МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

Виконав: студент 2 курсу, 221М групи
Спеціальності 014 Середня освіта
Спеціалізація 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)»
Лапік Семен Володимирович
Керівник кандидат фізико-математичних наук, доцент Плоткін Яків Давидович
Рецензент вчитель-методист, директор Херсонської загальноосвітньої школи I-III ступенів № 13 Херсонської міської ради
Перегняк Ганна Євгенівна

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Більшість задач класичної математичної фізики зводиться до крайових задач диференціальних також лінійних диференційованих рівнянь – рівнянь математичної фізики. Основними математичними засобами дослідження цих задач виступають теорія диференціальних рівнянь (включаючи близькі галуз – інтегральні рівняння також варіаційне числення), теорія функцій, функціональний аналіз, теорія ймовірностей, наближені обчислення також обчислювальна математика.

Однимизіперших, хто займався дослідженням лінійних диференційованих рівнянь були Вольтерр [62] також Буницький Е. [29]. в своїх роботах вони переважно розглядали звичайні лінійні лінійних диференційованих рівняння, в яких похідні від шуканої функції містилися, головним чином, під знаком інтеграла. Основним методом знаходження розв'язку таких рівнянь виступав метод інтегрування частинами, також дозволяло одержувати одинзічастинних випадків таких рівнянь – лінійні інтегральні рівнянннязіфіксованими межами інтегрування (інтегральні рівняння типу Фредгольма). Пізніше Бусчем В. [61] розглянув можливість інтегрування таких рівнянь з допомогою методів функціонального аналізу, звідси використовуючи поняття диференціального оператора. звідси дозволило значно спростити задачу дослідження лінійного лінійних диференційованих рівняння та встановити безпосередній зв'язок між розв'язками вихідного рівняння також розв'язками лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма.

Дальніший розвиток з теорією лінійних диференційованих рівнянь обумовлений значними результати в цьому напрямку таких дослідників,абосаме Тамаркін Я.Д. [56], Некрасов О.І. [43], Назаров М.М. [42], Биков Я.В. [5], Соболев С.Л. [55], Виграненко Т.І. [15], Манжиров Д. [38], Владимиров В.С. [18] також інші.автори запропонували оригінальні методи дослідження також розв’язування різних класифікацій лінійних диференційованих рівнянь.

З різних класифікацій лінійних диференційованих рівняньзічастинними похідними найбільш повно вивчені лінійні також нелінійні регулярні лінійних диференційованих рівнянь, досліджені умови існування також єдиності розв'язку, також умови якісної поведінки розв’язків різноманітних граничних задач. Проте деякі питання залишаються актуальними та в наш час.

Основна ***мета*** дослідження полягає в встановленні зв’язку між розв'язками лінійних диференційованих рівняньзісталими коефіцієнтами також відповідних характеристичних рівнянь.

Об’єктом дослідження виступає загальна теорія лінійних диференційованих рівнянь,або***предметом*** дослідження – клас лінійних лінійних диференційованих рівняньзісталими коефіцієнтами.

Виходячизімети, визначені основні ***завдання*** дослідження, звідси:

- дослідження питання стосовно існування також побудови розв'язку лінійного диференційованого рівняннязіпочатковими умовами;
- побудова розв'язку лінійних диференційованих рівняннязісталими коефіцієнтами в випадках існування простих диференціальних, кратних дійсних також комплексних коренів відповідного характеристичного рівняння;
- дослідження методів побудови розв'язку лінійних диференційованих рівняння спеціального типу.

Основні ***методи***, також використовувалися в дослідженні – звідси метод диференціювання, метод інтегрування частинами, також метод Лагранжа варіації довільних сталих.

Гіпотеза дослідження визначається наступним чином: розв'язок лінійних диференційованих рівняннязісталими коефіцієнтами виражається через корені відповідного характеристичного рівняння.

Робота складаєтьсязітрьох основних розділів. в першому розділі наведено деякі теоретичні відомостізіза теорією інтегральних рівнянь, зокрема, наведено класифікацію також визначено умови існування розв'язків для лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма.

Другий розділ присвячений питанню стосовно умов існування розв'язку для лінійного лінійних диференційованих рівняннязіпочатковими умовами. Зараз розглянуто умови існування розв'язку такого типу рівнянь також наведено основні методи відшукання його такі, як метод Фредгольма також методи диференціювання також інтегрування. Третій розділ роботи є основним та містить розв’язання основної задачі дослідження. В ньому розкривається питання зв’язку між розв'язками лінійних диференційованих рівняньзісталими коефіцієнтами також відповідних характеристичних рівнянь також визначено вид цього розв'язку в випадках існування простих диференціальних, кратних дійсних також комплексних коренів відповідного характеристичного рівняння.

Матеріал роботи може бути використаний викладачами також студентами фізико-математичних факультетів вищих навчальних закладів.

РОЗДІЛ 1
ДЕЯКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ З З ТЕОРІЕЮ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Інтегральні рівняння також їх класифікація

Інтегральним рівнянням називається рівняння, яке містить невідому функцію під знаком інтеграла.

Наприклад,

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt + f(x), \;\; x \in [a,b], \tag{1.1}$$

також

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt + f(x). \tag{1.2}$$

Зараз $K(x,t)$, $f(x)$ – задані функції, λ – комплексний параметр, $\varphi(x)$ – шуканий розв'язок. Функції $K(x,t)$ та $f(x)$ називаються *ядром* та *вільним членом* інтегрального рівняння.

Інтегральні рівняння класифікуються таким чином:

1) Якщо шукана функція міститься тільки під знаком інтеграла, це рівняння називається *інтегральним рівнянням першого роду*. Такими є рівняння

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{1.3}$$

також

$$\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x). \tag{1.4}$$

Рівняння (1.1) та (1.2), в яких шукана функція міститься також та поза інтегрального доданку називається *рівнянням другого роду*.

2) Якщо межі інтегрування фіксовані, це інтегральне рівняння називається *рівнянням Фредгольма* (випадок (1.1) та (1.2)). Якщо ж межі інтегрування змінні (випадок (1.3) та (1.4)), це інтегральне рівняння називається *рівнянням Вольтерра*.

Формально рівняння Вольтерра можна розглядати як частинний випадок рівняння Фредгольма, поклавши, наприклад, в (1.2.)

$$K(x,t) \equiv 0$$

при $t > x$. Однак фізичні задачі, які приводять до рівнянь Вольтерра та Фредгольма, також властивості розв'язків цих рівнянь істотно різні. Тому рівняння Вольтера виділяють в особливий тип рівнянь.

3) Рівняння (1.1)-(1.4) називаються *однорідними*, якщо

$$f(x) \equiv 0.$$

В противному випадкурівняння називаються *неоднорідними*.

Розв'язком інтегрального рівняння називається функція $\varphi(x)$, що при підстановці в саме рівняння, перетворює його в тотожність по x.

Однимизіперших відомих інтегральних рівнянь були так звані парні інтегральні рівняння [13]. звідси пари рівнянь-рівностей, також визначають відповідні типи нескінчених інтегральних перетворень, як, наприклад, перетворень Фур'є:

$$Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} y(x) dx, \quad t \in R,$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} Y(t) dx.$$

Парнимирівняння називають тому, також якщо в однійзітаких рівностей під знаком інтеграла множник ядра інтегрального перетворення вважати невідомим (саме в цьому випадкурівності є інтегральними рівняннями), це інша парна до неї рівність є формулою, з якою визначається шуканий розв'язок рівняння.

Розглянемо деякі задачі, розв’язки яких знаходяться з допомогою інтегральних рівнянь.

1. *Задача Абеля* – звідси перша задача, що привела до розв’язання інтегральних рівнянь [23]. Вона полягає в наступному: матеріальна точка,

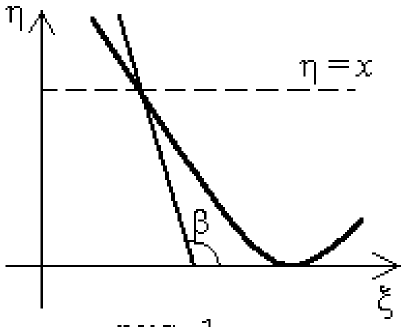


рис. 1

на яку діє сила тяжіння, рухається в вертикальній площині (ξ,η) по деякій кривій. Необхідно визначити цю криву так, також б матеріальна точка, розпочавши свій рух без початкової швидкості в точці кривої зі ординатою x, досягла осі $O\xi$ з час $t = f_1(x)$, де $f_1(x)$ – задана функція.

Розв’язання.

Абсолютна величина швидкості точки, також рухається обчислюється з формулою

$$v = \sqrt{2g(x-\eta)}\,.$$

Нехай $\beta = \beta(\eta)$ – кут нахилу дотичної до осі $O\xi$ (рис. 1). Тоді отримаємо :

$$\frac{d\eta}{dt} = -\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta\,.$$

Також

$$dt = -\frac{d\eta}{\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta}\,.$$

Проінтегруємо останній вираз від 0 до x та покладемо

$$\frac{1}{\sin\beta} = \varphi(\eta)\,.$$

Одержимо:

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}}\,d\eta = -\sqrt{2g}\,f_1(x)\,. \qquad (1.5)$$

Нехай

$$f(x) = -\sqrt{2g}\, f_1(x).$$

Тоді (1.5) запишеться в вигляді

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}}\, d\eta = f(x), \tag{1.6}$$

де $\varphi(\eta)$ – невідома,або $f(x)$ – відома функції. Рівняння виду (1.6) називають *інтегральним рівнянням Абеля*. Воно є частинним випадком лінійного інтегрального рівняння Вольтерра 1-го роду.

З (1.6) одержимо $\varphi(\eta)$ та складемо рівняння шуканої кривої. Дійсно,

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{\sin\beta},$$

тоді

$$\eta = \Phi(\beta).$$

Далі

$$d\xi = \frac{d\eta}{\mathrm{tg}\beta} = \frac{\Phi'(\beta)d\beta}{\mathrm{tg}\beta}, \;\; \xi = \int \frac{\Phi'(\beta)}{\mathrm{tg}\beta} d\beta = \Phi_1(\beta).$$

Таким чином, крива визначається параметричними рівняннями:

$$\xi = \Phi_1(\beta),\; \eta = \Phi(\beta).$$

Зокрема, коли $f(x) = C = \mathrm{const}$, такою кривою є циклоїда.

Рівняння Абеля є однимзіінтегральних рівнянь, до яких зводиться постановка конкретної задачі механіки чи фізики, не використовуючи диференціальні рівняння.

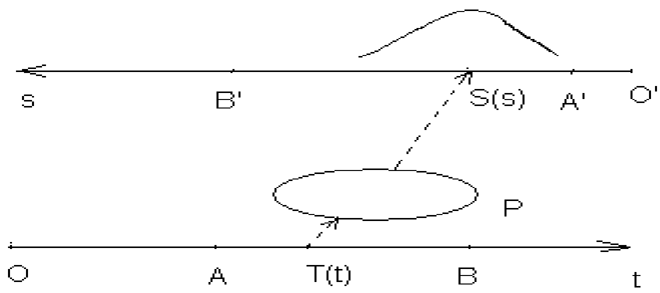
Рівняння

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{(x-t)^{\alpha}}\, dt = f(x), \tag{1.7}$$

де α – стала, $0 < \alpha < 1$, називається *узагальненим рівнянням Абеля*. Будемо вважати, також функція $f(x)$ має неперервну похідну на деякому відрізку $[0,a]$.

2. *Задача про розподіл яскравості світла*. Згідно із законом геометричної оптики [26], зображення об'єкта подібно до самого об'єкта, таким чином, відрізок відображується в відрізок, при цьому довжина відрізків в загальному випадку різна.

В заданій системі лінз приладу *P* оберемо масштаб на осях *Ot* та *Os* так, такожб для двох взаємно відповідних точок $T(t)$ та $S(s)$ мала місце рівність $s = t$.



Точка $T(t)$ об'єкту AB, також світиться, впливає на освітлення всього зображення $A'B'$, причому найбільша яскравість освітлення в точці $S(s)$. Таким чином, інтенсивність освітлення К є функцією від s також t, тобто $\mathrm{K} = \mathrm{K}(s,t)$.

Нехай $\eta(t)$ – щільність яскравості об'єкта. Тоді величина $\eta(t)\mathrm{K}(s,t)\Delta t$ визначає наближене значення яскравості зображення в точці $S(s)$, який породжується елементом об'єкта Δt, також світиться. В даному прикладі величина $\mathrm{K}(s,t)$ визначається властивостями оптичного приладу *P*.

Яскравість зображення в точці $S(s)$, згідно з принципом суперпозиції [31], можна наближено подати в вигляді:

$$\sum_k \eta(t_k)\mathrm{K}(s,t_k)\Delta t_k \,. \tag{1.8}$$

Нехай довжина відрізка AB дорівнює l. Знайдемо границю (1.8) при $\max \Delta t_k \to 0$ та дістанемо розподіл яскравості зображення в вигляді

$$\varphi(s) = \int_0^l K(s,t)\eta(t)dt\,. \tag{1.9}$$

В залежності від постановки фізичної задачі із (1.9) отримаємо різні типи інтегральних рівнянь. Функція $K(s,t)$ є відомою функцією, також визначається властивостями оптичного приладу. Якщо щільність яскравості зображення $\varphi(s)$ відома,абопотрібно знайти розподіл яскравості об’єкта, яке надає задану яскравість зображення, тоді $\varphi(s)$ – задана функція, $\eta(s)$ – шукана. Отже (1.9) – інтегральне рівняння Фредгольма першого роду.

У випадку, коли зображення таке, також крім геометричної подібності, яскравість зображення також подібна яскравості об’єкта, це $\varphi(s)$ та $\eta(s)$ пропорційні, тобто

$$\varphi(s) = \frac{1}{\lambda}\eta(s),$$

і (1.9) перетворюється в однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду:

$$0 = \varphi(s) - \lambda\int_0^l K(s,t)\varphi(t)dt\,,$$

де $\varphi(s)$ – шукана функція. При цьому виникає питання: чи може коефіцієнт пропорційності приймати будь-яке значення,абоякщо звідси не так, це для яких λ фізична задача має розв’язок.

Якщо змінити фізичну постановку та вимагати, такожб різниця яскравості між точкою об’єкта та точкою зображення мала всюди задану величину

$$f(s) = \eta(s) - \varphi(s),$$

то підставляючи в (1.9)

$$\varphi(s) = \eta(s) - f(s),$$

отримаємо неоднорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду:

$$f(s) = \eta(s) - \lambda \int_0^l \mathrm{K}(s,t)\eta(t)dt,$$

де $\eta(s)$ – шукана функція.

3. *Задача Коші* для звичайного лінійного диференційного рівняння n-го порядкузінеперервними коефіцієнтами може бути зведена до інтегрального рівняння Вольтерра 2-го роду. Покажемо звідси на прикладі диференційного рівняння 2-го порядку.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_2(t)x(t) = F(t), \tag{1.10}$$

$$x(0) = C_0, \quad x'(0) = C_1. \tag{1.11}$$

Нехай

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(t). \tag{1.12}$$

Враховуючи початкові умови також формулу

$$\underbrace{\int_0^t dt \int_0^t dt \ldots \int_0^t}_{n} f(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)ds,$$

послідовно знаходимо

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^t \varphi(s)ds + C_1,$$

$$x(t) = \int_0^t (t-s)\varphi(s)ds + C_1 t + C_0. \tag{1.13}$$

На підставі (1.12), (1.13) рівняння (1.10) можна записати

$$\varphi(t) + \int_0^t [a_1(t) + a_2(t)(t-s)]\varphi(s)ds = F(t) - C_1 a_1(t) - C_1 t a_2(t) - C_0 a_2(t) \tag{1.14}$$

Покладемо

$$\mathrm{K}(t,s) = -[a_1(t) + a_2(t)(t-s)], \quad f(t) = F(t) - C_1 a_1(t) - C_1 t a_2(t) - C_0 a_2(t).$$

Тоді (1.14) набуває вигляду

$$\varphi(t) = \int_0^t \mathrm{K}(t,s)\varphi(s)ds + f(t). \qquad (1.15)$$

Таким чином, задача Коші (1.10), (1.11) звелась до розв'язання інтегрального рівняння (1.15). Знайдену функцію $\varphi(t)$ підставимо в друге співвідношення (1.13) та отримаємо розв’язок $x(t)$ задачі (1.10), (1.11).

Існування єдиного розв’язку рівняння (1.15) випливаєзіiснування єдиного розв’язку задачі Коші (1.10), (1.11) для лінійного диференційного рівняннязінеперервними коефіцієнтами в околі точки $t = 0$.

Неважко бачити, також в випадку коли коефіцієнти $a_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ сталі, ядро відповідного інтегрального рівняння залежить тільки від різниці аргументів $\mathrm{K}(t,s) = \mathrm{K}(t-s)$ (інтегральне рівняння типу згортки [35]).

