МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ФУНКТОРИ G-СИМЕТРИЧНОГО СТЕПЕНЯ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

Виконала: студентка 2 курсу

Спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математика)»

другого (магістерського) рівня вищої освіти

Морозова Світлана Юріївна

Керівник доктор фізико-математичних наук, професор Савченко Олександр Григорович

Рецензент професорка кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонської філії Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова

Літвінова М. Б.

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Роль топології – дисципліни, введеної в навчальні плани математичних факультетів в середині 70-х років XX століття, - в системі університетської освіти досить важлива. Без використання топологічних понять неможливо побудувати курси математичного аналізу, диференціальних рівнянь, диференціальної геометрії, механіки, функціонального аналізу. Необхідно ще із закладів середньої освіти знайомити учнів із елементами топологічних перетворень [8, с.7].

Топологія як наука сформувалася в працях великого французького математика Анрі Пуанкаре в кінці XIX століття. Перші спостереження топологічного характеру ведуть до Л. Ейлера та К. Гаусса. Початок топологічних досліджень можна віднести до робіт Б. Рімана. У його дослідженнях з теорії функцій були розвиті нові методи, що грунтуються на геометричних уявленнях. Саме ним була зроблена спроба сформулювати поняття багатовимірного многообразу і ввести вищі порядки зв'язності. Ці поняття були уточнені Е. Бетті (1871). Але тільки А. Пуанкаре ввів цілий ряд важливих топологічних понять, зумів розвинути змістовну теорію і застосував її до дослідів в різних розділах математики і механіки. Його ідеї і поставлені ним проблеми до сих пір істотно впливають на розвиток топології [6, с. 5].

А. Пуанкаре так визначав зміст Analysis situs (як тоді називали топологію): «Analysis situs є наука, яка дозволяє нам дізнаватися якісні властивості геометричних фігур не тільки в звичайному просторі, але також і в просторі більше трьох вимірів [8]. Analysis situs в трьох вимірах є для нас пізнанням майже інтуїтивним; навпроти, Analysis situs в більш, ніж трьох вимірах являє собою великі труднощі, і щоб почати їх долати, потрібно бути впевненим у важливості цієї науки. Якщо ця важливість не всім зрозуміла, то це тому, що про це недостатньо міркували».

Метою роботи є дослідження функторів G-симетричного степеня; введення елементів даної теми під час проведення елективних курсів у закладах загальної середньої освіти.

Відповідно до мети поставлено *основні завдання роботи:*

- дослідити психолого-педагогічну, наукову та методичну літературу;
- уточнити та з'ясувати основні поняття функторів G-симетричного степеня;
- проаналізувати цілі та завдання елективних курсів, а також розробити такий курс.

Об'єкт дослідження: функтори G-симетричного степеня.

Предмет дослідження: поверхні, що виникають під дією функторів G-симетричного степеня.

Робота складається з вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи 55 сторінок.

РОЗДІЛ 1
ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ФУНКТОРИ G-СИМЕТРИЧНОГО СТЕПЕНЯ

1.1. Основні поняття про нормальні функтори

Усі простори вважаються бікомпактними (як правило, компактами), а всі відображення – неперервними.

Нагадаємо, що бікомпактний простір – це термін, який ввів П. С. Александров у якості посилення введеного М. Фреше поняття компактного простору: топологічний простір компактний – в первинному сенсі слова – якщо в кожному зліченному відкритому покритті цього простору міститься його скінченне підпокриття [15].

Для зручності ми почнемо з означення нормального функтора.

Коваріантний функтор F в категорії бікомпактів називається *неперервним,* якщо він комутує з границями обернених спектрів. Більш точно це означає наступне: *для будь-якого оберненого спектра* $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha : \alpha, \beta \in A\}$ *означено обернений спектр*

$$F(S) = \{F(X_\alpha), F(\pi_\beta^\alpha) : \alpha, \beta \in A\}.$$

Нехай $X = \lim S$ і $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ - наскрізні проекції. Відображення $F(\pi_\alpha) : F(X) \to F(X_\alpha)$ в границі дають відображення із $F(X)$ в $\lim F(S)$. Тому вимога неперервності полягає у тому, щоб це відображення було гомеоморфізмом [14].

Нагадаємо, що гомеоморфізм – взаємно однозначне і взаємно неперервне відображення топологічних просторів [10].

Функтор F називається таким, що *зберігає вагу,* якщо $wF(X) = wX$ для будь-якого нескінченного X.

Нехай $i: A \to X$ тотожні вложення замкнутого підпростору. Через $F_X(A)$ позначається образ відображення $F(i)$.

Кажуть, що функтор F *зберігає перетини*, якщо для будь-якого X і будь-якого сімейства $\{A_\alpha\}$ його замкнутих підмножин

$$F_X\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right) = \bigcap_\alpha F_X(A_\alpha).$$

Для неперервного функтора F достатньо вимагати виконання останньої рівності для двох множин, що перетинаються, тому що тоді воно виконано для всіх скінченних перетинів, а вони утворюють обернений спектр, границя якого співпадає з перетином всіх множин [34].

Функтор F називається таким, що *зберігає прообрази*, якщо $F(f)^{-1}F_Y(A) = F_X(f^{-1}A)$ для будь-якого відображення $f: X \to Y$ і будь-якого замкнутого $A \subset Y$.

Функтор F називається *мономорфним* (відповідно *епіморфним*), якщо для будь-якого взаємно однозначного відображення (відповідно для будь-якого відображення «на») f відображення $F(f)$ також взаємно однозначне (відповідно є відображенням «на») [14].

О з н а ч е н н я. Коваріантний функтор в категорії бікомпактів називається *нормальним*, якщо він неперервний, зберігає вагу, перетини і прообрази, мономорфен і епіморфен і переводить одноточковий простір в одноточковий, а пустий – в пустий.

Якщо $A \subset X$ і функтор F мономорфен, то простір $F(A)$ дійсно ототожнюється з підпростором $F_X(A) \subset F(x)$. Для функтора F, який зберігає перетини означений *носій* $supp\ a$ усякої точки $a \in F(x)$:

$$supp\ a = \bigcap \{A \subset X : a \in F_X(A)\}.$$

Формально носій точки означений для будь-якого функтора, але може виявитися пустим. Функтор F має скінченний степінь n, якщо носії всіх точок складаються не більш ніж із n точок. Функтор може мати скінченні носії (носії всіх точок скінченні), але не мати скінченного степеня.

Усякий нормальний функтор F зберігає носії, тобто для всякого відображення $f: X \to Y$ і всякого $a \in F(X)$ вірно

$$f(supp\ a) = supp\ F(j)a.$$

І справді, нехай $A = supp\ a$. Тоді $F(f)a \in F(j)F(A) = F(fA)$, тобто $supp\ F(f)a \subset f\ supp\ a$. Навпаки, нехай $B = supp\ F(f)a$. Тоді, оскільки F зберігає прообрази, маємо

$$F(f^{-1}B) = F(f)^{-1}F(B) \supset F(f)^{-1}F(f)a \ni a.$$

Значить, $supp\ a \subset f^{-1}B,$ тобто

$$f\ supp\ a \subset B = supp\ F(f)a.$$

Функтор F_1 називається *підфунктором* функтора F_2, якщо існує таке дійсне перетворення $T: F_1 \to F_2$, що для всякого бікомпакта X відображення

$$T_X: F_1(X) \to F_2(X)$$

є вкладенням.

Тотожній функтор Id є підфунктором усякого нормального функтора F. Вкладення $T_X: X \to F(X)$ отримується співставленням точці $x \in X$ точки $F(x)$. Із неперервності функтора F випливає неперервність відображення T_X. Його взаємна однозначність випливає із збереження перетинів [33].

Прикладами дійсних перетворень

$$T: Id \to Id^n, \quad T: Id \to exp, \ T: Id \to P$$

є відповідно:

- діагональне відображення;

- відображення, що переводить точку в одноточкову множину;
- відображення Дірака $x \to \delta_x$.

Функтор F_1 називається *надфунктором* функтора F_2, а функтор F_2 при цьому називається *фактор-функтором* функтора F_1, якщо існує таке дійсне перетворення $T: F_1 \to F_2$, що всяке відображення

$$T_X: F_1(X) \to F_2(X)$$

є відображенням «на» [33].

Фактор-функторами степеневого функтора Id^n є функтори симетричного і гіперсиметричного степеня. Дійсні фактор-функтори виникають при факторизації функтора F_1 по підфунктору F_2. Такі функтори, як правило, не нормальні – вони не зберігають перетинів. Наприклад, для двоточкового простору $X = \{0,1\}$ і фактор-функтора $F = Id^2/Id$ маємо $F_X(0) = F_X(1)$.

Аналіз поняття нормального функтора показує, наприклад, що вимога неперервності є дуже зручною і суттєвою, але в той же час обмеженою. У роботі Є. В. Щепіна показано, що для мономорфного і епіморфного функтора F його неперервність рівносильна вимогі неперервності індуційованого їм відображення із $C(X,Y)$ в $C(F(X),F(Y))$ для будь-яких бікомпактів X і Y (через $C(X,Y)$) позначається простір всіх неперервних відображень із X в Y, наділений бікомпактно-відкритою топологією). Представлення канторової досконалої множини у вигляді границі оберненого спектра із скінченних просторів показує, що прикладом не неперервного, але і не такого, що зберігає вагу функтора є функтор βexp_∞, що ставить у відповідність усякому бікомпакту X стоун-чеховську бікомпактифікацію об'єднання

$$\bigcup_n exp_n X$$

всіх його гіперсиметричних степенів [24].

Збереження ваги є слабкою вимогою на функтор. Вона зручна, наприклад, для того, щоб функтор переводив категорію компактів в категорію компактів. Для функтора F, що задовольняє іншим умовам, що входять в означення нормальності, збереження ваги рівносильно вимогі метризованості $F(Q)$.

Властивість збереження перетинів дуже важлива. Зазвичай вона завжди виконується. Її відсутність, як правило, пов'язана з тим, що даний функтор не містить тотожнього в якості підфунктора [8].

Збереження прообразів фактично необхідна для збереження носіїв. Як помітив А. В. Іванов, важливим функтором, що не зберігає прообрази, є функтор λ *гіперрозширення,* введений де Гроотом. Цей функтор ставить у відповідність всякому бікомпакту X простір λX максимальних зчеплених систем простору X (сімейство замкнутих множин називається зчепленим, якщо будь-які два його елемента перетинаються), наділений волменовською топологією. Легко зрозуміти, що функтор гіперрозширення є підфунктором функтора подвійної експоненти exp exp [8].

Умова мономорфності виконана у більшості випадків. Прикладом немономорфного функтора може бути функтор, який ставить у відповідність всякому бікомпакту простір його компонент зв'язності в факторній топології. Умова мономорфності забезпечує умову, щоб функтор не був занадто «бідний» для зв'язних просторів по зрівнянню з нульвимірними. Він завжди наслідується при переході до підфунктора.

Умова епіморфності дуже важлива (вона, наприклад, гарантує неперервність підфунктора нормального функтора), але виконана далеко не завжди. Найпростішим прикладом неепіморфного функтора є функтор exp^c *континуальної експоненти.* В категорії нульвимірних бікомпактів всякий неперервний функтор буде мономорфний і епіморфний [6].

Умова зберігання точки і порожньої множини мало важлива, але і вона в ряді випадків зручна. Найпростішим прикладом функтора, що не зберігає точку, але задовольняє всім іншим умовам нормальності, є функтор множення на фіксований нетривіальний компакт, наприклад відрізок. Якщо функтор F не зберігає точки, але задовольняє всім іншим умовам нормальності, то можна отримати нормальний функтор, розглянувши *зріз* F_x функтора F по довільній точці $x \in F(1)$. Функтор F_x ставить у відповідність всякому бікомпакту X простір $F(const_X)^{-1}x$, де $const_X: X \to 1$ – постійне відображення.

