МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ДІОФАНТОВЕ РІВНЯННЯ $x^2 + y^2 = z^2$ ТА ТЕОРЕМА ФЕРМА ПРИ $n = 4$ У КУРСІ МАТЕМАТИКИ У ЗАКЛАДАХ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти “магістр”

Виконав: студентка 2курсу, 221М групи
Спеціальності 014 Середня освіта
Спеціалізація 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)»
Коваленко Аліна Сергіївна

Керівник доктор фізико-математичних наук, професор Савченко О.Г.

Рецензент доцент кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонської філії Національного університету кораблебудування ім. Адмірала Макарова Литвиненко О.І.

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. В елементарній математиці існує багато задач, часто цікавих і важких, що починалися з нескладної теми і надалі переростали в математичну теорію, пов’язану з історією та проблематикою.

Такою теорією є і теорія діофантових рівнянь, які отримали свою назву від імені великого математика античності – Діофанта [12]. Число невідомих в діофантових рівняннях переважає число рівнянь і тому їх іноді називають невизначеними. Простими діофантовими рівняннями є рівняння виду $ax + by = 1$, де a і b – цілі взаємно прості числа. Такі діофантові рівняння мають нескінченне число розв‘язків: якщо x_0 і y_0 – один розв‘язок, то числа $x = x_0 + b_n$, $y = y_0 - a_n$ (n – будь-яке число) теж будуть розв‘язками.

Наступним видом діофантових рівнянь є рівняння другого порядку

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

де a, b, c, d, e, f – цілі числа. Такі рівняння можуть мати нескінченно багато розв‘язків, наприклад, рівняння Пелля:

$$x^2 - Ay^2 = 1 \ (A > 0),$$

де A – неповний квадрат.

Вивчались діофантові рівняння виду

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_ny^n = 0, \text{ де } n \geq 3.$$

Встановлено, що якщо многочлен $a_0t^n + a_1t^{n-1}y + \ldots + a_n$ є незвідним в полі раціональних чисел, то відповідне діофантове рівняння не може мати нескінченно багато розв‘язків [3].

Діофантові рівняння в сучасній математиці часто відносять до алгебраїчних рівнянь, розв‘язки яких відшукуються серед цілих алгебраїчних чисел будь-якого алгебраїчного розширення поля раціональних чисел, серед p-адичних чисел. Дослідження діофантових рівнянь відносять до граничної області між теорією чисел і алгебраїчною геометрією. Хоча робота Діофанта складається тільки з розв‘язків конкретних рівнянь, але є підстави вважати, що він володів деякими загальними прийомами.

Задачі, пов‘язані з діофантовими рівняннями, дозволяють розкрити багато цікавих питань з алгебри, теорії чисел, геометрії, теорії дивізорів та інших актуальних проблем сучасності. Відомою задачею теорії діофантових рівнянь є проблема Ферма, яка до теперішніх часів не має загального розв‘язку.

Деякі аспекти теорії діофантових рівнянь пропонуються на математичних олімпіадах, розглядаються на факультативних заняттях в класах з поглибленим вивченням математики та на уроках математики.

Виходячи із важливості даної проблеми та її практичного використання в шкільному курсі математики, визначена тема дослідження.

Мета дослідження – систематизувати відомості про діофантові рівняння та розглянути методи розв‘язання діофантових рівнянь другого степеня, що можуть бути розглянуті на факультативних гуртках з математики у закладах середньої освіти.

Об‘єктом дослідження виступають загальні діофантові рівняння та їх раціональні розв‘язки, а ***предметом дослідження*** **–** безпосередньо діофантові рівняння першого та другого степенів.

Виходячи з мети, визначені основні ***завдання дослідження***:

1) систематизувати матеріал щодо теорії діофантових рівнянь та теореми Ферма для показника 4;

2) дослідити проблему розв‘язності діофантових рівнянь другого степеня та деякі загальні методи їх розв‘язання;

3) розробити добірку уроків з теорії діофантових рівнянь для факультативних занять з математики в шкільному курсі математики.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що були узагальнені основні факти, які стосуються методів розв’язування діофантових рівнянь та теореми Ферма. ***Практичне значення*** дипломної роботи полягає в можливості застосування матеріалу студентами та вчителями закладів середньої освіти.

Для вирішення поставлених завдань було застосовано наступні ***методи***: вивчення літератури з теми дослідження, порівняльний аналіз та узагальнення.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Дана дипломна робота складається з трьох розділів. В першому розділі наводиться коротка історична довідка про діофантові рівняння та основні означення, допоміжні теореми, а також розкривається питання стосовно застосування теорії діофантових рівнянь в роботах Ферма. В другому розділі розглядаються діофантові рівняння першого та другого степенів, наводяться приклади. Елементи теорії діофантових рівнянь в шкільному курсі математики розглядаються в третьому розділі. Цей розділ практичного характеру та містить розробку факультативних занять з теми дослідження, що можуть бути запропоновані для здобувачів середньої освіти на заняттях з математики.

РОЗДІЛ 1
ДЕЯКІ ДОПОМІЖНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Історія виникнення діофантових рівнянь

Діофант був останнім великим математиком античності. Разом з тим він був одним з перших творців нової алгебри, основою якої була не геометрія (як це було у Евкліда, Архімеда, Аполонія), а арифметика. Діофантом були введені від‘ємні числа і використовувалася буквена символіка [12].

“Арифметика” Діофанта стала початком для теоретико-числових досліджень Ферма та Ейлера, особливо для розвитку теорії невизначених рівнянь, які одержали на честь їх творця ім‘я діофантових [6].

Розв‘язки рівняння в цілих числах є однією з найдавніших математичних задач. Вже на початку другого тисячоліття до н.е. вавілоняни вміли розв‘язувати системи рівнянь з двома невідомими. Найбільшого розквіту ця область математики досягла в Стародавній Греції. Основним джерелом для нас є “Арифметика” математика із Олександрії – Діофанта. Але до нашого часу збереглася лише частина його математичного трактату (6 книг з 13). В ній Діофант дає розв‘язки задач, які зводяться до невизначених рівнянь до четвертого степеня, та ряд методів дослідження рівнянь другого і третього степенів [11].

Для позначення невідомого і його степеня, знаку рівності, Діофант використовував скорочену форму запису відповідних слів. Діофант володів загальними методами розв‘язання невизначених рівнянь. Не так давно знайдено під ім‘ям Діофанта арабський текст ще чотирьох книг “Арифметики”.

Першим джерелом творчості Діофанта є арифметико-алгебраїчне направлення, яке розвивалося в олександрійській математиці в I-II ст. н.е.

Другим джерелом творчості Діофанта є роботи по дослідженню невизначених рівнянь. Але про це відомо дуже мало. Відомо тільки, що в Стародавньому Вавилоні ставилося питання про раціональні розв‘язки рівняння.

$$X^2+Y^2=Z^2 \tag{1.1}$$

Піфагору було приписано правило для знаходження цілочисленних його розв‘язків, а саме:

$$X=\frac{m^2-1}{2},\ Y=m,\ Z=\frac{m^2+1}{2},$$

де m – непарне число.

При m = 3 отримується трикутник зі сторонами 3, 4, 5, який також пов‘язують з ім‘ям Піфагора [7].

Загальні формули для розв‘язку рівняння (1.1) містяться в “Початках” Евкліда:

$$X=p^2-g^2,\ Y=2pg,\ Z=p^2+g^2,$$

де p, g – цілі числа. Цими формулами часто користувався Діофант.

Другим невизначеним рівнянням, яке дослідили стародавні, було рівняння вигляду

$$a\,X^2+1=Y^2\,. \tag{1.2}$$

Воно отримало назву рівняння Пелля (без особливих історичних основ), в наш час його частіше називають ім‘ям Ферма [17]. Евклід показав, як знайти всі розв‘язки цього рівняння, виходячи із найменшого, для випадку a=2. Архімед поставив перед олександрійськими математиками задачу про биків, яка зводиться до рівняння (1.2) для a = 4729494, найменший розв‘язок якого записується за допомогою 206545 десяткових знаків. Він підібрав таке значення a, щоб розв‘язки неможливо було знайти шляхом простого підбору. Точно до такого ж прийому прийшов П‘єр Ферма: ним також була поставлена задача пошуку розв‘язку рівняння (1.2) для спеціально підібраних значень a, для яких найменший розв‘язок був дуже великим. Після Ферма невизначеними рівняннями займався Ньютон. Він перший дав геометричну інтерпретацію методів Діофанта, причому для знаходження раціональних точок кривої третього порядку [15]. Ним було застосовано метод “січної” для випадку, коли відомі дві кінцеві раціональні точки кривої.

Багато працював в області невизначеного аналізу Леонард Ейлер (1707-1783). Він сформулював у загальному вигляді відмінність між проблемами пошуку раціональних розв‘язків невизначених рівнянь другого порядку і рівнянь третього порядку. Для рівняння $Y^2=f_3(x)$ було знайдено умови, при яких невідомі виражаються як раціональні функції параметру [18].

Зв‘язок між дослідженнями Ейлера і розв‘язком невизначених рівнянь третього і четвертого степенів вперше встановив К. Якобі, а саме було встановлено, що раціональні розв‘язки цих рівнянь, якщо відомо один або два таких розв‘язки, можна знайти за допомогою теорем множення і додавання еліптичних інтегралів [5].

Робота Якобі не привернула до себе увагу сучасників. І тільки в кінці минулого століття Анрі Пуанкаре прийшов до тих же ідей, коли почав будувати арифметику алгебраїчних кривих.

Наведемо деякі означення та поняття з теорії діофантових рівнянь.

Невизначені рівняння – це рівняння, які містять більше одного невідомого.

Системою невизначених рівнянь називають систему рівнянь, в якій число невідомих більше числа рівнянь.

Діофантові рівняння – це алгебраїчні рівняння або системи алгебраїчних рівнянь з цілими коефіцієнтами, в яких шукаються цілі або раціональні розв‘язки.

Рівняння виду $ax+by=1$, де a і b – цілі взаємно прості числа, називають *простими діофантовими рівняннями*.

Лінійне діофантове рівняння – це рівняння першого порядку, яке має вигляд: $a_1x_1+a_2y_2+\ldots+a_ny_n = b$ де всі a_i і b – цілі числа і хоча б одне $a_i \neq 0$.

Розв‘язком діофантового рівняння в цілих числах називається послідовність цілих чисел V_1, V_2, …, V_n, для якої має місце числова рівність:

$$a_1V_1+a_2V_2+\ldots+a_nV_n = b.$$

Теорема 1.1. Діофантове рівняння $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = b$ має розв‘язки в цілих числах тоді і тільки тоді, коли ділиться на найбільший спільний дільник d чисел a_1, a_2, ..., a_n.

Теорема 1.2. Нехай діофантове рівняння $ax+by=c$ має розв‘язок в цілих числах і пара цілих чисел U_0,V_0 є будь-яким розв‘язком цього рівняння, d – найбільший спільний дільник чисел a і b. Тоді множина всіх розв‘язків в цілих числах даного рівняння є множиною парV, U, де

$$U = U_0 - \frac{b}{d}t,\ V = V_0 + \frac{a}{d}t$$

для всіх $t \in N$.