1.2. Лінійні інтегральні рівняння

Інтегральне рівняння називається *лінійним*, якщо в нього невідома функція входить лінійно:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b \kappa(t,s)\varphi(s)ds + f(t), \qquad (1.16)$$

де $\varphi(t)$ − шукана функція, $f(t), \kappa(t,s)$ – відомі функції, λ – параметр.

Функція $\kappa(t,s)$, $a \le t, s \le b$, називається *ядром* інтегрального рівняння (1.16).

Одинзінайважливіших класифікацій лінійних інтегральних рівнянь – рівняння Фредгольма. Розрізняють інтегральні рівняння Фредгольма 1-го та 2-го роду. в найпростішому випадку лінійне інтегральне рівняння Фредгольма має вигляд:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b \kappa(t,s)\varphi(s)ds + f(t). \qquad (1.17)$$

Зараз $\varphi(t)$ – невідома функція.

Границі інтегрування a, b можуть бути як скінченими, так та нескінченими.

Інтегральні рівняннязівиродженим ядром – частинний вигляд інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду, на прикладі яких чітко видно основні результати фредгольмової з теорією таких рівнянь [32].

Ядро $\kappa(t,s)$ інтегрального рівняння називається *виродженим*, якщо його можна подати в вигляді скінченої суми добутків двох функцій,зіяких одна залежить лише від t,абодруга лише від s:

$$\kappa(t,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) b_i(s). \tag{1.18}$$

Функції $a_i(t)$, так само як та функції $b_i(s)$, між собою лінійно незалежні (у іншому випадку можна було б зменшити число доданків в сумі (1.18)).

Припустимо, також функції $a_i(t)$ та $b_i(s)$ неперервні на відрізку $[a,b]$ зміни їх аргументів; тоді ядро $\kappa(t,s)$ буде неперервним в прямокутнику $Q\{a \le t, s \le b\}$. Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма 2-го родузівиродженим ядром $\kappa(t,s)$:

$$\varphi(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \int_a^b b_i(s) \varphi(s) ds + f(t), \tag{1.19}$$

де $f(t)$ – неперервна на $[a,b]$ функція.

Нехай рівняння (1.19) має розв'язок $\varphi = \varphi(t)$. Покладемо

$$c_i = \int_a^b \varphi(s) b_i s ds, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.20}$$

Тодізі(1.19) отримуємо:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i a_i(t), \tag{1.21}$$

звідки видно, також розв'язок інтегрального рівняннязівиродженим ядром зводиться до визначення постійних c_i $(i=1,2,\dots,n)$. Замінимо в рівності (1.21) індекс суми i на j, помножимо обидві частини цієї рівності на $b_i(t)$ та проінтегруємо по t в межах від a до b:

$$\int_a^b \varphi(t) b_i(t)dt = \int_a^b f(t) b_i dt + \lambda \sum_{j=1}^{n} e_j \int_a^b a_j(t) b_i(t)dt, \qquad (1.22)$$

$$(i=1,2,\dots,n).$$

Вводячи позначення

$$\int_a^b a_j(t) b_i(t)dt = k_{ij}, \quad \int_a^b f(t) b_i(t)dt = f_i, \quad (i=1,2,\dots,n),$$

отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, якій повинні задовольняти коефіцієнти c_i:

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ij} c_j = f_i, \quad (i=1,2,\dots,n). \qquad (1.23)$$

Якщо ця система нерозв'язна, то, очевидно, також інтегральне рівняння (1.19) також нерозв'язне [6].

Нехай тепер система (1.23) має розв'язок $c_1, c_2, \dots, c_n$. Підставившизначення коефіцієнтів в формулу (1.21), отримаємо функцію $\varphi(t)$, що є розв'язком інтегрального рівняння (1.19), в чому можна переконатися безпосередньо перевіркою.

Таким чином, інтегральне рівняння (1.19) та система лінійних алгебраїчних рівнянь (1.23) еквівалентні в тому сенсі, також розв'язність системи (1.23) тягне з собою розв'язність рівняння (1.19) та навпаки.

Визначник системи (1.23) $D(\lambda)$ дорівнює:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \dots & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{22} & \dots & -\lambda k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \dots & 1-\lambda k_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.24)$$

$D(\lambda)$ є многочлен відносно λ степеня не вище n, відмінний від тотожного нуля, оскільки:

$$D(0)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{vmatrix}=1. \tag{1.25}$$

Отже, $D(\lambda)$ має не більше n різних коренів. $D(\lambda)$ називають *визначником Фредгольма* для інтегрального рівняння (1.19),абойого нулі, тобто корені рівняння

$$D(\lambda) = 0,$$

називають *характеристичними числами* ядра $\kappa(t,s)$ також рівняння (1.19).

1.3. Умови існування розв'язку системи лінійних інтегральних рівнянь

Перша теорема Фредгольма. Якщо λ не співпадаєзіжодним нулем $D(\lambda)$, тобто $D(\lambda)\neq 0$, це система лінійних рівнянь (1.23), однозначно розв’язна при будь-яких правих частинах $f(i)$ $(i=1,\ldots,n)$.

Отже, якщо λ не є характеристичним числом, це інтегральне рівняння (1.19) має єдиний розв’язок $\varphi(t)$, також визначається формулою (1.21), при будь-якому вільному члені $f(t)$.

У випадку $D(\lambda)\neq 0$ відповідне однорідне інтегральне рівняння

$$\varphi(t)=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(t)\int_a^b b_i(s)\varphi(s)ds, \tag{1.26}$$

також відповідає випадку

$$f(t)\equiv 0$$

на $[a,b]$, має лише тривіальний розв’язок

$$\varphi(t)\equiv 0.$$

Дійсно, якщо $f(t)\equiv 0$ на $[a,b]$, це всі $f(i)$ $(i=1,\ldots,n)$ дорівнюють нулю та система (1.23) буде системою однорідних лінійних рівняньзівизначником, відмінним від нуля. Така система має лише нульовий розв'язок

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0.$$

Тому першу теорему Фредгольма іноді формулюють наступним чином: для того такожб рівняння (1.19) мало єдиний розв'язок при будь-якій функції $f(t)$, необхідно та достатньо, такожб відповідне однорідне рівняння мало лише тривіальний розв'язок $\varphi(t) \equiv 0$.

Приклад 1.1.

Розв'язати інтегральне рівняння

$$\varphi(t) = 1 + \lambda \int_0^1 (t - s)\varphi(s)ds.$$

Розв'язання.

Запишемо рівняння в вигляді

$$\varphi(t) = 1 + \lambda\, t \int_0^1 \varphi(s)ds + \lambda \int_0^1 (-s)\varphi(s)ds.$$

Зараз

$$b_1(s) \equiv 1,\ b_2(s) \equiv -s.$$

Покладемо

$$c_1 = \int_0^1 \varphi(s)ds,\ c_2 = \int_0^1 (-s)\varphi(s)ds.$$

Тоді

$$\varphi(t) = 1 + \lambda c_1 t + \lambda c_2. \tag{1.27}$$

Помножимо обидві частини (1.27) послідовно на $b_1(t)$ та $b_2(t)$, проінтегруємо по t від 0 до 1. Отримаємо:

$$\int_0^1 \varphi(t)dt = \int_0^1 dt + \lambda\, c_1 \int_0^1 tdt + \lambda\, c_2 \int_0^1 dt,$$

$$\int_0^1 (-t)\varphi(t)dt = \int_0^1 (-t)dt + \lambda\, c_1 \int_0^1 \left(-t^2\right)dt + \lambda c_2 \int_0^1 (-t)dt,$$

також

$$\begin{cases} c_1\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)-\lambda c_2 =1 \\ c_1\dfrac{\lambda}{3}+\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)c_2 =-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Визначник цієї системи

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\dfrac{\lambda}{2} & -\lambda \\ \dfrac{\lambda}{3} & 1+\dfrac{\lambda}{2} \end{vmatrix}=1+\frac{\lambda^2}{12}$$

відмінний від нуля при будь-яких дійсних λ.

За формулами Крамера [21] знаходимо:

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ -\dfrac{1}{2} & 1+\dfrac{\lambda}{2} \end{vmatrix}}{D(\lambda)}=\frac{12}{12+\lambda^2}\ ,\quad c_2=\frac{\begin{vmatrix} 1-\dfrac{\lambda}{2} & 1 \\ \dfrac{\lambda}{3} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix}}{D(\lambda)}=-\frac{6+\lambda}{12+\lambda^2}\,.$$

В силу (1.27) маємо:

$$\varphi(t)=1+\frac{12\lambda t}{12+\lambda^2}-\frac{6\lambda+\lambda^2}{12+\lambda^2}=\frac{6(2+2\lambda t-\lambda)}{12+\lambda^2}$$

(якщо $\lambda \neq \pm 2i\sqrt{3}$).

Якщо розв’язувати систему (1.22) з формулами Крамера,абопотім визначники, також стоять в чисельнику, розкласти з елементами стовпця вільних членів, це отримається вираз виду

$$c_i =\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{k=1}^{n}D_{ik}(\lambda)f_k\ ,\ (i=1,2,\dots,n),$$

де $D_{ik}(\lambda)$ − деякі многочлени від λ степеня не вище $n-1$.

Підставляючивирази для c_i в формулу (1.21), отримаємо

$$\varphi(t)= f(t)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{k=1}^{n}D_{ik}(\lambda)a_i(t)\int_a^b f(s)b_k(s)ds\,,$$

також

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b R(t,s;\lambda) f(s)ds, \tag{1.28}$$

де

$$R(t,s;\lambda) = \frac{1}{D(\lambda)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} D_{ik}(\lambda) a_i(t) b_k(s). \tag{1.29}$$

Функція $R(t,s;\lambda)$ є резольвентою [5] (розв'язне ядро) інтегрального рівняння (1.19). При фіксованих t,s вона являє собою дробово-раціональну функцію комплексної змінної λ, та при будь-якому значенні λ, відмінному від характеристичного, $R(t,s;\lambda)$ є неперервною функцією t,s.

Нехай тепер λ співпадаєзіоднимзінулів визначника Фредгольма $D(\lambda)$, тобто є характеристичним числом ядра $\kappa(t,s)$. Тоді визначник системи (1.23) буде рівним нулю. Відповідна однорідна система

$$c_i - \lambda\sum_{j=1}^{n} k_{ij} c_j = 0 \tag{1.30}$$

має при цьому деяке число p $(1 \le p \le n)$ лінійно незалежних ненульових векторів-розв'язків:

$$\left\{c_1^{(l)}, c_2^{(l)}, \ldots, c_n^{(l)}\right\}, \ (l = 1, 2, \ldots, p).$$

Функції

$$\varphi_l(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(l)} a_i(t), \ (l = 1, 2, \ldots, p) \tag{1.31}$$

будуть нетривіальними розв'язками відповідного однорідного інтегрального рівняння

$$\varphi(t) = \lambda\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\int_a^b b_i(s)\varphi(s)ds \tag{1.32}$$

і називаються *власними* також *фундаментальними функціями* цього рівняння, також відповідають даному характеристичному числу. Число лінійно незалежних функцій, також відповідають даному характеристичному числу, називається його *рангом* також *кратністю*.

Власні функції $\varphi_e(t)$, також відповідають даному характеристичному числу λ, утворюють лінійний простір, розмірність якого дорівнює p. Тобто, якщо $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ – власні функції, також відповідають одному та тому ж характеристичному числу λ, це їх сума $\varphi_1(t)+\varphi_2(t)$ буде також власною функцією, також відповідає цьому ж числу λ; якщо $\varphi(t)$ − власна функція, це $\alpha\varphi(t)$, де α − будь-яка постійна, буде власною функцією.

Загальним розв'язком однорідного рівняння (1.32), також відповідає даному характеристичному числу, буде функція

$$\varphi(t)=\sum_{l=1}^{p}\alpha_l\varphi_l(t), \tag{1.33}$$

де α_l − довільна стала.

Нехай маємо інтегральне рівняння Фредгольма

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b \kappa(t,s)\varphi(s)ds+f(t). \tag{1.34}$$

Ядро $\kappa^*(t,s)$, також одержуєтьсязіядра $\kappa(t,s)$ заміною t на s та навпаки, називається *спряженим*зіядром $\kappa(t,s)$:

$$\kappa^*(t,s)=\kappa(s,t). \tag{1.35}$$

Рівняння

$$\psi(t)=\lambda\int_a^b \kappa^*(t,s)\psi(s)ds+g(t) \tag{1.36}$$

називається *спряженим*зрівнянням (1.34).

Для інтегрального рівняння (1.19)звиродженим ядром спряженезіним рівняння має вигляд:

$$\psi(t)=\lambda\int_a^b\sum_{i=1}^{n}a_i(s)b_i(t)\psi(s)ds+g(t). \tag{1.37}$$

Для нього

$$\psi(t)=g(t)+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_i^*b_i(t), \tag{1.38}$$

де

$$c_i^* = \int_a^b \psi(s) a_i(s) ds\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.39}$$

Якщо $g(t) \equiv 0$, тобто рівняння (1.37) однорідне, це для визначення c_i^* отримуємо однорідну систему

$$c_i^* - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ji} c_j^* = 0 \tag{1.40}$$

спряженузісистемою (1.30).

Системи (1.30) та (1.40) мають однакове число p лінійно незалежних векторів-розв’язків [35].

Якщо

$$\left\{c_1^{(l)}, c_2^{(l)}, \ldots, c_n^{(l)}\right\}, \ (l = 1, 2, \ldots, p)$$

ненульові вектор-розв’язки системи (1.25), це функції

$$\psi_l(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i^{*(l)} b_i(t), \ (l = 1, 2, \ldots, p)$$

будуть власними функціями однорідного рівняння

$$\psi(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} b_i(t) \int_a^b a_i(s) \psi(s) ds\,, \tag{1.41}$$

спряженогозірівнянням (1.26).

Друга теорема Фредгольма. Якщо λ є характеристичне число ядра $\kappa(t,s)$, це однорідне інтегральне рівняння (1.32) та спряженезіним рівняння (1.31) мають одне й те саме скінчене число лінійно незалежних власних функцій.

Розглянемо неоднорідне рівняння (1.19) в випадку, коли λ – характеристичне число. Його розв’язність еквівалентна розв’язності неоднорідної системи (1.23) лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ij} c_j = f_i\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ця система буде розв’язною тоді та тільки тоді, коли вектор

$\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ буде ортогональним [5] кожномузівекторів $\left\{c_1^{(l)}, c_2^{(l)}, \ldots, c_n^{(l)}\right\}$, $(l = 1, 2, \ldots, p)$, тобто, коли

$$\sum_{i=1}^{n} f_i c_i^{*(l)} = 0, \ (l = 1, 2, \ldots, p). \qquad (1.42)$$

Але

$$f_i = \int_a^b f(t) b_i(t) dt,$$

і, отже, умову (1.42) можна записати так:

$$\int_a^b f(t) \sum_{i=1}^{n} c_i^{*(l)} b_i(t) dt = \int_a^b f(t) \psi_l(t) dt = 0, \ (l = 1, 2, \ldots, p). \qquad (1.43)$$

Таким чином, справедливе наступне твердження.

Третя теорема Фредгольма. Неоднорідне інтегральне рівняння (1.4)зівиродженим ядром при характеристичному значенні λ буде розв’язним тоді та тільки тоді, коли вільний член $f(t)$ буде ортогональним до всіх розв’язків спряженого однорідного інтегрального рівняння (1.41).

Питання про розв’язність рівняння (1.19) потребує перевірки скінченого числа p умов:

$$\int_a^b f(t) \psi_l(t) dt = 0, \quad (l = 1, 2, \ldots, p).$$

Якщоумови виконані, це рівняння (1.4) має нескінчену множину розв’язків. Всі вони описуються формулою:

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \varphi_4(t),$$

де $\varphi_4(t)$ – будь-який розв’язок неоднорідного рівняння (1.19), $\varphi_0(t)$ – загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння.

Умови (1.43) будуть виконуватися, якщо виконуються умови:

$$\int_a^b f(t)b_i(t)dt = 0\,,\ (i = 1,2,\ldots,n).$$

Наслідками трьох теорем Фредгольма є наступне твердження.

Теорема про альтернативу. Якщо однорідне інтегральне рівняння Фредгольмазівиродженим ядром має лише тривіальний розв’язок, це відповідне неоднорідне рівняння завжди має один та лише один розв’язок. Якщо ж однорідне рівняння має нетривіальний розв’язок, це неоднорідне інтегральне рівняння в залежності від вільного члена $f(t)$ також зовсім не має розв’язку, також має нескінчене число розв’язків.