1.2. Функтори G-симетричного степеня

Введемо означення симетричного степеня бікомпакта *X*. Нехай *G* – підгрупа симетричної групи S_n (групи всіх перестановок n елементів). Група *G* діє на n-му степені простору *X* як група перестановок координат. Множина орбіт цієї дії з факторною топологією позначимо через $SP_G^n X$. Таким чином, точки простору $SP_G^n X$ – це скінченні підмножини (класи еквівалентності) добутку X^n. При цьому дві точки $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ вважаються еквівалентними, якщо існує така перестановка $\sigma \in G$, що $y_i = x_{\sigma(i)}$. Фактор-відображення $\pi_G^X: X^n \to SP_G^n X$, очевидно, відкрите [7].

Простір $SP_G^n X$ називається *G-симетричним степенем* простору *X*. Окремі випадки *G*-симетричного степеня вперше з'явилися у роботі Річардсона. Якщо $G = S_n$, то простір $SP_G^n X$ позначається через $SP^n X$ і називається *n-симетричним степенем* простору *X*. Якщо група *G* складається тільки з одиничного елемента, то $SP_G^n X = X^n$.

Для відображення $f: X \to Y$ означимо відображення $SP_G^n f: SP_G^n X \to SP_G^n Y$ наступним чином: *для класу* $[(x_1, \dots, x_n)] \in SP_G^n X$ *еквівалентності покладемо*

$$SP_G^n f[(x_1, \dots, x_n)] = [(fx_1, \dots, fx_n)].$$

Легко бачити, що SP_G^n є коваріантним функтором в категорії бікомпактів.

Крім того, комутативність діаграми

$$\begin{array}{ccc} X^n & \xrightarrow{Id^n f} & Y^n \\ \pi_G^X \downarrow & & \downarrow \pi_G^Y \\ SP_G^n X & \xrightarrow{SP_G^n f} & SP_G^n Y \end{array}$$

показує, що SP_G^n є фактор-функтором n-го степеня. Безпосередня перевірка показує також, що G-симетричний степінь є нормальним функтором [6].

Т е о р е м а Я в о р с ь к о г о. *Функтори* exp_n *і* SP_G^n *зберігають* $A(N)R$*-компакти.*

Яворський довів ці твердження за допомогою відомої леми Уайтхеда. На строге доведення теореми Яворського з застосуванням леми Уайтхеда достатньо громіздке (доведення Яворського містять пропуски), тому ми дамо тут нове доведення даної теореми із застосуванням наступного дуже корисного твердження:

Т е о р е м а К е р т і с а. *Нехай* $X = \lim_{\leftarrow}\{X_i, \pi_i\}$ *– границя такого зліченного оберненого спектра топологічно повних* $ANR(\mathfrak{M})$*-просторів, що кожне відображення* $\pi_i : X_{i+1} \to X_i$ *є тонкою гомотопічною еквівалентністю. Тоді* X *– топологічно повний* $ANR(\mathfrak{M})$ *−простір, а всі наскрізні проекції* $X \to X_i$ *тонкі гомотопічні еквівалентності.*

Нагадаємо при цьому, що відображення $f: X \to Y$ називається *тонкою гомотопічною еквівалентністю,* якщо для всякого відкритого покриття U простору Y існує таке відображення $g: Y \to X$, що відображення $f \circ g$ і id_Y пов'язуються гомотопією, що обмежена покриттям U, а $g \circ f$ і – гомотопією, що обмежена покриттям f^{-1}(U).

Доведення теореми Яворського. На деякий час будемо позначати функтори exp_n і SP_G^n однією літерою F. Помітимо спочатку, що функтор F зберігає ретракції (тобто якщо $Y \subset X$ і $r: X \to Y$, то $F(Y) \subset F(X)$ і $F(r): F(X) \to F(Y)$ - ретракція. Далі, кожен ANR-компакт X є ретрактом добутку $P \times Q$ деякого поліедра P, що залежить від X, на гільбертовий куб Q, тому для збереження ANR-компактів достатньо перевірити, що $F(P \times Q) \in ANR$ (нагадаємо, що ретракт ANR-компакта є компактом).

Добуток $P \times Q$ є границею оберненого спектра $S = \{X_i, \pi_i\}$ із скінченновимірних поліедрів X_i такого, що $X_{i+1} = X_i \times I$ і $\pi: X_{i+1} \to X_i$ співпадає з проектуванням $X_i \times I \to X_i$. Тоді $F(P \times Q)$ є границею спектра $F(S)$, тому для застосування теореми Кертіса треба перевірити дві властивості:

1) $F(X_i) \in ANR$;

2) $F(\pi_i)$ є тонкою гомотопічною еквівалентністю [4].

Функтор F зберігає скінченновимірність. І справді, оскільки $F(X)$ є скінченнократним образом X^n, це слідує із формули Гуревича про відображення, що підвищують розмірність. Тому $F(X_i)$ буде ANR-компактом, оскільки скоро ми доведемо, що функтор F зберігає локальну стягуваність.

Розглянемо випадок SP_G^n.

Нехай U – довільний окільний точки $[(x_1, \dots, x_n)] \in SP_G^n\, X$, де локально X локально стягуваний. Візьмемо околи U_i точок x_i так, що $U_i = U_j$, якщо $x_i = x_j, U_i \cap U_j = \emptyset$ якщо $x_i \neq x_j$ і $\pi_G^X(U_1 \dots U_n) \subset U$. Існують околи $V_i \subset U_i$ точок x_i і гомотопії $\varphi_i: V_i \times I \to U_i$ такі, що $\varphi_i(x, 0) = x, \varphi_i(x, 1) = x_i$. Крім того, можна вважати, що якщо $x_i = x_j$, то:

а) $V_i = V_j$;

б) $\varphi_i = \varphi_j$.

Покладемо $V = \pi_G^X(V_1 \times \ldots \times V_n)$. У силу відкритості відображення π_G^X множина V є околом точки $[(x_1, \ldots, x_n)]$.

Розглянемо відображення $\varphi: V \times I \to SP_G^n X$, що означено рівністю

$$\varphi([(y_1, \ldots, y_n)], t) = [\varphi_1(y_1, t), \ldots, \varphi_n(y_n, t))].$$

В силу умов $V_i = V_j$ і $\varphi_i = \varphi_j$ відображення φ означено коректно, тобто результат не залежить від вибору представника у класі еквівалентності точки $(y_1, \ldots, y_n)$. Нехай $z_i = y_{\sigma(i)}$ для деякого $\sigma \in G$. Тоді із умов а), б) і диз'юнктивності V_i і V_j при $x_i \neq x_j$ витікає:

а\`) $V_i = V_{\sigma(i)}$;

б\`) $\varphi_i = \varphi_{\sigma(i)}$.

Нехай $\varphi_i(z_i, t) = u_i$. Тоді

$$\varphi\big(([z_1, \ldots, z_n)], t\big) = \big[\big(\varphi_1(z_1, t), \ldots, \varphi_n(z_n, t)\big)\big] = [(u_1, \ldots, u_n)] =$$

$$= \big[\big(u_{\sigma-1(1)}, \ldots, u_{\sigma-1(n)}\big)\big] = \Big[\Big(\varphi_{\sigma-1(1)}\big(z_{\sigma-1(1)}, t\big), \ldots, \varphi_{\sigma-1(n)}\big(z_{\sigma-1(n)}, t\big)\Big)\Big]$$

$$=$$

$$= \big[\big(\varphi_1(y_1, t), \ldots, \varphi_n(y_n, t)\big)\big] = \varphi([(y_1, \ldots, y_n)], t).$$

Далі, оскільки $\varphi_i(V_i \times I) \subset U_i$, маємо

$$\varphi(V \times I) \subset \pi_G^X(U_1 \times \ldots \times U_n) \subset U.$$

Таким чином, φ стягує окіл V по U в точку $[(x_1, \ldots, x_n)]$ [18].

Точно так само доводиться, що функтор SP_G^n зберігає властивість стягуваності простору (якщо X стягується в точку x, то $SP_G^n X$ стягується в точку $[(x, \ldots, x)]$).

Тепер перевіримо, що $F(\pi_i)$ – тонка гомотопічна еквівалентність. Для цього скористаємося наступною лемою:

Ретракція $f: X \to Y$ на паракомпактний простір Y є тонкою гомотопічною еквівалентністю тоді і тільки тоді, коли для всякого відкритого покриття U *простору Y відображення $f: X \to X f^{-1}(\text{U})$ – гомотопне id_{xX}.*

У нашому випадку

$$X = F(X_i \times I), Y = F(X_i \times \{0\}),$$

$$f\big[\big((x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n)\big)\big] = \big[\big((x_1, 0), \dots, (x_n, 0)\big)\big],$$

де $[(y_1, \dots, y_n)]$ означає клас еквівалентності точки $(y_1, \dots, y_n)$ відносно симетричної і гомотопічної еквівалентностей. Розглянемо гомотопію $h_t: X \to X$, що означена рівністю

$$h_t\big[\big((x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n)\big)\big] = \big[\big((x_1, 0), \dots, (x_n, t_n t)\big)\big].$$

Очевидно, що $h_i = id_X$ і $h_0 = f$. Нарешті, із означення відображення f витікає, що гомотопія h_t обмежена покриттям $f^{-1}(\mathrm{U})$ для будь-якого (не обов'язково відкритого) покриття U простору Y [8, с. 35].

Таким чином, збереження ANR-компактів доведено.

Із вище доведеної теореми випливає наступне:

Н а с л і д о к 1. *Функтори exp_n і SP_G^n зберігають властивість компакта бути Q-многообразом.*

Із теореми Яворського, наслідка 1 і теореми Чемпена про те, що компактний стягуваний Q-многообраз гомеоморфний гільбертовому кубу, випливає:

Н а с л і д о к 2. *Функтори exp_n і SP_G^n зберігають властивість компакта бути гільбертовим кубом.*

Для функтора exp_n це твердження випливає із теореми Шорі про те, що $exp_n\, Q \approx X \times Q$, теореми Веста про те, що нескінченний добуток невироджених абсолютних ретрактів гомеоморфний Q із теореми Яворського.

Н а с л і д о к 3. Функтори exp_n і SP_G^n зберігають властивість компакта бути кінцевою сумою гільбертових кубів [8].

Має місце і наступне пошарове посилення теореми Яворського:

Т е о р е м а 1.2.1. Функтори exp_n і SP_G^n зберігають властивість шарів відображення бути $A(N)R$-компактом.

Д о в е д е н н я. Нехай $f: X \to Y$ – відображення, шари якого $A(N)R$-компакти, і нехай $\{x_1, \dots, x_k\} \in exp_n X$ (всі точки x_i попарно різні). Покладемо

$$A(m_1, \dots, m_k) = exp_{m_1} f^{-1} x_1 \times \dots \times exp_{m_k} f^{-1} x_k.$$

Зрозуміло, що:

а) $A(m_1, \dots, m_k) \cap A(m_1^{'}, \dots, m_k^{'}) = A(m_1^{''}, \dots, m_k^{''})$, де $m_i^{''} = \min\{m_i, m_i^{'}\}$;

б) $A(m_1, \dots, m_k) \in A(N)R$ (витікає із теореми Яворського і збереження властивості бути $A(N)R$-компактом при кінцевих добутках);

в) $(exp_n f)^{-1}\{x_1, \dots, x_k\} = \cup\{A(m_1, \dots, m_k): m_1 + \dots + m_k = n\}$.

