МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК,
ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ
ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ВКЛЮЧЕННЯ ТА РІВНОСИЛЬНІСТЬ МЕТОДІВ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

Виконала: студентка 2 курсу, 221М групи
Спеціальності 014 Середня освіта
Спеціалізація 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)»
другого (магістерського) рівня вищої освіти
Панова Катерина Олександрівна
Керівник кандидат фізико-математичних наук,
доцент Кузьмич Валерій Іванович
Рецензент старший вчитель, вчитель вищої категорії
Херсонської загальноосвітньої школи
I-III ступенів № 44 Херсонської міської ради
Перегняк Олександр Адамович

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження.

Числові ряди в математичному аналізі використовуються для обчислень, для аналізу поведінки різноманітних функцій, при розв'язанні алгебраїчних або диференціальних рівнянь. Розкладання функції в ряд можна розглядати як узагальнення завдання вектора координатами, ця операція дозволяє звести дослідження складної функції до аналізу елементарних функцій і полегшує чисельні розрахунки.

Отже, ряди є незамінним інструментом дослідження не лише в математиці, але і у фізиці, астрономії, інформатиці, статистиці, економіці та інших науках – тобто нескінченні ряди в сучасній математиці знаходять численні застосування як універсальний інструмент для подання широкого класу функцій, виконання аналітичних перетворень, наближених обчислень в різних завданнях.

Поняття числових рядів та їх підсумовування зустрічається не лише в курсі математичного аналізу закладів вищої освіти для розуміння наукових ідей та методів математики, воно неявно зустрічається ще у шкільній програмі з математики. Наприклад, ознайомлення з означенням числової послідовності та способами їх задання передує вивченню арифметичної та геометричної прогресій.

Також тема «Числові послідовності» безпосередньо пов'язана з темою «Границя та неперервність функції», яка, в свою чергу, є необхідною для того, щоб в подальшому ввести поняття похідної, визначеного інтеграла.

Елементи граничного переходу застосовують при розв'язанні практичних завдань на границі, доведенні формул чи теорем геометрії.

Мета дослідження – розглянути та систематизувати особливості включення та рівносильності методів підсумовування рядів.

Об'єкт дослідження – числові ряди.

Предмет дослідження – методи підсумовування числових рядів.

Відповідно до мети, об'єкту та предмету дослідження було сформульовано такі **завдання дослідження:**

1. Здійснити теоретичний аналіз наукової та науково-методичної літератури з теми дослідження.
2. Розглянути основні властивості включення та рівносильності методів підсумовування рядів.
3. Здійснити огляд елементів граничного переходу у курсі математики закладів загальної середньої освіти.

У ході наукового дослідження були використані наступні загальнонаукові **методи дослідження**:

– аналіз,
– синтез,
– порівняння,
– узагальнення.

Апробація результатів дослідження відбулася шляхом публікації тез доповіді на тему «Елементи граничного переходу у шкільному курсі математики закладів загальної середньої освіти» у III Міжнародній студентській науковій конференції «Наука сьогодення: від досліджень до стратегічних рішень», яка відбулася 26 листопада 2021 у м. Рівне (додаток Б).

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Кваліфікаційна робота пов'язана з напрямом наукових досліджень кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу факультету комп'ютерних наук, фізики та математики Херсонського державного університету.

Практична цінність роботи полягає у тому, що представлені результати можуть бути застосовані під час:

- викладання математичних дисциплін у закладах вищої освіти,
- індивідуальної підготовки здобувачів загальної середньої освіти до математичних олімпіад та позашкільних конкурсів.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.

РОЗДІЛ 1
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ

1.1. Історія виникнення та розвитку теорії підсумовування рядів

Числовий ряд як математична структура зустрічалась ще в період античної піфагорійської математичної школи VI—IV ст. до нашої ери. Великий вклад в теорію рядів здійснили в більшій мірі європейські математики такі, як Дж. Грегор, І. Ньютон.

Розвиток теорії нескінченних рядів був історично зумовлений наростаючою необхідністю ефективного обчислення для розв'язання прикладних математичних задач. Математиками Давньої Греції та арабського Сходу ряди застосовувалися для обчислення площі фігур та об'ємів тіл. У XV-XVI століттях індійські математики отримали розклад тригонометричних функцій у степеневі ряди і змогли обчислити відношення довжини кола до його діаметра з точністю до 17 десяткових цифр.

Дослідження теорії рядів продовжилися і наприкінці XVII-початку XVIII століть. Питанню підсумовуваності рядів були присвячені праці Дж. Стірлінга (1730) та А. Муавра (1730).

Великий внесок в теорію рядів зробив І. Ньютон: (отримав розклад степені бінома, запропонував методи перетворення рядів та інших перетворень), а також Г. Лейбніц (встановив зв'язок з нескінченними рядами загальних задач аналізу, відкрив ознаку збіжності знакозмінних рядів з монотонно спадними та збіжними до нуля членами, отримав множину розкладів ірраціональних функцій в ряди, застосував ряди для розв'язку диференційних рівнянь).

Окремі ознаки збіжності рядів були розроблені Я. Бернуллі та

І. Бернуллі. Загальний метод для розкладу диференційовної функції в ряд був вперше опублікований Б. Тейлором, незважаючи на те, що у ХХ столітті встановили, що аналогічні формули вже зустрічалися у рукописах Дж. Грегорі та І. Ньютона. Теорія рекурентних рядів була розроблена А. де Муавром. Деякі методи підсумовування рядів були запропоновані Х. Гольбахом та Дж. Стірлінгом. К. Маклорен продемонстрував однозначність розкладу в ряд Тейлора, обгрунтував інтегральний признак збіжності рядів, а також вивів загальну формулу підсумовування рядів.

Дуже важливий метод, запропонований у 18 ст. для розкладу функції в ряд був винайдений Б. Тейлором. У 1712 Тейлор у письмовому вигляді повідомив його Дж. Метчину, а три роки потому опублікував в «Прямому та зворотному методі приростів» (Лондон, 1715). Саме в цій книзі був вперше опублікований той відомий ряд, який у 1784 отримав назву «теореми Тейлера». У вказаному листі Тейлор давав умовивід, що спирався на метод різниць та одночасно містивший у собі найкраще представлення інтерполяційної формули Ньютона.

У XVIII столітті істотний внесок в розвиток теорії нескінченних рядів вніс великий вчений Леонард Ейлер (1707-1783), що став одним із творців сучасного математичного аналізу, диференціальної геометрії, теорії функцій комплексного змінного, теорії чисел, комбінаторики, варіаційного обчислення. Ейлер активно досліджував нескінченні ряди всіма доступними в той час методами. Він знайшов деякі загальні і приватні методи підсумовування рядів, ввів поняття узагальненої суми ряду, отримав формули для коефіцієнтів тригонометричних рядів, вивчив безліч застосувань нескінченних рядів для інтерполяції, представлення функцій, наближених обчислень значень трансцендентних функцій і констант, пошуку коренів рівнянь, чисельного інтегрування і диференціювання, рішення диференціальних рівнянь.

Ейлер застосовував ряди для вирішення завдань з геометрії, комбінаторики, теорії чисел, механіки та астрономії. Розроблені ним основи теорії рядів і методи їх використання в різних областях науки актуальні і донині.

