МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ФУНКЦІОНАЛЬНА СКЛАДОВА ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ «РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ» У ПРОФІЛЬНОМУ НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала: студентка 2 курсу, 221М групи
Спеціальності 014 Середня освіта
Спеціалізації 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)»
Желєз Валентина Миколаївна

Керівник кандидат педагогічних наук,
доцент Таточенко Володимир Іванович

Рецензент вчитель-методист, директорка
Херсонської ЗОШ І-ІІІ ступенів № 13
Херсонської міської ради
Перегняк Ганна Євгенівна

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Основною тенденцією сучасного розвитку системи шкільної математичної освіти виступає спрямованість на широку диференціацію навчання математики, яка забезпечує вирішення двох завдань. По-перше, вона забезпечує базову математичну підготовку всіх здобувачів середньої освіти, а по-друге, вона дозволяє сформувати в них стійкий інтерес до навчання, виявити та розвинути математичні здібності учнів, підготувати до навчання у закладах вищої освіти. Завдяки реалізації останнього завдання проблема змісту математичної освіти набуває значної актуальності. Цю проблему вирішують школи з поглибленим вивченням математики, проте по-різному. Одні обирають напрямок вирішення проблеми шляхом поглибленого вивчення традиційних розділів курсу математики середньої школи, що сприяє закладенню міцного фундаменту для подальшого ознайомлення випускників з математичною наукою під час продовження навчання у закладах вищої освіти, а інші обирають напрямок вирішення проблеми за рахунок включення до програми різних розділів вищої математики.

Одним із основних принципів вдосконалення методичної системи навчання математики є принцип гуманізації математичної освіти, особистісної орієнтації навчання математики. У зв’язку з цим в школах або класах з математичної спеціалізацією поверхневе вивчення додаткових розділів вищої математики втрачає сенс. Для учнів цих шкіл які, як зазвичай, продовжать навчання на технічних або фізико-математичних факультетах закладів вищої освіти, більш важливо та корисніше глибоко розглянути ідеї та методи з курсу елементарної математики, які закладають міцний фундамент для вивчення вищої математики у подальшому. А оскільки однією з основних її ідей є ідея функції, то виникає необхідність засвоєння учнями функціональних підходів при розв’язуванні різноманітних завдань, зокрема, й при розв’язуванні рівнянь та нерівностей.

Ідея введення поняття функції в шкільні програми з математики була висунута більше 100 років тому; її активним прихильником був академік М.В. Остроградський. Методичні розробки М.В. Остроградського та його учнів лягли в основу руху за реформу викладання математики [6] . Одним з видатних математиків, які очолили цей рух, був німецький вчений Ф. Клейн. На І Міжнародному конгресі математиків, який відбувся в Цюріху в 1897 році, він виступив з чіткою програмою реформи, серед найважливіших принципів якої, було положення про перебудову викладання математики на основі розвитку функціонального мислення шляхом «пронизування усього шкільного курсу математики ідеєю функціональної залежності» [11].

Тенденція широкого впровадження функціонального підходу до різних розділів шкільної математики була викликана необхідністю позбавитися від надмірного формалізму та роз'єднаності при викладанні окремих дисциплін математичного циклу. Вивчення функції мало на меті сприяти справжньому, а не формальному узгодженню навчальних програм середньої та вищої шкіл, «подоланню прірви між шкільним курсом та сучасною наукою» [12]. Досить багато висувається думок в науковій літературі і про важливість застосування функціонального підходу при розв’язуванні різних завдань елементарної математики, в тому числі й рівнянь. Звертається увага на те, що лінія рівнянь і нерівностей нерозривно пов'язана з функціональної лінією. Одним із найважливіших таких зв'язків є застосування до дослідження функцій методів, які розробляються в лінії рівнянь та нерівностей. З іншого боку, безпосередньо функціональна лінія суттєво впливає на викладання та на стиль вивчення лінії рівнянь і нерівностей.

Важливість застосування функціональної складової при розв’язуванні різних типів рівнянь та нерівностей при підготовці здобувачів середньої освіти профільних закладів і обумовила вибір теми дослідження.

Мета дослідження – розкрити питання стосовно методики формування функціональних умінь у здобувачів середньої освіти шкіл (класів) з поглибленим вивченням математики в курсі алгебри і початків аналізу під час вивчення змістової лінії «Рівняння та нерівності».

Об'єктом дослідження є процес навчання алгебри і початків аналізу в школах (класах) з поглибленим вивченням математики.

Предметом дослідження є процес навчання нестандартним (функціональним) методам розв'язання рівнянь та нерівностей в школах (класах) з поглибленим вивченням математики.

Виходячи з мети, визначені основні завдання дослідження:

- розглянути теоретичні основи вивчення змістової лінії «Рівняння та нерівності» в профільній школі;
- визначити спеціальні класи рівнянь і задач та розглянути основні методи їх розв’язання на основі функціонального підходу; вказати технологію побудови таких рівнянь і задач;
- експериментально перевірити ефективність системи вправ на впровадження функціональної складової під час вивчення методів розв’язування рівнянь та нерівностей в класах (школах) з поглибленим вивченням математики.