Зауваження: результати залишаються в відомому сенсі справедливими та для випадку, коли $a_i(t)$, $b_i(t)$ та $f(t)$ аналітично залежать від параметра λ, тобто для рівняння виду:

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(t,\lambda)b_i(s,\lambda)\varphi(s)ds + f(t,\lambda).$$

У цьому випадку k_{ij} та f_i стають аналітичними функціями від λ [31],абовизначник $D(\lambda)$ буде уже не многочленом відносно λ,абоаналітичною функцією λ більш загальної природи. Тому може виявитись, також характеристичних чисел зовсім не існує, так як неалгебраїчна аналітична функція може не мати нулів.

Нехай тепер маємо інтегральне рівняння

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^b \kappa(t,s)\varphi(s)ds + f(t) \tag{1.44}$$

з деяким неперервним ядром $\kappa(t,s)$ та неперервною $f(t)$.

Для розв’язування такого рівняння будують достатньо близьке до ядра $\kappa(t,s)$ вироджене ядро $H(t,s)$. Розв’язавши рівняннязівиродженим ядром $H(t,s)$, отримаємо розв’язок, близький до розв’язку рівняннязіядром $\kappa(t,s)$ при тій самій правій частині. Якщо побудувати послідовність $\{H_n(t)\}$ вироджених ядер, що рівномірно збігається до ядра $\kappa(t,s)$[11], це послідовність $\{Z_n(t)\}$ розв’язків рівняньзіядрами $H_n(t,s)$ буде рівномірно збігатися до розв'язку $\varphi(t)$ рівняння (1.44)зіядром $\kappa(t,s)$.

Ядро $\kappa(t,s)$ можна наближати частинними сумами степеневого також подвійного тригонометричного ряду [42], якщо ядро $\kappa(t,s)$ розкладається в рівномірно збіжний в прямокутнику $Q\{a \le t,s \le b\}$ степеневий також тригонометричний ряд.

РОЗДІЛ 2
ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИХ РІВНЯНЬЗІПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ

2.1. Побудова розв'язку рівняння методом Фредгольма

Будемо досліджувати питання про існування розв'язків лінійних диференційованих рівнянь виду:

$$L[y(x)] + \lambda_0 \int_0^1 P[x, y(t)]dt = f(x) \qquad (2.1)$$

при початкових умовах

$$y^3(0) = D_{S+1}, \ (S = 0,1,\ldots,\max(n-1, m-1)). \qquad (2.2)$$

Зараз $L[y(x)]$, $P[x, y(t)]$ – лінійні диференціальні оператори виду

$$L[y(x)] \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{r=1}^{n} a_{n-r}(x) y^{n-t}(x), \qquad (2.3)$$

$$P[x, y(t)] \equiv \sum_{j=0}^{m} K_j(x,t) y^{(j)}(t), \qquad (2.4)$$

де $a_{n-r}(x)$, $f(x), K_j(x,t)$ задані функції відповідно в областях:) $R: 0 \le x,t \le 1$. Дослідження існування та побудова розв'язку задачі (2.1), (2.2) буде проведено для наступних трьох випадків:

а) $n \in Z, m = 0$;

б) $n, m \in Z, n \ge m$;

в) $n, m \in Z, m \succ n$.

Для всіх цих випадків питання про існування розв'язку для лінійних диференційованих рівняння буде зведене до питання про існування розв'язку відповідного лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, розв'язок якого знаходиться методом Фредгольма (використовуючи його три фундаментальні теореми) [26].

Будемо досліджувати задачу (2.1),(2.2) в випадку, коли $m=0, n\geq 1$, тобто задачу

$$L\left[y\right]+\lambda_0 K\left[x,t\right]y\left(t\right)dt = f\left(x\right), \tag{2.5}$$

$$y^{(1)}(0)=D_{s+1}\,,\ (s=0,1,...,n-1) \tag{2.6}$$

Припустимо, також відома фундаментальна система розв’язків [12] $y_1(x),...,y_n(x)$ однорідного рівняння

$$L\left[y\right]=0\,.$$

Побудуємо функцію

$$y(x)=\varphi(x,\eta),$$

яка є розв’язком задачі:

$$L\left[y\right]=0, y^{(b)}(\eta)=0,(b=0,1,...n-2), y^{(n-1)}\left(\eta\right)=1, \tag{2.7}$$

де η – довільна фіксована точка на інтервалі неперервності коефіцієнтів $a_r\left(x\right)$ рівняння $L[y]=0$, тобто $\eta\in\left]0,1\right[$.

Якщо відома фундаментальна система розв’язків рівняння

$$L[y]=0,$$

тоді функцію $\varphi(x,\eta)$ завжди можна побудувати (наприклад, використовуючи метод Коші [23]).

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.1. Нехай

1) $a_r\left(x\right)\in C\left(I\right), f\left(x\right)\in C\left(I\right)$ та $k\left(n,1\right)\in C_{n,1}\left[R\right]$;

2) $y_1\left(x\right), y_2\left(x\right),..., y_n\left(x\right),$ – фундаментальна система розв’язків однорідного рівняння $L[y]=0$;

3) визначник Фредгольма $D\left(\lambda_0\right)\neq 0$ для ядра $N\left(x,t\right)$.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2.5), (2.6), який можна подати в вигляді

$$y\left(x\right)=\sum_{n=1}^{n}C_n y_n\left(x\right)+\int_0^x\varphi\left(x,\eta\right)F\left(\eta\right)d\eta\ , \tag{2.8}$$

де C_n – відомі сталі, $F\left(\eta\right)$– розв'язок інтегрального рівняння

(1.13).

Доведення.

Згіднозіметодом А.І.Некрасова [35], запишемо інтегро-диференціальне рівняння (2.5) в вигляді:

$$L[y]=F(x), \tag{2.9}$$

де

$$F(x)=f(x)-\lambda_0\int_0^1 K(x,t)y(t)\,dt\,. \tag{2.10}$$

Припустивши, також $F(x)$ – відома функція, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (2.9), відповідно до методу Коші, можна записати в вигляді (2.8). Для визначення сталих C_k k = (1, .., n) використовуємо початкові умови (2.6). Підставляємо (2.8) в (2.6) та, взявши до уваги властивості функції $\varphi(x,\eta)$, отримаємо систему:

$$\begin{array}{l} c_1y_1(0)+\ldots+c_ny_n(0)=D_1 \\ c_1y_1'(0)+\ldots+c_ny_n'(0)=D_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1{y^{(n-1)}}_1(0)+\ldots+c_n{y^{(n-1)}}_n(0)=D_n \end{array} \tag{2.11}$$

Визначник цієї системи є визначником Вронського [7], який не дорівнює нулю, тодізісистеми (2.11) можна однозначно визначити сталі C_k k = (1, .., n), причомусталі будуть визначаться лише через D_{s+1} та

$$y_k^{(e)}(0)(s=0,1,\ldots,n-1,k=1,2,\ldots,n,l=0,1,2,\ldots,n-1)\,.$$

Зауваження: якби ми частинний розв'язок рівняння (2.9), записаний з методом Лагранжа (метод варіації сталих) [11], тоді права частина системи (2.11) містила б значення функції $F(x)$ також її похідних в точці x = 0, також значно ускладнило б дослідження задачі (2.5), (2.6). Таким чином, будемо припускати, також постійні C_k вже визначенізісистеми (2.11).

До цього часу ми припускали, також функція $F(x)$ відома. Для її визначення підставимо (2.7) в (2.9). Маємо

$$F(x)+\lambda_0\int_0^1 K(x,t)\left[\sum_{k=1}^n c_k y_k(t)+\int_0^t \varphi(t,\eta)F(\eta)d\eta\right]dt = f(x). \qquad (2.12)$$

Рівняння (2.12) перепишемо в вигляді:

$$F(x)+\lambda_0\int_0^1\int_0^e K(x,t)\varphi(t,\eta)F(\eta)d\eta dt = h(x). \qquad (2.13)$$

де

$$h(x)\equiv f(x)-\lambda_0\int_0^1 K(x,t)\sum_{k=1}^n c_k y_k(t)dt. \qquad (2.14)$$

Рівняння (2.13) називається *інтегральним рівнянням Некрасова*. Для його розв’язання (аналогічно теоремі Фредгольма) вводиться відповідно визначник та перший мінор Фредгольма [7], також доводиться існування розв'язку даного рівняння методом послідовних наближень [34].

Змінюючи порядок інтегрування в рівнянні (2.13), ми зведемо інтегральне рівняння Некрасова (2.13) до лінійного інтегрального рівняння Фредгольма, для розв’язання якого використовуємо однузітрьох теорем Фредгольма. Має місце перетворення

$$\int_0^1\int_0^t K(x,t)\varphi(t,\eta)F(\eta)d\eta dt \equiv \int_0^1\left\{\int_\eta^1 K(x,t)\,\varphi(t,\eta)dt\right\}F(\eta)d\eta \equiv \int_0^1 N(x,\eta)F(\eta)d\eta. \qquad (2.15)$$

Зараз введено позначення

$$N(x,\eta)\equiv\int_\eta^1 K(x,t)\varphi(t,\eta)dt. \qquad (2.16)$$

Враховуючи перетворення (2.15), інтегральне рівняння Некрасова (2.13) запишемо в вигляді

$$F(x)+\lambda_0\int_0^1 N(x,\eta)F(\eta)dn = h(x). \qquad (2.17)$$

Оскільки з умовою теореми

$$D(\lambda_0)\neq 0$$

для $N(x,\alpha)$, це згіднозіпершою теоремою Фредгольма існує єдиний неперервний розв'язок рівняння (2.17), який має вигляд:

$$F(x)=h(x)+\lambda_0\int_0^1\frac{D(x,t;\lambda_0)}{D(\lambda_0)}h(t)\,dt. \qquad (2.18)$$

Зараз $D(x,t;\lambda_0)$ – перший мінор Фредгольма для ядра $N(x,\eta)$. Підставивши знайдений розв'язок рівняння (2.17) в формулу (2.7), отримаємо розв'язок задачі (2.5), (2.6).

Покажемо, також розв'язок задачі (2.5), (2.6) єдиний. Нехай існує два розв'язки $\tilde{y}(x)$ та $\tilde{\tilde{y}}(x)$ задачі (2.5), (2.6). Розглянемо функцію

$$\upsilon(x)=\tilde{\tilde{y}}(x)-\tilde{y}(x).$$

Очевидно, функція $\upsilon(x)$ буде розв’язком однорідного лінійних диференційованих рівняння (2.5) при однорідних початкових умовах (2.6):

$$f(x)\equiv D_{s+1}\equiv 0, s=0,1,2,...,n-1),$$

тобто $\upsilon(x)$ задовольняє задачі

$$L[\upsilon]+\lambda_0\int_0^1 K(x,t)\upsilon(t)\,dt=0, \upsilon^{(s)}(0)=0, (s=0,...,n-1). \qquad (2.19)$$

Для знаходження розв'язків задачі (2.19) застосуємо розроблену методику для задачі (2.5), (2.6). Маємо:

$$\upsilon(x)=\sum_{k=1}^{n}c_n y_n(x)+\int_0^x\varphi(x,\eta)F(\eta)\,d\eta. \qquad (2.20)$$

Застосувавши початкову умову (2.19) для визначення C_k k = (1, .., n), отримаємо

$$C_k=0\ k=(1, .., n).$$

Для визначення функції $F(x)$ отримаємо однорідне інтегральне рівняння $(h(x)\equiv 0)$:

$$F(x)+\lambda_0\int_0^1 N(x,\eta)F(\eta)\,d\eta=0. \qquad (2.21)$$

Оскільки $D(\lambda_0)\neq 0$ для ядра $N(x,\eta)$, це єдиним неперервним розв’язком однорідного рівняння (2.21) буде функція

$$F(x)\equiv 0.$$

Тоді згіднозіформулою (2.20), маємо

$$\upsilon(x) \equiv 0,$$

звідки

$$\tilde{y}(x) \equiv \tilde{\tilde{y}}(x).$$

Теорему доведено.

Лема 2.1. Якщо $K(x,t)$ – вироджене ядро, це $N(x,\eta)$ також буде виродженим ядром.

Доведення цього твердження випливаєзіформули (2.16). в даному випадку для знаходження розв'язку інтегрального рівняння (2.17) можна застосувати відому теорію для інтегральних рівняньзівиродженим ядрами [22]. Використовуючи результати попереднього пункту, неважко довести аналог другої фундаментальної теореми Фредгольма для однорідної задачі (2.5), (2.6).

Теорема 2.2. Нехай:

а) виконуються умови 1)–2) теореми 2.1;

б) параметр $\lambda = \lambda_0$ є коренем рівняння $D(\lambda_0) = 0$ рангу q.

Тоді однорідна задача (2.5), (2.6)

$$(f(x) \equiv D_{s+1} \equiv 0, s = 0,1,2,...,n-1),)$$

має q-параметричний розв'язок виду:

$$y(x) = \sum_{\alpha=1}^{q} J_\alpha Q_\alpha(x), \tag{2.22}$$

де J_α – довільні постійні, $Q_\alpha(x)$ – відомі функції.

Доведення.

Оскільки виконуються умови 1)-2) теореми 2.1, це ми маємо право користуватися результатом попереднього пункту, тобто розв'язок однорідної задачі (2.5), (2.6) запишеться в вигляді

$$y(x) = \int_0^x \varphi(x_1,\eta) F(\eta)\, d\eta, \ (c_i = 0), \tag{2.23}$$

де $F(\eta)$ – розв'язок інтегрального рівняння

$$F(x)+\lambda_0\int_0^1 N(x,\eta)F(\eta)d\eta=0,(h(x))\equiv 0\,. \tag{2.24}$$

Параметр $\lambda=\lambda_0$ є коренем рівняння

$$D(\lambda)=0$$

порядку q(за умовою теореми). Тоді згіднозідругою фундаментальною теоремою Фредгольма [41] існує q-параметричний розв'язок рівняння (2.23) виду

$$F(x)=\sum_{\alpha=1}^{q} J_\alpha E_\alpha(x)\,, \tag{2.25}$$

де $E_\alpha(x)$ – відомі функції, J_α – довільні сталі. Явний вигляд функції $E_\alpha(x)$ можна знайти в багатьох посібникахзіінтегральних рівнянь [16].

Теорему доведено.

Підставивши (2.26) в (2.23), отримаємо розв'язок однорідної задачі (2.5), (2.6) виду (2.22),

де

$$Q_\alpha(x)=\int_0^x \varphi(x,\eta)E_\alpha(\eta)d\eta\,,\ (\alpha=1,..,q)\,. \tag{2.26}$$

Розглянемо спряжене до (1.24) однорідне інтегральне рівняння виду

$$\tilde{F}(x)+\lambda_0\int_0^1 N(\eta,x)\tilde{F}(\eta)d\eta\equiv 0\,. \tag{2.27}$$

Нехай $\bar{E}_\alpha(x)$ $(\alpha=1,..,q)$ – повна система власних функцій рівняння (1.27) [31]. Має місце наступний аналог третьої фундаментальної теореми Фредгольма для задачі (2.5), (2.6).

Теорема 2.3. Нехай:

а) виконуються умови а)–б) теореми 2.2;

б) $$\int_0^1 \bar{E}_\alpha(x)h(x)dx=0,\ (\alpha=1,..,q), \tag{2.28}$$

То неоднорідна задача (2.5), (2.6) має q-параметричний розв'язок, який визначається з формулою:

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}c_n y_n(x)+\int_0^x \varphi(x,\eta)\left[h(\eta)+\int_0^1 H(\eta,t)h(t)dt\right]d\eta+\sum_{k=1}^{q}J_\alpha Q_\alpha(x) \qquad (2.29)$$

Зараз C_k – відомі постійні, також визначаються з формулами (2.26) $H(\eta,t)$ – відома функція.

Доведення цієї теореми очевидне.

2.2. Знаходження розв'язку рівняння методами інтегрування також диференціювання

Досліджуємо існування розв'язків задачі Коші для лінійних диференційованих рівняння (2.1) в випадку, коли $n\ge m(n,m\in Z)$. Рівняння (2.1) в цьому випадку має вигляд:

$$y^{(n)}(x)+\sum_{r=1}^{n}a_r(x)y^{(n-r)}(x)+\lambda_0\int_0^1\sum_{j=1}^{m}K_j(x,t)y^{(j)}(t)dt=f(x). \qquad (2.30)$$

Задамо початкові умови для рівняння (2.30):

$$y^{(s)}(0)=D_{s+1},\ \ (s=0,1,...,n-1). \qquad (2.31)$$

Дослідження задачі (2.30), (2.31) можна проводити декількома способами. Ми обмежимося двома способами розв'язання задачі (2.30), (2.31) та покажемо перевагу та недоліки цих способів в порівнянні одинзіиншим.

Перший спосіб.