Ейлером були встановлені деякі ряди, сума котрих виражається певними інтегралами. Ейлеру належить формула

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln(n+1)+C,$$

де C – «ейлерова стала», яку він обчислив у 1741 році з точністю до 10 знаків: C=0,5772156649015329. Також Ейлер багато займався підсумовуванням рядів виду

$$\frac{1}{1^{2k}}+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\cdots, \qquad \frac{1}{1^{2k}}-\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}-\cdots,$$

Якщо для Ньютона представлення алгебраїчних і транцендертарних функцій за допомогою нескінченно малих рядів залишалась засобом інтегрування, то Ейлер, на відміну від нього, розумів, що таке представлення дає розуміння сутності та властивостей функції. Саме тому Ейлер поставив за мету розкласти елементарним чином в ряди всі відомі на той час функції. Для показникових, логарифмічних і тригонометричних функцій він виходив з біноміального ряду.

У 1743 році Ейлер вперше вказав, що

$$e^{z}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}$$

Тим самим узагальнивши результат Бернуллі (1728), який виразив

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

За допомогою числового ряду

$$1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

Ейлер скористався цим рядом для обрахунку числа e із 23-ма дясятковими знаками.

Особливе значення Ейлер приділяв встановленню зручних розкладів числа π в ряди. Зокрема, він застосовував метод Дж. Мечіна (1706), який у рівності

$$\frac{\pi}{4} = 4arctg\frac{1}{5} - arctg\frac{1}{239}$$

Використовував ряд

$$arctg\, x = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Це дозволило Мечіну порахувати 100 десяткових знаків для числа π.

Теорія нескінченних рядів набула значного піднесення у XVIII столітті завдяки роботам Ейлера. Однак його діяльність була направлена на формальний розвиток. Знаходячи деяким чином спосіб розкладу в ряд функції, Ейлер вважав його справедливим для всіх значень змінного, навіть якщо отримувався розбіжний ряд. Саме тому він поводився з розбіжними рядами так само, як зі збіжними. Однак при цьому він не відмовився від дослідження збіжності рядів. Наприклад, у роботі 1740 року ним були зроблені спроби сформулювати критерій збіжності ряду в термінах частинних сум.

Більшість сучасників Ейлера дотримувалась аналогічних поглядів на збіжність. Необхідність у дослідженні збіжності залишалась лише в окремих математиків. А. Кестнер постійно підкреслював, що необхідно строго розрізняти збіжні і розбіжні ряди.

Для Даламбера обчислення з рядами, збіжність яких не встановлена, були досить сумнівними. Однак строге дослідження збіжності можна знайти лише у роботах І. Ламберта.

Перше строге дослідження збіжності рядів виконав К. Гаусс для гіпергеометричного ряду (1812), до якого з різних точок зору вже підходив Ейлер.

Коші розглядав питання збіжності рядів загальним чином. Він звів збіжність знакозмінних рядів до збіжності рядів, що складаються з модулів та їх членів.

Коші вперше встановив справжні ознаки збіжності, довів теорему про те, що сума ряду, який рівний добутку двох абсолютно збіжних рядів, рівна добутку їх сум. Ця теорема була згодом узагальнена Н. Абелем (1826).

Більш тонкі ознаки збіжності дали Й. Раабе (1832), Е. Куммер (1835) та інші математики XIX ст.

Коші вперше встановив точні умови збіжності ряду Тейлора до даної функції (1823) і сформулював чітку різницю між збіжністю цього ряду загалом і збіжністю до даної функції.

У XVIII столітті ряди стали застосовувати для наближеного вираження логарифмів (В. Броункер, Н. Меркантор) і тригонометричних функцій (Дж. Грегорі). У той же час були сформульовані основні поняття теорії рядів: збіжність, розбіжність та залишок ряду (П. Менголі).

1.2. Основні поняття теорії підсумовування рядів

Теорія збіжності числових рядів набула близького до сучасного вигляду до середини XIX століття. Наведемо основні визначення та результати в ній.

Означення 1.1. Числовим рядом називається нескінченна сума вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \qquad (1.1)$$

де a_n дійсні чи комплексні числа. Величина a_n називається *загальним* *членом ряду*, а величина

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

називається *частинною сумою ряду*.

Означення 1.2. Якщо існує скінченна границя

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

то позначення (1.1) набуває реального змісту. За таких умов ряд називають *збіжним*, а число s – сумою ряду.

Якщо ж такої границі не існує, то вважають, що він не має суми, і називають його *розбіжним*.

В якості найпростішого прикладу нескінченного ряду можна навести геометричну прогресію виду

$$u + uq + uq^2 + \ldots + uq^n + \ldots$$

Частинною сумою наведеної прогресії є

$$s_n = \frac{u - uq^n}{1-q}$$

за умови, що $q \neq 1$.

Якщо $|q| < 1$, то в такому випадку існує скінченна границя

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{u}{1-q}$$

Розглянемо властивості рядів, що збігаються:

1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є збіжним і існує його сума s, тоді ряд виду $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ (де $C = const$) також буде збіжним і матиме суму Cs. Тобто, ряд, який збігається, може бути почленно помножений на деяку константу.

2. Над рядами, що збігаються, можуть бути виконані операції почленного додавання та віднімання. Таким чином, якщо маємо збіжні ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

та, відповідно, існують такі їх суми

$$s = \lim_{n\to\infty} u_n\,, \qquad \sigma = \lim_{n\to\infty} v_n$$

то ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm\, v_n)$$

матимуть відповідні суми

$$s \pm \sigma = \lim_{n\to\infty} (u_n \pm\, v_n).$$

3. Якщо відкидати або приєднувати скінченну кількість членів до ряду, то це жодним чином не вплине на його збіжність.

Досліджувати знакододатні ряди на збіжність можна з використанням достатніх умов збіжності, до яких відносять наступні ознаки:

- ознаки порівняння,
- ознаки Коші та Даламбера,
- інтегральна ознака Коші.

Більшість ознак збіжності рядів були знайдені ще до чіткого формулювання поняття збіжності ряду. Всі ознаки абсолютної збіжності спираються на так звану *ознаку порівняння.*

Теорема 1.1 (ознака порівняння). Нехай $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots -$ збіжний ряд з невід'ємними членами. Якщо для загального члена ряду (1.1) виконується нерівність

$$|u_n| \,\le a_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

то ряд (1.1) є абсолютно збіжним.

Найпростішим нескінченним рядом, збіжність якого була відома ще здавна, є геометрична прогресія зі знаменником менше одиниці.

Порівняння з геометричною прогресією дає нам *ознака Коші.*

Теорема 1.2 (ознака Коші). Якщо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1,$$

то ряд (1.1) – абсолютно збіжний.

Таким же чином отримаємо і *ознаку Даламбера*.

Теорема 1.3 (ознака Даламбера). Якщо

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1,$$

то ряд (1.1) абсолютно збігається.

Розглянемо ряд, у якому спостерігатимемо строге чергування знаків:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots, \tag{1.2}$$

де $u_n > 0,\ n = 1, 2, \ldots, u_n > 0,\ n = 1, 2, \ldots.$

Для дослідження на збіжність цього ряду можна скористатися такою достатньою ознакою.