Теоретичне значення роботи полягає в обґрунтуванні доцільності і можливості вивчення в школах (класах) з поглибленим вивченням математики функціональних прийомів розв’язування рівнянь і задач.

Практичне значення дипломної роботи полягає тому, що виділені класи рівнянь та нерівностей і розроблені методи їх розв’язування можуть бути використані вчителями шкіл з поглибленим вивченням математики на уроках і факультативах, а також при вдосконаленні програми і навчальних посібників для середніх шкіл.

Для вирішення поставлених завдань було застосовано наступні ***методи***: вивчення літератури з теми дослідження, порівняльний аналіз та узагальнення.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Апробація результатів дослідження. За результатами виконаного дослідження було опубліковано тези в збірнику тез Всеукраїнської науково-практичної конференції «Актуальні проблеми природничо-математичної освіти в Україні» (16-17 вересня 2021 р., Херсонський державний університет), а також тези у збірнику магістерських наукових робіт «Магістерські студії» (жовтень 2021 р., Херсонський державний університет).

Робота складається з трьох основних розділів. Перший розділ присвячено теоретичним основам вивчення змістової лінії «Рівняння та нерівності» в профільній школі. У другому розділі наведено спеціальні класи рівнянь і задач та розглянуто основні методи їх розв’язання на основі функціонального підходу. Зокрема, розкрито питання застосування таких властивостей функцій, як парність, періодичність, обмеженість тощо при розв’язуванні рівнянь та нерівностей. Третій розділ містить результати експериментальної перевірки ефективності системи вправ на впровадження функціональної складової під час вивчення методів розв’язування рівнянь та нерівностей в класах (школах) з поглибленим вивченням математики.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ «РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ» В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

1.1. Аналіз психолого-педагогічної, методичної літератури, шкільної практики з проблеми дослідження

На сьогоднішній день є ціла низка досліджень, що розкривають різні аспекти вивчення теми «Рівняння і нерівності» в курсі математики основної школи. Так, у своїх дослідженнях Є.Ф. Недошивкіна [13] приділає велику увагу внутрішньопредметним зв’язкам при вивченні нерівностей та їх систем в курсі математики середньої школи. Прикладні аспекти вивчення нерівностей та їх систем в середній школі висвітлено у роботах Н.Б. Мельникової, Д.Д. Рибдалової [15].

Питанням методики навчання учнів закладів середньої освіти розв’язуванню рівнянь і нерівностей присвячені багаточисленні навчальні та методичні посібники, серед яких: «Алгебраїчний тренажер» (авт. – Мерзляк А.Г. [16]); «Алгебра 10-11 класи. Розробки занять» (авт. – Корнієнко Т.Л., Фіготіна В.І.); «Навчаємось розв’язувати рівняння та нерівності» (авт. – Сільвестрова І.А., Фурман М.С. [23]). У наведених вище посібниках виділено основні типи рівнянь та нерівностей та розглянуто частинні методи розв’язування окремих їх типів. Останнім часом значну увагу приділено питанню, що стосується задач із параметрами. Такі завдання стали невід’ємною частиною зовнішнього незалежного оцінювання з математики для здобувачів середньої освіти. Питання методики навчання розв’язування різних типів таких рівнянь та нерівностей розглядаються у статтях Прус А.В. та Швеця В.О., яку було опубліковано у 2015-2016 рр. у науково-методичному журналі «Математика в рідній школі» та у посібнику [13].

Кардинально інший підхід було запропоновано авторами науковометодичного посібника «Інноваційні методи навчання математики» [12]. В посібнику розглядається даний процес з точки зору серії послідовних перетворень, які призводять врешті решт до розв’язку. Такий підхід пов'язаний з формуванням творчого мислення учнів під час розв’язування рівнянь і нерівностей, Він інтегрує всі типи рівнянь та нерівностей в спільну сукупність, сприяє формуванню в учнів загальних уявлень про проблему розв’язування рівнянь та нерівностей з єдиної спільної позиції, а з методичної точки зору «спонукає вчителя до пошуку нових підходів та методичних прийомів при вивченні відповідного матеріалу шкільного курсу математики» [7].

