Пособие для учителей/ Под. ред. Н.Я. Виленкина; Сокр. пер. с нем. А. Я. Халамайзера.- М.: Просвещение, 1982. – 208 с.,ил.