Теорема 1.4 (ознака Лейбніца). Ряд виду (1.2) збігається, якщо:

1) $u_{n+1} < u_n, n = 1, 2, \ldots$
2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

При цьому сума ряду є додатною величиною і не перевищує його першого члена.

Для довільного знакозмінного ряду виду

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1.3}$$

де числа u_n – із довільним знаком. Водночас розглянемо ряд, утворений модулями вищевказаного ряду:

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{1.4}$$

Для знакозмінних рядів справедливою виступає наступна ознака збіжності:

Теорема 1.5. Якщо ряд (1.4) збіжний, то і ряд (1.3) є збіжним.

Для визначення збіжності ряду використовують *критерій Коші:* числовий ряд (1.1) називається збіжним тоді і тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число $N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ і при всіх $m \geq 0$ виконується нерівність

$$|u_n + \cdots + u_{n+m}| < \varepsilon$$

Ряди (1.1) та (1.2) називаються *абсолютно збіжними*, якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

Із критерія Коші видно, що:

– кожен абсолютно збіжний ряд є збіжним;

– якщо ряд збігається, то його загальний член наближається до нуля.

Якщо ж знакозмінний ряд (1.3) – збіжний, однак при цьому ряд виду (1.4) розбігається, то тоді ряд (1.3) має назву *умовно збіжного.*

Для того, щоб отримати з використанням ознаки порівняння більш тонкі ознаки абсолютної збіжності, треба мати більш широкий запас збіжних рядів, який був отриманий за допомогою інтегрального числення. Використовуючи його, отримаємо наступну ознаку, що має назву *інтегральної ознаки Коші*:

Нехай додатна функція $f(x)$ неперервна при $x \geq a$ і монотонно наближається до нуля при $x \to +\infty$. Якщо

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt < \infty,$$

то ряд

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots \tag{1.5}$$

абсолютно збігається, а якщо

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt = +\infty,$$

то ряд (1.5) є абсолютно розбіжним.

При

$$f(x) = x^{-\alpha}, f(x) = \frac{(\ln x)^{-\alpha}}{x}, f(x) = \frac{(\ln \ln x)^{-\alpha}}{x \ln x}$$

інтеграли обчислюються, і саме інтегральна ознака Коші дає нам шкалу порівняння, достатню для більшості задач.

А саме, ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^{-\alpha}}{n}, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln \ln n)^{-\alpha}}{n \ln n}$$

збігаються при $\alpha > 1$ і розбігаються при $\alpha \leq 1$.

Ознаку Коші зручно використовувати у тому випадку, коли загальний член ряду містить показникові функції від n, з яких легко добувається корінь n-го степеня.

Теорема 1.6 *(ознака Раабе).* Якщо при достатньо великих n, виконується нерівність

$$R_n \geq r,$$

де r – постійне число, більше одиниці, то ряд є збіжним, і якщо, починаючи з деякого місця,

$$R_n \leq r,$$

то ряд розбіжний [26].

Варіанта Раабе має вигляд:

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

У граничній формі ознака Раабе має вигляд:

якщо $lim R_n = R$ *– скінченна або нескінченна границя варіанти* R_n*, то:*

- *при R >1 ряд збігається,*
- *при R <1 ряд розбігається.*
- *Якщо R =1, то ряд може як збігатися, так в розбігатися.*

Теорема 1.7 *(ознака Куммера).* Нехай

$$c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$$

є довільною послідовністю додатних чисел, такою, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} \tag{1.6}$$

розбігається. Складемо з ряду (1.6) варіанту

$$K_n = c_n * \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$$

Якщо *для* $n > N$ виконується нерівність

$$K_n \geq \delta,$$

де δ – постійне додатне число, то ряд збігається. Якщо ж *для* $n > N$

$$K_n \leq 0,$$

то ряд є розбіжним [26].

Сформулюємо ознаку Куммера у граничній формі: якщо варіанта K_n має скінченну або нескінченну границю

$$lim\, K_n = K,$$

то при K>0 ряд збігається, а при K<0 – розбігається.

Теорема 1.8. *(ознака Бертрана)* Якщо варіанта $\mathfrak{B}_n$ має скінченну або нескінченну границю

$$\mathfrak{B} = lim \mathfrak{B}_n$$

то ряд (1.1) збігається при $\mathfrak{B} > 1$ і розбігається - при $\mathfrak{B} < 1$.

Теорема 1.9 *(ознака Гаусса)* Припустимо, що для даного ряду відношення $\frac{an}{a_{n+1}}$ може бути представлене у вигляді:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

де λ *і* μ – константи, а θ_n є обмежена величина:

$$||\theta_n| \leq L;$$

тоді ряд:

а) збігається, коли λ>1 або λ=1, μ>1, б) розбігається, коли λ<1 або λ=1, μ≤1 [27].

Теорема 1.10 *(інтегральна ознака Маклорена-Коші)* Якщо функція $f(x)$ неперервна, монотонно спадає і додатна при $x \geq a$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(\mathrm{n}) = f(1) + f(2) + \cdots + f(\mathrm{n}) + \cdots$$

а) збігається, коли збігається невласний інтеграл, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, тобто якщо він рівний деякій скінченній величині;

б) є розбіжним, коли вказаний інтеграл – розбіжний, тобто

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$$

На практиці функцію $f(x)$ одержуємо, замінюючи у виразі загального члена an ряду дискретну змінну n на неперервну змінну x, причому нижня межа a дорівнює початковому значенню n для даного ряду.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИ ПІДСУМОВУВАННЯ РОЗБІЖНИХ РЯДІВ

2.1. Класичні методи підсумовування рядів

2.1.1. Загальні матричні методи

Сучасна теорія рядів переважно вивчає розбіжні ряди. Наявні зараз різноманітні методи підсумовування розбіжних рядів є результатом роботи великої кількості вчених – видатних математиків [25]. Ці методи найчастіше виражають за допомогою наступних матричних перетворень.

Нехай $a = (a_{nk})$ є нескінченною матрицею $(n, k = 0, 1, \dots)$. Для наданої послідовності (U_n) утворимо нову $\left(\dot{U^n}\right)$:

$$\dot{U^n} = \sum_k a_{nk}\, U_k \tag{2.1}$$

Якщо члени послідовності U^n існують при $n = 0, 1, 2, \dots$ і границя $\lim \dot{U^n} = \dot{U}$, то в такому випадку послідовність (U_n) називають підсумованою методом a до суми $\dot{U}$.

Перетворення (2.1) носить назву *матричного перетворення* послідовностей (послідовність перетворюють у послідовність). Однак, окрім зазначеного перетворення використовують ще й такі матричні:

1. Перетворення ряду в послідовність

$$\dot{U^n} = \sum_k a_{nk}\, u_k \tag{2.2}$$

2. Перетворення ряду в ряд

$$\dot{u^n} = \sum_k \bar{a}_{nk}\, u_k \tag{2.3}$$

3. Перетворення послідовності в ряд

$$\dot{U^n} = \textstyle\sum_k \bar{a}_{nk}\, U_k \tag{2.4}$$

Перетворення (2.1) називають *трикутним* за умови $a_{nk} = 0$ при

$k > n$. Аналогічним чином визначаються і трикутні перетворення (2.2), (2.3), (2.4).