Діофантові рівняння другого порядку мають вигляд

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ та } x^2 - ay^2 = 1.$$

Теорема 1.3. Невизначене рівняння другого порядку від двох змінних або не має жодного раціонального розв‘язку, або має їх нескінчену кількість, причому в останньому випадку всі розв‘язки виражаються як раціональні функції параметра $x=\varphi(k)$, $y=\psi(k)$, де φ і ψ – раціональні функції.

Будь-який набір U, V, Z, який задає точку, називається *однорідними координатами*.

Якщо $Z=0$, то точці $(U, V, 0)$ не буде відповідати жодна точка площини $R^{(2)}$, де $R^{(2)}$ – афінна площина, кожна точка якої задається впорядкованою парою дійсних чисел (x, y), такі точки називаються *нескінченно віддаленими* або *невласними*.

1.2. Методи Діофанта розв‘язування деяких невизначених рівнянь в роботах Ферма

Разом з невизначеними рівняннями першого порядку великий інтерес складають дослідження розв‘язків в цілих числах невизначених рівнянь більш високих порядків. У зв‘язку з цим згадаємо задачу, яка на протязі століть не піддавалася зусиллям багатьох математиків світу.

Французький математик П‘єр Ферма сформулював наступне твердження, яке називають проблемою Ферма або великою теоремою Ферма: для будь-якого натурального числа $n > 2$ рівняння

$$x^n + y^n = z^n$$

не має розв‘язків в цілих додатних числах x, y, z.

Зауважимо, що при $n = 2$ одержуємо так зване *рівняння Піфагора*

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

яке має розв‘язки в області натуральних чисел, наприклад,

$$3^2 + 4^2 = 5^2,\ 15^2 + 8^2 = 17^2,\ 9^2 + 40y^2 = 41^2 \text{ і т.д.}$$

Існують досить прості способи для знаходження всіх розв‘язків в області натуральних чисел цього рівняння. Розв‘язками цього рівняння цікавились ще стародавні греки при визначені довжин катетів та гіпотенузи прямокутного трикутника. Своє твердження П.Ферма написав на полях книги “Арифметика” Діофанта: “Я відкрив цьому досить просте доведення, яка через нестачу місця не може розміститися на цих полях” [4]. В листах П.Ферма було знайдено доведення великої теореми для $n = 4$. Для $n = 3$ та $n = 4$ довів теорему Л.Ейлер. П.Діріхле та А.Лежандр – для $n = 5$, Г. Ламе – для $n = 7$. Починаючи з Кантора, для розвитку проблеми Ферма застосовується алгебраїчна теорія чисел. Куммер довів теорему Ферма для всіх значень $n \leq 100$ [9].

Проблема Ферма привернула до себе увагу як великих спеціалістів-математиків, так і любителів математики. Для ряду частинних випадків теорема Ферма була справедлива. Але в загальному випадку розв‘язати проблему Ферма не вдалося до сих пір.

Також в листах П. Ферма було знайдено детальний опис загального методу доведення теоретико-числових речень, який він назвав методом спуску [17]. В наш час цей метод є незамінним при дослідженні проблем діофантових рівнянь. Але застосування цього методу до проблем, які відносяться до раціональних точок кривої, потребувало введення нового поняття “висоти точки”.

Нехай, наприклад, дано невизначене рівняння

$$f(x, y) = 0, \qquad (1.3)$$

відносно якого треба довести, що воно не має розв‘язків в раціональних числах. Для доведення перейдемо до однорідних координат. Нехай

$$x = \frac{u}{z}, y = \frac{v}{z},$$

отримаємо

$$\Phi(u, v, z) = 0. \qquad (1.4)$$

Кожному раціональному розв‘язку (1.3) відповідає розв‘язок (1.4) в цілих числах. Тому досить показати, що рівняння (1.4) не має жодного цілочисленного розв‘язку. Так, наприклад, якщо рівняння (1.3) має вид

$$Ax^n + By^n = C,$$

то рівняння (1.4) буде таке: $Au^n + Bv^n = Cz^n$.

Нехай тепер u, v, z – розв‘язки (1.4) в цілих числах. Назвемо тоді висотою точки (u, v, z) найбільше з чисел $|u|, |v|, |z|$.

Для того, щоб провести “спуск”, треба довести, що якщо рівнянню (1.4) задовольняють координати точки висоти h, то йому будуть задовольняти і координати деякої іншої точки висоти $h_1 < h$. Так як існує тільки скінчена кількість цілих чисел, менших h, то рівняння (1.4) не має розв‘язків в цілих числах, а значить, і рівняння (1.3) – в раціональних.

Розглянемо діофантове рівняння

$$x^n + y^n = z^n. \qquad (1.5)$$

Покажемо, що це рівняння не має цілочисленних розв‘язків з $x, y, z \neq 0$, $z > 0$. Якщо (1.5) має такий цілочисленний розв‘язок, то побудуємо інший розв‘язок з меншим додатним z. Очевидно, що це є неможливим, бо в цьому випадку ми одержали б нескінчену послідовність спадних додатних цілих чисел. Розглянемо це детально.

Нехай $(x, y, z) = 1$, $z > 0$. Далі, числа x і y не можуть бути одночасно непарними, бо в протилежному випадку редукція за модулем 4 привела б до конгруенції

$$z^2 \equiv 2\ (4),$$

але це є неможливим.

Покладемо x непарним, y – парним, так що z теж непарне. Запишемо

$$y^4 \equiv (z - x^2)(z + x^2)$$

і так як будь-яке просте число p, яке ділить два співмножники справа, повинно ділити також $2z$ і $2x^2$, отже $(z - x^2, z + x^2) = 2$. Але добуток цілих двох співмножників є четвертий степінь, тому можливі два випадки:

$$\begin{aligned} z - x^2 &= 2a^4, \\ z + x^2 &= 8b^4, \end{aligned} \qquad (1.6)$$

a – непарне $(a, b) = 1$, або

$$\begin{aligned} z - x^2 &= 8b^4, \\ z + x^2 &= 2a^4, \end{aligned} \qquad (1.7)$$

a – непарне, $(a, b) = 1$.

Перший випадок означає, що $x^2 = -a^4 + 4b^4$ – це є неможливим, бо тоді $1 \equiv -1(4)$. Тому має місце випадок (1.7) і $z = a^4 + 4b^4$. Помітимо, що $0 < a < z$. Виключаючи z з (1.7), отримаємо $4b^4 = (a^2 - x)(a^2 + x)$.

Так як $(a, b) = 1$, то $(a, b) = 1$, та $(a^2 - x,\ a^2 + x) = 2$.

Записуючи

$$a^2 - x = 2c^4 \text{ і } a^2 + x = 2d^4,$$

маємо $a^2 = c^4 + d^4$.

Отже, знайшли розв‘язки рівняння (1.7) з меншим додатним значенням для z і тим самим закінчили доведення.

Звідси дослідження цілих розв‘язків рівняння

$$x^n + y^n = z^n$$

є узагальненням задачі про Піфагорові трійки.

Позитивний розв‘язок проблеми Ферма для n = 4, як було сказано раніше, одержано Л. Ейлером. Завдяки цьому результату проблема Ферма зводиться до доведення відсутності ненульових цілих розв‘язків рівняння при непарному простому n.

Повне дослідження розв‘язків рівняння не завершено. Труднощі пов‘язані з відсутністю єдиного розкладу на прості множники в кільці цілих чисел алгебраїчних чисел. Теорія дивізорів в кільці цілих алгебраїчних чисел дає можливість встановити справедливість теореми Ферма для багатьох класів простих показників n.

Лема 1.1. Будь-який частинний розв’язок *(x, y, z)* рівняння (1.1), що складається з додатних чисел, для якого $x = 2a$, виражається формулами:

$$x = 2mn;\ y = m2 - n2;\ z = m2 + n2$$

де $n < m$, *НОД* $(m; n) = 1$, m і n – числа різної парності.

Теорема Ферма для показника 4. Рівняння

$$x^4 + y^4 = z^4 \tag{1.8}$$

не має розв’язків в цілих, відмінних від нуля числах.

Доведення.

Припустимо, що існує розв’язок рівняння (1.8) в цілих, відмінних від нуля числах. Ясно, що, не втрачаючи спільності, ми можемо вважати, що воно складається з попарно взаємно простих додатних чисел (якщо (x; y; z) є розв’язком рівняння (1.8), то, відразу ж видно, що (λx; λy; λz) також є його розв’язком). Оскільки в будь-якій множині натуральних чисел існує найменше з них, то серед всіх таких розв'язків знайдеться розв'язок $(x; y; z)$ з найменшим z. Розглянемо саме цей розв'язок.

Можна відразу довести, що одне з чисел x і y повинно бути парним. Припустимо, що парне число x. Це припущення також загальності не обмежує.

Оскільки числа x^2, y^2 і z додатні і взаємно прості, а число x^2 парне, то існують такі взаємно прості числа m і $n < m$ різної парності, що

$$x^2 = 2mn;\ y^2 = m^2 - n^2;\ z^2 = m^2 + n^2.$$

Якщо $m = 2k$ і $n = 2f + 1$, то

$$y = 4\ (k^2 - f^2 - f - 1) + 3,$$

що неможливе, бо будь-який квадрат повинен мати вид $4k + 1$, або $4k$ [23]. Отже, m – непарне, а n – парно.

Нехай $n = 2q$. Тоді $x^2 = 4mq$ і тому $mq = (x/2)^2$. Оскільки НОД $(m; q) = 1$, а x парне, то $m = z_1^2$; $q = t^2$, де z_1 і t – деякі цілі взаємно прості додатні числа. Зокрема, рівняння $y^2 = m^2 - n^2$ те ж саме, що і $y^2 = (z_1^2)^2 - (2t^2)^2$, тобто $(2t^{2)2} + y^2 = (z_1^2)^2$.

Оскільки НОД $(t; z_1)= 1$, то існують такі додатні взаємно прості числа a і $b < a$ різної парності, що $2t_2 = 2ab$, тобто

$$t_2 = ab;\ y^2 = a^2 - b^2;\ z_1^2 = a^2 + b^2.$$

Оскільки НОД $(a; b)= 1$, з рівності $t^2 = ab$ випливає, що існують цілі числа x_1 і y_1, для яких $a = x_1^2$; $b = y_1^2$. Тому $z_1^2 = a^2 + b^2$ те ж, що і $x_1^4 + y_1^4 = z_1^4$. Це означає, що числа x_1, y_1, z_1 складають частинний розв'язок (1.3), що складається з додатних чисел. Тому через вибір розв'язку $(x; y; z)$, повинна мати місце нерівність $z_1 > z$, а тому і нерівність $z_1^2 > z$, тобто, враховуючи, що $z = m^2 + n^2$, m і $m^2 + n^2$, чого бути не може, оскільки $m, n > 0$.

Отже, припущення про існування у рівняння (1.3) цілочисельних розв'язків приводить до суперечності. Отже, це рівняння не має розв'язків в цілих, відмінних від нуля числах.