Проблема вивчення функціональної змістової лінії у шкільному курсі широко обговорюється в науковій літературі. Різним її аспектам присвячені роботи відомих математиків і методистів Г.П. Бевза, М.І. Бурди, В.С. Володимирова, Л.С. Понтрягіна [12], О.Я. Хінчина, Г.В. Дорофеєва, Є.С. Каніна, Т.В. Колесник, Ю.М. Колягіна [26], О.І. Маркушевича, А.Г. Мордковича [7], Ф.Ф. Нагибіна, Г.І. Саранцева, З.І. Слєпкань [19], М.І. Шкіля та інших. Досліджено питання:

– вивчення функціональних понять в середній школі (І.В. Антонової, Ю.М. Макаричева, С.П. Семенця, Т.В. Колесник, Є.І. Ляшенко та ін.);

– сформульовано принципи відбору змісту навчального матеріалу з даної теми та визначено необхідний обсяг навчального матеріалу в дослідженні К.І. Нешкова, при цьому велику роль автор відводить тренувальним вправам [6];

– у дослідженнях М.В. Паюл, І.М. Степури широко висвітлено питання взаємозв’язку між поняттями «нерівність», «рівняння» і «функція» [19];

– присвячені доведенню і розв’язуванню нерівностей дослідження М.П. Комова, Г.Н. Солтан [22];

– взаємозв’язку поняття функції з поняттями лінії рівнянь і нерівностей (Л.І. Токаревої, Л.П. Афонькіної, Н.О. Ільїної [8] та ін.);

– впровадженню алгебраїчних та графічних методів у навчання математики (М.І. Башмакова, Л.С. Капкаєвої та ін.);

– застосування властивостей функцій при розв’язуванні рівнянь і нерівностей (М. Бейсеков, А.Б. Василевський [3], В.О. Гусєв, М.І. Зельберг, М.К. Потапов);

– використання графічного метода (В.А. Кушнір [14], А.Г. Мордкович, Н.Л. Стефанова та ін.) [16].

Аналіз наведених досліджень дає змогу зробити висновок про необхідність вдосконалення методики навчання учнів методам розв’язування рівнянь і нерівностей та формування у них функціонального мислення, та водночас відсутність чіткої системи методичних вправ для формування зазначених вмінь і навичок.

1.2. Профільне навчання математики

Стратегічним напрямом розвитку математичної освіти є забезпечення її високої якості. Його реалізація потребує забезпечення рівних можливостей для отримання якісної математичної освіти для всіх громадян України; забезпечення гуманізації і гуманітаризації математичної освіти; впровадження допрофільного і профільного навчання. Системний підхід до навчально-виховного процесу дає змогу розглядати профільне навчання як можливий тип його організації, як певну систему, що поєднує відповідну мету, завдання, зміст, методи, форми і засоби та передбачає отримання очікуваних результатів навчання учнів.

Концепцією шкільної математичної освіти визначено, що «роль математичної підготовки у навчанні, розвитку і вихованні людини визначають основні задачі навчання математиці в загальноосвітній школі:

• формування уявлень про ідеї і методи математики та їх значення в пізнавальній діяльності;

• оволодіння системою математичних знань і умінь, необхідних у повсякденному житті і трудовій діяльності кожному членові сучасного суспільства, достатніх для вивчення інших дисциплін, для продовження навчання в системі безперервної освіти;

• формування і розвиток засобами математики якостей особистості, необхідних людині для повноцінного функціонування в суспільстві» [10].

Інструментом для реалізації цих завдань слугує профільне навчання, спрямоване на врахування інтересів і здібностей кожної особистості. Саме такий підхід до організації освіти старшокласників не лише найповніше реалізує принцип особистісно орієнтованого навчання, а й дає змогу створити найоптимальніші умови для їхнього професійного самовизначення та подальшої самореалізації.

Профільне навчання – вид диференційованого навчання, який «передбачає врахування освітніх потреб, здібностей учнів і створення умов для навчання старшокласників відповідно до їх професійного самовизначення, що забезпечується змінами у цілях, змісті, структурі та організації навчального процесу» [19]. Саме орієнтація на майбутню професійну діяльність створює умови для врахування індивідуальних потреб, інтересів та особливостей учнів. Профільна школа найглибше реалізує навчання орієнтоване на особистість учнів, яке максимально допомагає їх самореалізації – однієї з найважливіших умов щасливого життя людини.

Профільне навчання ґрунтується на таких принципах:

– «гнучкості змісту і форм організації профільного навчання, у тому числі дистанційного, забезпечення можливості зміни профілю» [18];

– «наступності та неперервності між допрофільною підготовкою і профільним навчанням, професійною підготовкою» [12];

– варіативності й альтернативності освітніх програм, технологій навчання і навчально-методичного забезпечення;

– «фуркації – розподіл учнів за рівнем освітньої підготовки, інтересами, потребами, здібностями і нахилами» [11].

За характером взаємодії суб’єктів профільного навчання виділяють такі форми його організації:

– внутрішньошкільні – до них відносяться профільні класи в закладах середньої освіти, профільні групи в закладах середньої освіти, які мають різні напрямки навчання (ліцеї та гімназії), профільне навчання за індивідуальними навчальними планами і програмами загальноосвітніх навчальних закладів;

– зовнішні – в свою чергу, до них відносяться «міжшкільні профільні групи району, опорна старша школа з пришкільним інтернатом, профільна школа інтернатного типу, навчально-виховний комплекс (НВК), міжшкільний навчально-виробничий комбінат (МНВК), загальноосвітні навчальні заклади на базі вищих навчальних закладів» [5].