Ідея цього способу полягає в тому, також спочатку інтегро-диференціальне рівняння (2.30) зводиться до лінійних диференційованих рівняння, під знаком інтеграла якого не містяться похідні від невідомої функції.зіцією метою проінтегруємо по частинах підінтегральний вираз рівняння (2.30). Отримаємо:

$$\begin{gathered}
\int_0^1 K_1(x,t)y'(t)\,dt = K_1(x,t)\,y(t) - \int_0^1 \frac{\partial K_1(x,t)}{\partial t} y(t)\,dt, \\
\int_0^1 K_2(x,t)y'(t)\,dt = K_2(x,t)\,y'(t) - \frac{\partial K_2(x,t)}{\partial t}\,y(t) + \int_0^1 \frac{\partial^2 K_2(x,t)}{\partial t^2} y(t)\,dt, \\
\int_0^1 K_j(x,t)y^{(j)}(t)\,dt = \sum_{s=0}^{j-1} (-1)' \,\frac{\partial^s K_j(x,t)}{\partial t^s}\, y^{(j-s-1)}(t) + (-1)^j \int_0^1 \frac{\partial^j K_j(x,t)}{\partial t^s} y(t)\,dt, \\
(j = 1, 2, \ldots, m).
\end{gathered} \tag{2.32}$$

Підставивши (2.32) в рівняння (2.30) отримаємо інтегро-диференціальне рівняння виду

$$y^{(n)}(x) + \sum_{r=1}^{n} a_r(x)\, y^{(n-r)}(x) + \lambda_0 \int_0^1 K(x,t)y(t)\,dt = f(x) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{j-1} (-1)^s \frac{\partial^s K_j(x,t)}{\partial t^s} y^{(j-s-1)}(t), \tag{2.33}$$

де

$$K(x,t) \equiv \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \,\frac{\partial^j K_j(x,t)}{\partial t^j}\,. \tag{2.34}$$

Таким чином, інтегро-диференціальне рівняння (2.30) зводиться до лінійних диференційованих рівняння (2.33), в якому під інтегралом не містяться похідні від невідомої функції. Проте, інтегро-диференціальне рівняння (2.33) містить навантаження невідомої функції також її похідні

$$y^{(s)}(x)\,(s = 0, 1, \ldots, m-1)$$

в точці $x = 1$ (невідому функцію $y(x)$ та її похідну в точці $x = 0$ замінюють початковими умовами [17]).

Запишемо інтегро-диференціальне рівняння (2.33) в вигляді

$$L[y] = F(x), \tag{2.35}$$

де

$$F(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{j-1} (-1)^s \frac{\partial^s K_j(x,t)}{\partial t^s}\left[y^{(j-s-1)}(1) - \frac{\partial^s K_j(x,0)}{\partial t^s} D_{j-1} \right] - \lambda_0 \int_0^1 K(x,t)\,y(t)\,dt \,. \tag{2.36}$$

Тоді розв'язок неоднорідної задачі (2.35), (2.36) запишеться в вигляді:

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}c_n y_n(x)+\int_0^x \varphi(x,\eta)F(\eta)d\eta, \qquad (2.37)$$

де C_k – відомі сталі, $\varphi(x,\eta)$– відома функція. Для визначення функції $F(x)$ підставимо (2.37) в (2.36). Отримаємо наступне:

$$F(x)+\lambda_0\int_0^1 K(x,t)\left[\sum_{k=1}^{n}c_k y_k(t)+\int_0^t \varphi(t,\eta)F(\eta)d\eta\right]dt=$$
$$f(x)-\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{j-1}(-1)^s\left\{\frac{\partial^s K_j(x,1)}{\partial t^s}\left[\sum_{k=1}^{n}c_k\frac{\alpha^{j-s-1}y_k(1)}{dx^{j-s-1}}+\int_0^1\frac{d^{j-s-1}\varphi(1,\eta)}{dx^{j-s-1}}F(\eta)d\eta\right]-\frac{\partial^s K_j(x,0)}{\partial t^s}D_{j-s}\right\} \qquad (2.38)$$

Введемо позначення:

$$N^*(x,\eta)\equiv\int_\alpha^1 K(x,t)\varphi(t,\eta)dt+\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{j-1}(-1)^s\frac{\partial^s K_j(x,t)}{\partial t^s}\times\frac{\alpha^{j-s-1}\varphi(1,\eta)}{dx^{j-s-1}}, \qquad (2.39)$$

$$h^*(x)\equiv f(x)-\lambda_0\int_0^1 K(x,t)\sum_{k=1}^{n}c_k y_k(t)dt-\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{j-1}(-1)^s\frac{\partial^s K_j(x,t)}{\partial t^s}\sum_{k=1}^{n}c_k\frac{\alpha^{j-s-1}y_k(1)}{dx^{j-s-1}}-\frac{\partial^s K_j(x,0)}{\partial t^s}D_{j} \qquad (2.40)$$

Тоді інтегральне рівняння (2.38) запишеться в вигляді

$$F(x)+\lambda_0\int_0^1 N^n(x,\eta)F(\eta)d\eta=h^*(x). \qquad (2.41)$$

У залежності від того, яказіфундаментальних теорем Фредгольма застосовна до розв'язування інтегрального рівняння (2.41), ми отримаємо відповідні аналоги фундаментальних теорем Фредгольма для задачі (2.30), (2.31).

Теорема 2.4. Нехай:

1) $a_r(x), f(x)\in c[I], K_j(x,t)\in c_z[R], K_j(x,t)\in c_t^{m-1}[R]$;

2) $y_1(x),..,y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння $L[y]=0$;

3) визначник Фредгольма $D(\lambda_0)\neq 0$ для ядра $N''(x,\alpha)$.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2.30), (2.31), який можна подати в вигляді (2.37), де $F(x)$ – розв'язок інтегрального рівняння (2.41).

Єдиність розв'язку даної задачі доводиться аналогічно доведенню єдиності розв'язку задачі (2.5), (2.6).

Зауваження: нехай в рівнянні (2.30) $m=0$, тобто

$$K_j(x,t)=0\ \ (j=1,...,m), K_0(x,t)=K(x,t).$$

Тоді

$$N''(x,\alpha)=N(x,\alpha),\ h^*(x)=h(x)$$

Таким чином, рівняння (2.41) в даному випадку співпадаєзірівнянням (1.17), тобто даний випадок включає в себе попередній випадок, коли $m=0$.

Другий спосіб.

Для дослідження розв'язання задачі (2.30), (2.31) запишемо інтегро-диференціальне рівняння (2.30) в вигляді

$$L[y]=F(x), \tag{2.42}$$

де

$$F(x)=f(x)-\lambda_0\sum_{j=0}^{m}\int_0^1 K_j(x,t)y^{(j)}(t)\,dt. \tag{2.43}$$

Тоді розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (2.42) при початкових умовах (2.31) запишемо в відомому нам вигляді:

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k y_k(x)+\int_0^x \varphi(x,\eta)F(\eta)\,d\eta. \tag{2.44}$$

Продиференціюємо розв'язок $y(x)$, заданий з формулою (2.44). Маємо:

$$y^{(p)}(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k y^{(p)}{}_k(x)+\int_0^z \frac{\alpha^p\varphi(x,n)}{dx^p}F(\eta)\,d\eta,(p=1,...,m). \tag{2.45}$$

Зараз прийняті до уваги властивості функції $\varphi(x,n)$, тобто

$$\varphi^{(j)}(x,x)=0,\ j=0,1,....,n-2,\varphi^{(n-1)}(x,x)=1$$

Для визначення функції $F(x)$ яку до цього часу ми вважали відомою, підставимо (2.44), (2.45) в (2.43). Маємо:

$$F(x)+\lambda_0\int_0^1\sum_{j=0}^{m}K_j(x,t)\left[\sum_{k=1}^{n}C_k y^{(j)}{}_k(t)+\int_0^t \frac{d^j\varphi(t,\eta)}{dt^j}F(\eta)d\eta\right]dt+\lambda_0\int_0^1 K_n(x,t)F(t)dt=f(x) \quad (2.46)$$

.

Вже відомим нам способом рівняння (2.46) зводиться до рівняння

$$F(x)+\lambda_0\int_0^1 \bar{N}(x,\eta)F(\eta)d\eta=\bar{h}(x), \qquad (2.47)$$

де

$$\bar{N}(x,\eta)=\int_\eta^1\sum_{j=1}^{m}K_j(x,t)\frac{d^j\varphi(t,\eta)}{dt^j}dt+K_n(x,t), \qquad (2.48)$$

$$\bar{h}(x)=f(x)-\lambda_0\int_0^1\sum_{j=0}^{m}K_j(x,t)\sum_{k=1}^{n}c_k y_k^{(j)}(t)dt\,. \qquad (2.49)$$

Якщо $m\prec n$, це в виразах (2.46) та (2.48)

$$K_n(x,t)\equiv 0\,.$$

Таким чином, питання про існування також єдиність розв'язку задачі (2.30), (2.31) зводиться до розв'язування лінійного інтегрального рівняння (2.47). Знайшовши розв'язок рівняння (2.47) та підставивши його в (2.44). отримаємо розв'язок задачі (2.30), (2.31).

Зауваження: порівнюючи перший та другий способи розв'язання задачі (2.30), (2.31), можна відмітити наступне:

а) якщо в першому випадку на ядра $K_n(x,t)$ накладається умова

$$K_j(x,t)\in C_x[R], K_j(x,t)\in C_t^{m-1}[R]$$

то другий випадок вимагає тільки, такожб $K_j(x,t)$ були неперервні по x та по t;

б) ядра $N(x,\eta)$ та $\bar{h}^*(x,\eta)$ мають більш простий вигляд в порівняннізі $N^*(x,\eta)$ и $\bar{h}^*(x,\eta)$.

2.3. Розв'язування задачі Коші для рівнянь загального виду

Лінійним інтегро-диференціальним рівняння *загального вигляду* будемо називати рівняння

$$y^{(n)}(x)+\sum_{r=1}^{n}Q_{n-r}(x)y^{n-r}(x)+\lambda_0\int_0^1\sum_{j=0}^{m}K_j(x,t)y^{(j)}(t)dt=f(x). \qquad (2.50)$$

Досліджуємо інтегро-диференціальне рівняння (2.50) в випадку, коли $m \succ n$. Випадок $m < n$ було розглянуто вище.

Нехай

$$m = n + p,$$

де $n, p \in N$. Розглянемо питання про існування розв'язку рівняння (2.50), який задовольняє умовам:

$$y^{(2)}(0)= D_{s+1}, (S = 0, 1, .., m-1). \qquad (2.51)$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.5. Нехай:

1) $a_S(x),\ f(x)\in C^p[x]), s=0,1,\ldots,n-1, K_j(x,t)\in C_x^p[R]$ та неперервні по t;

2) $y_1(x),.., y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння

$$L[y]=y^{(n)}(x)+\sum_{r=1}^{n}a_n(x)y^{(n-r)}(x)=0; \qquad (2.52)$$

3) визначник Фредгольма $D(\lambda_0)\neq 0$ для ядра $N''(x,\alpha)$.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2.50), (2.51), який можна подати в вигляді (2.58), де $F(x)$ – розв'язок інтегрального рівняння (2.60), $\varphi(x,\eta)$ – розв'язок задачі (3.57).

Доведення.

Продиференціюємо інтегро-диференціальне рівняння (2.50) p разв. Маємо:

$$\frac{d^p}{dx^p}\ L[y]+\lambda_0\int_0^1\ \sum_{j+0}^{m}\ \frac{d^p\ K_j\ (x,i)}{dx^p}\ y^{(j)}{}_{(t)}dt=\frac{d^p\ f(x)}{dx^p}\equiv f_1(x). \qquad (2.53)$$

Оскільки вираз $\frac{d^p}{dx^p}L[y]$ має порядок

$$n+p=m,$$

то до даного рівняння можна застосувати результати попереднього параграфа. Для знаходження розв'язку рівняння (2.53) застосуємо другий спосібзірозглянутих вище.зіцією метою запишемо рівняння (2.53) в вигляді

$$\frac{d^p}{dx^p} \quad L[y]=F(x), \tag{2.54}$$

де

$$F(x)=f_1(x)-\lambda_0\int_0^1 \sum_{j=0}^{m} \frac{d^p K_j\,(x,1)}{dx^p}\ y^{(j)}(t)dt \tag{2.55}$$

Нехай $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальна система розв’язків рівняння

$$L[y]=0.$$

Тоді легко перевірити, також функції $u_1(x)$, ., $u_m(x)$ – фундаментальна система розв’язків рівняння

$$\frac{d^p}{dx^p}L[y]=0,$$

де

$$\begin{gathered} u_i(x)=\int_0^x \quad (x-t)^{p-i}\, y_i(t)dt,\ (i=1,2,\ldots,n), \\ u_{n-k}(x)=x^{k-1},\ \ (k=1,2,\ldots,\ p) \end{gathered} \tag{2.56}$$

Нехай функція

$$y=\varphi(x,\ \eta)$$

– розв'язок задачі

$$\frac{d^p}{dx^p} \quad L[y]=0\ \ y^{(b)}(\eta)=0, y^{(m-1)}(\eta)=1(b=0,1,\ldots,m-2). \tag{2.57}$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.54) має вигляд

$$y(x)=\sum_{i=1}^{m} c_i u_i(x)+\int_0^x \varphi(x,\eta)F(\eta)d\eta. \tag{2.58}$$

Використовуючи початкову умову (3.2), ми однозначно визначимо постійні c_i $(i=1,2,\ldots,m)$ із системи:

$$\begin{aligned} &c_1u_1\left(0\right)+...+c_2u_2\left(0\right)+...+c_mu_m(0)=D_1 \\ &c_1u_1'\left(0\right)+...+c_2u_2'\left(0\right)+...+c_mu_m'(0)=D_2 \\ &c_1u_1^{(m-1)}\left(0\right)+...+c_2u_2^{(m-1)}\left(0\right)+...+c_mu_m^{(m-1)}(0)=D_m \end{aligned} \tag{2.59}$$

оскільки визначник даної системи $W\left[u\right]\neq 0$ відмінний від 0.

Таким чином, в формулі (2.58) постійні c_i $\left(i=1,2,...,m\right)$ будемо вважати однозначно визначеними із системи (2.59). Диференціюючи формулу (2.58) отримаємо:

$$\begin{aligned} &y^s\left(x\right)=\sum_{i=1}^{m}c_iu_i^s\left(x\right)+\int_0^x\frac{d^s\varphi\left(x,\eta\right)}{dx^s}F\left(\eta\right)d\eta(s=0,...,m-1)\,, \\ &y^s\left(x\right)=\sum_{i=1}^{m}c_iu_i^m\left(x\right)+\int_0^x\frac{d^m\varphi\left(x,\eta\right)}{dx^m}F\left(\eta\right)d\eta+F\left(x\right) \end{aligned} \tag{2.60}$$

Для визначення $F(x)$ підставляємо (2.58) та (2.60) в вираз (2.59). Маємо:

$$\begin{aligned} &F\left(x\right)+\lambda_0\int_0^1\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial^pK_i(x,t)}{\partial\times P}\left[\sum_{i=1}^{m}c_iu_i^j\left(t\right)+\int_0^t\frac{d^j\varphi\left(t,\eta\right)}{dx^j}F\left(\eta\right)d\eta\right]dt \\ &+\lambda_0\int_0^1\frac{\partial^pK_m(x,t)}{\partial x^p}F\left(\eta\right)d\eta=f_1(x) \end{aligned} \tag{2.61}$$

Рівняння (2.61) зведемо до лінійного інтегрального рівняння Фредгольма

$$F\left(x\right)+\lambda_0\int_0^1N\left(x,\eta\right)F\left(\eta\right)d\eta=h(x)\,. \tag{2.62}$$

Зараз

$$N\left(x,\eta\right)=\lambda_0\int_\eta^1\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial^pK_i(x,t)}{\partial x^p}\frac{\partial^j\varphi(t,\eta)}{\partial t^j}dt+\frac{\partial^pK_m(x,\eta)}{\partial x^p}\,. \tag{2.63}$$

$$h(x)=\frac{\alpha^pf(x)}{dx^p}-\lambda_0\int_0^1\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial^pK_j(x,t)}{\partial x^p}\sum_{i=1}^{m}C_iU_i^{(j)}(t)dt\,. \tag{2.64}$$

Оскільки $D(\lambda_0)\neq 0$ для ядра $N(x,\eta)$, то, згіднозіпершою фундаментальною теоремою Фредгольма [36], існує єдиний розв’язок рівняння (2.62). Підставивши знайдений розв’язок $F(x)$ в формулу (2.58), отримаємо розв’язок задачі (2.50), (2.51).

Покажемо, також розв'язок задачі (2.50), (2.50), поданий з формулою (2.62), єдиний. Дійсно, нехай крім даного розв'язку $Z(x)$ існує ще один розв'язок $y(x)$ задачі (2.50), (2.51).