Результатом узагальнення методу середніх арифметичних э формування класичних методів підсумовування рядів, до яких можуть бути віднесені методи підсумовування Чезаро, Гьольдера, Абеля-Пуассона, Хаусдорфа, Ейлера-Кноппа. Виконаємо більш детальний огляд деяких із вказаних методів.

2.1.2. Метод середніх арифметичних

Позначимо метод середніх арифметичних H або $(n, 1)$.

Означення 2.1. Послідовність

$$U_n = \sum\nolimits_{k=0}^{n} u_k$$

називається підсумованою методом середніх арифметичних до числа $\acute{U}$, якщо послідовність

$$H_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U_k$$

збігається до $\acute{U}$ [1].

Метод Чезаро

Означення 2.2. Вираз, що має вид

$$S_n^0 = U_n = \sum_{k=0}^{n} u_{ki}$$

якщо $\alpha \geq 1$, то

$$S_n^0 = \sum_{k=0}^{n} S_k^{a-1}$$

має назву *чезаровської суми порядку α* ряду

$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} u_n$$

Для визначення методу Чезаро також вдаються до застосування біноміальних коефіцієнтів, котрі називають числами Чезаро –

$$A_n^a = \binom{n+a}{n}$$

Числа Чезаро є коефіцієнтами біноміального ряду [25]

$$\frac{1}{(1-x)^{a+x}} = \sum A_n^a \, x^n$$

Означення 2.3. Відношення сум Чезаро, що мають порядок α, до біноміальних коефіцієнтів називають чезаровським середнім та позначають

$$\sigma_n^a = \frac{S_n^a}{A_n^a},$$

Метод Чезаро. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^a = \acute{\breve{U}},$$

то зазначають, що ряд (2.9) підсумовують методом Чезаро порядку α до числа $\acute{U}$ [1].

Метод Чезаро порядку α позначають через C^aабо $(C,\ \alpha)$. Таким чином,

$$C^a\left\{\sum u_n\right\} = \lim_{n\to\infty} \delta_n^a$$

Теорема 2.1. Метод (C, α) регулярний, якщо $Re\alpha > 0$ або $\alpha = 0$ [1].

Теорема 2.2. Якщо $Re\beta > Re\alpha > -1$, то $(C,\ \beta) \supset (C,\ \alpha)$ і обидва методи сумісні [1].

2.1.3. Метод Абеля-Пуассона

Метод Абеля-Пуассона – це напівнеперервний метод підсумовування рядів, що також застосовується до здійснення підсумовування рядів Фур'є.

Означення 2.4. Ряд (1.1) має назву підсумованого методом Абеля-Пуассона (або його ще називають А-підсумованим) до числа $\acute{U}$, якщо степеневий ряд

$$f(x) = \sum u_n x^n$$

збігається при $|x| < 1$ і

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \sum u_n x^n = \acute{\breve{U}}$$

Означення 2.4 можна сформулювати інакше [1]: послідовність називається А-підсумованою до числа Ў , якщо степеневий ряд

$$\sum_{\text{т}=0}^{\infty} U_n x^n$$

збігається при $|x|$ < 1 та

$$\lim_{x\to 1-} f)x) = \lim_{x\to 1-} (z - x) \sum U_n x^n = \acute{\breve{U}}$$

Теорема 2.3. Метод А регулярний [1].

Теорема 2.4. Якщо $Re\alpha$ > −1, то $A \supset C^{a}$і обидва методи сумісні [1].

Математики Чемпен та Кнопп запропонували доведення теореми 2.1 для будь-яких α> −1 в своїх працях, Фробеніус довів дану теорему при α = 1 у статті, а Гьольдер – при α > 1 у праці.

2.2. Умови консервативності матричних методів підсумовування

У теорії рядів виділяють три загальних методи, використання яких дає змогу з допомогою матричного перетворення, що розглядається, переводити один клас послідовностей в інший. Розглянемо наступні матричні перетворення.

Нехай Ả $= \lambda_{nk}$– нескінченна матриця n, k = 0,1, … Утворимо для послідовності (U_n) нову послідовність $\left(\acute{\breve{U}}_n\right)$ з

$$\acute{\breve{U}}_n = \sum_k \lambda_{nk} U_k$$

Означення 2.9. Послідовність (Un) називається підсумованою методом Ả до суми Ў, якщо $\acute{\breve{U}}_n$ існують за будь-яких n = 0,1, … та $lim\acute{\breve{U}}_n = \acute{\breve{U}}$ [1].

Матричне перетворенням (А) переводить послідовність в послідовність.

Наведемо приклади інших матричних перетворень:

– перетворення ряду в послідовність:

$$\acute{\text{Ŭ}}_n = \sum\nolimits_k \alpha_{nk} U_k$$

– перетворення ряду в ряд:

$$\acute{\text{ŭ}}_n = \sum\nolimits_k \overline{a_{nk}}\, u_k$$

– перетворення послідовності в ряд:

$$\acute{\text{ŭ}}_n = \sum\nolimits_k \overline{\lambda_{nk}} U_k$$

Означення 2.10. Матричне перетворення, використовуючи яке переводять всі збіжні послідовності (або ряди) у збіжні послідовності, називають *перетворенням, яке зберігає збіжність* [1].

Означення 2.11. Матричне перетворення має назву *регулярного*, якщо із властивості збіжності послідовності (U_k) чи ряду $\sum U_k$ обов'язково випливає збіжність послідовності $\left(\acute{\text{Ŭ}}_n\right)$ і

$$\lim \acute{\text{Ŭ}}_n = \lim U_k$$

Теорема 2.5. Для існування і збереження збіжності А-перетворення необхідним і достатнім є виконання таких умов:

1) існування $lim_n \lambda_{nk} = \lambda_k$;

2) існування $\lim_n \sum_k \lambda_{nk} = \lambda_k$

3) $\sum_k |\lambda_{nk}| = o(1)$ [1].

Теорема 2.6. Для регулярності А-перетворення необхідним і достатнім є виконання умов 1 - 3 з теореми 2.5, зі значеннями $\lambda_k = 0$ та $\lambda = 1$.

Теорема 2.7. Для існування і збереження збіжності В-перетворення необхідним і достатнім є виконання таких умов:

1) існування $lim_n a_{nkl} = a_k$

2) $\sum_k |\Delta a_{nk}| = o$

При цьому, якщо

$$\sum u_k = U$$

то [1]:

$$lim\acute{\breve{U}}_n = a_0 U + \sum(\Delta a_k)(U_k - U) = \left(a_0 - \sum \Delta a_k\right) U + \sum(\Delta a_k) U_k$$

Зауваження 2.2. Для регулярності А-перетворення необхідним і достатнім є виконання умов 1-2 з теореми 2.7 зі значенням $a_k = 1$.