Із властивостей а) і б) випливає, що всі кінцеві перетини множин виду $A(m_1, \dots, m_k)$ є $A(N)R$-компактами, тому із властивості в) і теореми суми для $A(N)R$-просторів слідує, що

$$(exp_n f)^{-1}\{x_1, \dots, x_k\} \in A(N)R.$$

Тепер розглянемо функтор SP_G^n. Зробимо спочатку теоретико-груповий відступ. Нехай A – підмножина упорядкованої множини $(1,\ 2, \dots, n)$, яка складається із k елементів. Для групи $G \subset S_n$ визначимо групу $G_A \subset S_k$. Покладемо $G_A = \{\sigma \in S_k: (\exists\, \tau \in G: \tau(A) = A \text{ і } \tau \mid A = \sigma)\}$. Тут ми припускаємо, що S_k діє на множині A, упорядкованій по зростанню елементів. Зрозуміло, що G_A – група.

Нагадаємо, що група — це алгебраїчна структура з двомісною операцією, і для цієї операції виконуються такі властивості: асоціативність, існування нейтрального елемента, існування оберненого елемента [35].

Поряд з групою $G_A \subset S_k$ з множиною A асоційована група $G^A \subset S_n$, що складається із тих перестановок τ, що $\tau(A) = A$. Відображення $\tau \to \tau \mid A$ дає природній епіморфізм $G^A \to G_A$. Якщо $\{A_1, \dots, A_k\}$ – розбиття множини $(1, \dots, n)$ на непорожні підмножини, що попарно не перетинаються, то група $\bigcap_{i=1}^{k} G^{A_i}$ ізоморфна прямій сумі групи $G_{A_i}(i = 1, \dots, k)$.

Нехай тепер $y = [(y_1, \dots, y_n)] \in SP_G^n Y$ і $z_1, \dots, z_k$ – всі попарно різні координати точки $(y_1, \dots, y_n)$. Покладемо $A_i = \{j \le n: y_j = z_i\}$ і $m_i = |A_i|$. З урахуванням теореми Яворського для перевірки умови $(SP_G^n f)^{-1} y \in A(N)R$ достатньо довести, що

$$(SP_G^n f)^{-1} y \approx SP_{G_{A_1}}^{m_1}(f^{-1} z_1) \times \dots \times SP_{G_{A_k}}^{m_k}(f^{-1} z_k). \qquad (*)$$

Нехай $x \in (SP_G^n)^{-1} y$. Це означає існування такого представника $(x_1, \dots, x_k)$ в класі еквівалентності $[(x_1, \dots, x_n)] = x$, що $f x_j = y_j$ для всіх $j \le n$. Зокрема, $f x_j = z_i \; \forall j \in A_i$. Нехай $A_i = \{j_1^i, \dots, j_{m_i}^i\}$. Позначимо через $[(x_{j_1^i}, \dots, x_{j_{m_i}^i})]$ орбіту точки $x^i \equiv (x_{j_1^i}, \dots, x_{j_{m_i}^i}) \in (f^{-1} z_i)^{m_i}$ відносно дії групи G_{A_i} на $(f^{-1} z_i)^{m_i}$ як групи перестановок координат. Визначимо тепер відображення

$$h: (SP_G^n f)^{-1} y \to \prod_{i=1}^{k} SP_{G_{A_i}}^{m_i}(f^{-1} z_i)$$

рівністю $h(x) = (x^1, \dots, x^k)$.

Оскільки кожна координатна функція x^i, очевидно, неперервна, відображення h також неперервне. Далі, ясно, що h – відображення «на». Перевіримо, що h взаємно однозначне. Нехай $x' \in (SP_G^n f)^{-1} y$ і $(x_1', \dots, x_n') \in x'$ – такий представник, що $f x_j' = y_j$. Якщо $hx = hx'$, то існує перестановка $\sigma \in \bigcap_{i=1}^{k} G^{A_i}$ така, що $x_i' = x_{\sigma(i)}$. Це означає, що $x = x'$. Отже, h - гомеоморфізм. Теорему доведено [8].

Т е о р е м а 1.2.2. *Функтори exp_n і SP_G^n зберігають властивість шарів відображення бути компактним Q-многообразом.*

Н а с л і д о к. *Функтори exp_n і SP_G^n зберігають властивість шарів відображення бути гільбертовим кубом (кінцевою сумою гільбертових кубів).*

1.3. Функтори ймовірнісних мір

Нехай X – бікомпакт і $C(X)$ – алгебра всіх неперервних (комплекснозначних) функцій на X. Двійковий до $C(X)$ лінійний простір $M(X)$ – простір всіх неперервних лінійних функціоналів на $C(X)$ – за теоремою Рісса ізоморфний простору всі зліченно-адитивних кінцевих борелевських регулярних мір на X (ця теорема була доведена Ріссом для $X = I$). Цю теорему нерідко виражають формулою

$$\mu(\varphi) = \int_X \varphi d\mu ,$$

де $\mu \in M(X), \varphi \in C(X)$.

Простір $M(X)$, взятий у слабкій топології, є підпростором тихоновського добутку $C^{C(X)}$. Одиничний шар $U(X)$ простору $M(X)$ бікомпактний в слабкій топології. Замкнена підмножина одиничного шара утворює множину $P(X)$ всіх *ймовірнісних мір* на X – невід'ємних мір з нормою (повною варіацією), яка рівна одиниці. При цьому міра μ називається невід'ємною, якщо $\mu(\varphi) \geq 0$ для всякої функції $\varphi \geq 0$ [7].

Ймовірнісні міри є коваріантним функтором в категорії бікомпактів. Для $f: X \to Y$ відображення $P(f): P(X) \to P(Y)$ визначається рівністю

$$(P(f)\mu)\varphi = \mu(\varphi \circ f).$$

Перш ніж розглядати властивості функтора P, ознайомимося краще з топологією простору $M(X)$. Базу околів міри μ утворюють все можливі множини виду

$$O(\mu, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \varepsilon) = \{\mu' : |\mu'(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon (i = 1, \dots, k)\},$$

де $\varepsilon > 0$, а $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in C(X)$ – довільні функції. Так само виглядає і окіл міри μ в $P(X)$ (тільки μ' треба обирати із $P(X)$). Зрозуміло, що функції φ_i можна брати із щільної в $C(X)$ множини. А за теоремою

Вейерштраса-Стоуна щільність $C(X)$ для нескінченного X співпадає з вагою X. Таким чином, функтор P зберігає нескінченну вагу [8].

Л е м а. *P – нормальний функтор.*

Д о в е д е н н я. Очевидно, P зберігає точку. Вище показано, що P зберігає вагу. Перевіримо неперервність. Нехай $X = \lim S$, де $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha : \alpha, \beta \in A\}$ – обернений спектр із бікомпактів. Простір $P(X)$ відображається в границю спектра $P(S)$ посередництвом границі π відображень $P(\pi_\alpha), \alpha \in A$, де $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ – наскрізна проекція. Покажемо, що $\pi : P(X) \to \lim P(S)$ – гомеоморфізм. Перевіримо спочатку, що π – взаємно однозначне відображення. Нехай $\mu_1, \mu_2 \in P(X)$ – дві різні міри. Тоді існує така функція $\varphi \in C(X)$, що $|\mu_1(\varphi) - \mu_2(\varphi)| = a > 0$. За теоремою Вейерштраса-Стоуна множина функцій виду $\psi \circ \pi_\alpha$, де $\psi \in C(X_\alpha), \alpha \in A$, всюди щільна в $C(X)$, тому існує таке $\alpha \in A$ і така функція $\psi \in C(X_\alpha)$, що $|\varphi - \psi \circ \pi_\alpha| < \frac{a}{3}$. Оскільки $\|\mu_i\| = 1$, маємо $|\mu_i(\varphi - \psi \circ \pi_\alpha)| < \frac{a}{3}$. Тоді

$$
\begin{aligned}
a = |\mu_1(\varphi) - \mu_2(\varphi)| \\
&= |\mu_1(\varphi) - \mu_1(\psi \circ \pi_\alpha) - \mu_2(\psi \circ \pi_\alpha) + \mu_2(\psi \circ \pi_\alpha) - \mu_2(\varphi)| \le \\
&\le |\mu_1(\varphi) - \mu_1(\psi \circ \pi_\alpha)| + |\mu_1(\psi \circ \pi_\alpha) - \mu_2(\psi \circ \pi_\alpha)| \\
&+ |\mu_2(\psi \circ \pi_\alpha) - \mu_2(\varphi)| < \\
&< \frac{2}{3} a + |\mu_1(\psi \circ \pi_\alpha) - \mu_2(\psi \circ \pi_\alpha)|.
\end{aligned}
$$

Значить, $\mu_1(\psi \circ \pi_\alpha) \ne \mu_2(\psi \circ \pi_\alpha)$. Але $\mu_i(\psi \circ \pi_\alpha) = (P(\pi_\alpha)\mu_i)\psi$.. Таким чином, відображення $P(\pi_\alpha)$ переводить μ_1 і μ_2 в різні міри. Тим більш це вірно для відображення π [4].

Тепер покажемо, що π – відображення «на».

Нехай $\mu \in \lim P(S)$. Це означає, що для довільних $\alpha, \beta \in A, \alpha < \beta$ існують такі міри $\mu_\alpha \in P(X_\alpha), \mu_\beta \in P(X_\beta)$, що $p_\alpha(\mu) = P(\pi_\beta^\alpha) \circ p_\beta(\mu)$, де $p_\gamma : \lim P(S) \to P(X_\gamma)$ – наскрізна проекція спектра $P(S)$. Рівність

$$\nu_\alpha(\psi \circ \pi_\alpha) = \mu_\alpha(\psi)$$

визначає лінійний функціонал ν_α на підпросторі $C_\alpha \subset C(X)$, які складається із всіх функцій виду $\psi\square\pi_\alpha$. При цьому для $\alpha < \beta$ маємо $C_\alpha \subset C_\beta$ і $\nu_\beta|C_\alpha = \nu_\alpha$. Таким чином, визначений лінійний функціонал ν на просторі

$$\mathrm{C} = \bigcup_{\alpha\in A} C_\alpha .$$

Ясно, що $\|\nu\| = 1$ і ν – невід'ємний функціонал. За теоремою Хана-Банаха існує продовження $\bar{\nu}$ функціонала ν на всі $C(X)$. Оскільки C за теоремою Вейерштраса-Стоуна всюди щільно в $C(X)$, це продовження єдине. Ясно також, що $\pi(\bar{\nu}) = \mu$.

Із можливості продовження функцій з замкнутого підпростору на весь простір витікає збереження функтором P мономорфізмів. Щоб перевірити, що $P(f)$ – епіморфізм, якщо $f: X \to Y$ – епіморфізм, помітимо спочатку, що $P(f)$ накриває всі міри $\mu \in P(Y)$ з кінцевими носіями, тобто

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} m_i \delta_{y_i} .$$

Насправді, взявши $x_i \in f^{-1}y_i$ і $\nu = \sum_{i=1}^{k} m_i \delta_{y_i}$, бачимо, що $P(f)\nu = \mu$ міри з кінцевими носіями утворюють всюди щільну в $P(Y)$ множину. Візьмемо базисний окіл $O(\mu, \varphi_1, .., \varphi_k, \varepsilon)$ довільної міри $\mu \in P(Y)$.