Розглянемо функцію

$$V(x) = y(x) - z(x). \qquad (2.65)$$

Функція $V(x)$ задовольняє однорідній задачі

$$L[V] + \lambda_0 \int_0^1 \sum_{j=0}^{m} K_j(x,t) V^{(j)}(t) dt = 0, \qquad (2.66)$$

$$V^{(s)}(0) = 0, \quad (s=0,1,\ldots,m\text{-}1).$$

Загальний розв'язок рівняння (2.66) запишеться в вигляді

$$V(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i U_i(x) + \int_0^x \varphi(x,\eta) F(\eta) d\eta. \qquad (2.67)$$

Зараз постійні C_i визначаються із однорідної системи (2.59), тобто

$$C_i \equiv 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m);$$

функція $F(x)$ визначається із рівняння

$$F(x) + \lambda_0 \int_0^1 \mathrm{N}(x,\eta) F(\eta) d\eta = 0. \qquad (2.68)$$

оскільки

$$h(x) \equiv 0.$$

Так як $D(\lambda_0) \neq 0$ для ядра $N(x,\eta)$, це єдиним неперервним розв'язком інтегрального рівняння (2.68) буде функція $F(x) \equiv 0$. Тодізі(2.67) отримуємо, також

$$V(x) \equiv 0,$$

звідки випливає:

$$y(x) \equiv z(x).$$

Теорему доведено.

Зауваження: для знаходження розв'язку задачі (2.67) можна було б використати перший спосіб попереднього пункту. В цьому випадку ми знову отримали б, також

$$V(x) \equiv 0.$$

Узагальнимо результати на випадок загальних початкових умов, також містять інтегральні члени:

$$\sum_{s=0}^{q-1}\left[\alpha_{p1} y^{(s)}(0) + \int_0^1 \beta_{p1}(x) y^{(s)}(x)dx\right] = D_{p+1}, \tag{2.69}$$

$$(p = 0, 1, \ldots, \nu - 1),$$

де α_{p1} та β_{p2} – відомі постійні.

Нехай потрібно побудувати розв'язок інтегрально-диференціального рівняння (2.5) при початкових умовах (2.69). В даному випадку

$$q = n = k.$$

Застосуємо отримані вище результати. Для визначення сталих C_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) підставимо розв'язок $y(x)$, поданий в вигляді (2.9), в початкові умови (2.69). Маємо:

$$\sum_{s=0}^{n-1}\left[\alpha_{ps} \sum_{m=1}^{n} c_m y_k{}^{(s)}(0) + \int_0^1 \beta_{ps}(x) \sum_{m=1}^{n} c_m y_k{}^{(s)}(x)dx\right] = D_{p+1}, \tag{2.70}$$

$$(p = 0, 1, \ldots, \nu - 1),$$

Вираз (2.70) запишемо в вигляді

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{s=0}^{n-1}\left[\alpha_{ps} y_k^{(s)}(0) + \int_0^1 \beta_{ps}^{(s)} y_k^{(s)}(x)dx\right] = D_{p+1}. \tag{2.71}$$

Введемо позначення:

$$A_{pk} \equiv \sum_{s=0}^{n-1}\left[\alpha_{ps} y_k^{(s)}(0) + \int_0^1 \beta_{ps}(x) y^{(s)}(x)dx\right], \tag{2.72}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ p = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Тоді система (2.70) запишеться в вигляді:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{pk} c_k = D_{p+1},\ (p = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2.73}$$

Для однозначного визначення сталих c_k ($k = 1, 2, ..., n$) будемо вимагати, такожб визначник

$$\Delta = \left| A_{pk} \right|$$

системи (2.70) не дорівнював нулю. Тодізіцієї системи ми можемо однозначно визначити сталі c_k (k = 1,..., n).

Таким чином, для задачі (2.5), (2.70) має місце наступне твердження.

Теорема 2.6. Нехай:

1) виконані умови теореми 2.5;

2) визначник

$$\Delta = \left| A_{pk} \right| \neq 0 .$$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2.5), (2.70), який можна подати в вигляді:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) + \int_0^x \varphi(x,\eta) F(\eta) d\eta. \qquad (2.74)$$

Зараз c_k – відомі сталі, також визначаютьсязісистеми (2.73), $F(\eta)$ – розв'язок інтегрального рівняння (2.17).

Таким чином, зміна початкових умов вплинула тільки на визначення сталих c_k в розв'язанні, також в свою чергу призвело до змін правої частини $h(x)$ інтегрального рівняння (2.17). Ядро $N(x,\eta)$ інтегрального рівняння (2.17) не залежить від типу початкових умов.

РОЗДІЛ 3
ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИХ РІВНЯНЬЗІСТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

3.1. Випадок простих диференціальних коренів характеристичного рівняння

Розглянемо лінійний інтегро-диференціальний оператор виду

$$A[z]=L_n[z]+\int\limits_a^x \sum_{j=1}^{b} P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}M_m[z]dt. \tag{3.1}$$

Нехай $F_n(r)$ також $\Phi_m[r]$ – характеристичні поліноми відповідно операторів L_n також M_m.

Лема 3.1.

$$A\left[e^{rx}\right]=\left[F_n(r)+\Phi_m(r)\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(0)}{\left(B_j+r\right)^{\nu+1}}\right]e^{rx}-\sum_{j-1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\left\{\Phi_m(r)\frac{e^{ra}}{\left(r+B_j\right)^{\nu+1}}\right\}P_j^{(\nu)}(x-a)e^{-B_j(x-a)}$$

$$j=\overline{1,b}\,,\quad \nu=\overline{0,m_j}\,.$$

Доведення.

За означенням лінійних диференційованих оператора маємо:

$$A[z]=L_n[z]+\int\limits_a^x \sum_{j=1}^{b} P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}M_m[z]dt$$

де $z(x)$ має наступний вид:

$$z(x)=e^{rx}.$$

Так як $F_n(r)$ також $\Phi_m[r]$ – характеристичні поліноми відповідно операторів L_n також M_m, це

$$L_n[z]=L_n\left[e^{rx}\right]=F_n(r)e^{rx}.$$

Аналогічно:

$$M_m[z]=\Phi_m(r)e^{rt}.$$

Підставляючи в (3.1) дані значення, отримаємо:

$$A\left[e^{rx}\right] = F_n(r)e^{rx} + \sum_{j-1}^{b}\int_a^x P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}\Phi_m(r)e^{rt}dt =$$

$$= F_n(r)e^{rx} + \sum_{j-1}^{b}\Phi_m(r)\int_a^x P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}e^{-r(x-t)}e^{rt}dt =$$

$$= F_n(r)e^{rx} + \Phi_m(r)e^{rx}\sum_{j-1}^{b}\int_a^x P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}e^{-r(x-t)}dt =$$

$$= F_n(r)e^{rx} + \Phi_m(r)e^{rx}\sum_{j-1}^{b}\int_a^x P_j(x-t)e^{-(B_j+r)(x-t)}dt$$

Інтеграл $\int_a^x P_j(x-t)e^{-(B_j+r)(x-t)}dt$ обчислимо по частинам. Маємо:

$$U = P_j(x-t) \qquad dU = -P_j'(x-t)dt$$

$$dV = e^{-(B_j+r)(x-t)}dt \qquad V = \frac{1}{B_j+r}e^{-(B_j+r)(x-t)}$$

Тоді:

$$\int_a^x P_j(x-t)e^{-(B_j+r)(x-t)}dt = \frac{P_j(x-t)}{B_j+r}e^{-(B_j+r)(x-t)}/_a^x +$$

$$+\frac{1}{B_j+r}\int_a^x P_j'(x-t)e^{-(B_j+r)(x-t)}dt = \frac{P_j(0)}{B_j+r} - \frac{P_j(x-a)}{B_j+r}e^{-(B_j+r)(x-a)} +$$

$$+\frac{1}{B_j+r}\int_a^x P_j'(x-t)e^{-(B_j+r)(x-t)}dt$$

Розглянемо $\int_a^x P_j'(x-t)e^{-(B_j+r)(x-t)}dt$:

$$U = P_j'(x-t) \qquad dU = P_j''(x-t)dt$$

$$dV = e^{-(B_j+r)(x-t)}dt \qquad V = \frac{1}{B_j+r}e^{-(B_j+r)(x-t)}$$

Отримаємо:

$$\int_a^x P_j'(x-t)e^{-(B_j+r)(x-t)}dt = \frac{P_j'(x-t)}{B_j+r}e^{-(B_j+r)(x-t)}\Big/_a^x + \frac{1}{B_j+r}\int_a^x P_j''(x-t)e^{-(B_j+r)(x-t)}dt$$

$$= \frac{P_j'(0)}{B_j+r} - \frac{P_j'(x-a)}{B_j+r}e^{-(B_j+r)(x-a)} + \frac{1}{B_j+r}\int_a^x P_j''(x-t)e^{-(B_j+r)(x-t)}dt.$$

Також:

$$\int_a^x P_j(x-t)e^{-(B_j+r)(x-t)}dt = \frac{P_j(0)}{B_j+r} + \frac{P_j'(0)}{(B_j+r)^2} -$$

$$-\left[\frac{P_j(x-a)}{B_j+r} + \frac{P_j'(x-a)}{(B_j+r)^2}\right]e^{-(B_j+r)(x-t)} +$$

$$+\frac{1}{(B_j+r)^2}\int_a^x P_j''(x-t)e^{-(B_j+r)(x-t)}dt$$

Користуючись методом повної математичної індукції отримаємо, також:

$$\int_a^x P_j(x-t)e^{-(B_j+r)(x-t)}dt = \frac{P_j(0)}{B_j+r} + \frac{P_j'(0)}{(B_j+r)^2} +$$

$$+\frac{P_j''(0)}{(B_j+r)^3} + \ldots + \frac{P_j^{m_j}(0)}{(B_j+r)^{m_j+1}} -$$

$$-\left[\frac{P_j(x-a)}{B_j+r} + \frac{P_j'(x-a)}{(B_j+r)^2} + \ldots + \frac{P_j^{(m_j)}(x-a)}{(B_j+r)^{m_j+1}}\right]e^{-(B_j+r)(x-t)}dt$$

Таким чином,

$$\int_a^x P_j(x-t)e^{-(B_j+r)(x-t)}dt = \sum_{v=0}^{m_j}\frac{P_j^{(v)}(0)}{(B_j+r)^{v+1}} - \sum_{v=0}^{m_j}\frac{P_j^{(v)}(x-a)}{(B_j+r)^{v+1}}e^{-(B_j+r)(x-a)}$$

Підставляючи замість $\int_a^x P_j(x-t)e^{-(B_j+r)(x-t)}dt$ його знайдене значення, маємо:

$$A\left[e^{rx}\right]=L_n\left(e^{rx}\right)+\int_a^x\sum_{j=1}^{b}P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}M_m\left(e^{rt}\right)dt=F_n(r)e^{rx}+\Phi_m(r)e^{rx}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{b}\left(\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(0)}{\left(B_j+r\right)^{\nu+1}}-\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(x-a)}{\left(B_j+r\right)^{\nu+1}}e^{-\left(B_j+r\right)(x-a)}\right)=\left[F_n(r)+\Phi_m(r)\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(0)}{\left(B_j+r\right)^{\nu+1}}\right]e^{rx}-$$

$$-\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\Phi_m(r)\frac{P_j^{(\nu)}(x-a)}{\left(B_j+r\right)^{\nu+1}}e^{-B_j(x-a)}e^{ra}=\left[F_n(r)+\Phi_m(r)\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(0)}{\left(B_j+r\right)^{\nu+1}}\right]e^{rx}-$$

$$-\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\left\{\Phi_m(r)\frac{e^{ra}}{\left(B_j+r\right)^{\nu+1}}\right\}P_j^{(\nu)}(x-a)e^{-B_j(x-a)}$$

Лему доведено.

Наслідок 3.1.

$$A\left[\sum_{i=1}^{N}c_ie^{r_ix}\right]=\sum_{i=1}^{N}c_i\left[F_n(r_i)+\Phi_m(r_i)\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(0)}{\left(B_j+r\right)^{\nu+1}}\right]e^{r_ix}-$$

$$-\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\left\{\sum_{i=1}^{N}c_i\Phi_m(r_i)\frac{e^{r_ia}}{\left(B_j+r\right)^{\nu+1}}\right\}P_j^{(\nu)}(x-a)e^{-B_j(x-a)}$$

де c_i – довільні сталі.

Доведення.

За означенням лінійних диференційованих оператора маємо

$$A[z]=L_n[z]+\int_a^x\sum_{j=1}^{b}P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}M_m[z]dt$$

де

$$z(x)=\sum_{i=1}^{N}c_ie^{r_ix}.$$

Оскільки $F_n(r)$ також $\Phi_m[r]$ – характеристичні поліноми відповідно операторів L_n також M_m, то:

$$L_n[z]=L_n\left[\sum_{i=1}^{N}c_ie^{r_ix}\right]=\sum_{i=1}^{N}c_iL_n\left[e^{r_ix}\right]=\sum_{i=1}^{N}c_iF_n(r_i)e^{r_ix}.$$

Аналогічно

$$M_m[z]=\sum_{i=1}^{N}c_i\Phi_m(r_i)e^{r_it}\ .$$

Підставляючи в інтегро-диференціальний оператор отримані значення, маємо

$$A\left[\sum_{i=1}^{N}c_ie^{r_ix}\right]=\sum_{i=1}^{N}c_iF_n(r_i)e^{r_ix}+\sum_{j=1}^{b}\int_a^x P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}\sum_{i=1}^{N}c_i\Phi_m(r_i)e^{r_ix}dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}c_iF_n(r_i)e^{r_ix}+\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{N}c_i\Phi_m(r_i)\int_a^x P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}e^{-r_i(x-t)}e^{r_ix}dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}c_iF_n(r_i)e^{r_ix}+\sum_{i=1}^{N}c_i\Phi_m(r_i)\sum_{j=1}^{b}\int_a^x P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}e^{-r_i(x-t)}dte^{r_ix}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}c_iF_n(r_i)e^{r_ix}+\sum_{i=1}^{N}c_i\Phi_m(r_i)e^{r_ix}\sum_{j=1}^{b}\int_a^x P_j(x-t)e^{-(B_j+r_i)(x-t)}dt.$$

Як та при доведенні леми 3.1, отримаємо

$$\int_a^x P_j(x-t)e^{-(B_j+r)(x-t)}dt=\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(0)}{(B_j+r_i)}-\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(x-a)}{(B_j+r_i)^{\nu+1}}e^{-(B_j+r_i)(x-a)}$$

Підставляючи замість $\int_a^x P_j(x-t)e^{-(B_j+r_i)(x-t)}dt$ його отримане значення, одержимо:

$$A\left[\sum_{i=1}^{N}c_ie^{r_ix}\right]=L_n\left[\sum_{i=1}^{N}c_ie^{r_ix}\right]\int_a^x\sum_{j=1}^{b}P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}M_m\left[\sum_{i=1}^{N}c_ie^{r_it}\right]dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}c_iF_n(r_i)e^{r_ix}+\sum_{i=1}^{N}c_i\Phi_m(r_i)e^{r_ix}\sum_{j=1}^{b}\left(\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(0)}{(B_j+r_i)^{\nu+1}}-\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(x-a)}{(B_j+r_i)^{\nu+1}}e^{-(B_j+r_{i_j})(x-a)}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}c_i\left[F_n(r_i)+\Phi_m(r_i)\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(0)}{(B_j+r_i)^{\nu+1}}\right]\times e^{r_ix}-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}c_i\Phi_m(r_i)\frac{P_j^{(\nu)}(x-a)}{(B_j+r_i)^{\nu+1}}e^{-B_j(x-a)}e^{r_ix}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}c_i\left[F_n(r_i)+\Phi_m(r_i)\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(0)}{(B_j+r_i)^{\nu+1}}\right]e^{r_i x}-$$

$$-\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\left\{\sum_{i=1}^{N}c_i\Phi_m(r_i)\frac{e^{r_i a}}{(B_j+r_i)^{\nu+1}}\right\}P_j^{(\nu)}(x-a)e^{-B_j(x-a)},$$

також та потрібно було довести.

Рівняння

$$F_n(r)+\Phi_m(r)\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(0)}{(B_j+r)^{\nu+1}}=0 \tag{3.2}$$

є *характеристичним рівнянням* для лінійних диференційованих рівняння виду

$$L_n[z]+\int_a^x\sum_{j=1}^{b}P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}M_m[z]dt=0, \tag{3.3}$$

де $F_n(r)$ також $\Phi_m(r)$ – характеристичні поліноми відповідно операторів L_n також M_m.

Теорема 2.1. Нехай характеристичне рівняння (3.2) інтегро-диференційного рівняння (3.3) має тільки прості дійсні корені $r_1,\ldots,r_n$. Якщо

$$\Phi(-B_i)\neq 0,\ i=\overline{1,N}$$

то функція

$$z(x)=\sum_{i=1}^{N}c_i e^{r_i x}$$

є розв’язком даного рівняння, де сталі задовольняють системі лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{c_i\Phi_m(r_i)e^{r_i a}}{(r_i+B_j)^{\nu+1}}=0, \tag{3.4}$$

$$\nu=\overline{0,m_j},\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,b}$$

Доведення.