Теорема 2.8. Для існування і переводу всіх обмежених послідовностей (U_k) у збіжні послідовності $\left(\acute{\breve{U}}_n\right)$ для А-перетворення необхідним і достатнім є виконання наступних умов:

1) існування $lim_n \lambda_{nk} = \lambda_k$;

2)$\sum_k |\lambda_{nk}| = o(1)$;

3) $lim_n \sum_k |\lambda_{nk} - \lambda_k| = 0$.

При цьому (за [1]):

$$lim\acute{\breve{U}}_n = \sum \lambda_k U_k$$

Теорема 2.9. Для існування А-перетворення, яким всі збіжні до нуля (або ж всі обмежені) послідовності (U_k) переводитимуться у обмежені послідовності $\left(\acute{\breve{U}}_n\right)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$\sum_k |\lambda_{nk}| = o$$

Теорема 2.9 була опублікована 1922 року у статті австрійського математика Х. Хана.

2.3. Включення і рівносильність методів підсумовування рядів

Включення методів підсумовування – це включення підсумованості полів, які відповідають цим методам.

Якщо A і B – два методи підсумовування, визначені на множині M рядів (або послідовностей), A^* і B^* – їх поля підсумовування, і при цьому $A^* \subset B^*$, то кажуть, що метод B включає метод A. Позначають це символом $A \subset B$.

Методи A і B називають. рівносильними і позначають $A = B$, якщо кожен з них включає інший.

Рівносильні методи мають одне і те ж саме поле підсумовування.

Метод B сильніший за метод A, якщо B включає A, але не рівнозначний йому.

Якщо поле підсумовування методу збігається з безліччю всіх рядів, що сходяться, то метод називають рівносильним збіжності. Іноді розглядають включення методів підсумовування не на всій множині їх визначення, а лише на деякій її підмножині.

Для методів підсумовування Чезаро (C, k) має місце включення

$$(C, k_1) \subset (C, k_2) \text{ при } k_2 \geq k_1 > -1,$$

Метод підсумовування Абеля сильніший всієї сукупності методів Чезаро (C, k) при $k > -1$.

Метод підсумовування Рісса (R, n, k) рівносильний методу підсумовування Чезаро (C, k) $(k \geq 0)$.

Метод підсумовування Абеля рівносильний збіжності на множині рядів, члени яких a_n задовольняють умові $a_n = O(1/n)$.

У наведених прикладах методи підсумовування є одночасно і спільними, хоча в загальному випадку включення методів підсумовування не припускає їх сумісності.

Однак, якщо A і B – регулярні матричні методи і $A \subset B$ на множині обмежених послідовностей, то A і B сумісні на цій множині (теорема Мазура-Орлича-Брудно).

У літературних джерелах іноді вимогу спільності методів накладають при самому визначенні включення.

Включення методів підсумовування, визначених на множині рядів з дійсними членами, називають повним, якщо включення полів підсумовування зберігається і при поповненні їх рядами, що підсумовуються до + ∞ і -∞. Наприклад, метод підсумовування Гельдера *(H, k)* цілком включає метод Чезаро *(C, k)*.

РОЗДІЛ 3
ЕЛЕМЕНТИ ГРАНИЧНОГО ПЕРЕХОДУ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

3.1. Елементи граничного переходу у шкільному курсі алгебри

Відповідно до затвердженого чинного Державного стандарту загальної середньої освіти, навчальною програмою з математики не передбачено ознайомлення здобувачів освіти з числовими рядами в явному вигляді.

Однак, учні в 9 класі знайомляться з означенням числової послідовності та способами їх задання. На цьому етапі вводяться поняття скінченних та нескінченних послідовностей, спадних та зростаючих, а також стаціонарних. Розуміння цієї теми є дуже важливим для здобувачів освіти, оскільки вона передує вивченню арифметичної та геометричної прогресії.

Здобувачі освіти 10 класу з поглибленим вивченням математики в курсі алгебри і початків аналізу від вивчення теми «Числові послідовності» безпосередньо переходять до вивчення теми «Границя та неперервність функції».

Програмою [16] для стандартного та академічного рівнів передбачено вивчення границі функції в точці, оскільки вона є необхідною для того, щоб в подальшому ввести поняття похідної, надати здобувачам освіти формальне означення неперервності функції, визначеного інтеграла.

Натомість, відповідно до програми, для учнів на профільному рівні варто спочатку вивчати границі послідовності, а вже потім переходити до границі функції в точці.

Зазначимо, що обов’язкове вивчення границі функції на нескінченності не передбачене на жодному з рівнів навчання математики.

Оскільки основним об'єктом математичного аналізу (у тому числі в межах курсу алгебри та початків аналізу) виступає функція, то варто зазначити, що важливий інструмент для дослідження властивостей – похідна. Значення похідної у точці дає характеристику швидкості зміни функції у даній точці.

Звичайно поняття похідної функції в точці задають з використанням основної операції математичного аналізу, яким є граничний перехід.

У підручнику з математики для 11 класу профільного рівня (за авторства Неліна Є.П.) розглядаються особливості здійснення граничного переходу.

Нагадаємо означення границі функції в точці за [17].

Означення 3.1. Число B називають границею функції $f(x)$ у точці a (при x, що прямує до a), якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатне число $\delta,$ що при всіх $x \neq a$, які задовольняють нерівність $|x-a|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-B|<\varepsilon.$

Знаходити число B за функцією f – це означає здійснювати *граничний перехід.*

Існують *правила здійснення граничних переходів*.

Якщо маємо границі функцій $f(x)$ та $g(x)$ (вже відомі), то, щоб виконати граничний перехід над сумою, добутком або часткою цих функцій, достатньо буде виконання відповідних операцій над границями даних функцій.

Вищесказане можна подати у вигляді: якщо при $x \to a,\ \ f(x) \to A,\ \ g(x) \to B$, то

$$f(x)+g(x) \ \to A+B$$

$$f(x)g(x) \ \to A \cdot B$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B} \text{ (де } B \neq 0)$$

З правил граничного переходу випливає, що за умови неперервності функцій $f(x)$ і $g(x)$ в точці a, неперервними в цій точці будуть і сума, добуток та частка (за умови, що для $\frac{f(x)}{g(x)}$ $g(a) \neq 0$) зазначених функцій.

У випадку, коли функція $f(x)$ є постійною, тобто $f(x) = c,$ то для будь-якого значення x значення функції $f(x)$ незмінно дорівнюватиме c. Тому при $x \to a$ значення функції прямуватиме до значення константи, тобто $f(x) \to c$. Можна сказати, що *границя сталої рівна самій сталій:*

$$\lim_{x\to a} c = c$$

Границя суми чи різниці двох функцій буде рівна відповідно сумі чи різниці їх границь (за умови існування границь для кожного з доданків):

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

Границею добутку двох функцій буде добуток їх границь (за умови існування границь для кожного з множників):

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Границею частки двох функцій буде частка їх границь (за умови існування границь для чисельника і знаменника, а також якщо границя знаменника не рівна нулю):

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \text{ (де } B \neq 0)$$

На основі викладених вище правил можна сформулювати ще одне: можна виносити сталий множник за знак границі:

$$\lim_{x\to a}\big(cf(x)\big) = c \lim_{x\to a} f(x).$$

Також Нелін Є.П. у своєму підручнику зазначає, що іноді при вивченні границь доведеться здійснювати граничний перехід у нерівностях. Здійснюється він за наступною теоремою.