РОЗДІЛ 2
ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ

2.1. Лінійні діофантові рівняння

Під *лінійними діофантовими рівняннями* розуміють рівняння першого порядку, які мають вигляд:

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b,$$

де всі a_i і b – цілі числа і хоча б одне $a_i\neq 0$. При цьому *розв'язком* діофнтового рівняння першого порядку буде будь-яка послідовність цілих чисел $V_1, V_2\ldots V_n$, для якої має місце числова рівність

$$a_1V_1+a_2V_2+\ldots+a_nV_n=b.$$

Теорема 2.1. Діофантове рівняння

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b$$

має розв'язки в цілих числах тоді і тільки тоді, коли ділиться на найбільший спільний дільник d чисел $a_1, a_2\ldots a_n$.

Доведення.

Якщо дане рівняння має розв'язки в цілих числах, тобто

$$a_1V_1+a_2V_2+\ldots+a_nV_n=b\ (V_i\in N),$$

то з подільності кожного a_i на d отримаємо подільність b на d.

Нехай $b=d_c$ ($c\in N$). Якщо d = НСД(a_1, $a_2\ldots$ a_n), то знайдуться цілі числа U_1, $U_2,\ldots,U_n$ такі, що

$$a_1U_1+a_2U_2+\ldots+a_nU_n=d$$

Тому

$$a_1(U_1c)+a_2(U_2\ c)+\ldots+a_n(U_nc)=b.$$

Якщо діофантове рівняння першого степеня має розв'язки в множині цілих чисел, то завжди можна знайти хоч би один розв'язок даного діофантового рівняння в цілих числах.

Розглянемо діофантове рівняння $10x_1+12x_2-15x_3=2$.

Воно має розв'язки в множині цілих чисел, так як

НСД(10, 12, –15) = 1.

Знайдемо вираз одиниці через числа 10, 12, 15. Одержуємо

$$1 = 10\cdot 7 + 12(-7) + 15\cdot 1,$$

звідси 10·14 + 12(–14) – 15(–2) = 2. Отже, послідовність цілих чисел 14, –14, –2 є одним із розв‘язків даного рівняння.

Якщо діофантове рівняння

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \ (n \geq 2)$$

має розв‘язок в множині цілих чисел, то воно має нескінчену множину розв‘язків в множині цілих чисел. Якщо послідовність цілих чисел $V_1, V_2 \ldots V_n$ є розв‘язком даного рівняння, то при будь-якому $t \in N$ послідовність $V_1 + a_2t, V_2 - a_2t, V_3 \ldots V_n$ теж є розв‘язком даного рівняння, оскільки

$$a_1(V_1 + a_2t) + a_2(V_2 - a_1t) + a_3V_3 \ldots + a_nV_n =$$
$$= a_1V_1 + a_2V_2 + a_3V_3 + \ldots + a_nV_n = b.$$

Нехай діофантове рівняння:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

має розв‘язки в цілих числах, що означає подільність b на найбільший спільний дільник d коефіцієнтів a_1, $a_2 \ldots$ a_n. Так як серед вказаних коефіцієнтів є відмінні від нуля, то $d \neq 0$.

Нехай

$$a_i' = \frac{a_1}{d} \ (i = 1, 2 \ldots n)$$
$$b' = \frac{b}{d}.$$

Якщо всі коефіцієнти при невідомих і вільний член даного рівняння поділити на d, то отримаємо діофантове рівняння,

$$a_1'x_1 + a_2'x_2 + \ldots + a_n'x_n = b',$$

яке рівносильне вихідному, тобто множина всіх його розв‘язків співпадає з множиною всіх розв‘язків вихідного рівняння. Коефіцієнти a_1', a_2', …, a_n' – взаємно прості.

При цьому при знаходженні розв'язків діофантового рівняння першого степеня в цілих числах дане рівняння завжди може бути замінено рівносильним йому діофантовим рівнянням першого степеня, у якого коефіцієнти при невідомих взаємно прості.

З іншого боку, будь-яке діофантове рівняння, у якого коефіцієнти при невідомих взаємно прості, має розв'язки в цілих числах. Отже, діофантове рівняння першого степеня, яке має розв'язки в цілих числах, можна розглядати як рівняння із взаємно простими коефіцієнтами при невідомих. Для знаходження будь-якого розв'язку в множині цілих чисел такого діофантового рівняння достатньо вміти виразити одиницю через дані взаємно прості числа.

Теорема 2.2. Нехай діофантове рівняння $ax + by = c$ має розв'язки в цілих числах, і пара цілих чисел u_0, v_0 є будь-яким розв'язком цього рівняння, d – найбільший спільний дільник a і b. Тоді множина всіх розв'язків в цілих числах даного рівняння є множиною пар u, v, де

$$u = u_0 - \frac{b}{d}t, v = v_0 + \frac{a}{d}t$$

для всіх $t \in N$.

Доведення.

Вказана в теоремі пара цілих чисел u, v при будь-якому $t \in N$ є розв'язком даного рівняння

$$a\left(u_0 - \tfrac{b}{d}t\right) + b\left(v_0 + \tfrac{a}{d}t\right) = \mathrm{au}_0 + \mathrm{bv}_0 = c.$$

Нехай $a \neq 0$ (випадок $b \neq 0$ розглядається аналогічно). Тому і $d \neq 0$. Нехай пара цілих чисел u, v є розв'язком нашого рівняння, тобто $au + bv = c$. Маємо також $au_0 + bv_0 = c$.

Віднімаючи почленно ліві і праві частини цих рівнянь і поділивши їх на d, одержуємо

$$\frac{a}{d}(u_0 - u) = \frac{b}{d}(v - v_0),$$

числа $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}$ – прості. Тому з подільності $\frac{b}{d}(v - v_0)$ на $\frac{a}{d}$ отримаємо подільність $v - v_0$ на $\frac{a}{d}$, тобто

$$v - v_0 = \frac{a}{d}t,\ (t \in N).$$

Тому $v = v_0 + \frac{a}{d}t$. Підставляючи цей вираз $v - v_0$ в раніше отримане рівняння, знайдемо

$$\frac{a}{d}(u_0 - u) = \frac{b}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot t..$$

Скорочуючи на $\frac{a}{d} \neq 0$, отримаємо $(u_0 - u) = \frac{b}{d} \cdot t$, тобто $u = u_0 - \frac{b}{d} \cdot t$.

Знайдемо всі розв‘язки в множині цілих чисел рівняння:

$$147x – 25y = 14.$$

Числа 147 і –25 – взаємно прості. Знайдемо вираз одиниці через ці числа:

$$147 – 25·5 + 22,$$

$$25 = 22·1 + 3,$$

$$22 = 3·7 + 1,$$

$$1 = 22 – 3·7 = 22 – (25 – 22)·7 = (147 – 25·5)·8 – 25·7 = 147·8 – 25·47.$$

Звідси одержуємо 14 = 147·112 – 25·685, отже, пара чисел 112, 658 є розв‘язком даного рівняння.

Усі розв‘язки в множині цілих чисел даного рівняння мають вигляд:

$$x = 112 + 25t,$$

$$y = 658 + 147t,\ (t \in N).$$

Розглянемо наступні задачі.

1. З‘ясувати, скількома способами можна розміняти 20 копійок монетами по 2 і 3 копійки.

Нехай x – кількість монет по 2 копійки, y – кількість монет по 3 копійки. За умовою одержуємо рівняння: $2x + 3y = 20$, причому $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Одним з розв‘язків цього рівняння є –20, 20. Всі розв‘язки знайдемо за формулами:

$$x = -20 - 3t,$$

$$y = 20 + 2t, \ (t \in N)$$

При цьому

$$-20 - 3t \geq 0, \ 20 + 2t \geq 0.$$

Отже, $-10 \leq t \leq -7$, тобто $t = -10, -9, -8, -7$ і тому можливі лише чотири способи розміну, які здійснюються при знайденому значенні t.

При $t = -10$: $x = 10, y = 0$,

$t = -9$: $x = 7, y = 2$,

$t = -8$: $x = 4, y = 4$,

$t = -7$: $x = 1, y = 6$.

2. Від двох заданих чисел відняти одне і теж число так, щоб залишки знаходились між собою в заданому співвідношенні.

Необхідно, щоб задане співвідношення було більше того, яке більше із заданих чисел має до меншого.

Розв‘язання.

Нехай задано: від 20 і 100 відняти теж саме число і зробити так, щоб більше число було шестикратним меншого.

Від кожного з чисел віднімемо x. Одержуємо різниці: $100 - x$, $20 - x$. Необхідно, щоб більше було у 6 разів більше за меншого. Отже, менше число, взяте 6 разів, буде дорівнювати більшому числу. Але менше число буде $120 - 6x$, яке рівне $100 - x$. Тоді:

$$120 - 6x = 100 - x,$$

$$5x = 20,$$

$$x = 4.$$

Отже, одержали число 4, і більше число буде дорівнювати меншому числу, взятому 6 разів. Різниця $100 - 4 = 96$; різниця $20 - 4 = 16$.

Отже, більше число, 96, дорівнює меншому, 16, взятому 6 разів.

2.2. Діофантові рівняння другого степеня

Діофантом було розглянуто два види невизначених рівнянь другого порядку. Це рівняннян $x^2 + y^2 = z^2$ та $x^2 – ay^2 = 1$.

Перше з них з‘явилося ще в Стародавньому Вавилоні. Формули для його розв‘язання були знайдені піфагорійцями [16]:

$$x = k^2 – 1,\ y = 2k,\ z = k^2 + 1.$$

Друге рівняння повністю розв‘язується в “Початках” Евкліда для випадку, коли $a = 2$, причому не в раціональних, а в цілих числах.

Діофант в своїй другій книзі “Арифметика” розглядає різні види невизначених рівнянь другого порядку і доводить наступну теорему: невизначене рівняння другого порядку від двох змінних або не має жодного раціонального розв‘язку, або має їх нескінчену кількість, причому в останньому випадку всі розв‘язки виражаються як раціональні функції параметру

$$x = \varphi(k),\ y = \psi(k),$$

де φ, ψ – раціональні функції.

Для ілюстрації розглянемо задачу із другої книги “Арифметики” Діофанта. «Даний квадрат розділити на два квадрати» [7].

Нехай треба 16 поділити на два квадрати. Покладемо перший x^2, а другий тоді буде $16 – x^2$, таким чином, повинно бути

$$16 – x^2 = 2.$$

Отримаємо цей квадрат з декількох x мінус стільки одиниць, скільки знаходиться у стороні 16. Нехай буде $2x – 4$, що у квадраті дасть:

$$4x^2 + 16 – 16x,$$

це дорівнює $16 – x^2$.

До обох частин додамо від‘ємні члени і зведемо подібні. Тоді

$$5x^2 = 16x,\ x = \tfrac{16}{5}.$$

Один буде $\frac{256}{25}$, другий $\frac{144}{25}$, сума їх буде $\frac{400}{25} = 16$ і кожен з них буде квадратом".

Виділимо метод Діофанта у "чистому вигляді" [5]. Нехай дано рівняння:

$$x^2 + y^2 = a^2, \tag{2.1}$$

яке задає коло з центром у початку координат. Одним з раціональних розв'язків цього рівняння буде (0, $-a$).