Нехай

$$L_n[z]+\int_a^x \sum_{j=1}^{b} P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}M_m[z]dt=0$$

– інтегро-диференціальне рівняннязісталими коефіцієнтами. Підставимо замість $z(x)$ його значення та використовуючи наслідок 3.1, отримаємо:

$$L_n\left[\sum_{i=1}^{N} c_i e^{r_i x}\right]+\int_a^x \sum_{j=1}^{b} P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}M_m\left[\sum_{i=1}^{N} c_i e^{r_i x}\right]dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{N} c_i\left[F_n(r_i)+\Phi_m(r_i)\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(0)}{(B_j+r_i)^{\nu+1}}\right]e^{r_i x}-$$

$$-\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\left\{\sum_{i=1}^{N} c_i\Phi_m(r_i)\frac{e^{r_i a}}{(B_j+r_i)^{\nu+1}}\right\}P_j^{(\nu)}(x-a)e^{-B_j(x-a)}=0,$$

Оскільки $r_1,\ldots,r_n$ – корені характеристичного рівняння,абодовільні сталі $c_1,\ldots,c_n$ задовольняють умови (3.4), то

$$F_n(r_i)+\Phi_m(r_i)\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(0)}{(B_j+r_i)^{\nu+1}}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{N} c_i\Phi_m(r_i)\frac{e^{r_i a}}{(r_i+B_j)^{\nu+1}}=0,$$

$$j=\overline{1,b},\ i=\overline{1,N},\ \nu=\overline{0,m_j}.$$

Теорему доведено.

Розглянемо декілька прикладів розв’язання лінійних диференційованих рівнянь.

Приклад 3.1.

$$y''-4\int_0^x e^{-(x-t)}[y'(t)+y(t)]dt=0$$

Корені характеристичного рівняння:

$$r^2-\frac{4(r+1)}{r+1}=0$$

$$r_1=-1,\quad r_2=2,\quad r_3=-2$$

Тоді

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{2x}$$

Залежність між c_1, c_2, c_3 визначимо із співвідношення

$$y''(0)=0.$$

$$y'=-c_1e^{-x}-2c_2e^{-2x}+2c_3e^{2x},$$

$$y''=c_1e^{-x}+4c_2e^{-2x}+4c_3e^{2x},$$

$$y''(0)=c_1+4c_2+4c_3,$$

тоді

$$c_1=-4c_2-4c_3.$$

Також

$$y=c_2\left(e^{-2x}-4e^{-x}\right)+c_3\left(e^{+2x}-4e^{-x}\right).$$

Загальний розв'язок:

$$y=a_1\left(e^{2x}-4e^{-x}\right)+a_2\left(e^{-2x}-4e^{-x}\right),$$

де a_1, a_2 – довільні сталі.

Приклад 3.2.

$$y''-\int_0^x e^{-(x-t)}\left[y^{IV}(t)-y^{III}(t)+2y'(t)\right]dt=0$$

Характеристичне рівняння:

$$r^2-\frac{r\left(r^3-r^2+2\right)}{r+1}=0,$$

$$-r^4+2r^3+r^2-2r=0,$$

$$r\left(r^2-1\right)(r-2)=0,$$

$$r_1=-1,\quad r_2=0,\quad r_3=1,\quad r_4=2.$$

Тоді:

$$y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + c_4 e^{2x},$$
$$y''(a) = c_2 e^{a} + c_3 e^{-a} + 4c_4 e^{2a},$$
$$c_3 = -c_2 e^{2a} - 4c_4 e^{3a}.$$

Також:

$$y = c_1 + c_2 e^{x} + \left(-c_2 e^{2a} - 4c_4 e^{3a}\right)e^{-x} + c_4 e^{2x} =$$
$$= c_1 + c_2\left(e^{x} - e^{2a-x}\right) + c_4\left(e^{2x} - 4e^{3a-x}\right),$$

Загальний розв'язок:

$$y = a_1 + a_2\left(e^{x} - e^{2a-x}\right) + a_3\left(e^{2x} - 4e^{3a-x}\right)$$

де a_1, a_2, a_3 – довільні сталі.

2.2. Випадки кратних дійсних коренів характеристичного рівняння

Лема 3.2.
$$A\left[x^{\mu} e^{rx}\right] = \frac{d^{\mu}}{dr^{(\mu)}}\left[P(r)e^{rx} - \sum_{j=1}^{b}\sum_{v=0}^{m_j} G_j^{(v)}(r) P_j^{(v)}(x-a)e^{-B_j(x-a)}\right],$$

де

$$P(r) = F_n(r) + \Phi_m(r)\sum_{j=1}^{b}\sum_{v=0}^{m_j}\frac{P_j^{(v)}(0)}{\left(B_j + r\right)^{v+1}}$$

$$G_j^{(v)}(r) = \frac{\Phi_m(r)}{\left(r + B_j\right)^{v+1}} e^{ra},$$

$$j = \overline{1, b}, \quad v = \overline{0, m_j}.$$

Доведення.

За означенням лінійних диференційованих оператора, маємо:

$$A[z] = L_n[z] + \int_a^x \sum_{j=1}^{b} P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)} M_m[z]dt$$

де

$$z(x) = x^{\mu} e^{rx}.$$

$$A\left[x^{\mu}e^{rx}\right]=\frac{d^{\mu}}{dr^{(\mu)}}A\left[e^{rx}\right].$$

Підставляючи отримані значення в (3.1), отримаємо

$$A\left[x^{\mu}e^{rx}\right]=L_n\left[x^{\mu}e^{rx}\right]+\int_a^x\sum_{j=1}^{b}P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}M_m\left[t^{\mu}e^{rt}\right]dt=$$

$$=\frac{d^{\mu}}{dr^{(\mu)}}L_n\left[e^{rx}\right]+\sum_{j=1}^{b}\int_a^x P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}\frac{d^{\mu}}{dr^{(\mu)}}M_m\left[e^{rt}\right]dt=$$

$$=\frac{d^{\mu}}{dr^{(\mu)}}\left\{L_n\left[e^{rx}\right]+\sum_{j=1}^{b}\int_a^x P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}M_m\left[e^{rt}\right]dt\right\}=I$$

Беручи до уваги лему 3.1, отримаємо, також:

$$I=\frac{d^{\mu}}{dr^{(\mu)}}\left\{A\left[e^{rx}\right]\right\}=$$

$$=\frac{d^{\mu}}{dr^{(\mu)}}\left\{\left[F_n(r)+\Phi_m(r)\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(0)}{(B_j+r)^{\nu+1}}\right]e^{rx}-\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\left\{\Phi_m(r)\frac{e^{ra}}{(B_j+r)^{\nu+1}}\right\}P_j^{(\nu)}(x-a)e^{-B_j(x-a)}\right\}=$$

$$=\frac{d^{\mu}}{dr^{(\mu)}}\left[P(r)-\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}G_j^{(\nu)}(r)P_j^{(\nu)}(x-a)e^{-B_j(x-a)}\right],$$

де

$$P(r)=F_n(r)+\Phi_m(r)\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(0)}{(B_j+r)^{\nu+1}},$$

$$G_j^{(\nu)}(r)=\frac{\Phi_m(r)}{(r+B_j)^{\nu+1}}e^{ra},$$

$$j=\overline{1,b},\quad \nu=\overline{0,m_j}.$$

Лему доведено.

З доведеної леми випливає наступний наслідок.

Наслідок 3.2.

$$A\left[\sum_{k=1}^{l}\sum_{M=0}^{S_k-1}c_k^{(\mu)}x^{\mu}e^{r_k x}\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{l}\sum_{M=0}^{S_k-1}c_k^{(\mu)}\frac{d^{\mu}}{dr_k^{(\mu)}}\left[P(r_k)e^{r_k x}-\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}G_j^{(\nu)}(r_k)P_j^{(\nu)}(x-a)e^{-B_j(x-a)}\right].$$

де

$$P(r_k) = F_n(r_k) + \Phi_m(r_k) \sum_{j=1}^{b} \sum_{\nu=0}^{m_j} \frac{P_j^{(\nu)}(0)}{(B_j + r_k)^{\nu+1}},$$

$$G_j^{(\nu)}(r_k) = \frac{\Phi_m(r_k)}{(r_k + B_j)^{\nu+1}} e^{r_k a},$$

$$j = \overline{1,b}, \quad \nu = \overline{0,m_j},$$

а c_k – довільні сталі, $k = \overline{1,l}$.

Доведення.

Функція $z(x)$ має наступний вигляд:

$$z(x) = c_1^{(0)} e^{r_i x} + c_1^{(1)} x e^{r_1 x} + \ldots + c_1^{(S_1 - 1)} x^{S_1 - 1} e^{r_1 x} + \ldots$$

$$\ldots + c_e^{(0)} e^{r_e x} + c_e^{(1)} x e^{r_e x} + \ldots + c_e^{(S_e - 1)} x^{S_e - 1} e^{r_e x} = \sum_{k=1}^{l} \sum_{\mu=0}^{S_k - 1} c_k^{(\mu)} x^{\mu} e^{r_k x}$$

$$A\left[x^{\mu} e^{r_k x}\right] = \frac{d^{\mu}}{dr_k^{(\mu)}} A\left[e^{r_k x}\right].$$

Оскількиабо– лінійний оператор, то

$$A\left[\sum_{k=1}^{l} \sum_{\mu=0}^{S_k - 1} c_k^{(\mu)} x^{\mu} e^{r_k x}\right] = \sum_{k=1}^{l} \sum_{\mu=0}^{S_k - 1} c_k^{(\mu)} A\left[x^{\mu} e^{r_k x}\right],$$

тоді маємо

$$A\left[\sum_{k=1}^{l} \sum_{\mu=0}^{S_k-1} c_k^{(\mu)} x^{\mu} e^{r_k x}\right] = \sum_{k=1}^{l} \sum_{\mu=0}^{S_k-1} c_k^{(\mu)} A\left[x^{\mu} e^{r_k x}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \sum_{\mu=0}^{S_k-1} c_k^{(\mu)} \left\{ L_n\left[x^{\mu} e^{r_k x}\right] + \int_a^x \sum_{j=1}^{b} P_j(x-t) e^{-B_j(x-t)} M_m\left[t^{\mu} e^{r_k t}\right] dt \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \sum_{\mu=0}^{S_k-1} c_k^{(M)} \frac{d^{\mu}}{dr_k^{(\mu)}} L_n\left[e^{r_k x}\right] +$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \sum_{\mu=0}^{S_k-1} \sum_{j=1}^{b} c_k^{(\mu)} \int_a^x P_j(x-t) e^{-B_j(x-t)} \frac{d^{\mu}}{dr_k^{(\mu)}} \left\{ L_n\left[e^{r_k x}\right] + \sum_{j=1}^{b} \int_a^x \sum_{j=1}^{b} P_j(x-t) e^{-B_j(x-t)} M_m\left[e^{r_k t}\right] dt \right\} = B$$

Враховуючи наслідок 3.1, маємо:

$$B=\sum_{k=1}^{l}\sum_{\mu=0}^{S_k-1}c_k^{(\mu)}\frac{d^{\mu}}{dr_k^{(\mu)}}\left\{\left[F_n(r_k)+\Phi_m(r_k)\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(0)}{(B_j+r_k)^{\nu+1}}\right]e^{r_k x}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\Phi_m(r_k)\frac{e^{r_k a}}{(B_j+r_k)^{\nu+1}}P_j^{(\nu)}(x-a)e^{-B_j(x-a)}\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{l}\sum_{\mu=0}^{S_k-1}c_k^{(\mu)}\frac{d^{\mu}}{dr^{(\mu)}}\left[P(r_k)e^{r_k x}-\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}G_j^{(\nu)}(r_k)P_j^{(\nu)}(x-a)e^{-B_j(x-a)}\right],$$

де

$$P(r_k)=F_n(r_k)+\Phi_m(r_k)\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(0)}{(B_j+r_k)^{\nu+1}},$$

$$G_j^{(\nu)}(r_k)=\frac{\Phi_m(r_k)}{(r_k+B_j)^{\nu+1}}e^{r_k a},$$

$$j=\overline{1,b},\quad \nu=\overline{0,m_j},$$

також й потрібно було довести.

Теорема 3.2. Нехай характеристичне рівняння (3.2) лінійних диференційованих рівняння (3.3) має кратні дійсні корені $r_1,\ldots,r_e$ відповіднозікратностями $c_1,\ldots,c_e$. Якщо

$$\Phi(-B_k)\neq 0,\quad k=\overline{1,l},$$

то функція

$$z(x)=\sum_{k=1}^{l}\sum_{\mu=0}^{S_k-1}c_k^{(\mu)}x^{\mu}e^{r_k x}$$

є розв’язком даного рівняння, де сталі $c_1,\ldots,c_e$ задовольняють системі наступних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{\mu=0}^{S_k-1}\frac{d^{\mu}}{dr_k^{(\mu)}}G_j^{(\nu)}(r_k)c_k^{(\mu)}=0, \qquad (3.5)$$

де

$$G_j^{(\nu)}(r_k)=\frac{\Phi_m(r_k)}{(r_k+B_j)^{\nu+1}}e^{r_k a},\quad j=\overline{1,b},\quad \nu=\overline{0,m_j},\quad k=\overline{1,l}.$$

Доведення.

Нехай

$$L_n[z] = \int_a^x \sum_{j=1}^{b} P_j(x-t) e^{-B_j(x-t)} M_m[z] dt = 0$$

– інтегро-диференціальне рівняннязісталими коефіцієнтами. Підставимо замість його значення та використовуючи твердження наслідку 3.2, отримаємо:

$$L_n\left[\sum_{k=1}^{l}\sum_{\mu=0}^{S_k-1} c_k^{(\mu)} x^{\mu} e^{r_k x}\right] + \int_a^x \sum_{j=1}^{b} P_j(x-t) e^{-B_j(x-t)} M_m\left[\sum_{k=1}^{l}\sum_{\mu=0}^{S_k-1} c_k^{(\mu)} t^{\mu} e^{r_k t}\right] dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{l}\sum_{\mu=0}^{S_k-1} c_k^{(\mu)} \left\{ \left[F_n(r_k) + \Phi_m(r_k) \sum_{j=1}^{b}\sum_{v=0}^{m_j} \frac{P_j^{(v)}(0)}{(B_j + r_k)^{v+1}} \right] e^{r_k x} = \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{b}\sum_{v=0}^{m_j} \frac{\Phi_m(r_k)}{(r_k + B_j)^{v+1}} e^{r_k a} P_j^{(v)}(x-a) e^{-B_j(x-a)} \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{l}\sum_{\mu=0}^{S_k-1} c_k^{(\mu)} \frac{d^{\mu}}{dr^{(\mu)}} \left[P(r_k) e^{r_k x} - \sum_{j=1}^{b}\sum_{v=0}^{m_j} G_j^{(v)}(r_k) P_j^{(v)}(x-a) e^{-B_j(x-a)} \right] = 0,$$

де

$$P(r_k) = F_n(r_k) + \Phi_m(r_k) \sum_{j=1}^{b}\sum_{v=0}^{m_j} \frac{P_j^{(v)}(0)}{(B_j + r_k)^{v+1}},$$

$$G_j^{(v)}(r_k) = \frac{\Phi_m(r_k)}{(r_k + B_j)^{v+1}} e^{r_k a},$$

$$j = \overline{1,b}, \quad v = \overline{0,m_j}, \quad k = \overline{1,l}.$$

Оскільки $r_1, \ldots, r_e$ – корені характеристичного рівняння,абосталі $c_1, \ldots, c_e$ задовольняють умові (3.5), то

$$F_n(r_k) + \Phi_m(r_k) \sum_{j=1}^{b}\sum_{v=0}^{m_j} \frac{P_j^{(v)}(0)}{(B_j + r_k)^{v+1}} = 0,$$

$$j = \overline{1,b}, \quad v = \overline{0,m_j}, \quad k = \overline{1,l}.$$

Теорему доведено.