Теорема. Якщо $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = B$ і, до цього ж, в деякому околі точки a (окрім, можливо, власне точки a) справедливою є нерівність $f(x) \leq \varphi(x)$, то справедливою буде і нерівність $A \leq B$.

Наслідок (границя проміжної функції). Якщо $\lim_{x\to a} \varphi(x) = B$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$ і, до цього ж, в деякому околі точки a (окрім, можливо, власне точки a) справедливою є нерівність $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, то

$$\lim_{x\to a} f(x) = B$$

Довести даний наслідок з теореми можливо через здійснення граничного переходу.

З нерівності

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

одержуємо

$$B \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq B$$

Очевидно, що нерівності можуть виконуватися лише при $\lim_{x\to a} f(x) = B$, що і треба було довести.

3.2. Елементи граничного переходу у шкільному курсі геометрії

Програмою вивчення математики в 9 класі передбачено вивчення довжини кола на вищому теоретичному рівні, при цьому формулу строго не доводять, оскільки для строгого доведення необхідно використовувати поняття границі, якого здобувачі освіти на цьому етапі навчання ще не знають.

Щоб реалізувати перспективні зв’язки та пропедевтично подати поняття границі з наочною ілюстрацією ідеї граничного переходу, одним з варіантів є надання учням готової таблиці значень периметрів правильних вписаних і описаних навколо кіл радіусів багатокутників (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Значення периметрів правильних вписаних і описаних навколо кіл радіусів багатокутників

К-ть сторін	Периметр вписаного багатокутника		Периметр описаного багатокутника	
	$R = 1$	$R = 3$	$R = 1$	$R = 3$
6	6	18 = 6·3	6,9282	20,7846=6,9282·3
12	6,2117	18,63497= 6,2117·3	6,4308	19,2923=6,4308·3
24	6,2653	18,7958=6,2653·3	6,3193	18,9579=6,3193·3
48	6,2787	18,8361=6,2787·3	6,2922	18,8765=6,2922·3
96	6,2821	18,8462=6,2821·3	6,2854	18,8563=6,2854·3
192	6,2829	18,8487=6,2829·3	6,2837	18,8487=6,2837·3

Проаналізувавши рисунки й числові значення периметрів, учні переконаються, що при $R = 1$, зі збільшенням кількості сторін багатокутника значення периметрів прямують до одного й того самого числа, що наближено дорівнює $6{,}28 \approx 2\pi \cdot 1$. Якщо ж $R = 3$, то це число, відповідно, $6{,}28 \cdot 3 \cdot \approx 2\pi \cdot 3$.

У чинних підручниках з геометрії для виведення формули площі круга традиційно послуговуються ідеєю граничного переходу від площі вписаного (описаного) правильного багатокутника до площі круга за умови прямування до нескінченної кількості n сторін правильного n-кутника.

Погорєлов О.В. у підручнику «Геометрія» для 7-9 класу наводить означення площі довільної фігури через поняття простої фігури, неявно використовуючи ідеї граничного переходу: «Дана фігура має площу S, якщо існують прості фігури, які містять її, і прості фігури, які містяться в ній, з площами, що як завгодно мало відрізняються від S» [19].

Далі, базуючись на наданому визначенні, розглядають формулу площі круга, кругового сектора і сегмента.

Автор підручника доводить формулу площі круга, беручи за основу наочні уявлення про це поняття, з неявним використанням ідеї граничного переходу (хоча на цьому етапі навчання здобувачі освіти ще не знають поняття границі). Програма обмежена вимогою обраховувати значення геометричних величин (до яких відносимо довжини, міри кутів, площу) із застосуванням вивчених властивостей фігур і формул.

Наведемо приклад неявного використання граничного переходу при доведенні формули площі круга у підручнику [19].

Означення 3.2. Площа круга дорівнює половині добутку довжини кола, що його обмежує, на радіус.

Доведення.

Побудуємо два правильні n-кутники: P_1 – вписаний у круг і P_2 --- описаний навколо круга (рис. 3.1). Многокутники P_1 і P_2 є простими фігурами. Многокутник P_1 міститься в крузі, а многокутник P_2 містить круг.

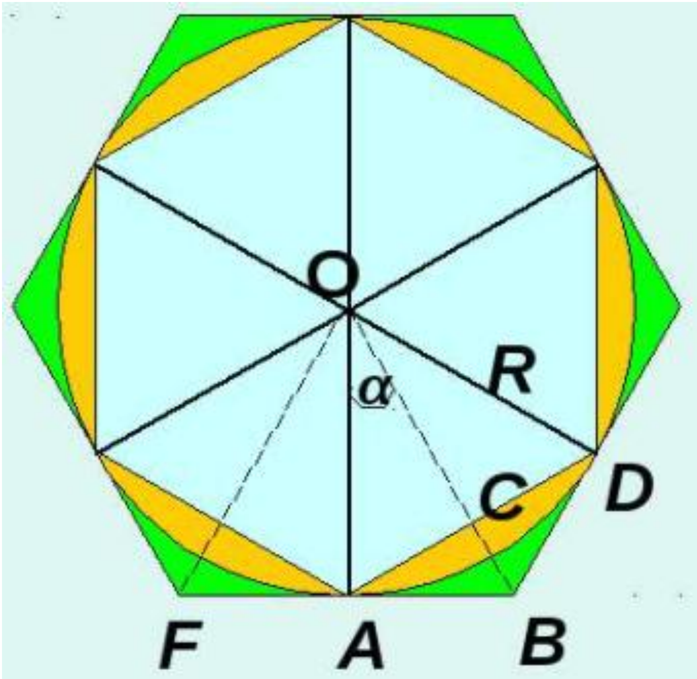

Рисунок 3.1 – До доведення формули площі круга

Радіуси, проведені у вершини многокутника P_1, розбивають його на n трикутників, кожний з яких дорівнює трикутнику AOD.

$$S_{P_1} = nS_{AOD}$$

Оскільки

$$S_{AOD} = AC \cdot OC = AC \cdot AO\cos\alpha,$$

то

$$S_{P_1} = (nAC) \cdot AO\cos\alpha = \frac{pR}{2}\cos\alpha$$

де p – це периметр многокутника P_1, R – радіус круга. Аналогічно можна знайти площу многокутника P_2:

$$S_{P_2} = nS_{BOF}$$

Оскільки

$$S_{BOF} = AB \cdot AO = \frac{AC}{\cos\alpha} \cdot AO,$$

то

$$S_{P_2} = (nAC) \cdot \frac{AO}{\cos\alpha} = \frac{pR}{2\cos\alpha}.$$

Отже, многокутник P_1, який міститься в крузі, має площу

$$S_{P_1} = \frac{pR}{2} \cos\alpha,$$

а многокутник P_2, який містить круг, має площу

$$S_{P_2} = \frac{pR}{2\cos\alpha}.$$

Оскільки при досить великому числі розбиттів n периметр p як завгодно мало відрізняється від довжини кола l, а $\cos\alpha$ як завгодно мало відрізняється від одиниці, то площі многокутників P_1 і P_2 як завгодно мало відрізняються від $\frac{lR}{2}$. Відповідно до означення, отримаємо таку площу круга:

$$S = \frac{lR}{2} = \pi R^2.$$

У курсі стереометрії 10 - 11 класів для знаходження площі поверхні тіл обертання можна знайти відповідні формули площ поверхонь, із використанням аналогічного доведенню формули площі круга підходу.