У роботі [13] дослідники дійшли висновку, що реалізація особливостей вивчення математики у профільних класах можлива лице за детального розроблення методики викладання різних тем відповідно до профілю навчання. До основної організаційної проблеми впровадження профільного навчання, за результатами дослідження відносять допрофільне навчання. До форм його реалізації належать введення курсів за вибором, поглиблене вивчення окремих предметів на диференційованій основі, що може здійснюватися через факультативи, предметні гуртки, наукові товариства учнів, малу академію наук та предметні олімпіади. Ефективність даного навчання вимагає налагодження аналізу рівня навчальних досягнень учнів основної школи та забезпечення професійної консультації психолога за допомогою тестів з метою визначення професійних інтересів і якостей школярів для створення однорідних за підготовленістю та інтересами класів та груп.

1.3. Функціональна змістова лінія

Сучасний шкільний курс математики будується на основі змістовно-методичних ліній. Функціональна змістова лінія є однією з основних. Поняття функції пронизує весь шкільний курс математики. На властивостях функцій засновано перетворення алгебраїчних і трансцендентних виразів, розв’язування рівнянь, нерівностей та їх систем. Вивчення функцій в класах або школах з поглибленим вивченням математики передбачає «не лише оволодіння учнями знаннями, уміннями та навичками, а й найвищу якість сформованості цих знань та умінь. Саме на це необхідно спрямувати методичну систему навчання у класах з поглибленим вивченням математики» [20].

Засвоєння учнями найважливіших понять сучасної математичної науки та здатність доцільно застосовувати їх до розв’язування дотичних задач є запорукою їх подальшої успішної освіти. Як зазначено у навчальній програмі з математики, функціональна змістова лінія є однією з провідних змістових ліній навчання курсу «Алгебра і початки аналізу». Якість математичної підготовки учнів та студентів значною мірою залежить від того, наскільки повно та глибоко вони засвоїли поняття функції, наскільки в них розвинене функціональне мислення. Усвідомлене опанування поняття функції та її властивостей є підґрунтям для вивчення та застосування цих питань у курсі вищої математики.

Тому у профільному навчанні математики приділено особливу увагу дослідженням властивостей функцій у тій чи іншій формі та їх застосуванням. Важливо при цьому демонструвати взаємозв’язок між основними поняттями курсу: функція, рівняння та нерівність. Зокрема, розв’язування рівняння, нерівностей, є окремими випадками задачі на дослідження функції (знаходження нулів функції та проміжків її знакосталості).

У Концепції загальної середньої освіти стверджується, що результати вивчення предметної галузі «Математика» повинні відображати:

1) «формування уявлень про математику як про метод пізнання дійсності, що дозволяє описувати і вивчати реальні процеси і явища;

2) розвиток умінь працювати з навчальним математичним текстом, точно і грамотно висловлювати свої думки із застосуванням математичної термінології і символіки, проводити класифікації, логічні обгрунтування, докази математичних тверджень;

3) оволодіння символьною мовою алгебри, прийомами виконання тотожних перетворень виразів, розв’язування рівнянь, систем рівнянь, нерівностей і систем нерівностей; вміння моделювати реальні ситуації на мові алгебри, досліджувати побудовані моделі з використанням апарату алгебри, інтерпретувати отриманий результат;

4) оволодіння системою функціональних понять, розвиток вміння використовувати функціонально-графічні уявлення для вирішення різних математичних задач, для опису і аналізу реальних залежностей;

5) оволодіння найпростішими способами представлення та аналізу статистичних даних; формування уявлень про статистичних закономірності в реальному світі і про різні способи їх вивчень, про найпростіших імовірнісних моделях; розвиток умінь витягувати інформацію, представлену в таблицях, на діаграмах, графіках, описувати та аналізувати масиви числових даних за допомогою відповідних статистичних характеристик, використовувати розуміння імовірнісних властивостей навколишніх явищ при прийнятті рішень;

6) розвиток умінь застосовувати вивчені поняття, результати, методи для вирішення завдань практичного характеру і завдань з суміжних дисциплін з використанням при необхідності довідкових

матеріалів, комп'ютера, користуватися оцінкою при практичних розрахунках » [16].

Нами було встановлено, що в збірнику навчальних програм з математики міститься вказівка на те, що в курсі математики зміст функціональної лінії направлений на отримання учнями певних знань про функції як фундаментальної математичної моделі, що «дозволяє досліджувати і аналізувати усі навколишні явища» [12]. Оволодіння функціональним матеріалом сприяє формуванню в учнів уміння використовувати словесний, графічний і символьний мови математики. Крім цього, матеріал функціональної лінії дозволяє «продемонструвати роль математичної науки в розвитку інших наук» [5].