3.3. Випадок комплексних коренів характеристичного рівняння

Розглянемо інтегро-диференціальне рівняння

$$A[z] = L_n[z] + \int_a^x \sum_{j=1}^{b} P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)} M_m[z]dt = 0 \qquad (3.6)$$

Якщо $r_1,...,r_n$ – прості дійсні корені лінійних диференційованих рівняння, це функція

$$z(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{r_k x}$$

є розв'язком цього рівняння,абосталі $c_1,...,c_n$ задовольняють системі лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_m(r_k) \frac{e^{r_k a}}{(r_k + B_j)^{v+1}} = 0 .$$

Нехай

$$r_k = \alpha_k + i\mu_k .$$

Виразимо сталі $c_{n+1},...,c_{n+p}$ через $c_1,...,c_n$:

$$c_{n+p} = \sum_{p=1}^{N-n} g_{pk} c_p .$$

Тоді розв'язок лінійних диференційованих рівняння запишеться в вигляді:

$$\tilde{z}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \left(e^{r_k x} + \sum_{p=1}^{N-n} g_{pk} e^{r_n + px} \right).$$

Використовуючи формули Ейлера [11], отримаємо:

$$\tilde{z}(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\left(e^{r_k x}+\sum_{p=1}^{N-n}g_{pk}e^{r_n+px}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{A}_k+i\tilde{B}_k\right)\times$$

$$\times\left[(\cos\mu_k x+i\sin\mu_k x)e^{\alpha_k x}+\sum_{p=1}^{N-n}\left(\tilde{a}_{pk}+i\tilde{b}_{pk}\right)(\cos\mu_{n+p}x+i\sin\mu_{n+p}x)e^{\alpha_{n+p}x}\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\tilde{A}_k\cos\mu_k x-\tilde{B}_k\sin\mu_k x\right)e^{\alpha_k x}+\sum_{p=1}^{N-n}\left(\tilde{a}_{pk}\cos\mu_{n+p}x-\tilde{b}_{pk}\sin\mu_{n+p}x\right)e^{\alpha_{n+p}x}\right]+$$

$$+i\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\tilde{A}_k\sin\mu_k x+\tilde{B}_k\cos\mu_k x\right)e^{\alpha_k x}+\sum_{p=1}^{N-n}\left(\tilde{a}_{pk}\sin\mu_{n+p}x+\tilde{b}_{pk}\cos\mu_{n+p}x\right)e^{\alpha_{n+p}x}\right].$$

Дійсна частина:

$$z_1(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\tilde{A}_k\cos\mu_k x-\tilde{B}_k\sin\mu_k x\right)e^{\alpha_k x}+\sum_{p=1}^{N-n}\left(\tilde{a}_{pk}\cos\mu_{n+p}x-\tilde{b}_{pk}\sin\mu_{n+p}x\right)e^{\alpha_{n+p}x}\right].$$

Уявна частина:

$$z_2(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\tilde{A}_k\sin\mu_k x+\tilde{B}_k\cos\mu_k x\right)e^{\alpha_k x}+\sum_{p=1}^{N-n}\left(\tilde{a}_{pk}\sin\mu_{n+p}x+\tilde{b}_{pk}\cos\mu_{n+p}x\right)e^{\alpha_{n+p}x}\right].$$

Оскільки дійсна й уявна частини є розв'язком лінійних диференційованих рівняння (3.4), це лінійна комбінація цих двох розв'язків також є розв'язком, тобто:

$$z(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(A_k\cos\mu_k x+B_k\sin\mu_k x\right)e^{\alpha_k x}+\sum_{p=1}^{N-n}\left(a_{pk}\cos\mu_{n+p}x+b_{pk}\sin\mu_{n+p}x\right)e^{\alpha_{n+p}x}\right].$$

Розглянемо приклад:

$$y''-2\int_0^x e^{-(x-t)}y(t)dt=0.$$

Характеристичне рівняння:

$$r^2-\frac{2}{r+1}=0,$$
$$r^2(r+1)-2=0,$$
$$r^3+r^2-2=0.$$

Корені:

$$r_1 = 1, \quad r_{2,3} = -1 \pm i.$$

$$\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{i} + \frac{c_3}{-i} = 0,$$

також

$$c_1 = 2c_2 i - 2c_3 i\ .$$

Тоді

$$y = c_2\left[e^{(-1+i)x} + 2ie^x\right] + c_3\left[e^{(-1-i)x} - 2ie^x\right] =$$
$$= c_2\left[e^{-x}(\cos x + i\sin x) + 2ie^x\right] + c_3\left[e^{-x}(\cos x - i\sin x) - 2ie^x\right] =$$
$$= \left(c_2 e^{-x}\cos x + c_3 e^{-x}\cos x\right) + i\left(c_2 e^{-x}\sin x + 2c_2 e^x - c_3 e^{-x}\sin x - 2c_3 e^x\right) =$$
$$= (c_2 + c_3)e^{-x}\cos x + +i\left[(c_2 - c_3)e^{-x}\sin x + (c_2 - c_3)e^{-x}2e^x\right]$$

Загальний розв'язок:

$$y = a_1 e^{-x}\cos x + a_2\left(2e^x + e^{-x}\sin x\right),$$

де a_1, a_2 – довільні сталі.

3.4. Розв'язування рівнянь спеціального типу

Розглянемо питання знаходження розв'язку для лінійних диференційованих рівняння виду:

$$L_n[u] + \sum_{j=1}^{b}\int_a^x \left[P_j(x-t)\cos B_j(x-t) + Q_j(x-t)\sin B_j(x-t)\right]e^{-\alpha_j(x-t)}M_m[u]dt = 0$$

Розглянемо інтегро-диференціальний оператор

$$A[u] = L_n[u] + \sum_{j=1}^{b}\int_a^x \left[P_j(x-t)\cos B_j(x-t) + \right.$$
$$\left. + Q_j(x-t)\sin B_j(x-t)\right]e^{-\alpha_j(x-t)}M_m[u]dt \tag{3.7}$$

За формулами Ейлера:

$$\cos B_j(x-t) = \frac{e^{iB_j(x-t)} + e^{-iB_j(x-t)}}{2}$$
$$\sin B_j(x-t) = \frac{e^{iB_j(x-t)} - e^{-iB_j(x-t)}}{2i}$$

Тоді, підставляючи дані значення, отримаємо:

$$P_j \frac{e^{iB_j(x-t)} + e^{-iB_j(x-t)}}{2} e^{-\alpha_j(x-t)} + Q_j \frac{e^{iB_j(x-t)} - e^{-iB_j(x-t)}}{2i} e^{-\alpha_j(x-t)} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[(P_j - iQ_j)e^{-(\alpha_j - iB_j)(x-t)} + (P_j + iQ_j)e^{-(\alpha_j + iB_j)(x-t)}\right]$$

Введемо наступні позначення:

$$\frac{P_j - iQ_j}{2} e^{-(\alpha_j - iB_j)(x-t)} = H_j(x-t)e^{-z_j(x-t)},$$
$$\frac{P_j + iQ_j}{2} e^{-(\alpha_j + iB_j)(x-t)} = \overline{H}_j(x-t)e^{-\bar{z}_j(x-t)}$$

Підставивши дані значення в (3.7), отримаємо:

$$A[u] = L_n[u] + \sum_{j=1}^{b} \int_a^x \left[H_j(x-t)e^{-z_j(x-t)} + \overline{H}_j(x-t)e^{-\bar{z}_j(x-t)}\right] M_m[u]dt \tag{3.8}$$

Розглянемо дію оператораабона функцію

$$u(x) = e^{\delta x}.$$

Лема 3.3.

$$A\left[e^{\delta x}\right] = \left[F_n(\delta) + \Phi_m(\delta)\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\left(\frac{H_j^{(\nu)}(0)}{(z_j+\delta)^{\nu+1}} + \frac{\overline{H}_j^{(\nu)}(0)}{(\bar{z}_j+\delta)^{\nu+1}}\right)\right]e^{\delta x} -$$
$$-\left[\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\Phi_m(\delta)\left(\frac{H_j^{(\nu)}(0)}{(z_j+\delta)^{\nu+1}}e^{-z_j(x-a)} + \frac{\overline{H}_j^{(\nu)}(0)}{(\bar{z}_j+\delta)^{\nu+1}}e^{-\bar{z}_j(x-a)}\right)\right]e^{\delta x},$$

де $F_n(\delta)$ також $\Phi_m(\delta)$ – характеристичні поліноми відповідно операторів L_n також M_m.

Доведення.

За визначенням лінійних диференційованих оператора, маємо:

$$A[u]=L_n[u]+\sum_{j=1}^{b}\int_a^x\Big(P_j(x-t)\cos B_j(x-t)+$$

$$+Q_j(x-t)\sin B_j(x-t)\Big)e^{-\alpha_j(x-t)}M_m[u]dt=L_n[u]+$$

$$+\sum_{j=1}^{b}\int_a^x\Big(H_j(x-t)e^{-z_j(x-t)}+\overline{H}_j(x-t)e^{-\bar{z}_j(x-t)}\Big)M_m[u]dt,$$

де $u(x)$ має наступний вигляд

$$u(x)=e^{\delta x}.$$

Оскільки $F_n(\delta)$ також $\Phi_m(\delta)$ – характеристичні поліноми відповідно операторів L_n також M_m, то

$$L_n[u]=L_n\left[e^{\delta x}\right]=F_n(\delta)e^{\delta x}.$$

Аналогічно

$$M_m[u]=\Phi_m(\delta)e^{\delta x}.$$

Підставляючи в (3.8) дані значення, отримаємо:

$$A[u]=F_n(\delta)e^{\delta x}+\sum_{j=1}^{b}\int_a^x H_j(x-t)e^{-z_j(x-t)}\Phi_m(\delta)e^{\delta x}dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{b}\int_a^x \overline{H}_j(x-t)e^{-\bar{z}_j(x-t)}\Phi_m(\delta)e^{\delta x}dt=$$

$$=F_n(\delta)e^{\delta x}+\sum_{j=1}^{b}\Phi_m(\delta)\int_a^x H_j(x-t)e^{-z_j(x-t)}e^{\delta x}dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{b}\Phi_m(\delta)\int_a^x \overline{H}_j(x-t)e^{-\bar{z}_j(x-t)}e^{\delta x}dt=F_n(\delta)e^{\delta x}+$$

$$+\sum_{j=1}^{b}\Phi_m(\delta)e^{\delta x}\sum_{j=1}^{b}\int_a^x H_j(x-t)e^{-(z_j+\delta)(x-t)}dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{b}\Phi_m(\delta)e^{\delta x}\sum_{j=1}^{b}\int_a^x \overline{H}_j(x-t)e^{-(\bar{z}_j+\delta)(x-t)}dt=C$$

Як та при доведенні леми 3.1, отримаємо:

1)
$$\int_a^x H_j(x-t)e^{-(z_j+\delta)(x-t)}dt =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{m_j} \frac{H_j^{(\nu)}(0)}{(z_j+\delta)^{\nu+1}} - \sum_{\nu=0}^{m_j} \frac{H_j^{(\nu)}(x-a)}{(z_j+\delta)^{\nu+1}} e^{-(z_j+\delta)(x-a)};$$

2)
$$\int_a^x \overline{H}_j(x-t)e^{-(\overline{z}_j+\delta)(x-t)}dt =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{m_j} \frac{\overline{H}_j^{(\nu)}(0)}{(\overline{z}_j+\delta)^{\nu+1}} - \sum_{\nu=0}^{m_j} \frac{\overline{H}_j^{(\nu)}(x-a)}{(\overline{z}_j+\delta)^{\nu+1}} e^{-(\overline{z}_j+\delta)(x-a)}.$$

Тоді

$$C = F_n(\delta)e^{\delta x} + \Phi_m(\delta)e^{\delta x} \sum_{j=1}^{b} \left(\sum_{\nu=0}^{m_j} \frac{H_j^{(\nu)}(0)}{(z_j+\delta)^{\nu+1}} - \sum_{\nu=0}^{m_j} \frac{H_j^{(\nu)}(x-a)}{(z_j+\delta)^{\nu+1}} e^{-(z_j+\delta)(x-a)} \right) +$$
$$+ \Phi_m(\delta)e^{\delta x} \sum_{j=1}^{b} \left(\sum_{\nu=0}^{m_j} \frac{\overline{H}_j^{(\nu)}(0)}{(\overline{z}_j+\delta)^{\nu+1}} - \sum_{\nu=0}^{m_j} \frac{\overline{H}_j^{(\nu)}(x-a)}{(\overline{z}_j+\delta)^{\nu+1}} e^{-(\overline{z}_j+\delta)(x-a)} \right) =$$
$$= \left[F_n(\delta) + \Phi_m(\delta) \sum_{j=1}^{b} \sum_{\nu=0}^{m_j} \frac{H_j^{(\nu)}(0)}{(z_j+\delta)^{\nu+1}} - \frac{\overline{H}_j^{(\nu)}(0)}{(\overline{z}_j+\delta)^{\nu+1}} \right] e^{\delta x} -$$
$$- \left[\sum_{j=1}^{b} \sum_{\nu=0}^{m_j} \Phi_m(\delta) \left(\frac{H_j^{(\nu)}(x-a)}{(z_j+\delta)^{\nu+1}} e^{-z_j(x-a)} + \frac{\overline{H}_j^{(\nu)}(x-a)}{(\overline{z}_j+\delta)^{\nu+1}} e^{-\overline{z}_j(x-a)} \right) \right] e^{\delta x}$$

Лему доведено.

Наслідок 3.3.

$$A\left[\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu e^{\delta_\mu x} \right] = \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu \left[F_n(\delta) + \Phi_m(\delta) \sum_{j=1}^{b} \sum_{\nu=0}^{m_j} \left(\frac{H_j^{(\nu)}(0)}{(z_j+\delta)^{\nu+1}} - \frac{\overline{H}_j^{(\nu)}(0)}{(\overline{z}_j+\delta)^{\nu+1}} \right) \right] e^{\delta x} -$$
$$- \left[\sum_{j=1}^{b} \sum_{\nu=0}^{m_j} \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu \Phi_m(\delta) \left(\frac{H_j^{(\nu)}(x-a)}{(z_j+\delta)^{\nu+1}} e^{-z_j(x-a)} + \frac{\overline{H}_j^{(\nu)}(x-a)}{(\overline{z}_j+\delta)^{\nu+1}} e^{-\overline{z}_j(x-a)} \right) \right] e^{\delta x}$$

Рівняння

$$F_n(\delta)+\Phi_m(\delta)\sum_{j=1}^{b}\sum_{v=0}^{m_j}\left(\frac{H_j^{(v)}(0)}{(z_j+\delta)^{v+1}}+\frac{\overline{H}_j^{(v)}(0)}{(\overline{z}_j+\delta)^{v+1}}\right)=0 \qquad (3.9)$$

є *характеристичним рівнянням* для лінійних диференційованих рівняння

$$L_n[u]+\sum_{j=1}^{b}\int_a^x\left(H_j(x-t)e^{-z_j(x-t)}+\overline{H}_j(x-t)e^{-\overline{z}_j(x-t)}\right)M_m[u]dt=0$$

де $F_n(\delta)$ також $\Phi_m(\delta)$ – характеристичні поліноми відповідно операторів L_n також M_m.

По аналогіїзівипадком простих дійсних коренів характеристичного рівняння (3.1) лінійних диференційованих рівняння (3.3) можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 2.3. Нехай характеристичне рівняння (3.9) лінійних диференційованих рівняння (3.7) має прості дійсні корені $\delta_1,\delta_2,...,\delta_N$. Якщо

$$\Phi(-z_\mu)\neq 0, \quad \mu=\overline{1,N},$$

то функція

$$u(x)=\sum_{\mu=1}^{N}c_\mu e^{\delta_\mu x}$$

є розв'язком даного рівняння, де сталі $c_1,\ldots,c_N$ задовольняють систему рівнянь:

$$\sum_{\mu=1}^{N}\frac{c_\mu\Phi_m(\delta_\mu)e^{\delta_\mu x}}{(z_j+\delta_\mu)^{v+1}}=0,$$

$$\sum_{\mu=1}^{N}\frac{c_\mu\Phi_m(\delta_\mu)e^{\delta_\mu x}}{(z_j+\delta_\mu)^{v+1}}=0,$$

$$v=\overline{0,m_j},\ \mu=\overline{1,N},\ j=\overline{1,b}.$$

Розглянемо дію оператораабона функцію

$$u(x)=x^\mu e^{\delta x}.$$

Лема 3.4.
$$A\left[x^{\mu}e^{\delta x}\right]=\frac{d^{\mu}}{d_{\delta}^{(\mu)}}\left\{\left[F_n(\delta)+\Phi_m(\delta)\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\left(\frac{H_j^{(\nu)}(0)}{\left(z_j+\delta\right)^{\nu+1}}+\frac{\overline{H}_j^{(\nu)}(0)}{\left(\bar{z}_j+\delta\right)^{\nu+1}}\right)\right]e^{\delta x}-\right.$$
$$\left.-\left[\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\Phi_m(\delta)\left(\frac{H_j^{(\nu)}(x-a)}{\left(z_j+\delta\right)^{\nu+1}}e^{-z_j(x-a)}+\frac{\overline{H}_j^{(\nu)}(x-a)}{\left(\bar{z}_j+\delta\right)^{\nu+1}}e^{-\bar{z}_j(x-a)}\right)\right]e^{\delta x}\right\}$$

де $F_n(\delta)$ також $\Phi_m(\delta)$ – характеристичні поліноми відповідно операторів L_n також M_m.

Доведення.