Діофант робить підстановку:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = \text{kx} - a. \end{cases} \tag{2.2}$$

Не маючи позначень для будь-якого k, він бере $k = 2$, відмічаючи, що треба утворити квадрат з "декількох x мінус стільки одиниць, скільки знаходиться в стороні 16", тобто $kx - 4$.

Підстановку (2.2) можна інтерпретувати геометрично як проведення через точку (0, $-a$) прямої

$$y = kx - a. \tag{2.3}$$

Ця пряма перетне коло (2.1) ще в одній точці, координати якої будуть раціональними функціями від k.

Дійсно,

$$x^2 + (kx - a)^2 = a^2 \text{ і } y = kx - a = a\frac{k^2-1}{k^2+1}.$$

Отже, кожному раціональному значенню k відповідає одна і тільки одна раціональна точка кривої (2.1). І навпаки, з'єднавши будь-яку раціональну точку кривої (2.1) з точкою (0, $-a$), одержуємо пряму з раціональним кутовим коефіцієнтом.

Метод Діофанта ще прозоріше виступає у розв'язку наступної задачі книги II. "Дане число, яке є сумою двох квадратів, розбити на два інших квадрати" [18].

Діофант задає число 13 як суму (4 + 9). Отже, один розв'язок (2 ; 3) вже знаємо. Для того, щоб знайти інший, Діофант припускає перше число рівним $x = t + 2$, друге – $y = 2t - 3$, тобто проводиться пряма через точку (2, –3), відмічаючи, що замість множника 2 можна взяти будь-яке інше число.

Метод Діофанта дає змогу знайти всі раціональні точки кривої другого порядку, якщо ця крива має хоча б одну раціональну точку.

Дійсно, нехай задане рівняння другого порядку від двох змінних

$$f_2(x, y) = 0. \qquad (2.4)$$

Раціональний розв‘язок цього рівняння (a, b). Зробимо підстановку:

$$\begin{cases} x = a + t, \\ y = b + \mathrm{kt}. \end{cases}$$

Одержуємо

$$f_2(a+t, b+kt) = f_2(a, b) + tA(a, b) + ktB(a, b) + t^2C(a, b, c) = 0.$$

Але $f_2(a, b) = 0$. Тому

$$t = -\frac{A(a,b)+\mathrm{k}\mathrm{B}(a,b)}{C(a,b,k)}.$$

Отже, для кожного раціонального k знайдемо один і тільки один раціональний розв‘язок. Якщо задане рівняння має вигляд

$$y^2 = a^2x^2 + bx + c, \qquad (2.5)$$

то здійснюючи підстановку $y = ax + m$, маємо

$$x = \frac{c-m^2}{2\mathrm{am}-b}.$$

З‘ясуємо геометричний зміст цієї підстановки. Для цього треба перейти до однорідних або проективних координат.

Розглянемо проективну площину $P^{(2)}$, кожну точку якої охарактеризуємо впорядкованою трійкою дійсних чисел (u, v, z), з яких хоча б одне відмінне від нуля. Точки (u, v, z) і (u_1, v_1, z_1) будемо вважати однаковими тоді і тільки тоді, коли $u = ku_1$, $v = kv_1$, $z = kz_1$. Причому $k \neq 0$.

Отже, нескінченна кількість трійок визначає одну й ту саму точку, і будь-який набір u, v, z, який задає точку, є її однорідними координатами. Встановимо відповідність між точками площин $R^{(2)}$ і $P^{(2)}$, де $R^{(2)}$ – афінна площина, кожна точка якої задається впорядкованою парою дійсних чисел (x, y).

Нехай (u, v, z) є деяка точка $P^{(2)}$. Якщо $z \neq 0$, то візьмемо трійку $\left(\frac{u}{z}, \frac{v}{z}, 1\right)$, яка визначає ту ж саму точку.

Поставимо у відповідність цій точці точку площини $R^{(2)}$ з координатами (x, y), де $x = \frac{u}{z}, y = \frac{v}{z}$.

Якщо $z = 0$, то точці $(u, v, 0)$ не буде відповідати жодна точка площини $R^{(2)}$. Такі точки називаються *нескінченно віддаленими* або *невласними*. Усі такі точки лежать на нескінченно віддаленій прямій $z = 0$. Перейдемо від рівняння $f(x, y) = 0$, записаного в афінних координатах, до рівняння в однорідних координатах через підстановку

$$x = \frac{u}{z}, y = \frac{v}{z}.$$

Одержимо рівняння $\Phi(u, v, z) = 0$, де $\Phi(u, v, z)$ – многочлен відносно u, v і z. Наприклад, рівняння гіперболи

$$x^2 - y^2 = 1$$

в однорідних координатах має вигляд $u^2 - v^2 = z^2$.

Для того, щоб знайти нескінченно віддалені точки цієї кривої, покладемо $z = 0$, тобто знайдемо її точки перетину з нескінченно віддаленою прямою. Тоді $v = \pm u$, тобто одержуємо дві точки (1, 1, 0) і (1, –1, 0).

Так як $v = u$, або $v = -u$, то цими точками будуть $(u, u, 0)$ і $(u, -u, 0)$. Помноживши на $\frac{1}{u}$, отримаємо (1, 1, 0) і (1, –1, 0).

Такі точки називають *раціональними нескінченно віддаленими*.

Повернемося до підстановки Діофанта. Рівняння (2.5) в однорідних координатах записується так:

$$v^2 = a^2u^2 + buz + cz^2.$$

Точки $(1, a, 0)$ і $(1, -a, 0)$ є раціональними нескінченно віддаленими. Проведемо через першу з них пряму. Загальне рівняння прямої в однорідних координатах має вид

$$Au + Bv + Cz = 0.$$

Але наша точка належить цій прямій, тобто $A\cdot 1 + B\cdot a + C\cdot 0 = 0$. Отже, можна прийняти $A = ka$, $B = -k$, $C = km$, де m – довільне.

І тому рівняння шуканої прямої буде

$$au - v + mz = 0,$$

або в афінних координатах

$$y = ax + m.$$

Це і є підстановка Діофанта. Вона еквівалентна проведенню будь-якої прямої через раціональну нескінченно віддалену точку кривої (2.5). Але не слід вважати, що Діофант мав поняття про нескінченно віддалені точки кривої. Він просто використовував еквівалентні міркування. В історії математики відомо багато прикладів, коли основні факти деякої теорії були знайдені до виникнення самої теорії і до виникнення її основних понять [17].

Так було і в "Арифметиці" Діофанта, де деякі загальні положення алгебраїчної геометрії були відкриті і вивчені, але без геометричної інтерпретації у рамках чистої алгебри і теорії чисел. Зауважимо, що методи Діофанта для розв'язання невизначених рівнянь

$$y^2 = a^2x^2 + bx + c$$

співпадають з так званими "підстановками Ейлера". І там, і тут x і y виражаються за допомогою раціональних функцій від одного параметру за допомогою одних і тих же підстановок, у Діофанта з раціональними коефіцієнтами.

Розглянемо задачі.

1. Довести, що для кожного натурального числа s рівняння

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_s^2} = \frac{1}{x_s^2 + 1}$$

має нескінченно багато розв‘язків в натуральних числах $x_1, x_2, \dots, x_s, x_{s+1}$.

Розв‘язання.

Доведемо, що наше рівняння має для кожного натурального числа s один розв‘язок в натуральних числах x_1, x_2, …, x_s, x_{s+1}, так як помноживши всі ці числа на будь-яке натуральне число, ми також одержимо розв‘язок нашого рівняння.

Доведення проведемо індукцією по s.

Для $s = 1$ маємо розвозок $x_1 = x_2 = 1$.

Для $s = 2$ маємо розв‘язок

$$\frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2} = \frac{1}{12^2}.$$

Нехай тепер s – деяке натуральне число; припустимо, що наше рівняння має розв‘язок в натуральних числах

$$\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} + \dots + \frac{1}{t_s^2} = \frac{1}{t_s^2+1}.$$

Так як

$$\frac{1}{},$$

то натуральні числа $x_i = 12t_i$ для $i = 1, 2, \dots, s - 1$,

$$x_s = 15t_s,$$

$$x_{s+1} = 15t_s,$$

$$x_{s+2} = 15t_{s+1},$$

будуть задовольняти рівнянню:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_s^2} + \frac{1}{x_s^2+1} = \frac{1}{x_s^2+2},$$

що і треба було довести.

2. Довести, що система двох рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = z^2, \\ 2x^2 + y^2 = t^2, \end{cases}$$

не має розв‘язків в натуральних числах x, y, z, t.

Доведення.

Нехай система має розв‘язок в натуральних числах x, y, z, t. Припустимо, що $(x, y) = 1$, так як у випадку $(x, y) = d > 1$ ми поділили б обидві частини рівнянь на d^2. Отже, одне з чисел x і y є непарним, але два числа не можуть бути непарними, бо тоді ліві частини рівнянь при діленні на 4 давали б в остачі 3, що несумісне з тим, що вони є квадратами.

Нехай x – парне число, тоді y не може бут непарним, бо інакше ліва частина першого рівняння при діленні на 4 давала б в остачі 2, що є несумісним з тим, що воно є квадратом. Отже, в будь-якому випадку ми прийшли до протиріччя.

РОЗДІЛ 3
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ДІОФАНТОВИХ РІВНЯНЬ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

В шкільному кусі математики, особливо в класах з поглибленим вивченням математики, можна запропонувати факультативні заняття з теми “Елементи теорії діофантових рівнянь” за наступним планом.

План.

1. Коротка історична довідка про Діофанта та його творчість (0,5 год.).

2. Діофантові рівняння та деякі методи їх розв‘язання.

2.1. Означення діофантового рівняння (0,5 год.).

2.2. Діофантові рівняння першого степеня з цілими коефіцієнтами та методи їх розв‘язання (2 год.).

2.3. Поняття ланцюгового дробу та його застосування до розв‘язання діофантового рівняння першого степеня (1 год.).

2.4. Розв‘язання діофантового рівняння другого степеня в цілих додатних числах (частинний випадок) (1 год.).

2.5. Від “Арифметики” Діофанта до великої теореми Ферма (0,5 год.).

3.1. План-конспект факультативного заняття на тему “Коротка історична довідка про Діофанта та його творчість”

Мета: ознайомити учнів з життям та творчістю грецького математика Діофанта,
розвивати здібності учнів та їх інтерес до математики,
вчити етиці та культурі спілкування.

План заняття.

1. Організаційний момент – 2 хв.

2. Повідомлення теми та мети уроку – 3 хв.
3. Творче застосування узагальнених знань, навичок та вмінь – 20 хв.
4. Підсумки заняття – 3 хв.
5. Оцінювання – 2 хв.

Напис на дошці: Предмет математики такий серйозний, що корисно не нехтувати нагоди робити його трохи цікавішим.

Б. Паскаль.

Хід заняття.

1. Організаційний момент.

Після привітання перевіряється готовність учнів та класу до заняття. В журналі фіксуються відсутні.

2. Повідомлення теми та мети уроку.

Оголошуються прізвища доповідачів та порядок їх виступів.