Існує скінченне відкрите покриття $U_1, \dots, U_s$ бікомпакта Y, коливання всякої функції φ_i на кожному елементі якого менше ε. Покладемо

$$V_i = \frac{U_i}{\bigcup_{j<i} U_j}$$

і $m_i = \mu(V_i)$. Взявши довільно по точці $x_i \in V_i$ (якщо $m_i > 0$) і поклавши

$$\nu = \sum_{i=1}^{\delta} m_i \delta_{x_i} ,$$

безпосередньою перевіркою переконуємося, що $\nu \in O(\mu, \varphi_1, .., \varphi_k, \varepsilon)$.

Перевіримо, що P зберігає попарні і, значить, в силу неперервності, всі можливі перетини. Нехай $Y_1, Y_2 \subset X$ і $\mu \in P(Y_1) \cap P(Y_2)$. Це означає, що для будь-якої функції $\varphi \in C(Y_i)$ і будь-яких двох її продовжень φ', φ'' на X маємо $\mu(\varphi') = \mu(\varphi'')$. Іншими словами, якщо $\varphi \in C(X)$ і $\varphi|Y_1 = 0$, то $\mu(\varphi) = 0$. Нехай $\varphi \in C(X)$ і $\varphi|Y_1 \cap Y_2 = 0$. Розглянемо функцію $\psi': Y_1 \cup Y_2 \to C$, рівну φ на Y_1 і нулю на Y_2. Нехай ψ – довільне продовження функції ψ' на X. Оскільки $\mu \in P(Y_1)$, маємо $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$. Але $\psi|Y_2 = 0$ і $\mu \in P(Y_2)$. Значить $\mu(\psi) = 0$. Отже, $\mu(\varphi) = 0$ і тому $\mu \in P(Y_1 \cap Y_2)$.

Нарешті, P зберігає прообрази. Нехай $f: X \to Y$ – відображення і $Z \subset Y$. Треба перевірити включення $P(f^{-1}Z) \supset P(f)^{-1}P(Z)$. Нехай $\mu \in P(f)^{-1}P(Z)$. Це означає, що для будь-якої функції $\varphi \in C(Y)$, рівної нулю на Z, маємо $(P(f)\mu)\varphi = 0$, тобто $\mu(\varphi \circ f) = 0$. Нехай $\psi \in C(X)$ і $\psi|f^{-1}Z = 0$. Розглянемо змінну невід'ємну функцію $\varphi_U: Y \to C$, рівну нулю на Z і $\|\psi\|$ поза деяким околом U множини Z. Тоді функція $\chi_U = \max\{\varphi_U \circ f, \psi\} - \varphi_U \circ f$ відмінна від нуля на множині $f^{-1}(U \backslash Z)$. При зменшенні U, в силу регулярності міри μ, маємо $\mu(\chi_U) \to 0$. Але $\mu(\varphi_U \circ f) = 0$, а $\psi \leq \chi_U + \varphi_U \circ f$. Значить, $\mu(\psi) \to 0$, тобто $\mu(\psi) = 0$. Лему доведено.

Нормальним підфунктором функтора P є функтор P_n ймовірнісних мір, носії яких складаються не більше ніж із n точок. Варто детальніше зупинитися на топологічній побудові простору $P_n(X)$. Точки простору P_n – це лінійні комбінації $\sum_{i=1}^{k} m_i \delta_{x_i}, k \leq n$, мір Дірака $\delta_x (\delta_x(\varphi) = \varphi(x))$ з невід'ємними коефіцієнтами, сума яких рівна 1. Їх можна трактувати як набори точок $x_1, \dots, x_k$, в які поміщено маси $m_1, \dots, m_k$. Базу околів точки $\mu = \sum_{i=1}^{k} m_i \delta_{x_i}$ утворюють множини виду

$$O(\mu, U_1, \dots, U_k, \varepsilon) = \{\mu' \in P_n(X): \mu' = \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i', \ supp\, \mu_i' \subset U_i,$$

$$|m_i - \|\mu_i{}'\|| < \varepsilon (i = 1, \dots, k), supp\mu_{k+1}^{'} \subset X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_i\,, \|\mu_{k+1}{}'\| < \frac{\varepsilon}{2}\},$$

де

$$\mu_i^{'} = \sum_{j=1}^{l_i} m_j^i \delta_{x_j^i}\,, \|\mu_i{}'\| = \sum_{j=1}^{l_i} m_j^i$$

і $U_i (i = 1, \dots, k)$ – околи точок x_i із замиканнями, що попарно перетинаються. І справді, нехай $V = P_n(X) \cap O(\mu, \varphi_1, \dots, \varphi_q, \delta)$ – базисний окіл міри μ. Покладемо $a = \max\{\|\varphi_i\|: i = 1, \dots, q\}$. Тоді простий підрахунок показує, що якщо

$$\varepsilon < \max\{1, \frac{\delta}{(k+1)a + 2}\}$$

і $U_1, \dots, U_k$ – околи точок $x_1, \dots, x_k$, які попарно не перетинаються, в яких коливання кожної із φ_i менше ε, то $O(\mu, U_1, \dots, U_k, \varepsilon) \subset V$. Навпаки, взявши невід'ємні функції $\varphi_i (i = 1, \dots, k)$, рівні 1 на U_i і 0 на $U_j, i \neq j$, і φ_{k+1} рівну 1 на $X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_i$ і 0 в точках x_i маємо

$$\delta > |\mu^{'}(\varphi_{k+1}) - \mu(\varphi_{k+1})| = |\mu'(\varphi_{k+1})| = \mu^{'}(\varphi_{k+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l_i} m_j^i \varphi_{k+1}(x_j^i) + \sum_{j=1}^{l_{k+1}} m_j^{k+1} \varphi_{k+1}(x_j^{k+1}) \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{l_{k+1}} m_j^{k+1} \varphi_{k+1}(x_j^{k+1}) = \sum_{j=1}^{l_{k+1}} m_j^{k+1} = \|\mu_{k+1}{}'\|,$$

значить, $\|\mu_{k+1}^{'}\| < \delta$.

Далі,

$$\delta > |\mu^{'}(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| = \left| \|\mu_i{}'\| + \sum_{j=1}^{l_{k+1}} m_j^{k+1} \varphi_i(x_j^{k+1}) - m_i \right| \geq$$

$$\geq |\|\mu_i{}'\| - m_i| - \sum_{j=1}^{l_{k+1}} m_j^{k+1} \varphi_i(x_j^{k+1}) \geq |\|\mu_i{}'\| - m_i| - \|\mu_{k+1}^{'}\|.$$

звідки з врахуванням уже перевіреної нерівності $\|\mu'_{k+1}\| < \delta$, отримуємо $|\|\mu_i{}'\| - m_i| < 2\delta$. Отже, при $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ отримуємо

$$P_n(X) \bigcap O(\mu, \varphi_1, \dots, \varphi_{k+1}, \delta) \subset O(\mu, U_1, \dots, U_k, \varepsilon).$$

Із цього опису топології на $P_n(X)$ витікає, що для множини n, яка складається із n різних точок $\{0, \dots, n-1\}$, простір $P(n) = P_n(n)$ співпадає з $(n-1)$-вимірним симплексом T^{n-1}, а маси m_i поміщені в точки i, є барицентричними координатами міри

$$\mu = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \delta_i.$$

Усякий підфунктор F функтора P_n визначає підмножину $F(n)$ симплекса $T^{n-1} = P_n(n)$. Будь-якому відображанню $f\colon n \to n$ відповідає, очевидно, симплікаційне відображення $P_n(f)\colon P_n(n) \to P_n(n)$. При цьому відображення $F(f)$ є обмеженням відображення $P_n(f)$ на множину $F(n)$. Таким чином, множина $F(n)$ повинна бути інваріантною відносно всякого симплікаційного відображення φ симплекса $P_n(n)$ в себе – інваріантним в тому сенсі, що $\varphi(F(n)) \subset F(n)$.

Два різні підфунктора $F_1, F_2 \subset P_n$ можуть визначати одну й ту саму множину $F_1(n) = F_2(n)$. І справді, нехай $F_1 = Id$ (вкладення $Id \to P_n$ визначається мірами Дірака), а складається із всіх мір, носії яких лежать в одній із компонент зв’язності простору. Тоді, в той же час як і для відрізка простір містить n-мірний комплекс.

РОЗДІЛ 2
ПРОВЕДЕННЯ ЕЛЕКТИВНИХ КУРСІВ У ЗАКЛАДАХ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

2.1 Цілі елективних курсів

Важливим критерієм у організації математичної освіти в старших класах в закладах освіти в даний момент є певний розподіл навчання математики на рівневу і профільну диференціацію. Сучасна програма з математики, що розроблена за навчальним планом, передбачає формування в школярів уявлення про математику як невід’ємну складову загальнолюдської культури та стимулювання потягу до наукової творчості, використовуючи історичний матеріал. На простих прикладах рекомендується показувати здобувачам освіти, як розвивалися різні математичні поняття, теореми та інше; ознайомлювати учнів з іменами вчених, які удосконалювали математику, зокрема звернути увагу на виданих українських математиків для сприяння патріотичного та національного виховання. Та на жаль в даний час дотримуватися цих вимог у шкільному курсі математики є майже неможливим. Необхідний обсяг знань, який потрібен людині постійно збільшується, а кількість годин відведена на вивчення матеріалу скорочується. Таким чином математична дисципліна залишає школярів у минулих століттях і майже не знайомить їх з сучасними досягненнями.

Тому для вирішення вищеописаної проблеми варто перейти закладам освіти на профільне навчання і крім цього, ввести елективні курси з математики.

*Курси за вибор*ом є обов’язковими для відвідування. Вони реалізуються за рахунок так званого шкільного компоненту.

Нагадаємо, що *шкільний компонент* – це вибірково-обов’язкові предмети, індивідуальні та групові заняття, курси за вибором і профільне навчання, факультативи.

Вибіркові курси є досить важливим компонентом у системі профільного навчання в старшій школі. Відповідно до схваленої Міністерством освіти і науки України «Концепції профільного навчання у старшій школі» розподіл змісту навчання відбувається за рахунок сполученнях курсів трьох типів:

- базових;
- профільних;
- елективних.

Останні спрямовані на задоволення освітніх потреб, інтересів уподобань кожного здобувача освіти. У певному сенсі вони є найважливішим засобом побудови освітні програм, так як пов’язані з вибором кожного школяра в залежності від його захоплень, схильностей та майбутніх життєвих планів. Елективні курси певним чином «компенсують» обмежені можливості базових і профільних курсів у задоволенні освітніх потреб учнів. Їх роль у системі навчання визначає безліч функцій і завдань. При цьому важливо розуміти, що елективні курси повинні сприяти внутрішньо-профільній спеціалізації навчання, тобто орієнтації на підготовку особи, яка самостійно обирає для себе індивідуальний шлях розвитку відповідно до своїх здібностей і можливостей та відповідально і вчасно приймає рішення. Тобто все вищесказане добре розвиває самостійність, а це є основний напрямок на дорослішання школярів.

Елективні курси повинні бути пов’язані з певним конкретним профілем, створюючи для нього характерні навчальні проблеми та ситуації. Вони мають наступні *цілі:*

- розвиток та удосконалення базового курсу математики, що дозволить отримати здобувачам освіти додаткову підготовку з математики для складання зовнішнього незалежного оцінювання;
- розширення та доповнення профільного курсу, що дозволить йому певною мірою стати поглибленим;
- задоволення пізнавальних потреб та інтересів учнів під час вивчення математики, виходячи за рамки профільного курсу;
- розвиток мислення, логіки, уяви;
- виховання низки особистісних якостей за допомогою поглибленого вивчення математики.

Курси за вибором дозволяють проводити пошук нових методів навчання, вносити зміни в обсяг і складність матеріалу, що досліджується, проводити нові експерименти. Тому можна сказати, що вони відіграють велику роль у вдосконаленні системи математичної освіти.