Для використання ідеї граничного переходу для знаходження площі поверхні для тіл обертання слід вписувати такі відповідні фігури:

- правильна n-кутна призма – для циліндра,
- правильна n-кутна піраміда – для конуса,
- опуклий багатогранник – для сфери.

Педагогічна практика [13] показує, що доведення формул об'єму похилого паралелепіпеда методом перетворення його додатковими побудовами на прямокутний, як і доведення формули об'єму призми, не зумовлюють в учнів особливих труднощів, якщо використати заздалегідь виготовлені моделі, що ілюструють етапи перетворення. Значно складніше учні сприймають доведення формули об'єму трикутної піраміди.

У навчально-методичній літературі відомо кілька способів доведення формули об'єму трикутної піраміди, одним з них є спосіб границь. Він запропонований для учнів у посібнику К. Ф. Лебединцева [13]. Відповідно до посібника, на першому етапі використовуємо готову або доводимо формулу суми квадратів n перших чисел натурального ряду. В подальшому ця формула буде використана для доведення формули об'єму піраміди.

Запишемо різницю між виразами n^3 і $(n-1)^3$:

$$n^3 - (n-1)^3 = n^3 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1).$$

Підставивши в цю рівність послідовно числа 1, 2, 3, …, дістанемо рівності:

$1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$

$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$

$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1$

……………………………………

$n^3 - (n-1)^3 = 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1$

Виконавши почленне додавання всіх рівностей, отримаємо:

$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$

Далі виразимо з отриманої рівності суму квадратів n перших чисел натурального ряду, водночас замінюючи суму в других дужках за формулою суми n перших членів арифметичної прогресії:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{n(2n^2 + 2n + n + 1)}{6} = \frac{n\big(2n\,(n+1) + (n+1)\big)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Отже, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

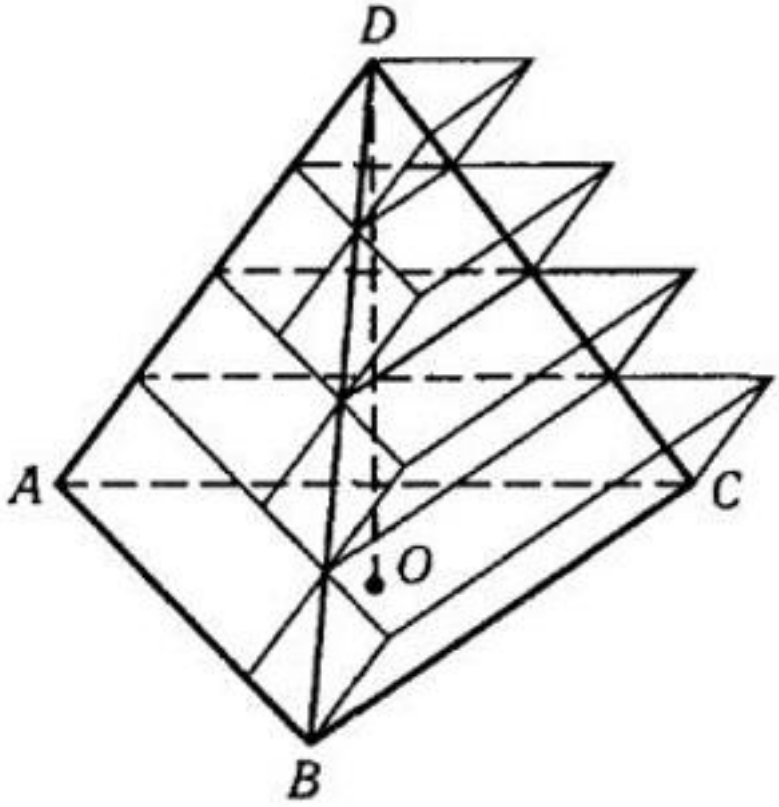

Рисунок 3.2 – До доведення формули об’єму трикутної піраміди

Візьмемо довільну трикутну піраміду з площею основи S і висотою H (рис. 3.2), розіб’ємо її висоту на n рівних частин. Через точки поділу проведемо площини, паралельні основі піраміди. Потім проведемо через вершини перерізів прямі, паралельні якому-небудь ребру піраміди (наприклад, DA). Побудуємо на кожному з перерізів призми, що входять у відповідний шар піраміди, і такі, що виходять з неї. Зазначимо, що східчасті багатогранники, що складені з вхідних і вихідних призм, різняться на одну призму, основа якої збігається з основою піраміди.

Якщо позначати об’єм східчастого багатогранника, що міститься у піраміді, буквою V_1, а того, що містить в собі піраміду як V_2, то об’єм піраміди V задовольняє умову

$$V_1 < V < V_2$$

Різниця $V_2 - V_1 = \frac{SH}{n}$, де $\frac{SH}{n}$ – об’єм призми, на яку відрізняються східчасті багатогранники.

За $n \to \infty$ різниця $V_2 - V_1 = \frac{SH}{n}$ наближається до нуля. Звідси випливає, що об'єм піраміди є спільною границею V_1 і V_2, тобто

$$V = \lim_{n\to\infty} V_1 = \lim_{n\to\infty} V_2$$

Отже, обчислення об'єму піраміди зводиться до обчислення границі об'єму одного зі східчастих багатогранників за умови, що $n \to \infty$.

Обчислимо попередньо об'єм, наприклад, багатогранника, що містить піраміду. Враховуючи, що V_2 складається з об'ємів n призм, обчислимо об'єм k-ї призми. Площу основи k-ї призми знайдемо, враховуючи, що площі перерізів відносяться як квадрати їхніх відстаней від вершини. Маємо

$$\frac{S_k}{S} = \frac{\left(k\frac{H}{n}\right)^2}{H^2},$$

звідси

$$S_k = S\frac{k^2}{n^2}$$

Об'єм k-ї призми дорівнює

$$S\frac{k^2}{n^2}\frac{H}{n} = \frac{SHk^2}{n^3}$$

При зміні k від 1 до n, отримаємо послідовно об'єми всіх призм. Тому

$$V_2 = \frac{SH\cdot 1}{n^3} + \frac{SH\cdot 2^2}{n^3} + \frac{SH\cdot 3^2}{n^3} + \cdots + \frac{SH\cdot n^2}{n^3}$$
$$= \frac{SH}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{SH}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{SH}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Тоді:

$$V = \lim_{n\to\infty} \frac{SH}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}SH.$$

Отже, у закладах загальної середньої освіти метод граничного переходу може бути застосований на уроках алгебри для розв’язання практичних завдань на границі та при вивченні пов’язаних тем, а на уроках геометрії – ідеї граничного переходу наочно ілюструються при доведенні формул чи теорем.