3. Творче застосування узагальнених знань, навичок та умінь.

Сьогодні на уроці ви познайомитесь з життям і творчістю одного з вчених античності – Діофанта Олександрійського. Мені допоможуть учні, які приготували повідомлення з цієї теми.

Доповідачі виступають зі своїми повідомленнями. У кінці кожного виступу учні задають доповідачу запитання.

Учень 1. Після розпаду великої імперії Олександра Македонського Єгипет в кінці IV ст. до н.е. дістався її полководцю Птоломею Лагу, який переніс столицю в нове місто – Олександрію. Це місто і стало на багато років науковим і культурним центром древнього світу. Це було пов‘язано з тим, що Птоломеєм Лагом було засновано храм муз – Музейон – першу Академію наук, куди запрошувалися найбільш видатні вчені. Музейон пережив династію Птоломеїв. У перші століття до н.е. він прийшов в тимчасовий занепад у зв‘язку з римськими завоюваннями, але потім в перші століття н.е. він знов відродився і підтримувався римськими імператорами. І якщо в III-II ст. до н.е. Музейон славився іменами Евкліда, Аполлонія, Ератосфена, Гипарха, то в I-III ст. н.е. тут працювали такі вчені, як Герон, Птоломей і Діофант. Щоб вичерпати усе відоме про особистість Діофанта, наведемо одну з епіграм Палатинської антології, що дійшла до наших часів:

«Прах Диофанта гробница покоит,
дивись ей – и камень
мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком,
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругой он обручился.
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец,
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил.
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,
Тут и увидел предел жизни печальной своей».

Звідси було підраховано, що Діофант прожив 84 роки.

Але в який час жив Діофант залишилося загадкою. Нам не відомі ні час, коли він жив, ні попередники його, які працювали б в тій же області. Проміжок часу, коли міг жити Діофант становить майже пів тисячоліття.

Теон Олександрійський в своїх коментаріях до "Альмагесту" Птоломея привів уривок з твору Діофанта. Оскільки діяльність Теона припадає на другу половину IV ст. н.е., то Діофант не міг жити пізніше середини IV ст. З іншого боку, сам Діофант в своїй праці "О многоугольных числах» двічі згадує Гіпсікла, математика, який жив в Олександрії в середині II ст. до н.е. Таким чином, отримується проміжок в 500 років.

Звузити цей проміжок намагався П.Таннері, відомий історик науки. Він встановив, що Діофант жив в середині III ст. н.е. Це підтверджується тими обставинами, що "Арифметика" Діофанта присвячена Діонісію. Між тим з 231 по 247 р. на чолі Олександрійського християнського училища для юнацтва стояв Діонісій, який в 247 р. став єпископом Олександрійським. Тому тепер вважають, що Діофант жив в 250 р. Місто його життя – знаменита Олександрія, центр наукової думки елліністичного світу.

Учень 2. Досить загадковою є і творчість Діофанта. До наших днів дійшла лише частина математичного трактату "Арифметика" (6 книг з 13) і частина книги про многокутні (фігурні) числа.

"Арифметика" Діофанта – це збірник задач (їх всього 189), кожна з яких розв'язана, навіть декількома методами, або вказані необхідні пояснення.

В "Арифметиці" поміж викладення початків алгебри наведено багато задач, які зводяться до невизначених рівнянь різних порядків і вказані методи знаходження розв'язків таких рівнянь в раціональних додатних числах, також вперше з'являються терміни багатомірної геометрії. Для позначення невідомого і його степеня, рівності, обернених чисел та віднімання Діофант використовував скорочений запис слів. Так для назви степенів невідомого він застосовує геометричну термінологію: третій степінь називається кубом, корінь квадратний з числа називається його стороною. При множенні сум і різниць двох чисел застосував правило знаків. Праці Діофанта стали початком теоретико-числових досліджень П.Ферма, Л.Ейлера, К.Гауса та інших математиків.

Ім'я Діофанта названі два великих розділи теорії чисел – теорія діофантових рівнянь, теорія діофантових наближень.

В перший раз праці Діофанта були видані в латинському перекладі в 1575 р. Ім'ям Діофанта було названо кратер на видимій стороні Луни.

Учень 3. Епоха Діофанта ще мало вивчена. Однак, ідеї і методи Діофанта знайшли своє продовження в працях вчених Сходу і особливо Європи. Вже математики арабського Сходу використовують назву степенів невідомого, яку запропонував Діофант.

В XV-XVI ст. ці методи зустрічаються в Європі, куди вони могли потрапити як через Візантію, так і перейти від арабів.

Найбільш глибоко методами великого вченого володіли Франсуа Вієт (1540-1603) і П‘єр Ферма.

Багато працював в області невизначеного аналізу Леонард Ейлер та його послідовник К.Якобі.

Отже, роботи Діофанта тричі зробили визначний внесок у формування науки нового часу; при створенні буквеної алгебри в математиці Сходу і Європи, при становленні теорії чисел і вчення при невизначені рівняння в XVII-XVIII ст., і, нарешті, методи Діофанта стали основою для визначення додавання точок еліптичних кривих і побудови їх арифметики.

Вчитель. Ви прослухали доповіді своїх однокласників і дізнались багато цікавого з життя та діяльності одного з найбільш цікавих вчених античності Діофанта.

Повернемося до вірша, який ви чули на початку уроку і спробуємо розгадати, скільки ж років прожив Діофант. Для цього складемо рівняння.

Позначимо через x кількість років, які прожив Діофант. Тоді отримаємо рівняння виду

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+\frac{x}{2}+9=x$$

Розв‘яжемо його:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+\frac{x}{2}-x=9,$$

$$\frac{198x+252x-504x}{504}=-9,$$

$$-\frac{54x}{504}=-9, \frac{54x}{504}=9,$$

$$54x = 4536,\ x = 84.$$

Отже, $x = 84$, що свідчить про те, що Діофант прожив 84 роки.

4. Підсумки заняття.

Вчитель. Сьогодні на уроці ви познайомились з деякими аспектами життя і творчості одного з найбільш цікавих вчених античності – Діофанта. На наступних уроках ми продовжимо розбір деяких задач Діофанта і покажемо, що він не тільки поставив проблему розв‘язання невизначених рівнянь в раціональних числах, але і дав деякі загальні методи їх розв‘язання, які були зрозумілі і застосовані для розв‘язання нових задач Вієтом і Ферма.

5. Оцінювання.

Оцінки виставляються на основі підготовлених виступів учнів.

3.2. Плани-конспекти факультативних занять з теми “Діофантові рівняння та деякі методи їх розв‘язування”

3.2.1. План-конспект з теми “Означення діофантового рівняння”

Мета: ознайомити учнів з поняттям “діофантові рівняння”,
розвити здібності учнів та їх інтерес до математики шляхом розв‘язування нестандартних задач;
розвити логічне мислення, уважність, уяву, виховати самостійність, активність, допитливість та працелюбність.

План заняття.

1. Організаційний момент – 2 хв.
2. Викладання нового матеріалу – 25 хв.
3. Підсумки заняття – 3 хв.

Хід заняття.

1.Організаційний момент.

Після привітання перевіряю готовність класу та учнів до заняття. В журналі фіксуються відсутні.

2. Викладання нового матеріалу.

На попередньому уроці ви познайомились з епохою, в період якої творив Діофант. Сьогодні ми розглянемо рівняння, які отримали назву діофантових. Отже, запишемо означення діофантового рівняння.

Означення. Діофантові рівняння – це алгебраїчні рівняння з цілими коефіцієнтами, в яких шукаються цілі або раціональні розв‘язки.

Число невідомих в діофантових рівняння переважає число рівнянь. Тому їх іноді називають невизначеними.

Розглянемо деякі види діофантових рівнянь.

1. Прості діофантові рівняння.

Це рівняння виду

$$ax + by = 1,$$

де a і b – цілі взаємо прості числа.

Такі діофантові рівняння мають нескінчену кількість розв‘язків. Якщо x_0 і y_0 – один розв‘язок, то числа $x = x_0 + b_n$, $y = y_0 - a_n$ (n – будь-яке ціле) теж будуть розв‘язками. Розв‘язання таких рівнянь базується на наступних теоремах.

Теорема 1. Діофантове рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ першого степеня має розв‘язки в цілих числах тоді і тільки тоді, коли b ділиться на найбільший спільний дільник d чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Нехай діофантове рівняння $ax + by = 1$ має розв‘язки в цілих числах і пара цілих чисел u_0 і v_0 є будь-яким розв‘язком цього рівняння, d – найбільший спільний дільник чисел a і b. Тоді множина всіх розв‘язків в цілих числах даного рівняння є множиною пар u, v, де

$$u = u_0 - \frac{b}{d}t, v = v_0 + \frac{a}{d}t$$

для всіх $t \in N$.

Прикладом може бути таке рівняння $147x - 25y = 14$ або $2x + 3y = 20$.

2. Рівняння другого степеня.

Діофантом було розглянуто два види невизначених рівнянь другого порядку. Це рівняння $x^2 + y^2 = z^2$ та $x^2 - ay^2 = 1$.

Перше з них з‘явилося ще в стародавньому Вавилоні. Формули для його розв‘язання були знайдені піфагорійцями:

$$x = k^2 - 1,\ y = 2k,\ z = k^2 + 1.$$

Друге рівняння повністю розв‘язується в “Началах” Евкліда для випадку, коли $a = 2$, причому не в раціональних, а в цілих числах.

Щодо розв‘язання невизначених рівнянь другого порядку сформулюємо і запишемо наступне твердження: невизначене рівняння другого порядку від двох змінних або не має жодного раціонального розв‘язку, або має їх нескінчену кількість, причому в останньому випадку всі розв‘язки виражаються як раціональні функції параметру

$$x = \varphi(k),\ y = \psi(k),$$

де φ, ψ – раціональні функції.

Прикладом можуть бути рівняння $x^2 + 2y^2 = z^2$ або $2x^2 + y^2 = t^2$.

3. Рівняння більших степенів.

Такі рівняння мають вигляд:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_ny^n = 0, \text{ де } n \geq 3.$$

Встановлено, що якщо многочлен $a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_nt^n$ є звідним в полі раціональних чисел, то відповідне діофантове рівняння не може мати нескінченно багато розв‘язків.

Але ми не будемо розглядати всі ці рівняння детально. Зупинимося на діофантових рівняннях першого степеня з цілими коефіцієнтами та деякими методам їх розв‘язання.

3. Підсумки заняття.

Сьогодні на уроці ми розглянули різні види діофантових рівнянь та основні положення, за допомогою яких вони розв‘язуються. На наступних заняттях безпосередньо розв‘яжемо деякі з цих рівнянь.

3.2.2. План-конспект факультативного заняття на тему “Діофантові рівняння першого степеня з цілими коефіцієнтами та методи їх розв‘язання”

Мета: ознайомити учнів з діофантовими рівняннями першого степеня з цілими коефіцієнтами та одним із методів їх розв‘язання;

розвивати здібності учнів та їх інтерес до математики шляхом розв‘язання нестандартних задач;

вчити їх аналізувати та систематизувати ті знання, які вони отримують на уроках і черпають з додаткової літератури.