Виявлено, що Л.А. Горіна в статті [13] вказує, що «систематичне використання функціонального матеріалу відкриває учням можливість бачити внутрішні зв'язки між поняттям функції і іншими поняттями курсу шкільної математики, сприяти оволодінню алгебраїчними знаннями» [13]. Автор підкреслює взаємозв'язок функціональної лінії з лініями рівнянь і нерівностей, тотожних перетворень і арифметичних обчислень. Активне використання графіків при навчанні функцій забезпечує розвиток гармонійного математичного мислення.

Таким чином, нами визначено, що можна сформулювати наступні основні цілі навчання функціональної лінії:

1. Формування в учнів цілісного уявлення про навколишній світ і взаємозв'язку його компонентів на підставі дослідження реальних залежностей за допомогою функцій.

2. Формування навичок використання функцій в повсякденному життя.

3. Формування в учнів знань, умінь і навичок використання понятійного апарату, пов'язаного з функціональної лінією, в математиці і інших науках.

4. Формування в учнів навичок перекладу інформації з одного

виду в інший: з графічної в текстову, табличну, на мову формул.

1.4. Змістова лінія «Рівняння та нерівності»

Лінія рівнянь і нерівностей є однією з основних змістовно-методичних ліній шкільного курсу математики. Але аналіз результатів розв'язування рівнянь і нерівностей в завданнях зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) з математики показує, що випускники старшої профільної школи, особливо ті, що вивчали математику на рівні стандарту, не можуть правильно виконувати завдання, пов'язані з розв'язуванням рівнянь і нерівностей. Це свідчить про актуальність проблеми удосконалення методики навчання старшокласників розв'язуванню рівнянь і нерівностей.

Основні ступені вивчення змістової лінії «Рівняння, нерівності»:

1. Незалежне вивчення основних типів рівнянь, систем рівнянь.
2. Поступове розширення кількості класів рівнянь, що вивчаються, і їх систем.
3. Формування прийомів розв’язування та аналізу методів розв’язування рівнянь та їх систем.

Зазначеним областям виникнення та функціонування поняття рівняння в алгебрі відповідають три основні напрямки вивчення лінії рівнянь і нерівностей в шкільному курсі математики.

1. Прикладна спрямованість змістової лінії рівнянь і нерівностей в основній школі «розкривається головним чином при розв’язанні прикладних задач. Цей метод широко застосовується в шкільній математиці, оскільки він пов'язаний з навчанням прийомів, що використовуються в застосуваннях математики» [7].

2. Теоретико-математична спрямованість лінії рівнянь і нерівностей розкривається в двох аспектах: по-перше, у вивченні найважливіших класів рівнянь, нерівностей і їх систем і, по-друге, у вивченні узагальнених понять і методів, що відносяться до лінії в

цілому. Обидва ці аспекти необхідні в курсі математики основної школи. «Основні класи рівнянь і нерівностей пов'язані з найпростішими і одночасно найважливішими математичними моделями. Використання узагальнених понять і методів дозволяє логічно упорядкувати вивчення лінії в цілому оскільки вони описують те загальне, що є в процедурах і прийомах розвязання, що відносяться до окремих класів рівнянь, нерівностей, систем» [5]. У свою чергу, ці загальні поняття і методи опираються на основні логічні поняття: невідоме, рівність, рівносильність, логічну послідовність, які також повинні бути розкриті в лінії рівнянь і нерівностей.

3. Для лінії рівнянь і нерівностей характерний напрямок на встановлення зв'язків з рештою змісту курсу математики**.** Ця лінія тісно пов'язана з числовою лінією. «Основна ідея, яка реалізується в процесі встановлення взаємозв'язку цих ліній, – це ідея послідовного розширення числової множини» [11]. Всі числові множини, які розглядаються в шкільній алгебрі та початках аналізу, за винятком області всіх дійсних чисел, виникають у зв'язку з розв’язанням конкретних типів рівнянь, нерівностей, а також їх систем.

Спрямованість на встановлення зв’язків з іншим змістом курсу математики:

а) з числовою лінією – це ідея послідовного розширення числової системи. Усі числові області виникають в ході розв’язування будь-яких рівнянь, систем (звісно, за винятком області всіх дійсних чисел). При цьому можна відмітити, що зв’язок з числовою лінією двосторонній.

б) з функціональною лінією – застосування до дослідження функції методів, які розглядаються в лінії рівнянь (наприклад, це стосується завдань на знаходження області визначення деяких функцій, їх коренів, проміжків знакосталості тощо). З іншого боку, функціональна лінія значно впливає як на зміст лінії рівнянь, так і на стиль її вивчення. Так, функціональні зображення виступають основою для залучення графічної наочності при розв’язанні або дослідженні рівнянь і їх систем.

в) з алгоритмічною лінією – в можливості застосування її понять для опису алгоритмів розв’язування рівнянь та їх систем.