ВИСНОВКИ

У ході виконання кваліфікаційної роботи було здійснено теоретичний аналіз навчальної та навчально-методичної літератури, який показав актуальність та широку сферу застосування теорії рядів у найрізноманітніших галузях, таких як фізика, астрономія, статистика, економіка. Підсумовування рядів є одним з методів, що застосовуються в задачах автоматизації.

Описано історичний аспект виникнення та розвитку теорії рядів. Значного розвитку теорія рядів зазнала наприкінці XVII-початку XVIII століть. Внесок у її розвиток зробили Дж. Стірлінг, А. Муавр, І. Ньютон, Б. Тейлор, Х. Гольбах, Л. Ейлер, Ж. Даламбер, К. Гаусс.

Теорія збіжності числових рядів набула близького до сучасного вигляду до середини XIX століття. У роботі узагальнено та систематизовано поняття та ознаки збіжності числових рядів, а саме: ознаки порівняння, ознаки Коші та Даламбера, Лейбніца, Раабе, Куммера, Бертрана, Гаусса.

Розглянуто методи підсумовування рядів – загальні матричні методи, метод середніх арифметичних, метод Чезаро, метод Абеля-Пуассона.

Описано включення і рівносильність методів підсумовування рядів. Включення методів підсумовування – це включення підсумованості полів, які відповідають цим методам. Методи A і B називають. рівносильними і позначають $A = B$, якщо кожен з них включає інший. Рівносильні методи мають одне і те ж саме поле підсумовування.

Елементи граничного переходу у шкільному курсі математики зустрічаються переважно у старших класах закладів загальної середньої освіти, і до того ж, у неявному вигляді. Однак навіть за таких умов вони використовуються для пропедевтики поняття границі у курсі алгебри та початків аналізу. Також граничний перехід використовують у деяких підручниках при доведенні формул довжини кола та площі круга при вивченні планіметрії, і, відповідно, формули площі поверхні тіл обертання у стереометрії також доводяться із використанням ідей граничного переходу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барон С.А. Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин: Валгус, 1977. 275 с.
2. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.
3. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. Геометрія: підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: видавничий дім «Освіта», 2017. 273 с.
4. Бєляєв О.В. Введення в вищу математику: конспект курсу лекцій. 2014. 103 с. URL: https://mil.univ.kiev.ua/files/256_391947576.pdf.
5. Вища математика: Навчальний посібник для студентів технічних напрямків підготовки /Укладач: В. В. Бакун. К.: НТУУ «КПІ», 2013. 270 с.
6. Евграфов М. А. Ряды и интегральные представления. *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления.* 1986. Том 13. С. 5-92.
7. Зубова И.К. Теория рядов. Основные понятия в их историческом определении: методические указания. Оренбург: ГОУ ОГУ, 2003. 28 с.
8. Істер О.С. Алгебра: підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2017. 264 с.
9. Істер О.С. Геометрія: підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2017. 240 с.
10. Курченко О.О. Інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посібник. К., 2016. 140 с.
11. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків: Гімназія, 2017. 272 с.
12. Метельский Н.В. Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы: Учебн. пособие для вузов. Минск: Изд-во БГУ, 1982. 256с.
13. Музиченко С. В. Деякі методичні особливості формування у

старшокласників поняття границі. *Актуальні питання природничо-математичної освіти*. 2015. №5-6. URL: https://repository.sspu.sumy.ua/bitstream/123456789/6529/1/Muzichenko%20S.%20S.pdf

14. Навчальна програма з математики (поглиблений рівень) для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл. 2017. 22 с. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-poglibl-rivenfinal.docx.

15. Навчальна програма з математики (профільний рівень) для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл. 2017. 25 с. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx.

16. Навчальна програма з математики (рівень стандарту) для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл. 2017. 14 с. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika.-riven-standartu.docx.

17. Нелін Є. П., Долгова О. Є. «Алгебра і початки аналізу (профільний рівень)» підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 240 с.

18. Нікітченко М. С. Математична логіка та теорія алгоритмів. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2008. 207 с.

19. Погорєлов О.В. Геометрія. Планіметрія: підручн. Для 7-9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Школяр, 2004. 240 с.

20. Про освіту: Закон України від 05.09.2017 № 2145-VIII про освіту. Голос України. 2017. 27 вересня. С. 178-179.

21. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.

22. Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции «Воронежская зимняя

математическая школа (28 января – 2 февраля 2021 г.)». Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2021. 334 с.

23. Сухорольський М.А. Функціональні послідовності та ряди. Львів: Видавництво «Растр-7», 2010. 340 с.

24. Тарасенкова Н.А. Алгебра: підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: УОВЦ «Оріон», 2017. 271 с.

25. Томусяк А. А., Трохименко В. С. Математичний аналіз: посібник для студентів. Вінниця: ВДПУ, 1999. 489 с.

26. Федак І.В. Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри. Навчальний посібник. Івано-Франківськ: ПНУ імені Василя Стефаника, 2020. 56 с.

27. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том 2. Москва: издательство «Наука», 1968. 464 с.

28. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и итнегрального исчисления. В 3т. Т. 2. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 864 с.

29. Харди Г. Расходящиеся ряды. Москва: Издательство инностанной литературы, 1951. 511 с.

30. Шухман Е.В. Вычислительные аспекты теории рядов в опубликованных работах и неопубликованных материалах Леонарда Эйлера: автореф.дис…канд.физ.-мат.наук: 07.00.10. Москва, 2012. 19 с.

31. Щепин Е.В. Лекции по анализу в СУНЦ. Ряды. 2010. 68 с. URL: https://homepage.mi-ras.ru/~scepin/lectures.pdf.

ДОДАТКИ

Додаток А

КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Я, Панова Катерина Олександрівна, учасниця освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:

– дотримуватися:
- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:
- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;

– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;

– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;

– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традицій університету, формуванню його позитивного іміджу;

– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;

– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;

– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні й політичні переконання;

– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;

– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;

– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;

– не брати участі в будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

– не підроблювати документи;

– не поширювати неправдиву та компрометуючу інформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;

– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг або здійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;

– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальні домагання;

– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базі університету та особистій власності інших студентів та/або працівників;

– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністю університету;

– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;

– не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальності й до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

27.10.2020		К.О. Панова
(дата)		(ім'я, прізвище)

Додаток Б


СЕРТИФІКАТ
учасника конференції
ПАНОВА КАТЕРИНА ОЛЕКСАНДРІВНА
ВЗЯВ(-ЛА) УЧАСТЬ У III МІЖНАРОДНІЙ СТУДЕНТСЬКІЙ НАУКОВІЙ КОНФЕРЕНЦІЇ
НАУКА СЬОГОДЕННЯ: ВІД ДОСЛІДЖЕНЬ ДО СТРАТЕГІЧНИХ РІШЕНЬ
26 ЛИСТОПАДА 2021 РІК • М. РІВНЕ, УКРАЇНА
IN 6127
від 26.11.2021
часті було опубліковано тези доповіді учасника на тему:
ТИ ГРАНИЧНОГО ПЕРЕХОДУ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ
ТИКИ ЗАКЛАДІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ
Р МОЛОДІЖНОЇ НАУКОВОЇ ЛІГИ
МОЛОДІЖНА НАУКОВА ЛІГА