План заняття.

1. Організаційний момент – 2 хв.
2. Повідомлення теми та мети заняття – 5 хв.
3. Актуалізація опорних знань – 10 хв.
4. Узагальнення та повторення раніше здобутих знань – 20 хв.
5. Підсумок заняття – 3 хв.
6. Оцінювання – 5 хв.

Хід заняття.

1. Організаційний момент.

Після привітання перевіряється готовність класу та учнів до заняття. Фіксуються відсутні в журналі.

2. Повідомлення теми та мети уроку.

Темою уроку є “Діофантові рівняння першого степеня з цілими коефіцієнтами”.

3. Актуалізація опорних знань.

Перед тим, як перейти до безпосереднього розв‘язання діофантових рівнянь першого степеня, згадаємо:

1. Яке рівняння називається діофантовим?

Діофантові рівняння – це алгебраїчні рівняння з цілими коефіцієнтами, в яких шукаються цілі або раціональні розв‘язки.

2. Сформулюйте критерій розв‘язання діофантових рівнянь першого степеня в цілих числах.

Діофантове рівняння першого степеня $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ має розв‘язки в цілих числах тоді і тільки тоді, коли b ділиться на найбільший спільний дільник d чисел $a_1, a_2, \ldots , a_n$.

3. Дайте означення найбільшого спільного дільника кількох чисел.

Найбільшим спільним дільником кількох чисел називається найбільше натуральне число, на яке ділиться без остачі кожне з даних чисел.

4. Узагальнення та повторення раніше здобутих знань.

Відомості про найбільший спільний дільник (НСД) можна використати при розв‘язуванні діофантових рівнянь першого степеня, тобто рівнянь виду $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, де всі a_i і b – цілі числа і хоча б одне $a_i \neq 0$.

При цьому під розв‘язком в цілих числах діофантового рівняння розуміють будь-яку послідовність цілих чисел $v_1, v_2, \ldots, v_n$, для якої має місце числова рівність

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = b.$$

Розглянемо приклад.

Розв‘язати рівняння

$$10x_1 + 12x_2 - 15x_3 = 2$$

в цілих числах.

Розв‘язання.

Знайдемо НСД чисел (10, 12, 15).

1. Знайдемо НСД(10, 12) і вираз його через 10, 12.

$$12 = 10\cdot1 + 2,\ 10 = 2\cdot5.$$

Отже, НСД(10, 12) = 2 = 12 – 10 = 10·(–1) + 12·1.

2. Знайдемо НСД(2, 15) та його вираз через 2, 15.

$$15 = 2 \cdot 7 + 1.$$

НСД(2, 15) = 1 = 15 – 2·7.

Одержуємо

НСД(10, 12, 15) = 1 = 15 – (12 – 10)·7 = 10·7 + 12·(–7) + 15·1 =

= 10·7 + 12·(–7) – 15·(–1).

Використовуючи вираз одиниці через числа 10, 12, 15, маємо:

$$1 = 10 \cdot 7 + 12 \cdot (-7) - 15 \cdot (-1).$$

Маємо: 10·14 + 12·(–14) – 15·(–2) = 2.

Отже, послідовність цілих чисел 14, –14, –2 є одним з розв‘язків даного рівняння.

Вчитель. На попередньому занятті було з‘ясовано, якщо діофантове рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ ($n \geq 2$) має розв‘язки в цілих числах, то воно має нескінчену множину розв‘язків в множині цілих чисел.

Питання: як визначається множина усіх розв‘язків в цілих числах даного діофантового рівняння?

Відповідь: нехай діофантове рівняння $ax + by = c$ має розв‘язки в цілих числах і пара цілих чисел u_0, v_0 є будь-яким розв‘язком цього рівняння, d – найбільший спільний дільник чисел a і b. Тоді множиною всіх розв‘язків в цілих числах даного рівняння є множина пар u, v, де

$$u = u_0 - \frac{b}{d}t, v = v_0 + \frac{a}{d}t$$

для будь-яких $t \in N$.

Розв‘яжемо рівняння.

Знайти всі розв‘язки у множині цілих чисел рівняння:

$$147x - 25y = 14.$$

Розв‘язування.

Числа 147 і 25 взаємно прості, отже, НСД(147, 25) = 1. Знайдемо вираз 1 через ці числа:

$$147 = 25 \cdot 5 + 22,$$

$$25 = 22\cdot 1 + 3,$$

$$22 = 3\cdot 7 + 1,$$

$$1 = 22 - 3\cdot 7 = 22 - (25 - 22)\cdot 7 = (147 - 25\cdot 5)\cdot 8 - 25\cdot 7 = 147\cdot 8 - 25\cdot 47.$$

Отже,

$$14 = 147\cdot(8\cdot 14) - 25\cdot(47\cdot 14),\ 14 = 147\cdot 112 - 25\cdot 658$$

і тому пара чисел 112, 658 є розв‘язком даного рівняння. А усіма розв‘язками в множині цілих чисел даного рівняння є:

$$x = 112 + 25t,\ y = 658 + 147t\ (t\in N).$$

5. Підсумок заняття.

Отже, ми встановили, що:

1. Невизначене рівняння $ax + by = c$ з цілими коефіцієнтами має цілі розв‘язки.
2. З‘ясували, при яких умовах ці розв‘язки існують.
3. Розглянули один з методів знаходження цілих розв‘язків невизначеного рівняння, запропонований ще Діофантом.
4. Показали, якщо діофантове рівняння має хоч би один розв‘язок в цілих числах, то воно має і нескінчену кількість розв‘язків.

Домашнє завдання:

Розв‘язати в цілих числах невизначені рівняння:

1) $5x - 3y = 7$;
2) $3x + 4y = 13$;
3) $5x + 10y - 3z = 7$;
4) $6x - 5y + 12z = 2$;
5) $10x - 2y - 5z = 3$.

6. Оцінювання.

Учні отримують оцінки залежно від того, як пройшло заняття. Ці оцінки виставляються в журнал.

3.2.3. План-конспект факультативного заняття з теми “Поняття ланцюгового дробу та його застосування до розв‘язання діофантового рівняння першого степеня”

Мета: дати поняття ланцюгового дробу та його застосування до розв‘язання діофантового рівняння першого степеня,
розвивати творчі здібності учнів шляхом розв‘язання нестандартних рівнянь та їх інтуїцію,
формувати наполегливість, увагу та зосередженість.

План заняття.

1. Організаційний момент – 2 хв.
2. Повідомлення теми та мети заняття – 5 хв.
3. Викладання нового матеріалу – 25 хв.
4. Розв‘язування задач – 25 хв.
5. Підсумок заняття – 3 хв.

Хід заняття.

1. Організаційний момент.

Після привітання перевіряється готовність учнів та класу до заняття. Фіксуються в журналі відсутні.

2. Повідомлення теми та мети уроку.

Продовжимо розглядати методи розв‘язування діофантових рівнянь першого степеня. Тема заняття: “Ланцюгові дроби та їх застосування до розв‘язування невизначених рівнянь першого степеня”.

3. Викладення нового матеріалу.

В загальному випадку розв‘язання невизначеного рівняння першого степеня з двома невідомими, тобто рівняння

$$ax + by = c \qquad (1)$$

не становить інтерес, бо, надаючи одному з невідомих довільного значення, відразу дістаємо значення другого невідомого.

Набагато цікавішою і складнішою буде така задача: знайти цілі розв‘язки рівняння (1) при цілих a, b і c. Вона тісно пов‘язана з питанням подільності. Так, наприклад, при довільному цілому значенні y різниця $c - by$ буде цілою, але відповідне

$$x = \frac{c - \mathrm{by}}{a},$$

при цих значеннях не буде цілим; все залежить від подільності $c - by$ на a.

Доведемо такі два твердження.

1. Якщо права частина рівняння (1) не ділиться на найбільший спільний дільник $d = (a, b)$ коефіцієнтів лівої частини, то це рівняння не має розв‘язків в цілих числах.

Справді, при довільних цілих x і y ліва частина рівняння (1) ділиться на d, а права – не ділиться на d.

Розглянемо рівняння (1), в якому $(a, b) = 1$, бо якщо $(a, b) = d > 1$ і ділиться c на d, то скоротивши обидві частини рівняння (1) на d, одержимо, що у рівнянні $(a, b) =1$. Можна вважати також, що a і b не дорівнюють нулю. Коли хоча б один з коефіцієнтів дорівнював нулю, то ми мали б фактично одне рівняння з одним невідомим.

2. Якщо x_1 і y_1 є яка-небудь пара цілих значень x і y, що задовольняють рівняння (1), де $(a, b) = 1$, то загальний розв‘язок цього рівняння в цілих числах можна подати у вигляді

$$x = x_1 + x_1, y = y_1 - at,$$

де t – довільне ціле число.

Справді, за умовою маємо: $ax_1 + by_1 = c$.

Віднімаючи цю рівність почленно від рівняння (1) знайдемо:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0,$$

звідки

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{a}{b}.$$

Оскільки $(a, b) = 1$ за умовою, то

$$y - y_1 = -at,\ x - x_1 = bt,$$

де t – довільне ціле число, і остаточно маємо:

$$x = x_1 + bt,\ y = y_1 - at.$$

Отже, розв‘язування рівняння (1) в цілих числах зводиться до знаходження якого-небудь частинного розв‘язку цього рівняння.

Для знаходження частинного розв‘язку рівняння розглянемо розклад числа $\frac{a}{b}$ в ланцюговий дріб.

Означення. Вираз $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$ називається ланцюговим дробом, де $a_0, a_1, \dots, a_l$ – незалежні змінні.

Кожне раціональне число можна подати у вигляді деякого скінченого раціонального дробу єдиним способом

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} = [a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_\text{n}].$$

Означення. Ланцюговий дріб $[a_0,\ a_1, \dots,\ a_\text{s}]$, де $0 \le \text{s} \le n$ називають відрізком ланцюгового дробу $[a_0,\ a_1, \dots,\ a_\text{n}]$ або підхідним дробом порядку s.

Ланцюговий дріб має $n + 1$ підхідних дробів.

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}; \frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}; \frac{P_2}{Q_2} = \frac{a_2 P_1 + P_0}{a_2 Q_1 + a_0}; \dots$$

$$P_s = a_s P_{s-1} + P_{s-2};\ Q_s = a_s Q_{s-1} + Q_{s-2}.$$

4. Розв‘язання задач.

Розглянемо приклади.

1. Розкласти у ланцюговий дріб число $-\frac{602}{367}$.

Розв‘язання.

Маємо $-\frac{602}{367} = -2 + \frac{132}{367}$.

Виконуємо послідовне ділення:

$$\begin{array}{r|l} \_\,367 & 132 \\ 264 & 2 \end{array}$$

$$\_\,132 \;\big|\; 103$$

```
                              103 | 1
                        _ 103 | 29
                           87 | 3
                   _ 29 | 16
                     16 | 1
             _ 16 | 13
               13 | 1
       _ 13 | 3
         12 | 4
 _ 3 | 1
   3 | 3
   0
```

Отже,

$$-\frac{602}{367} = [–2; 2, 2, 1, 3, 1, 1, 4, 3].$$

2. Знайти підхідні дроби ланцюгового дробу [–2; 2, 2, 1, 3, 1, 1, 4, 3].