Вивчення змістової лінії «Рівняння та нерівності» передбачає формування методів та прийомів їх розв’язання, і нерозривно пов’язане з дослідженням властивостей функцій, зокрема, знаходженням нулів функції та проміжків її знакосталості, області визначення, парності та періодичності [9]. Використання властивості періодичності найчастіше застосовують у розв’язуванні тригонометричних нерівностей.

Функціональний підхід до вивчення рівнянь і нерівностей має значний вплив для застосування графічних методів для розв’язання і дослідження рівнянь, нерівностей та їх систем. Наприклад, графічне розв’язання системи рівнянь чи нерівностей безпосередньо залежить від якості опанування здобувачем освіти змістової лінії «Функції», зокрема, таких вмінь, як знання і побудова графіків функцій, а також їх графічне дослідження.

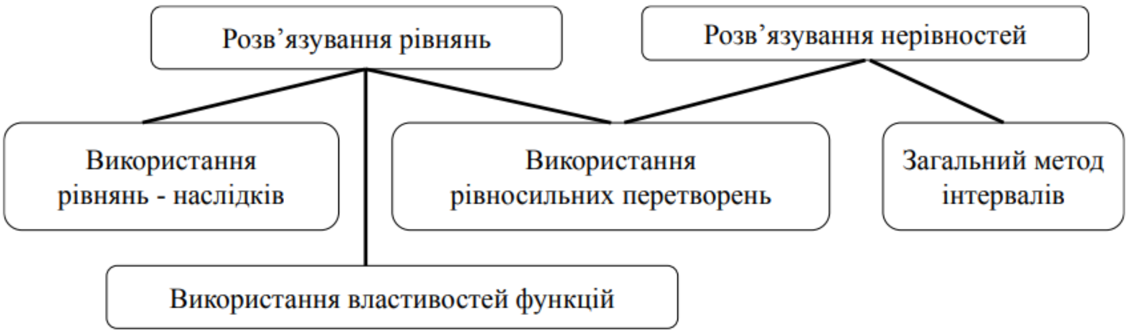


Рис. 1.1. Загальні методи розв’язування рівнянь і нерівностей

Отже, рівняння визначають одну із основних змістовно-методичних ліній шкільного курсу алгебри. «Вони є засобом розширенням, поглиблення і закріплення теоретичних знань учнів. Апарат рівнянь широко використовується при розв’язуванні математичних задач» [15]. Наприклад, при знаходженні області визначення, при побудові графіків функцій, при розв'язуванні геометричних задач.

Зміст навчального матеріалу

5, 6 *класи*. Лінійні найпростіші рівняння.

7 *клас*. Формуються поняття рівняння з однією змінною, розв'язку або кореня рівняння, з'ясовується, що означає розв'язати рівняння. Вводиться поняття рівносильних рівнянь. Розглядаються властивості:

• якщо в рівнянні перенести доданки з однієї частини в іншу, змінивши його знак, то вийде рівняння, рівносильне даному;

• якщо обидві частини рівняння помножити або розділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то вийде рівняння, рівносильне даному.

Відзначається, що зазначені властивості рівнянь можна довести, спираючись на відповідні властивості числових рівностей.

Вивчаються лінійні рівняння з однією змінною, рівняння, які розв'язуються на підставі умови рівності добутку нулю, лінійні рівняння з двома змінними та їх системи. Розглядаються текстові задачі, які розв'язуються за допомогою рівнянь і їх систем.

8 *клас*. Квадратні рівняння і дробово-раціональні рівняння, що зводяться до лінійних і квадратних рівнянь. Для тих, хто хоче знати більше, рівняння з параметром.

9 *клас*. Елементи теорії розв'язування цілих рівнянь та методи їх розв'язування: розкладання на множники і заміни. Для тих, хто хоче знати більше, наводиться теорема про корінь многочлена і теорема про цілі корені цілого рівняння, які дозволяють розширити прийоми розв'язування цілих рівнянь. Розглядаються зворотні рівняння для окремого випадку симетричних рівнянь. Вивчаються дрібово-раціональні рівняння і методи їх розв'язування: зведення до цілого виду, зведення до пропорції, заміни. Рівняння з двома змінними та системи рівнянь другого степеня з двома змінними. Завдання, які вирішуються за

допомогою систем рівнянь другого степеня. Для тих, хто хоче знати більше, прийоми розв’язування однорідних, симетричних систем рівнянь другого степеня.

10 *клас*. Найпростіші тригонометричні рівняння. Методи розв’язування тригонометричних рівнянь: введення допоміжного кута, заміни, розкладання на множники.

11 *клас*. Ірраціональні, показникові і логарифмічні рівняння.