2.2. Типи елективних курсів

Під час аналізу педагогічної і методичної літератури було виявлено, що існує декілька типологій елективних курсів.

1. За завданнями

Елективні курси виконують цілу низку завдань:

- створити всі умови, щоб здобувач освіти вирішив продовжувати чи відмовитися від зробленого ним вибору для подальшого навчання;
- допомогти учню, який зробив вибір на користь даного курсу, більш ретельно вивчати його та зрозуміти які види діяльності з ним пов’язані;

- зацікавити старшокласника до якоїсь певної області знань, яку не розглянуто в навчальному плані;
- ознайомити з додатковими розділами математики.

Поставлені вище завдання вирішують наступні *види* елективних курсів:

1) пробні (їх можна з факультативами);

2) орієнтаційні (наприклад, курс «Задачі на відсотки» для економічного профілю). Для підготовки до даного виду використовується науково-популярна література, різноманітні посібники тощо;

3) загальнокультурні (тобто такі, що можна пов'язати з певним напрмом в культурі);

4) поглиблені (поглиблене вивчення певних розділів)

Наступну типологію елективних курсів можна назвати *«за зв'язком з предметом»:*

1) предметні;

2) міжпредметні;

3) курси з предметів, що не належать до базового навчального плану.

Із наведених класифікацій елективних курсів стає зрозуміло, що існують курси, які допомагають поглиблено вивчити предмет, що належить до базового навчального плану; інші – показують зв'язок з іншими предметами, що вивчаються у профільній школі. Деякі з курсів спрямовані на вивчення математики, застосовуючи приклади з життя, інші ж – присвячені розгляду методів розв'язування завдань підвищеного рівня складності. Але можна зробити висновок, всі курси задовольняють інтереси та потреби здобувачів освіти.

2.3. Організація елективних курсів

На сьогоднішній день пропонується вводити елективні курси з 10 класу профільної школи. Із паралелі класів створюється група. Для ефективного проведення даних курсів необхідно ввести їх в шкільний розклад, якщо це є можливим. Також важливо не допускати переносів та зривів занять.

Для успішного результату важливий високий рівень професійної підготовки вчителя. Іноді рекомендується навіть запрошувати викладачів вищих та середніх спеціальних навчальних закладів.

Вибір та відвідування елективного курсу у 10-11 класах є обов'язковою складовою. Завдання і вимоги до здобувача освіти є такими ж, як і до всіх начальних предметів: обов'язкова присутність, виконання домашніх та класних завдань, дисципліна тощо.

Навчання здійснюється за програмою, яку розробив сам вчитель. Важливо з першого ж заняття зацікавити учнів змістом даного курсу. Тому важлива не лише їх тематика, але й час і умови проведення. Із цього слідує, що вчитель повинен дотримуватися певних правил та вимог в організації курсу.

Вимоги до елективних курсів

1. Короткочасність

2. Курси мають бути створені відповідно до вікових особливостей здобувачів освіти

3. Зміст має бути з елементами науковості

4. Оригінальність та нестандартність навчального матеріалу

5. По закінчення кожен здобувач освіти повинен показати певний результат (підготувати творчий проєкт, твір та інше)

Створення навчальної програми

Навчальна програма – це нормативний документ, який окреслює певне основних знань, умінь та навичок, що підлягають засвоєнню з кожного окремо взятого навчального предмету. Він складається з:

- переліку тем матеріалу, який вивчається;
- рекомендацій про кількість годин, що відводяться на тему;
- розподілу тем за роками навчання;
- часу, що відводиться на вивчення всього курсу.

Усі елективні курси повинні мати наступну структуру:

1. Титульний лист

2. Пояснювальна записка

У даній частині мають бути вказані:

- актуальність розділу;
- необхідність його вивчення у базовому курсі математики (тобто довести важливість досліджуваної теми та показати, що у базовому курсі на неї відводиться мало часу);
- цілі і завдання курсу (наприклад, підвищити інтерес до математики, розвинути уяву, покращити увагу та пам'ять, надати допомогу у виборі майбутньої професії тощо);
- мета;
- логічне обгрунтування змісту (всі частини курсу повинні бути пов'язані між собою);
- предметні і міжпредметні зв'язки;
- характеристика учнів, для яких створено курс;
- відомості про матеріальні ресурси (наочність, обладнання, потреба в екскурсіях тощо)

3. Змістова частина

У даній частині потрібно послідовно перелічити всі теми курсу з їх коротким описом, зазначенням часу, що необхідний для їх вивчення та вказати всі екскурсії, практичні та лабораторні роботи.

4. Методичні рекомендації повинні містити:

- вимоги до рівня знань, умінь і навичок;
- компетентності, які потрібно розвинути під час курсу;
- форми контролю;
- методи контролю;
- список рекомендованої літератури.

5. Додатки мають містити календарно-тематичне планування, дидактичний матеріал (карти, таблиці, картки з правилами, завданнями, малюнками цифрами тощо).

Отже, із всього вищесказаного можна зробити висновок, що розробити елективний курс досить важко. Адже існує безліч правил, яких варто дотримуватись, а також вчитель повинен мати достатньо знань та вмінь.

2.4. Вимоги до визначення завдань для занять під час елективних курсів

Елективний курс може містити лише одну тему, розглянуту поглиблено (наприклад, курс може мати назву «Задачі про миттєву швидкість і до графіка функції»), а може складатися з кількох, пов'язаних одна з одною (наприклад, «Похідна та її застосування»). Тобто з базового курсу математики за вибором виділяється тема або розділ для поглибленого вивчення. Також вчитель має право створити свій власний елективний курс, який не матиме нічого спільного зі шкільною програмою. Такі курси є певним доповненням до факультативів та математичних гуртків не тільки новим підходами до вивчення, а й компонентами, що властиві будь-якому іншому навчальному предмету (логічністю і зв'язністю викладу, тривалістю вивчення теми тощо).

Крім того, елективні курси чудова нагода підготуватися до математичних олімпіад, вступу до ВНЗ тощо.

Але попри все елективні курси неможливо проводити без певного запасу знань, що відповідають даному курсу. Тому на початку кожного заняття важливо проводити актуалізацію опорних знань, умінь і навичок. Такі завдання є досить ефективним засобом засвоєння школярами нових понять та математичних теорій. Тут успішно розвивається культура мислення учнів.

Переглянувши методичну та педагогічну літературу ми виділили такі *принципи відбору завдань:*

1) Принцип наступності. Важливо помітити, що завдання сприяють встановленню певних зв'язків, адже в самому змісті завдання «покладено» зміст навчання математики (означення, теореми, аксіоми тощо).

2) Принцип зв'язку теорії та практики. Під час навчання у завданнях повинен бути певний зв'язок теорії з практикою, при цьому практика може як випереджувати теорію, так і супроводжувати її.

3) Принцип повноти. У процесі навчання в теорії потрібно розширювати математичні ідеї, наводити приклади, пов'язані з різними галузями (фізика, хімія, географія, економіка тощо) та встановлювати міжпредметні зв'язки.

4) Принцип контрастності спрямований на те, що при підборі математичних завдань необхідно обирати максимально різні види, не допускати потворів одних і тих самих типів.

5) Принцип формування дослідницьких умінь. Під *навчальними дослідженнями* [17] будемо розуміти тип пізнавальної діяльності, у якому під час виконання завдань повинен бути самостійний творчий пошук здобувачами освіти нових знань. Такі дослідження мають

декілька етапів: постановка проблеми, формування гіпотези та її доведення або спростування. Зазвичай проблему формулює вчитель. Доведення чи спростування гіпотези учні повинні намагатися шукати самостійно. Створення гіпотези грунтується на аналогії, порівнянні, дослідження, спостереженні та інтуїції.

2.5. Форми проведення занять та контроль знань елективних курсів

Уведення елективних курсів у програму старшої школи курсу математики обов'язково вимагає різноманітність форма та методів навчання. Адже профільний курс – це не лише певна диференціація (розподіл) змісту освіти, а трохи по-іншому побудований навчальний процес.

Тому при виборі форм і методів навчання елективних курсів важливо враховувати розвитку, мислення і математичної підготовки здобувачів освіти, їх інтерес та зацікавлення до певних розділів програми. Одна із найголовніших вимог до вибору форм і методів полягає в активізації мислення, розвитку самостійності учнів [42]. Ми пропонуємо виділити наступні *форми* організації занять елективного курсу:

- лекції;
- бесіди;
- групові заняття;
- ігри;
- проведення індивідуальних консультацій;
- уроки у вигляді змагань;
- теоретичні практикуми з вирішення завдань;
- практична і дослідницька робота;
- дистанційне навчання;

- створення проєктів.

На кінець вивчення кожної теми рекомендовано провести заліковий урок у формі гри або міні-олімпіади. *Контроль* з вивчення всього матеріалу можна здійснити за допомогою творчого завдання, де потрібно буде скласти задачу або перевірочний тест.

Підсумком освоєння програми елективного курсу може також бути констатація особистих досягнень з освоєння змісту, подання індивідуальної творчої роботи за вибором учнів або створення проектів, як кожним учням, так і групою учнів. При цьому може бути організований круглий стіл - як презентація творчих робіт, проектів та підведення підсумків [17].

Таким чином, у другому розділі роботи ми доводимо, що елективні курси - це невід'ємна та важлива частина профільної освіти, ці курси є обов'язковими для відвідування старшокласниками. Елективні курси спрямовані передусім на задоволення індивідуальних освітніх інтересів, потреб, схильностей школяра.

Крім того, у літературі зустрічається декілька типологій елективних курсів: «за дозволеними завданням», «по зв'язку з предметом», «за змістом», але кожен курс створюється за умови виконання певних вимог - це такі як надмірність, короткочасність, оригінальність змісту та ін При цьому будь елективний курс немислимий без завдань, тому необхідно знати принципи їх побудови - принцип спадкоємності, принцип зв'язку теорії з практикою, принцип повноти та ін [17].

Таким чином, з усього вищесказаного можна зробити висновок, що кожне заняття елективного курсу - це такий самий урок, необхідний підготовки, відмінних знань досліджуваного матеріалу, пошук додаткових цікавих відомостей і фактів та ін.

РОЗДІЛ 3
ЗНАЙОМСТВО ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТИ З ОСНОВИМИ ДВОВИМІРНИМИ ПОВЕРХНЯМИ

3.1. Розробка елективного курсу «Основні двовимірні поверхні»

Пояснювальна записка

Програма елективного курсу «Основні двовимірні поверхні» призначена для учнів, які навчаються на фізико-математичному профілі.

Головна увага в курсі приділяється розгляду основних властивостей двовимірних поверхонь та їх склеюванню.

Даний освітній курс розширює та поглиблює базовий компонент математичної освіти. Він допоможе краще врахувати інтереси і професійні наміри старшокласників, а тому зробити навчання цікавішим, ефективнішим та отримати більш високі результати.

Цілі курсу:

1. Оволодіння новими знаннями з математики, що необхідні для застосування у практичній діяльності.

2. Формування певного стилю мислення, що стане необхідним для продуктивного життя у суспільстві.

3.Формування уявлень про математику як форму опису та методу пізнання дійсності та як частину загальнолюдської культури.

Завдання курсу:

- розширення обсягу математичних знань;
- розвиток інтелектуальних вмінь здобувачів освіти;
- реалізація міжпредметних зв’язків.

Елективний курс призначений для учнів профільної школи, які обрали для фізико-математичну або природничу сферу діяльності, в якій просторові уявлення відіграють важливу роль.