За схемою маємо:

a_s	–2	2	1	3	1	1	4	3
P_s	–2	–3	–5	–18	–23	–41	–187	–602
Q_s	1	2	3	11	14	25	114	367

Розкладемо $\frac{a}{b}$ в ланцюговий дріб.

Нехай $\frac{P_n}{Q_n}$ буде останнім підхідним дробом у цьому розкладі, тоді

$$\frac{a}{b} = \frac{P_n}{Q_n}.$$

За умовою, $(a, b) = 1$, і тому що будь-який підхідний дріб нескоротний, то $(P_n, Q_n) = 1$, отже, $P_n = a$ і $Q_n = b$. Скориставшись властивістю підхідних дробів, матимемо:

$$P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^{n-1}, \text{ або } aQ_{n-1} - bQ_n = (-1)^{n-1}.$$

Помноживши останню рівність на $(-1)^{n-1}c$ дістаємо:

$$a[(-1)^{n-1}cQ_{n-1}] + b[(-1)^{n-1}cP_{n-1}] = c.$$

Порівнюючи знайдену рівність з рівнянням $ax+by = c$, переконуємося, що $x_1 = (-1)^{n-1}cQ_{n-1}$, $y_1 = (-1)^{n-1}cP_{n-1}$ є частинним розв‘язком заданого рівняння.

Запишемо наступні дві властивості підхідних дробів.

1. Будь-який підхідний дріб – нескоротний.
2. При $n \geq 2$ виконується співвідношення

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}, \text{ або } aQ_{n-1} - bQ_n = (-1)^{n-1}.$$

Розглянемо приклад.

Розв‘язати рівняння в цілих числах

$$-117x + 343y = 119.$$

Розкладемо $\frac{117}{343}$ в ланцюговий дріб. Але для того, щоб навчитись розв‘язувати такі рівняння, потрібно запам‘ятати такі твердження (таблиця 1).

Твердження 1	Твердження 2	Твердження 2
Якщо права частина рівняння $ax + by = c$ не ділиться на найбільший спільний дільник $d = (a, b)$ коефіцієнтів лівої частини, то це рівняння не має розв‘язків у цілих числах.	Якщо x_1 і y_1 є парою цілих значень x і y, що задовольняє рівняння $ax+by = c$, де $(a, b) = 1$, та загальний розв‘язок цього рівняння в цілих числах можна подати у вигляді $x = x_1 + bt$, $y = y_1 - at$, де t – довільне ціле число.	Загальний розв‘язок в цілих числах невизначеного рівняння $ax + by = c$, де $(a, b) =1$, можна подати у вигляді: $x_1 = (-1)^{n-1}cQ_{n-1} + bt$, $y_1 = (-1)^{n-1}cP_{n-1} - at$, де t – довільне ціле число, а P_{n-1}, Q_{n-1} – чисельник і знаменник передостаннього підхідного дробу в розкладанні $\frac{a}{b}$.

$$\begin{array}{r|l} -343 & 117 \\ 234 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -117 & 109 \\ 109 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -109 & 8 \\ 104 & 13 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
-8 & 5 \\
5 & 1 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
-5 & 3 \\
3 & 1 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
-3 & 2 \\
2 & 1 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
-2 & 1 \\
2 & 2 \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$$\frac{117}{343} = [0; 2, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 2]$$

		0	2	1	13	1	1	1	2
P	1	0	1	1	14	15	29	44	117
Q	0	1	2	3	41	44	85	129	387

У цьому випадку $n = 7$, тому

$$P_{n-1} = P_6,\ Q_{n-1} = Q_6;\ \frac{P_6}{Q_6} = \frac{44}{129}.$$

Одним із частинних розв‘язків рівняння буде:

$$-x_0 = (-1)^6 \cdot 119 \cdot 129 = 15351,$$

$$-y_0 = (-1)^7 \cdot 119 \cdot 44 = -5236,$$

$$-x = (-1)^6 \cdot 119 \cdot 129 + 343t = 15351 + 343t;$$

$$x = -15351 - 343t,\ y = -5236 - 117t.$$

Загальний розв‘язок даного рівняння:

$$x = -15351 - 343t,\ y = -5236 - 117t.$$

2. Розв‘язати рівняння $25x + 7y = 1$ у цілих числах біля дошки.

а) $\frac{25}{7}$ розкладемо в ланцюговий дріб:

$$\frac{25}{7} = [3; 1, 1, 3];$$

б) знаходимо підхідні дроби:

	3	1	1	3
P_n	3	4	7	25
Q_n	1	1	2	7

$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{25}{7}$, використовуючи властивість $P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}$ для ланцюгових дробів маємо:

$$25 \cdot 2 - 7 \cdot 7 = 1, \text{ тобто } 25 \cdot 2 + 7 \cdot (-7) = 1,\ x = 2,\ y = -7.$$

5. Підсумки заняття.

Отже, діофантові рівняння першого степеня в сучасній математиці часто відносять до лінійних алгебраїчних рівнянь, розв‘язки яких відшукуються серед цілих чисел.

Домашнє завдання: розв‘язати за допомогою поняття ланцюгового дробу наступні рівняння:

1. $23x + 15y = 19$.
2. $17x - 16y = 31$.
3. $47x - 105y = 4$.
4. $91x - 28y = 35$.

3.2.4. План-конспект факультативного заняття з теми “Розв‘язання діофантового рівняння другого степеня в цілих додатних числах (частинний випадок)”

Мета:	ознайомити учнів з розв‘язанням діофантового рівняння другого степеня в цілих додатних числах, формувати вміння переносити набуті знання у нові ситуації, підтримувати в учнів бажання займатися математикою.

План заняття.

1. Організаційний момент – 2 хв.
2. Повідомлення теми заняття – 3 хв.
3. Викладення нового матеріалу – 20 хв.
4. Підсумки заняття – 5 хв.

Хід заняття.

1. Організаційний момент.

Після привітання перевіряється готовність класу та учнів до заняття. В журналі фіксуються відсутні.

2. Повідомлення теми заняття.

Темою заняття є "Розв'язання діофантових рівнянь другого степеня в цілих додатних числах".

Зокрема, розглянемо частинний випадок: $x^2 + y^2 = z^2$.

3. Викладання нового матеріалу.

Поряд з невизначеними рівняннями першого степеня розглянемо питання про розв'язність в цілих числах невизначених рівнянь більш високих степенів.

Розглянемо розв'язок рівняння

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (1)$$

у взаємно простих натуральних числах x, y, z.

Нехай $(x, y, z) = 1$, і тому у випадку $(x, y, z) = d > 1$ обидві частини рівняння (1) поділимо на d^2.

Якщо розглядати трійку чисел, що задовольняють (1), умова взаємної простоти означає навіть попарно взаємну простоту, бо якби, наприклад, $(x, y) = d > 1$, то z/d, $(x, y, z) \neq 1$.

Доведемо, що рівнянню (1) задовольняють тільки такі трійки взаємно простих натуральних чисел x, y, z, що:

1) одне з чисел x і y парне, а друге непарне;
2) при парному x і непарному y, $x = 2m \cdot n$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 - n^2$, де $m > n > 0$, одне з чисел m, n парне, а інше – непарне.

Доведемо це.

Доведення.

Необхідність. Якщо (1) виконується для натуральних чисел x, y, z і $(x, y, z) = 1$, то x і y не можуть бути одночасно ні парними, ні непарними.

Перший випадок випадає, так як числа x, y, z попарно взаємно прості. У другому випадку $(x^2 - 1)$ і $(y^2 - 1)$ ділиться на 4, а при діленні на 4 дає остачу 2, що неможливо, оскільки квадрат при діленні на 4 не може давати остачі 2.

Отже, одне з чисел x і y повинно бути парним, а інше – непарним.

Нехай x буде парним, тоді із (1) в наслідок непарності y, z

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{z+y}{2} \cdot \frac{z-y}{2},$$

де $\left(\frac{z+y}{2}, \frac{z-y}{2}\right) = 1$, так як інакше $(y, z) \neq 1$ всупереч умові.

Але якщо добуток двох взаємно простих чисел дорівнює квадрату, то кожний з цих співмножників дорівнює квадрату, тому існують натуральні числа m і n такі, що

$$\frac{x}{2} = m \cdot n, \frac{z+y}{2} = m^2, \frac{z-y}{2} = n^2,$$

так що $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$.

При цьому $(m, n) = 1$, де одне з чисел m, n парне, а друге – непарне, інакше були б обидва парними і $(x, y, z) \neq 1$.

Достатність. Якщо натуральні числа x, y, z мають вигляд $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$, то для будь-яких натуральних m, n виконується (1), так як

$$(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2.$$

Якщо $(m, n) = 1$ і при цьому m і n мають різну парність , то y і z – непарні, і крім того, $(y, z) = 1$, інакше із $(y, z) = d > 1$ випливало б

$$\left(\frac{z+y}{2}, \frac{z-y}{2}\right) = d > 1,$$

або $(m^2, n^2) = d > 1$, а це суперечить тому, що $(m, n) = 1$.

Отже, $(y, z) = 1$, а тому $(x, y, z) = 1$. Так як x – число парне і нами встановлено також, що y – непарне, то достатність умови доведено.

Отже, і все твердження доведено.

Приклад.

Для $m = 7$, $n = 4$ одержуємо $x = 56$, $y = 33$, $z = 65$.

Розв‘яжемо задачу.

Довести, що система двох рівнянь $x^2 + y^2 = z^2$, $2x^2 + y^2 = t^2$ не має розв‘язків в натуральних числах x, y, z, t.

Розв’язання.

Нехай наша система має розв‘язки в натуральних числах x, y, z, t. Припустимо, що $(x, y) = 1$, так як у випадку $(x, y) = d > 1$ ми розділили б дві частини наших рівнянь на d^2. Отже, одне з чисел x і y є непарним. Але непарними не можуть бути два числа, так як тоді ліві частини наших рівнянь при діленні на 4 давали б в знаменнику 3 що несумісне з тим, що вони є квадратами.

Але якщо, наприклад, x – парне число, то y не може бути непарним, так як тоді ліва частина першого рівняння при діленні на 4 давала б в знаменнику 2 що несумісне з тим, що вона є квадратом. Таким чином, в будь-якому випадку ми прийдемо до протиріччя.

4. Підсумки заняття.

Отже, сьогодні на уроці ви познайомилися ще з одним видом діофантових рівнянь, а саме з рівняннями першого степеня. З рівняннями вищих степенів ви зустрінетесь при подальшому вивченні математики.

Домашнє завдання: довести, що кожне просте число вигляду $4k + 1$ є довжиною гіпотенузи прямокутного трикутника, сторони якого виражаються натуральним числами.

3.2.5. План-конспект факультативного заняття з теми “Від “Арифметики” Діофанта до великої теореми Ферма”

Мета: ознайомити учнів з великою теоремою Ферма,
розвити здібності учнів та їх інтерес до математики,
навчити осмислювати зміст з метою послідовного застосування в практичній діяльності.