Числові нерівності

8 *клас*. Числові нерівності та їх властивості. Нерівності з однією змінною. Вводиться означення розв’язку нерівності, з'ясовується сенс слів «розв’язати нерівність», формується поняття рівносильних нерівностей і розглядаються наступні властивості:

• якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу доданок з протилежним знаком, то вийде рівносильна їй нерівність;

• якщо обидві частини нерівності помножити або розділити на одне й те саме додатне число, то вийде рівносильна їй нерівність;

• якщо обидві частини нерівності помножити або розділити на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то вийде рівносильна їй нерівність.

Вивчаються лінійні нерівності та їх системи. При цьому вводяться поняття системи нерівностей, дається означення розв’язку системи нерівностей з однією змінною. Для тих, хто хоче знати більше, наводяться приклади доведення нерівностей.

9 *клас*. Розв’язування нерівності другого степеня з однією змінною графічно і методом інтервалів. Нерівності з двома змінними та їх системи.

10 *клас*. Найпростіші тригонометричні нерівності. Розв’язування цілих і дробових раціональних нерівностей методом інтервалів.

11 *клас*. Показникові і логарифмічні нерівності.

1.5 Функціональне мислення

Для здобувачів освіти профільного рівня важливим є не тільки засвоєння поняття функції, а ще й функціональне мислення, яке дозволяє більш якісно та ефективно засвоювати навчальний матеріал курсу «Алгебра та початки аналізу», зокрема, вивчати тригонометричну, степеневу, показникову й логарифмічну функції та їх властивості, а також похідну та інтеграл.

«Формування уміння застосовувати властивості функцій та їх графіків під час розв’язування рівнянь, нерівностей та їх систем як на рівні стандарту, так і у профільному навчанні математики є частиною реалізації ключових завдань навчання математики» [2]. За допомогою ретельно спланованого, систематичного та методичного підходу до освітнього процесу можна забезпечити ефективне втілення поставлених завдань можна.

Багато розмов в науковій літературі і про важливість застосування функціонального підходу при розв’язуванні різних завдань елементарної математики, в тому числі і рівнянь. У навчальному посібнику [12] відзначається, що «лінія рівнянь і нерівностей, що складає значну частину шкільного курсу математики, нерозривно пов'язана з функціональної лінією. Один з найважливіших таких зв'язків – застосування методів, що розробляються в лінії рівнянь і нерівностей, до дослідження функцій (наприклад, до завдань на знаходження області визначення деяких функцій, їх коренів, проміжків знакосталості тощо). З іншого боку, функціональна лінія має суттєвий вплив як на зміст лінії рівнянь і нерівностей, так і на стиль її вивчення».

Тенденція широкого впровадження функціонального підходу до різних розділів математики, що вивчаються в школах, викликалася і обгрунтовувалася необхідністю усунути надмірний формалізм і роз'єднаність у викладанні окремих математичних дисциплін. «Вивчення функції покликане було сприяти справжньому, а не формальному погодженням програм середньої та вищої шкіл, подолання прірви між шкільним курсом і сучасною наукою» [12].

У фізико-математичних ліцеях, в класах з поглибленим вивченням математики найбільш доцільне використання евристичного і дослідницького методів навчання. Ці методи залучають учнів до процесу "відкриття" різних фактів, самостійного формулювання теорем, дозволяють забезпечити оволодіння методами наукового пізнання, формування риси творчої діяльності і потреби в ній. Ці методи пред'являють свої вимоги як до пропонованого для вивчення матеріалу (він повинен бути доступним для учнів), так і системи завдань, що забезпечує оволодіння цим матеріалом. Система завдань повинна бути насичена складними, проблемними, творчими, нестандартними завданнями. Все вищесказане обумовлює актуальність проблеми пошуку умов і засобів реалізації ідеї функціонального підходу вирішення завдань для шкіл (класів) з поглибленим вивченням математики.

Застосування функціонального підходу до розв’язання рівнянь і нерівностей повинно відбуватися поетапно: від застосування необхідних властивостей функцій (найперше, області визначення) у стандартних ситуаціях та алгоритмах розв’язання, через розширення набору прийомів і обрання найбільш раціонального у наданому завданні, до розв’язування завдань творчого характеру (нестандартні ситуації, рівняння та нерівності з параметром). Таким чином, необхідними для реалізації цих прийомів виступають високий рівень кваліфікації педагога та наявність фундаментальної математичної підготовки здобувачів освіти, і, найголовніше, їх узгоджена і цілеспрямована взаємодія.

РОЗДІЛ 2
ФУНКЦІОНАЛЬНА СКЛАДОВА ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ «РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ»

2.1. Застосування монотонності функції

Не кожне рівняння f (x) = g (x) або нерівність в ході перетворень або за допомогою вдалої заміни змінної можна звести до рівняння або нерівності того чи іншого стандартного виду, для якого існує певний алгоритм розв’язання [8]. У таких випадках іноді виявляється корисним використовувати деякі властивості функцій, такі як монотонність, періодичність, обмеженість, парність і ін.