Основними формами проведення елективного курсу є лекції, практичні заняття та доповоді. У кінці вивчення кожної теми передбачено контрольну роботу.

Програма курсу розрахована на 12 навчальних годин (1 навчальна година – 45 хвилин).

Навчально-тематичний план

<table>
<tr><th>№</th><th>Тема заняття</th><th>Кількість годин</th><th>Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Склеювання поверхонь</td><td>2 (з них по 20 хвилин теорія, по 25 – практика)</td><td>Учень/учениця
наводить приклади: поверхонь, які отримуються шляхом склеювання;
пояснює, що таке: простір, операція склеювання;
застосовує вивчені означення й властивості до розв’язування практичних завдань</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Властивості стрічки Мебіуса</td><td>2 (з них по 15 хвилин теорія, по 30 – практика)</td><td rowspan="2">Учень/учениця
зображує схему утворення стрічки Мебіуса;
формулює властивості стрічки Мебіуса та її означення</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Продовження вивчення властивостей стрічки Мебіуса</td><td>2 (з них по 15 хвилин теорія, по 30 – практика)</td></tr>
</table>

4.	Узагальнення знань, закріплення пройденого матеріалу (контрольне заняття)	1 *(практичне заняття)*	Учень/учениця показує та застосовує набуті знання
5.	Поняття про двовимірний проективний простір і пляшку Клейна	2 *(з них по 25 хвилин теорія, по 20 – практика)*	Учень/учениця пояснює, що таке простір, двовимірний проективний простір, пляшка Клейна; зображує схему утворення двомірного проективного простору та пляшки Клейна; застосовує вивчені означення й властивості до розв’язування практичних завдань
6.	Класифікація двовимірних поверхонь	2 *(з них по 15 хвилин теорія, по 30 – практика)*	Учень/учениця наводить класифікацію двовимірних поверхонь та їх властивості; пояснює, що таке двовимірні поверхні; застосовує вивчені означення й властивості до розв’язування практичних завдань
7.	Узагальнення знань, закріплення	1 *(практичне заняття)*	Учень/учениця показує та застосовує набуті знання

	пройденого матеріалу (контрольне заняття)		

Експеримент показав, що тема сприймалася учнями 10-х класів із зацікавленістю. А також підтвердилося, що розроблений нами 12-годинний курс відповідає темпу засвоєння програми учнями.

3.2. Конструювання поверхонь

У нашій роботі ми хочемо показати, що деякі елементи топології можна почати розглядати ще в закладах середньої освіти. Адже її вивчення сприяє розвитку просторової уяви здобувачів освіти та виробленню абстрактного мислення. Як було сказано в другому розділі, дану тему можна ввести за допомогою елективних курсів. Тому ми пропонуємо наступну структуру занять з елективних курсів:

1. Склеювання поверхонь
2. Властивості стрічки Мебіуса
3. Продовження вивчення властивостей стрічки Мебіуса
4. Поняття про двовимірний проективний простір і пляшку Клейна
5. Класифікація двовимірних поверхонь

Виходячи із вищесказаного найперше, що можна розповісти школярам, це як із звичайного прямокутного аркуша паперу утворити циліндр. Це досить легко зробити, адже достатньо просто склеїти протилежні точки двох сторін аркуша.

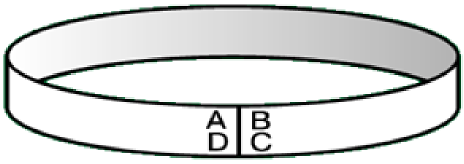

Рис. 3.1.1. – Склеювання циліндра

Далі можна склеїти протилежні точки, що мають різні напрямки. В результаті утвориться один із найцікавіших прикладів, що можна розказати дітям. Його назва стрічка Мебіуса.

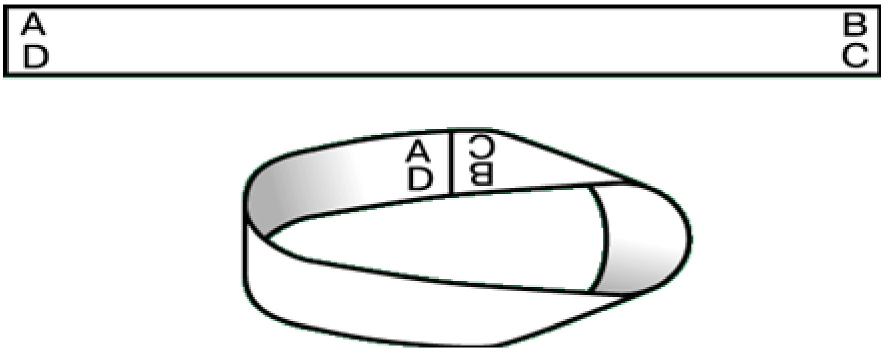

Рис. 3.1.2. – Склеювання листа Мебіуса

Далі рекомендується запропонувати учням склеїти протилежні точки протилежних сторін аркуша. Утвориться геометричне тіло, яке має назву «тор».

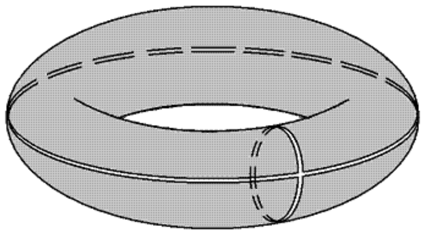

Рис. 3.1.3. - Тор

Не менш цікавим об’єктом є пляшка Клейна. На відміну від звичайної пляшки, у цього об’єкта немає «краю», де б поверхня закінчувалася.

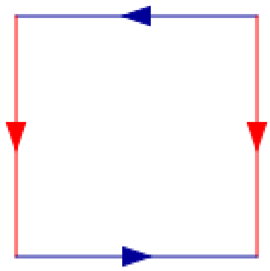

Рис. 3.1.4. – Схема склеювання пляшки Клейна

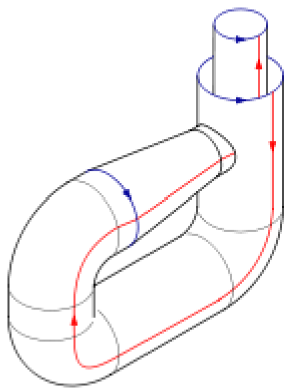

Рис. 3.1.5. – Пляшка Клейна

3.3. Двобічні поверхні

Поверхня M називається зв'язною, якщо будь-які дві точки M можна з'єднати неперервною кривою, що лежить на M.

З а у в а ж е н н я. Зрозуміло, що на кожній зв'язній поверхні існує зв'язний граф, що розбиває її на частини, що гомеоморфні диску.

Почнемо з класифікації орієнтованих поверхонь без краю. Позначимо через M_g поверхню, отриману зі сфери приклеєнням g ручок.

Т е о р е м а 3.2.1. Кожна зв'язна орієнтована триангульована поверхня без краю гомеоморфна одній із поверхонь M_g.

Доведення. Ідея доведення складається з наступного. Нехай дано поверхню Q. З цією поверхнею будемо виконувати ряд операцій (що замінять її на не геоморфну), у результаті чого отримається поверхня, гомеоморфна диску, тобто сфері з вирізаною диркою. Потім ми прослідкуємо, як відновлюється по цій поверхні наша вихідна поверхня Q і переконаємося, що в процесі відновлення отримається сфера, у якій вирізано декілька дирок і деякі з них заклеєні ручками. Пригадуючи, що вихідна поверхня краю не мала, ми зробимо висновок, що вільних дирок у нашій поверхні Q немає, тобто вона отримується зі сфери склеюванням деякої кількості ручок.

Перейдемо до реалізації цієї програми. Розглянемо на Q зв'язний граф Г, що розбиває її на скінченну кількість областей, кожна з яких гомеомофрна диску. Оточимо кожну вершину графа маленьким «кружком», а кожне ребро заключимо у вузьку смужку, що з'єднує побудовані «кружки» (рис. 3.2.1). Іншими словами, розглянемо поверхню Q_ε, що складається з точок $P \in Q$, що знаходиться від Г на відстані, не більшій ε; тут $\varepsilon > 0$ – достатньо мале число.

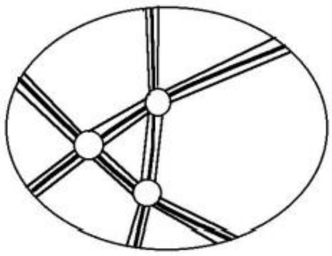

Рис. 3.2.1. – Доведення теореми 3.2.1. Крок 1.

Виріжемо тепер із поверхні Q всі частини областей, що залишилися; кожна частина гемеоморфна диску, так що ця процедура зводиться до вирізання у поверхні декількох дирок, а обернена до неї – до заклеювання дирок дисками.

Розглянемо тепер поверхню Q_ε, що отрималася після такого видалення. Вона складається з кругів, що оточують вершини графа, що з'єднані смужку, які містять ребра. Розглянемо у графі максимальне дерево і відповідні перемички. Кожну смужку, що відповідає перемечкам, розріжемо поперек; у результаті отримається нова поверхня $\hat{Q}$ (рис. 3.2.2).

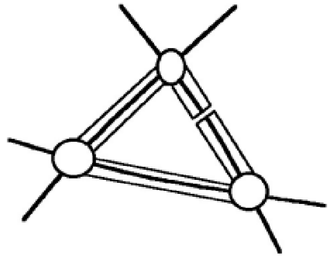

Рис. 3.2.2. – Доведення теореми 3.2.1. Крок 2.

Переконаємося, що ця поверхня гомеоморфна диску. Дійсно, розглянемо максимальне дерево графу, що розглядається. Це дерево можна побудувати, починаючи з одного ребра, що з'єднує дві вершини і додаючи кожен раз по одному ребру і одній вершині так, щоб завжди отримувалось дерево. Два круги, що з'єднані смужкою, очевидно, гомеоморфні диску; додавання смужки з кругом еквівалентно приклеюванню до диску прямокутника по одній його стороні; у результаті знову отримується поверхня, гомеоморфна диску. Таким чином, отримуючи на кожному кроці поверхню, гомеоморфну диску, ми побудуємо максимальне дерево, оточене смужками і кругами. Для того, щоб отримати поверхню $\hat{Q}$, залишилось приклеїти частини, що утворилися при розрізі перемичок. Кожна така частина гомеоморфна прямокутнику, який приклеюється по одній стороні; при цьому знову отримується поверхня, гомеоморфна диску.

Отже, вирізавши середини областей і розрізавши смужки, що відповідають перемичкам, ми отримали із Q поверхню, гомеоморфну диску. Поглянемо тепер, до чого призводить розрізання смужок і, головне, що являє собою обернена процедура їх склеювання. Розглянемо довільну смужку; нехай розрізаючи її, ми з'єднуємо точки a і b на різних сторонах. Зрозуміло, що ці точки лежать на краю поверхні Q_ε (край Q_ε складається із границь смужок і кружків); при цьому a і b можуть лежати як на різних кругах, утворюючи край, так і на одній.

Якщо вони лежать на різних кругах, розрізання по дузі, що з'єднує два кола, призводить до зменшення на одиницю кількості дирок у поверхні (рис. 3.2.3); значить, обернений процес склеювання повинен призвести до вирізання однієї дирки.

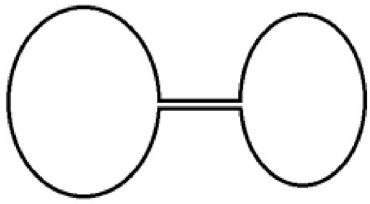

Рис. 3.2.3. – Доведення теореми 1. Крок 3.