План заняття.

1. Організаційний момент – 2 хв.
2. Повідомлення теми заняття – 3 хв.
3. Викладання нового матеріалу – 20 хв.
4. Підсумки заняття – 3 хв.
5. Оцінювання – 2 хв.

Хід заняття.

1. Організаційний момент.

Після привітання перевіряються готовність класу до заняття. В журналі фіксуються відсутні.

2. Повідомлення теми заняття.

Тема заняття є досить цікавою і загадковою, а саме ви ознайомитесь з розвитком теорії невизначених рівнянь та великою теоремою Ферма.

3. Викладання нового матеріалу.

Історична довідка.

Учень. Ферма П‘єр (17.8.1601, Бомон-де Лонань, – 12.1.1665, Кастр) – французький математик. За фахом юрист, з 1631 року був радником парламенту в Тулузі. Автор багатьох великих праць, більшість з яких було видано після смерті Ферма, його сином під назвою “Різні математичні твори”.

Ферма є одним з творців теорії чисел, де з його ім‘ям пов‘язані дві відомі теореми: велика теорема Ферма і мала теорема Ферма.

В області геометрії Ферма в більш систематичній формі, ніж Р.Декарт, дав метод координат та рівняння прямої і кривих 2-ого порядку і намітив доведення положення про те, що всі криві ІІ-го порядку – конічні січні. В області методу нескінченно малих дав загальне правило диференціювання показникової функції, розповсюдив на будь-які раціональні показники.

Довів в загальному вигляді правило інтегрування показникової функції. Праці Ферма мали великий вплив на подальший розвиток математики. В області фізики з ім‘ям Ферма пов‘язане становлення варіаційного принципу геометричної оптики.

Вчитель. Після Діофанта найбільший вклад в теорію невизначених рівнянь вніс Ферма. Ферма поставив ряд найважливіших задач діофантового аналізу та розробив деякі його методи. Спадщина Ферма служила відправним пунктом для досліджень Ейлера, Лагранжа, Лежандра, Гауса, Коші, Куммера та багатьох інших математиків.

Вона сприяла виникненню та розвитку теорії алгебраїчних чисел – однієї з найбільш важливих галузей сучасної теорії чисел. В свою чергу, алгебраїчні числа сприяли розширенню кола задач і засобів діофантового аналізу. Зокрема, виникла задача розв‘язання невизначених рівнянь в цілих алгебраїчних числах того чи іншого числового поля. В жодному розділі математики так гостро не відчувається недостатність методів, як у діофантовому аналізі.

Так, ще не розв‘язана проблема Ферма, або велика теорема Ферма, що будь-яке рівняння $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$ не має розв‘язків в області натуральних чисел, хоч для теорему доведено Л.Ейлером (1770), для $n = 5$ – П.Діріхле і Л.Лежандром (1825), для $n = 7$ – Т.Ламе (1839).

Питання про знаходження алгоритму, що дозволяє для кожного діофантового рівняння з‘ясувати, чи має воно цілочисленний розв‘язок, не вирішено і до наших часів.

Розглянемо задачу. Частинний випадок великої теореми Ферма.

Нехай a, b і n – додатні цілі числа такі, що $a >$ b, $n > b$ і $a^n + b^n = c^n$. Довести, що число c не може бути цілим.

Розв‘язання.

Так як $a^n + b^n = c^n$, то $a < c$. Крім того

$$(a^n+1) = a^n + na^{n-1} + \ldots,\ b < n \text{ і } b^{n-1} < a^{n-1}.$$

Таким чином,

$$a^n + b^n < (a^n+1)^n \text{ або } c^n < (a^n+1)^n,$$

звідки $a < c < a+1$.

Так як c лежить між двома послідовними цілими числами, то c не може бути цілим числом, що і треба було довести.

4. Підсумки заняття.

1. “Арифметика” Діофанта відіграла велику роль для розвитку теорії чисел. Її вплив став особливо відчутним в XVII ст. після появи латинського перекладу, що був опублікований в Парижі в 1621 р. На полях екземпляру цього перекладу Ферма залишив свої знамениті примітки. Назви “діофантів, або невизначений, аналіз” слід віднести саме до цього періоду. В цей же час були висунуті вимоги розвитку невизначених рівнянь в цілих числах як найбільш типової задачі діофантового аналізу.
2. Ферма поставив ряд найважливіших задач діофантового аналізу та розробив деякі його методи, сформулював свою велику теорему.
3. Актуальною проблемою і для нашого часу є проблема створення алгоритму розв‘язання невизначених рівнянь в цілих числах.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було систематизовано матеріал щодо теорії діофантових рівнянь та теореми Ферма для показника 4; досліджено проблему розв‘язності діофантових рівнянь другого степеня та деякі загальні методи їх розв‘язання, а також розроблено добірку уроків з теорії діофантових рівнянь для факультативних занять з математики в шкільному курсі математики. Так, можна відмітити наступні важливі положення.

Поряд з методами Діофанта за допомогою сучасних методів, пов‘язаних з діофантовим аналізом, встановлено критерій існування скінченої та нескінченої кількості розв‘язків діофантових рівнянь виду $a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_ny^n = 0$, де $n \geq 3$, $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, де a, b, c, d, e, f – цілі чисел, рівняння Пелля: $x^2 - Ay^2 = 1$ $(A > 0)$, A – неповний квадрат. Розглянуто проблему розв‘язності діофантових рівнянь в роботах Ферма та Ейлера.

Проблема розв‘язності діофантових рівнянь є проблемою знаходження алгоритму для розпізнавання за будь-яким діофантовим рівнянням, чи має воно розв‘язок. Істотнім в постановці проблеми є вимога знайти універсальний метод, який повинен бути придатний для будь-якого рівняння. Такий метод дозволив би розв‘язувати і систему діофантових рівнянь, бо система $p_1=0, \ldots, p_k = 0$ еквівалентна рівнянню $p_1^2 + \ldots + p_k^2 = 0$.

Питання про існування алгоритму, який дозволяє розпізнавати розв‘язність діофантових рівнянь в раціональних числах, еквівалентне питанню про існування алгоритму, який дозволяє розпізнавати розв‘язність однорідних діофантових рівнянь в цілих числах. Ця важлива проблема поки що залишається відкритою і мало дослідженою

У зв’язку з тим, що досі ще не розв‘язана відома проблема Ферма; не вирішено питання про існуванні алгоритму для розпізнавання розв‘язності діофантових рівнянь в раціональних числах, отже, і в цілих числах, то ця важлива проблема поки залишається відкритою і мало дослідженою. Виходячи з актуальності проблеми, доцільно ознайомити учнів закладів середньої освіти з існуванням діофантових рівнянь, деякими методами Діофанта їх розв’язання, особливо в класах з поглибленим вивченням математики, на факультативних заняттях, поставити проблемні питання, над якими могли б працювати талановиті учні. З цією метою в роботі наводиться планування такого факультативу і розроблені плани-конспекти занять.

.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акс Дж.. Кохан С. Діофантові проблеми над локальними полями. //Математика, 1965, 9:5. – С.3-27.

2. Алгебра и теория чисел: Избранные доклады семинара Бурбаки. – М.: Мир, 1987. – 368 с.

3. Алексеева В.М. Избранные задачи. – М.: Мир, 1977. – 164 с.

4. Арифметика. Энциклопедия элементарной математики. – Т.1. – М.: Гостехиздат, 1951. – 642 с.

5. Айерлэнд К. Классическое введение в теорию чисел. – М.: Мир, 1987. – 462 с.

6. Башмакова И.Г., Славутин Е.И. История диофантового анализа (от Диофанта до Ферма). – М.: Мир, 1984. – 244 с.

7. Башмакова И.Г. Диофант и диофантовые уравнения. – М.: Наука, 1972. – 218 с.

8. Бевз Г.П. Методика розв‘язування алгебраїчних задач. – К.: Рад. шк., 1975. – 240 с.

9. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. – М.: Наука, 1964. – 348 с.

10. Боро В., Цагир Д. и др. Живые числа. – М.: Мир, 1985. – 126 с.

11. Ван-дер-Варден Б.Л. Алгебра. – М.: Наука, 1979. – 568 с.

12. Ван-дер-Варден Б.Л. Пробуждающая наука: Пер. с голл. – М.: Мир, 1959. – 340 с.

13. Васильев А.В. Целое число. – Петербург, 1919.

14. Вейль А. Абстрактная алгебраическая геометрия в сравнении с классической. //Математика, 1958, 2:4. – С.59-66.

15. Вейль А. Теория чисел и алгебраическая геометрия. //Математика, 1958, 2:4. – С.49-58.

16. Венков Б.А. Элементарная теория чисел. – М.-Л.: ОИТИ, 1937.

17. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1969. – 238 с.

18. Воронин С.М. Простые числа. – М.: Знание, 1978. – 64 с.

19. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Розв‘язування алгебраїчних задач: Посібник для вчителів. – К.: Рад. шк., 1991. – 203 с.

20. Гребенча М.К., Ляпин С.Е. Арифметика. – М.: Учпедгиз, 1952. – 314 с.

21. Давенпорт Г. Высшая арифметика. – М.: Наука, 1965. – 364 с.

22. Диксон Л.Е. ведение в теорию чисел. – Тбилиси, 1941.

23. Диофант. Арифметика и книга о многоугольных числах. – М.: Наука, 1974. – 196 с.

24. Дополнительные главы по курсу математики 7-8 классов для факультативных занятий / Составитель К.П.Сикорский. – М.: Просвещение, 1979. – 206 с.

25. Лоповок Л.М. Математика на досуге: Кн. для учащихся сред. шк. возраста. – М.: Просвещение, 1988. – 159 с.

26. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. – М.: Просвещение, 1974. – 526 с.

27. Михелович Ш.Х. Теория чисел. – М.: Высшая школа, 1967. – 358 с.

28. Окунев Л.Я. Краткий курс теории чисел. – М.: Учпедгиз, 1975. – 426 с.

29. Оре О. Приглашение в теорию чисел. – М.: Наука, 1980. – 128 с.

30. Перельман В.И. Занимательная алгебра. – М.: Наука, 1986. – 206 с.

31. Постников А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел. – М.: Наука, 1971. – 416 с.

32. Проблемы теории диофантовых приближений. – М.: Мир, 1974. – 214 с.

33. Прохоров Ю.В. Математический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1988. – 518 с.

34. Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. – М.: Просвещение, 1968. – 262 с.

35. Серпинский В. Пифагоровы треугольники: Пер. с польского. – М.: Учпедгиз, 1959. – 248 с.

36. Сивошинский И.Х. Задачи по математике для внеклассных занятий (9-10 класс). – М.: Просвещение, 1968. – 486 с.

37. Фішман І.М. Методологічні питання шкільного курсу математики: Посібник для самоосвіти. – К.: Рад. шк., 1985. – 214 с.

38. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. /Успехи математических наук. – 24, №6. – 1969.

39. Цейтен Г.Г. История математики в древности и в средние века. – ГОНТИ, 1938.

40. Касселс Дж. Диофантовы уравнения со специальным рассмотрением эллиптических кривых. //Математика. – №1-2. – 1968.