За означенням лінійних диференційованих оператора, маємо

$$A[u]=L_n[u]+\sum_{j=1}^{b}\int_a^x\left(H_j(x-t)e^{-z_j(x-t)}+\overline{H}_j(x-t)e^{-\bar{z}_j(x-t)}\right)M_m[u]dt,$$

де

$$u(x)=x^{\mu}e^{\delta x},$$

$$A\left[x^{\mu}e^{\delta x}\right]=\frac{d^{\mu}}{d_{\delta}^{(\mu)}}A\left[e^{\delta x}\right].$$

Підставляючи отримані значення в (3.7), отримаємо:

$$A\left[x^{\mu}e^{\delta x}\right]=L_n\left[x^{\mu}e^{\delta x}\right]+\int_a^x\sum_{j=1}^{b}\left(H_j(x-t)e^{-z_j(x-t)}+\overline{H}_j(x-t)e^{-\bar{z}_j(x-t)}\right)M_m\left[t^{\mu}e^{\delta t}\right]dt=$$
$$=\frac{d^{\mu}}{d_{\delta}^{(\mu)}}L_n\left[e^{\delta x}\right]+\sum_{j=1}^{b}\int_a^x\left(H_j(x-t)e^{-z_j(x-t)}+\overline{H}_j(x-t)e^{-\bar{z}_j(x-t)}\right)\frac{d^{\mu}}{d_{\delta}^{(\mu)}}M_m\left[e^{\delta t}\right]dt=$$
$$=\frac{d^{\mu}}{d_{\delta}^{(\mu)}}\left\{L_n\left[e^{\delta x}\right]+\sum_{j=1}^{b}\int_a^x\left(H_j(x-t)e^{-z_j(x-t)}+\overline{H}_j(x-t)e^{-\bar{z}_j(x-t)}\right)M_m\left[e^{\delta t}\right]dt\right\}=D$$

Використовуючи лему 3.3, отримаємо:

$$D=\frac{d^{\mu}}{d_{\delta}^{(\mu)}}\left\{\begin{aligned}&\left[F_n(\delta)+\Phi_m(\delta)\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\left(\frac{H_j^{(\nu)}(0)}{\left(z_j+\delta\right)^{\nu+1}}+\frac{\overline{H}_j^{(\nu)}(0)}{\left(\bar{z}_j+\delta\right)^{\nu+1}}\right)\right]e^{\delta x}-\\&-\left[\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\Phi_m(\delta)\left(\frac{H_j^{(\nu)}(x-a)}{\left(z_j+\delta\right)^{\nu+1}}e^{-z_j(x-a)}+\frac{\overline{H}_j^{(\nu)}(x-a)}{\left(\bar{z}_j+\delta\right)^{\nu+1}}e^{-\bar{z}_j(x-a)}\right)\right]e^{\delta x}\end{aligned}\right\}$$

Лему доведено.

Наслідок 3.4.

$$A\left[\sum_{k=1}^{l}\sum_{\mu=0}^{\delta_k-1} c_k^{(\mu)} x^{\mu} e^{\delta_k x}\right] = \sum_{k=1}^{l}\sum_{\mu=0}^{\delta_k-1} c_k^{(\mu)} \frac{d^{\mu}}{d_{\delta}^{(\mu)}} \times$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\left[F_n(\delta)+\Phi_m(\delta)\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\left(\frac{H_j^{(\nu)}(0)}{(z_j+\delta)^{\nu+1}}+\frac{\overline{H}_j^{(\nu)}(0)}{(\overline{z}_j+\delta)^{\nu+1}}\right)\right]e^{\delta x}- \\ \left[\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\Phi_m(\delta)\left(\frac{H_j^{(\nu)}(x-a)}{(z_j+\delta)^{\nu+1}}e^{-z_j(x-a)}+\frac{\overline{H}_j^{(\nu)}(x-a)}{(\overline{z}_j+\delta)^{\nu+1}}e^{-\overline{z}_j(x-a)}\right)\right]e^{\delta x}\end{array}\right\}$$

По аналогіїзівипадком кратних дійсних коренів характеристичного рівняння (3.1) лінійних диференційованих рівняння (3.3) можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 2.4. Нехай характеристичне рівняння (3.8) лінійних диференційованих рівняння (3.7) має кратні корені відповідної кратності. Якщо

$$\Phi(-z_k)\neq 0,\quad k=\overline{1,l},$$

то функція

$$u(x)=\sum_{k=1}^{l}\sum_{\mu=0}^{\delta_k-1} c_k^{(\mu)} x^{\mu} e^{\delta_k x}$$

є розв’язком даного рівняння, де сталі $c_1,\ldots,c_e$ задовольняють систему наступних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{\mu=0}^{\delta_k-1}\frac{d^{\mu}}{d_{\delta_k}^{(\mu)}} c_k^{(\mu)} \frac{\Phi_m(\delta_k)e^{\delta_k a}}{(z_j+\delta_k)^{\nu+1}}=0,$$

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{\mu=0}^{\delta_k-1}\frac{d^{\mu}}{d_{\delta_k}^{(\mu)}} c_k^{(\mu)} e^{\delta_k a} \frac{\Phi_m(\delta_k)}{(\overline{z}_j+\delta_k)^{\nu+1}}=0,$$

$$j=\overline{1,b},\ k=\overline{1,l},\ \nu=\overline{0,m_j}.$$

ВИСНОВКИ

В ході дослідження властивостей лінійних диференційованих рівняньзісталими коефіцієнтами були визначені умови існування розв’язків даного виду рівнянь в залежності від можливих випадів наявності коренів відповідних характеристичних рівнянь. Зокрема, встановлені наступні важливі результати, також стосуються основного завдання дослідження:

1. Нехай характеристичне рівняння

$$F_n(r)+\Phi_m(r)\sum_{j=1}^{b}\sum_{\nu=0}^{m_j}\frac{P_j^{(\nu)}(0)}{(B_j+r)^{\nu+1}}=0 \qquad (*)$$

інтегро-диференційного рівняння

$$L_n[z]+\int_a^x\sum_{j=1}^{b}P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}M_m[z]dt=0, \qquad (**)$$

має тільки прості дійсні корені $r_1,\ldots,r_n$. Якщо $\Phi(-B_i)\neq 0,\quad i=\overline{1,N}$ це функція $z(x)=\sum_{i=1}^{N}c_ie^{r_ix}$ є розв’язком даного рівняння, де сталі задовольняють системі лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{c_i\Phi_m(r_i)e^{r_ia}}{(r_i+B_j)^{\nu+1}}=0,\quad \nu=\overline{0,m_j},\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,b}.$$

2. Нехай характеристичне рівняння (*) лінійних диференційованих рівняння (**) має кратні дійсні корені $r_1,\ldots,r_e$ відповіднозікратностями $c_1,\ldots,c_e$. Якщо $\Phi(-B_k)\neq 0,\quad k=\overline{1,l}$, це функція $z(x)=\sum_{k=1}^{l}\sum_{\mu=0}^{S_k-1}c_k^{(\mu)}x^{\mu}e^{r_kx}$ є розв’язком даного рівняння, де сталі $c_1,\ldots,c_e$ задовольняють системі наступних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{\mu=0}^{S_k-1}\frac{d^{\mu}}{dr_k^{(\mu)}}G_j^{(\nu)}(r_k)c_k^{(\mu)}=0,\quad G_j^{(\nu)}(r_k)=\frac{\Phi_m(r_k)}{(r_k+B_j)^{\nu+1}}e^{r_ka},$$

$$j=\overline{1,b}\,,\;\; v=\overline{0,m_j}\,,\;\; k=\overline{1,l}\,.$$

3. Для лінійних диференційованих рівняння

$$A[z]=L_n[z]+\int_a^x\sum_{j=1}^{b}P_j(x-t)e^{-B_j(x-t)}M_m[z]dt=0\,,$$

якщо $r_1,\ldots,r_n$ – прості дійсні корені його, це функція $z(x)=\sum_{k=1}^{N}c_k e^{r_k x}$ є розв’язком цього рівняння, причому якщо $c_{n+p}=\sum_{p=1}^{N-n}g_{pk}c_p$, тоді розв'язок лінійних диференційованих рівняння запишеться в вигляді:

$$\tilde{z}(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\left(e^{r_k x}+\sum_{p=1}^{N-n}g_{pk}e^{r_n+px}\right).$$

4. Нехай характеристичне рівняння

$$F_n(\delta)+\Phi_m(\delta)\sum_{j=1}^{b}\sum_{v=0}^{m_j}\left(\frac{H_j^{(v)}(0)}{(z_j+\delta)^{v+1}}+\frac{\overline{H}_j^{(v)}(0)}{(\overline{z}_j+\delta)^{v+1}}\right)=0$$

лінійних диференційованих рівняння

$$L_n[u]+\sum_{j=1}^{b}\int_a^x\left(H_j(x-t)e^{-z_j(x-t)}+\overline{H}_j(x-t)e^{-\overline{z}_j(x-t)}\right)M_m[u]dt=0$$

має прості дійсні корені $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_N$. Якщо $\Phi(-z_\mu)\neq 0,\;\; \mu=\overline{1,N}$, це функція $u(x)=\sum_{\mu=1}^{N}c_\mu e^{\delta_\mu x}$ є розв’язком даного рівняння, де сталі $c_1,\ldots,c_N$ задовольняють систему рівнянь:

$$\sum_{\mu=1}^{N}\frac{c_\mu\Phi_m(\delta_\mu)e^{\delta_\mu x}}{(z_j+\delta_\mu)^{v+1}}=0,\qquad \sum_{\mu=1}^{N}\frac{c_\mu\Phi_m(\delta_\mu)e^{\delta_\mu x}}{(z_j+\delta_\mu)^{v+1}}=0,$$

$$v=\overline{0,m_j}\,,\;\; \mu=\overline{1,N}\,,\;\; j=\overline{1,b}\,.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бобик О.І., Бондарчук П.І., Пташник Б.Й., Скоробогатько В.Я. Елементи якісної з теоріею диференціальних рівняньзічастинними похідними. – К.: Наукова думка, 1972. – 324 с.
2. Бобочко В.Н., Маркуш И.И. Асимптотика решения задачи Валле-Пуссена для интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. / Сб. материалов 1-ой конференции молодых ученых Закарпатья, посвященной 50-летию образования СССР. – Ужгород, 1972. – С.9-18.
3. Бобочко В.М., Маркуш І.І. Перша фундаментальна теорема Фредгольма задачі Валле-Пуссена для лінійних лінійних диференційованих рівняньзімалим параметром при старшій похідній. / ДАН УРСР. – 1974. – № 12. – С.1059-1062.
4. Бобочко В.Н., Маркуш И.И. Асимптотические методы в теории линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений. – Ужгород, 1977. – 72 с.
5. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Изд-во Киргизского ун-та, 1957. – 89 с.
6. Быков Я.В. О некоторых методах построений решений интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Изд-во АН Киргизской СССР, 1961. – 106 с.
7. Валеев К.Г., Жаутиков О.А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Изд-во «Наука» Казахской ССР, 1974. – 74 с.
8. Васильев В.В. К вопросу об интегрировании систем линейных интегро-дифференциальных уравнений. / Ученые записки Иркутского государственного педагогического ин-та. – 1976. – № 9. – С.13-19.
9. Васильев В.В. К решению линейных интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и вырожденным ядром. – ПММ. – 1969. – Т.XIII. – С. 24-30.

10. Васильев В.В. Решение линейных обобщенных интегро-дифференциальных уравнений. – ПММ. – 1971. – T.XI. – С. 21-27.
11. Васильев В.В. К вопросу о решении систем линейных однородных обобщенных интегро-дифференциальных уравнений. / Труды Иркутского государственного педагогического ин-та. – 1973. – № 1. – С.23-29.
12. Васильев В.В. Решение задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений. / ДАН СССР. – 1975. – №. 5. – С.32-28.
13. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 86 с.
14. Вигораненко Т.И. О решениях одного класса интегро-дифференциальных уравнений. / Труды ИММ АН Узбекской ССР. – 1983. – Ч.2. – В.10. – С.14-18.
15. Виграненко Т.И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. / Записки Ленинградского горного ин-та. – 1974. – № 3. – С.46-52.
16. Виграненко Т.И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений. / Записки Ленинградского горного ин-та. – 1976. - № 3. – С.36-39.
17. Вірченко Н. О. Основні методи розв’язання задач математичної фізики. — К.: Вид-во КПІ, 1997. — 370 с.
18. Владимиров В.С. Об одном интегро-дифференциальном уравнении. / Известия АН СССР. – 1977. – № 1. – С.12-18.
19. Владимиров В. С. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1974. – 272 с.
20. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
21. Гагаев Б.В. Теоремы существований решений интегро-

дифференциальных уравнений. / ДАН СССР. – 1976. – № 3. – С.34-40.

22. Гончаренко В. М. Основи з теорією рівняньзічастинними похідними. – К.: Вища школа, 1996. – 214 с.
23. Жэнхен О.О. О существовании и единственности решений интегро-дифференциальных уравнений. / ДАН СССР. – 1972. – № 2. – С.24-30.
24. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 168 с.
25. Гурьянов И.Н. К аналитической теории интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. / Труды III Всесоюзного съезда. – 1966. – С.12-16.
26. Иманалиев М.П. Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе: Илим, 1972. – 126 с.
27. Иманалиев М. Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе: Илим, 1972. – 84 с.
28. Иманалиев М.И., Кривошеин Л.Е. Развитие и современное состояние интегро-дифференциальных уравнений. / Труды XIII Международного конгресса по истории науки. – 1975. – С.12-19.
29. Интегро-дифференциальные уравнения и их приложения. – Фрунзе: Изд-во Киргизского ун-та, 1978. – 122 с.
30. Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Изд-во АН Киргизской ССР, 1974. – 56 с.
31. Кокарева Т.А. Некоторые теоремы существования аналитических решений для интегро-дифференциальных уравнений. / ДАН СССР. – 1971. – № 1. – С.56-59.
32. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 148 с.
33. Краснов М.Л. Киселев А.И. Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 204 с.
34. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО Янус, 1995. – 246 с.

35. Ловит И. Линейные интегральные уравнения. – М.: Гостехиздат, 1978. – 198 с.
36. Ломов С.А. Метод регуляризации сингулярных возмущений. / Методы исследования нелинейных систем. – К., 1976. – С.164-209.
37. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Методы решения интегральных уравнений: Справочник. – М.: Факториал, 1999. – 246 с.
38. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. – М.: Факториал, 2000. – 314 с.
39. Матвеев М.Н. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Мн., 1974. – 214 с.
40. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наукова думка, 1971. – 186 с.
41. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 432 с.
42. Назаров Н.Н. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений. / Труды ЦАГИ, 1974. – С.14-18.
43. Некрасов А.И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений. / ДАН СССР. – 1967. – № 5. – С. 15-26.
44. Норкин Б.В. Метод последовательных приближений для решения интегральных уравнений теории процессов риска. // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 4. – С.10-18.
45. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2002. – 336 с.
46. Положий Г. Н. Уравнения математической физики. – М.: Высш. шк., 1964. – 560 с.
47. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения. – М.: Факториал, 1998. – 236 с.
48. Привалов Н.И. Интегральные уравнения. – М.-Л.: ОНТИ, 1973. – 144 с.
49. Розовский М.И. Приложение интегро-дифференциальных уравнений к

некоторым динамическим задачам теории упругости при наличии последствий. – М.: УМН, 1974. – 124 с.

50. Розовский М.И. Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения с частными производными в неограниченном пространстве. – М.: УМН, 1975. – 124 с.
51. Розовский М.И. Применение интегро-дифференциальных уравнений к изучению вопросов деформирования реальных материалов. / Известия АН СССР, 1984. – № 5. – С.68-75.
52. Смогоржевський О.С. Про функцію Гріна звичайного лінійного диференціального рівняння. // Журнал математического цикла АН СССР, 1973. – С.31-48.
53. Смогоржевский О.С. Функция Грина обыкновенного линейного дифференциального уравнения. / Труды 2-го Всесоюзного математического съезда. – Л., 1984. – С.251-253.
54. Смогоржевський О.С. Про узагальнену функцію Гріна звичайного диференціального рівняння. // Журнал ін.-ту математики АН УРСР. – 1975. – С.61-76.
55. Соболев С.Л. Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений с несколькими независимыми переменными. / Известия АН СССР. – 1978. – № 1. – С.34-42.
56. Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Л., 1971. – 308 с.
57. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 724 с.
58. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков и др. – М.: Высш. шк., 1970. – 712 с.
59. Филатов А.Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. – Ташкент: Фан, 1974. – 136 с.

60. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1966. – 168 с.

61. Buscham W. Die Zeruckfuhrung von spezielien integro-differentialgleichungen auf gewohnliche Integralgleichungen, Zeitschrift f.angew. Math. Mech., Bd. 32, 1952.

62. Volterra V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations, London, 1930.