Якщо точки a і b лежать на одному колі, процес розрізання можна представити наступним чином. Перш за все, здвинемо точки a і b в одну точку на краю; тоді розрізати доведеться по замкненій кривій, що починається і закінчується на краю. Таку процедуру можна розбити на два етапи: спершу ми розріжемо поверхню по замкненій кривій q, що не перетинається з краєм, а потім з'єднаємо цей розріз з краєм по дузі (рис. 3.2.4).

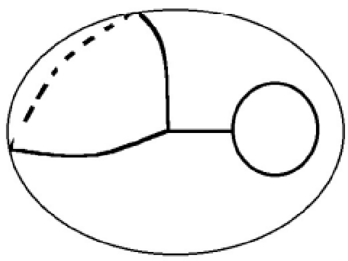

Рис. 3.2.4. – Доведення теореми 3.2.1. Крок 4.

На другому етапі ми з'єднаємо розрізом дві точки, що лежать на різних колах, утворюючи край; як ми бачили вище, ця процедура зводиться до заклеювання дирки диском, а обернена – до вирізання диску.

Залишилося розглянути процедуру розрізу поверхню вздовж замкненої кривої q, що не перетинається з краєм. Якщо ми заключимо цю криву у вузьку смужку і виріжемо цю смужку із нашої поверхні, вирізана частина буде гомеоморфна циліндру. Дійсно, якщо таку смужку розрізати поперек, її можна буде розпрямити в прямокутник. При склеюванні прямокутника по двом протилежним сторонам отримається або циліндр, або стрічка Мебіуса; остання містить ланцюжок симплексів, звернену орієнтацію, а таких в нашій поверхні юути не може (нагадаємо, що Q вважається орієнтованою). Отже, смужка, що містить розглядувану криву q, гомеоморфна циліндру, а її розріз по нашій кривій – розрізу циліндра по середньому колу, в результаті чого він розпадається на два (рис. 3.2.5).

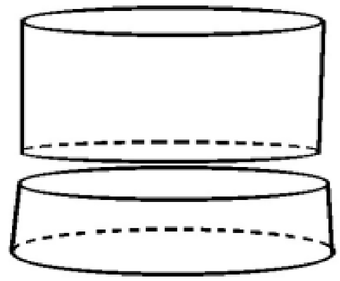

Рис. 3.2.5. – Доведення теореми 3.2.1. Крок 5.

Після такого розрізу на поверхні утворюється два нових кола, що входять в край; склеювання вздовж нашої замкненої кривої q еквівалентно склеюванню двох таких кіл. Якщо при склеюванні напрямок обходу «проти годинникової стрілки» на одному колі перейде в такий же напрямок на іншому, вузька смужка, що з’єднує кола, клеюється у стрічку Мебіуса (рис. 3.2.6), що заборонено умовою орієнтованості поверхні.

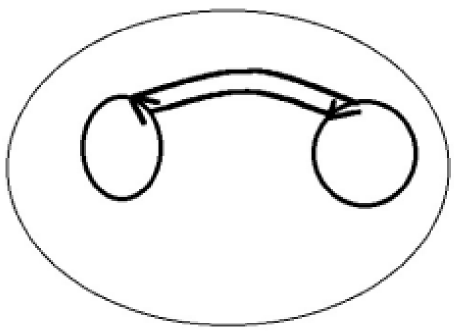

Рис. 3.2.6. – Доведення теореми 3.2.1. Крок 6.

Таким чином, напрямок «проти годинникової стрілки» на одному із склеюваних кіл з'єднується з напрямком «за годинниковою стрілкою» на іншому; така операція еквівалентна приклейці ручки (рис. 3.2.7).

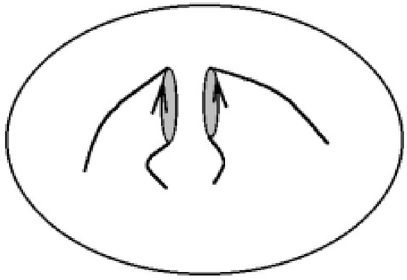

Рис. 3.2.7. – Доведення теореми 3.2.1. Крок 7.

Зробимо висновок. Початкова поверхня Q отримується із поверхні $\hat{Q}$, гомеоморфній диску, за допомогою серії операцій (склейка смужок, відповідних перемичкам в графі, і приклеювання внутрішніх областей), кожна з яких еквівалентна одній з наступних:

а) вирізання дирки;

б) заклеювання дирки иском;

в) вклейка ручки.

Отже, поверхня Q гомеоморфна сфері з деякою кількістю дирок і деякою кількістю ручок. Відсутність краю гарантує відсутність дирок, тому Q гомеоморфна одній із поверхонь M_g. Теорему доведено.

3.4. Однобічні поверхні

У кожної зі звичайних поверхонь є по дві сторони. Це відноситься і до замкнутих поверхонь (наприклад, сфера і тор), і до поверхонь, що мають границі (такі як диск і тор, із яких видалено частину поверхні). Щоб легко розрізняти дві сторони однієї і тієї ж поверхні, їх можна було б розфарбувати різними кольорами. Якщо поверхня замкнена, дві фарби ніколи не зустрінуться. Якщо поверхня має граничні криві, то різні фарби зустрічаються по цих кривих. Припустимо, що по таким поверхням повзав би жук і що-небудь заважало б йому перетинати граничі криві; тоді він залишався б завжди на одній стороні поверхні.

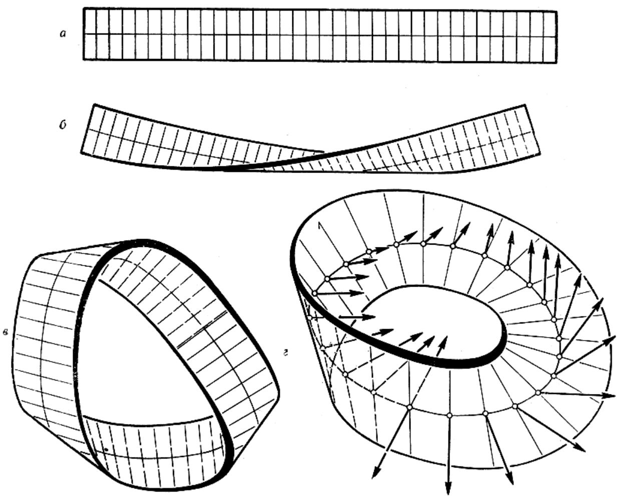

Рис 3.3.1. - Стрічка Мебіуса: а, б, в – перекручування і склеювання стрічки; г – орієнтація «сторін»

Мебіусу належить честь приголомшуючого відкриття: існують поверхні, у яких є лише одна сторона. Найпростіша із таких поверхонь є так звана стрічка Мебіуса. Щоб її побудувати, потрібно взяти лист паперу, що має форму витянутого прямокутника, і склеїти його кінці після півповороту, як показано на рис. 3.3.1 (а, б, в). Жук, який буде повзти по цій поверхні, тримаючись весь час середини «стрічки», повернувшись у початкову точку, виявиться в перевернутому положенні (рис. 3.3.1, г). Якщо хто-небудь надумає розфарбувати «лише одну» сторону поверхні стрічки Мебіуса, нехай краще одразу занурить її всю у відро з фарбою.

Друга чудова властивість поверхні Мебіуса заключається в тому, що в неї лише один край: вся границя складається лише з однієї замкненої кривої. Звичайна двобічна поверхня, що отримається при склеюванні кінців стрічки без усякого повороту, має дві різні криві. Якщо цю останню поверхню розрізати по середній лінії, вона розпадеться на дві поверхні того ж типу. Але якщо розрізати таким же чином по середній лінії стрічку Мебіуса (див. рис. 3.3.1), то ми побачимо, що розпаду на дві частини не буде.

Тому, хто не намагався зробити лист Мебіуса, важко передбачити цю обставину, яка суперечить нашим інтуїтивним уявленням про те, що «повинно» статися. Але якщо поверхню, яка утворилася після описаного вище розрізу стрічки, знову розрізати по її середній лінії, то у нас з'являться дві не зв'язані, але переплетені між собою стрічки!

Дуже цікаво розрізати такі стрічки по лініям, які паралельні границі і знаходяться на $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ і т. д. ширини стрічки. Поверхню Мебіуса, без сумніву, важливо пригадати в шкільному курсі математики.

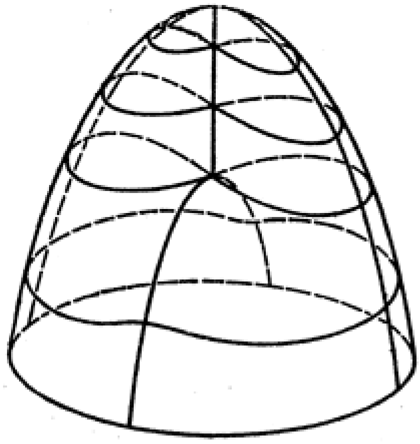

Рис. 3.3.2. – «Крос-кеп»

Границя поверхні Мебіуса являє собою просту «невузловату» замкнену криву, і її можна деформувати у круг. Але доведеться припустити, що в процесі деформації поверхня буде сама себе перетинати. Отримана при цьому однобічна поверхня, що самоперетинається відома під назвою «крос-кеп» (рис. 3.3.2). Лінію перетину тут важливо рахувати двічі. Один раз варто її відносити до одного із листів поверхні, що перетинаються, а другий раз – до іншого. Крос-кеп, як і всяку однобічну поверхню, неможна неперервно деформувати в двобічну (топологічна властивість).

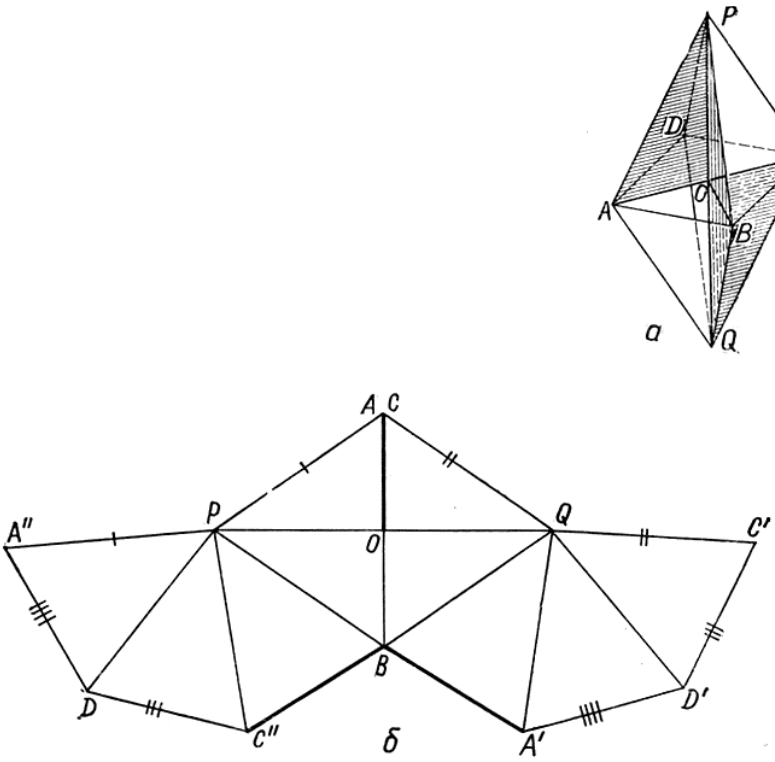

Рис.3.3.3. - Лист Мебіуса - прямолінійним краєм (а) і його розгортка (б)

Цікаво, лист Мебіуса можна, виявляється, деформувати так, що його границя буде плоскою ламаною, - а саме, трикутником, - причому лист залишиться не самоперетинаючим. Така модель, знайдена Б. Туккерманом, показана на рис.3.3.3 (а); границею листа є трикутник АВС, що обмежує половину діагонального квадратного перетину октаедра (симетричного відносно цього перетину). Сам лист складається із шести граней октаедра і чотирьох прямокутних трикутників - четвертин вертикальних діагональних площин октаедра (Із поверхні октаедра вирізаються грані АВР і ВCQ. До шести граней, що залишилися приклеюються чотири трикутники OAP, OBP, OCQ і OBQ. На рис. 3.3.3, б показано розгортку описаної поверхні по лінії, що з'єднує точку О з точкою, що помічена двома літерами А і С, потрібно зробити розріз, а потім склеїти відповідні відрізки краю розгортки. Жирними відрізками позначений край листа (периметр трикутника АВС)).

Інший цікавий приклад однобічної поверхні – так звана «пляшка Клейна». Це – замкнена поверхня, але вона в протилежність відомим нам замкненим поверхням не ділить простір на «внутрішню» і «зовнішню» частини. Топологічно вона еквівалентна парі крос-кепів зі склеїнми між собою граничними кривими.

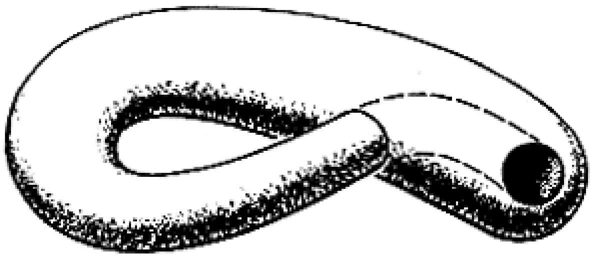

Рис. 3.3.4. – Пляшка Клейна

Можна довести, що всяка замкнена однобічна поверхня роду $p = 1, 2, \ldots$ топологічно еквівалентна сфері, із якої видалено p дисків і замінені крос-кепами. Звідси легко виводиться, що ейлерова характеристика $V - E + F$ такої поверхні зв'язана з родом p відношенням

$$V - E + F = 2 - p.$$

Доведення цього припущення таке ж, як і для двобічних поверхонь. Перш за все переконаємося, що ейлерова характеристика крос-кепа або листа Мебіуса рівна нулю. Для цього відмітимо, що, якщо перерізати поперек лист Мебіуса, попередньо розбитий на області, ми отримаємо прямокутник, у якого будуть лише дві зайві вершини і одна зайва дуга. Число ж областей залишиться те ж саме, що і для листа Мебіуса. Ми знаємо, що для прямокутника $V - E + F = 1.$ Тому, для листа Мебіуса $V - E + F = 0.$

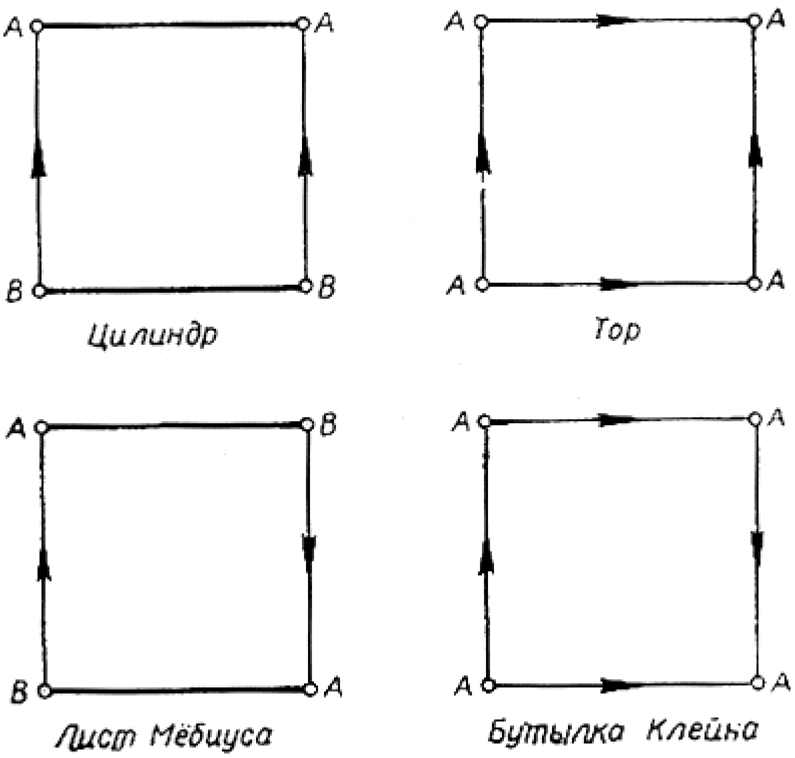

Рис.3.3.5. - Замкнені поверхні, що означені посередництвом ідентифікації сторін квадрата

Вивчення топологічної структури поверхонь, подібних тим, які тільки що були описані, проводиться більш зручно, якщо скористатися плоскими многокутниками з попарно ідентифіковаими сторонами. Так, на схемах рис. 3.3.5 стрілки показують, які із паралельних сторін і в якому напрямку повинні бути ідентифіковані: якщо можливо, то фізично, якщо неможливо, то хоча б подумки, абстрактно.

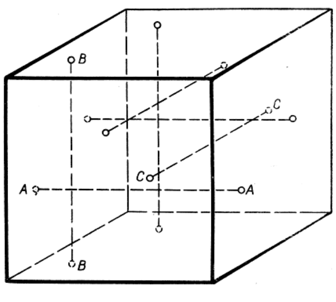

Рис. 3.3.6. - Означення тривимірного тора посередництвом ідентифікації граней куба

Метод ідентифікації можна застосувати і для означення тривимірних замкнених многообразів, аналогічних двовиріним замкненим поверхням. Наприклад, ототожнюючи відповідні точки взаємно протилежних граней куба (рис. 3.3.6), ми отримуємо тривимірний замкнений многообраз, що називається тривимірним тором. Такий многообраз топологічно еквівалентно просторовій області, що знаходиться між двома концентричними поверхнями тора (одна всередені іншої), з ідентифікацією відповідних точок (рис. 3.3.6). Справді, цей останній многообраз отримується із куба, якщо привести в «фізичне» співпадіння дві пари «мисленно ототожнюючих» взаємно протилежних граней.

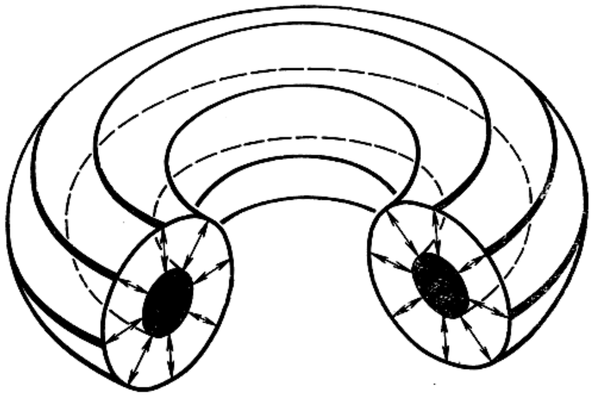

Рис. 3.3.7. - Інше представлення тривимірного тора (розрізи показують ідентифікацію)

ВИСНОВКИ

У роботі було вивчено питання про функтори G-симетричного степеня, нормальні функтори, функтори експоненціального типу та функтори ймовірнісних мір. Також було запропоновано ввести елементи даної теми в шкільний курс математики за допомогою елективних курсів. Адже даний матеріал чудово розвиває уяву, мислення та пам’ять у здобувачів загальної середньої освіти.

Відповідно було виконано поставлені завдання:

- досліджено наукову, психолого-педагогічну та методичну літературу з теми;
- розглянуто основні поняття про функтори G-симетричного степеня;
- проаналізовано цілі, завдання та вимоги до елективних курсів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров П. С. Комбинаторная топология. – М. – Л.: Гостехиздат, 1947. – 660 с.
2. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
3. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
4. Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. – М.: Наука, 1668. – 272 с.
5. Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. — М.: Наука, 1982. — 160 с.
6. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1989. – 104 с.
7. Васильев В. А. Введение в топологию. — М. : ФАЗИС, 1997. — Вып. 3. — 132 с.
8. Введение в топологию /Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко: Учеб. пособие. – 2-е изд., доп. – М.: Наука Физмалит, 1995. – 416 с.
9. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
10. Гомеоморфізм [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гомеоморфизм
11. Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т. Минимальные поверхности и проблема Плато. – М.: Наука, 1987. – 312 с.
12. Елективні курси з математики у профільній школі [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу:

http://bukvar.su/pedagogika/page,6,101652-Elektivnye-kursy-po-matematike-v-profil-noiy-shkole.html

13. Ефремович В. А. Основные топологические понятия//Энциклопедия элементарной математики. Т. 5. Геометрия. – М.: Наука, 1966. – С. 476 – 556.
14. Келли Дж. Общая топология. – М.: Наука, 1981. – 432с.
15. Компактний простір [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Компактний_простір
16. Коснёвски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. – М.: Мир, 1983. – 304 с.
17. Курси за вибором з математики у профільній школі [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://ua-referat.com/Курси_за_вибором_з_математики_у_профільній_школі
18. Масси У., Столлингс Дж. Алгебраическая топология. Введение. – М.: Мир, 1977. – 278 с.
19. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 440 с.
20. Морозова С. Ю., Савченко О. Г. Перше знайомство з однобічними поверхнями в закладах середньої освіти
21. Морозова С. Ю., Савченко О. Г. Перше знайомство школярів з поверхнями, які неможливо реалізуват у тривимірному простору
22. Навчальна програма для загальноосвітніх закладів
23. Новиков С. П., Фоменко А. Т. Элементы диференциальной геометрии и топологии. – М.: Наука, 1978. – 432 с.
24. Односторонние и двусторонние поверхности [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://forkettle.ru/vidioteka/estestvoznanie/matematika/53-geometriya/119-odnostoronnie-i-dvukhstoronnie-poverkhnosti

25. Односторонние и двусторонние поверхности [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://studme.org/352380/pedagogika/odnostoronnie_dvustoronnie_poverhnosti
26. Поверхность [Елетронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://ru.wikipedia.org/wiki/Поверхность
27. Понтрягин Л. С. Основы комбинаторной топологии. – М.: Наука, 1976. – 136 с.
28. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. – М.: Наука, 1987. – 480 с.
29. Рохлин В. В., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы. – М.: Наука, 1977. – 488 с.
30. Синюков Н. С., Матвеенко Т. И. Топология. – Киев: Вища школа, 1984. – 264 с.
31. Синюков Н. С., Матвеенко Т. И. Топология. – Киев: Вища школа, 1984. – 264 с.
32. Стинрод Н. Топология косых произведений. – М.: ИЛ, 1953. – 276 с.
33. Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии. – М.: Мир, 1967. – 224 с.
34. Сторона и ориентация поверхности. Односторонние и двусторонние поверхности. Край поверхности [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://ib.mazurok.com/2016/06/23/orientation-of-the-surface/
35. Теорія груп [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Теорія_груп
36. Фоменко А. Т. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 216 с.
37. Форстер О. Римановы поверхности. – М.: Мир, 1980. – 248 с.

38. Хилтон П., Уайли С. Теория гомологий. – М.: Мир, 1966. – 452 с.
39. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. – М.: Мир, 1970. – 444 с.
40. Чернавский А. В., Матвеев С. В. Основы топологии многообразий. – Краснодар – Изд-во КГУ, 1974. – 176 с.
41. Шварц А. С. Квантовая теория поля и топология. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
42. Що таке елективний курс [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://yak-prosto.com/sho-take-elektivniy-kurs/