Функція f(x) називається *зростаючою* на деякому проміжку D, якщо для будь-яких чисел x_1 та x_2 з проміжку D таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Функція f (x) називається *спадною* на деякому проміжку D, якщо для будь-яких чисел x_1 та x_2 з проміжку D таких, що $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

На рис. 2.1 функція y = f (x), $x \in [a;b]$, зростає на кожному з проміжків $[a; x_1)$ та $(x_2; b]$ і спадає на проміжку $(x_1; x_2)$.

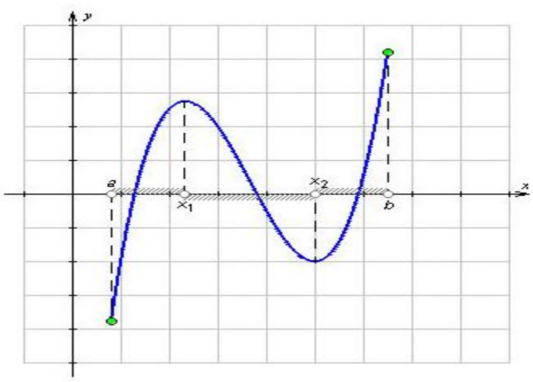


Рис. 2.1

Зверніть увагу, що «функція зростає на кожному з проміжків $[a; x_1)$ та

(x_2; b], проте не на об’єднанні проміжків $[a;x_1)\cup(x_2;b]$» [12] .

Якщо функція зростає або спадає на деякому числовому проміжку, то вона називається *монотонною* на цьому проміжку. Слід відмітити, що якщо f – монотонна функція на області визначення D (f (x)), то рівняння f (x) = const не може мати більше одного кореня на цьому проміжку [13].

Дійсно, якщо $x_1 < x_2$ – корені цього рівняння на проміжку D (f (x)), то f (x_1) = f (x_2) = 0, а це суперечить умові монотонності.

Наведемо основні властивості монотонних функцій (передбачається, що всі функції визначені на деякому проміжку D).

• Сума кількох зростаючих функцій є зростаючою функцією.

• Добуток невід'ємних зростаючих функцій є зростаюча функція.

• Якщо функція f зростає, то функції cf (c> 0) і f + c також є зростаючими, а функція cf (c <0) є спадною. Тут c – деяка константа.

• Якщо функція f зростає та при цьому зберігає знак, то функція $\frac{1}{f(x)}$ є спадною.

• Якщо функція f зростає та невід’ємна, то f^n, де $n \in N$, також зростає.

• Якщо функція f зростає та n – непарне число, то f^n також зростає.

• Композиція g (f (x)) зростаючих функцій f та g також зростає.

Аналогічні твердження можна сформулювати і для випадку спадної функції [12].

Точка a називається *точкою максимуму* функції f, якщо існує такий ε-окіл точки a, що для довільного x з цього околу виконується нерівність f (a) ≥ f (x).

Точка a називається *точкою мінімуму* функції f, якщо існує такий ε-окіл точки a, що для довільної x з цього околу виконується нерівність f (a) ≤ f (x).

Точки, в яких досягається максимум або мінімум функції, називається *точками екстремуму функції*.

У точці екстремуму відбувається зміна характеру монотонності функції. Так, зліва від точки екстремуму функція може зростати, а праворуч – спадати. Згідно з означенням, точка екстремуму повинна бути внутрішньою точкою області визначення [7].

Якщо для довільного $x \in D$ (x ≠ a) виконується нерівність f (x) ≤ f (a) $a \in D$, то точка a називається *точкою максимуму* функції на множині D:

$$\max_{x \in D} f(x) = f(a)$$

Якщо для довільного $x \in D$ (x ≠ b) виконується нерівність f (x) > f (b) $b \in D$, то точка b називається *точкою мінімуму* функції на множині D:

$$\min_{x \in D} f(x) = f(b)$$

Точка максимуму або мінімуму функції на множині D може бути екстремумом функції, але не обов'язково їм є [9].

«Точку максимального (мінімального) значення неперервної на відрізку функції слід шукати серед екстремумів цієї функції та її значень на кінцях відрізка» [9].

Розв’язування рівнянь і нерівностей з використанням властивості монотонності базується на наступних твердженнях.

1. Нехай f(x) – неперервна і строго монотонна функція на деякому проміжку T, тоді рівняння f(x) = C, де C – дана константа, може мати не більше одного розв’язку на проміжку T.

2. Нехай f(x) та g(x) – неперервні на проміжку T функції, f(x) – строго зростає, а g(x) строго спадає на цьому проміжку, тоді рівняння f(x) = g(x) може мати не більше одного розв’язку на проміжку T. Відмітимо, що в якості проміжку T можуть бути нескінчений проміжок (-∞;+∞) , проміжки (a;+∞), (-∞; a), [a;+∞), (-∞; b], відрізки, інтервали та напівінтервали.

Приклад 2.1. Розв’язати рівняння:

$$x \cdot 2^{x^2+2x+3} = 64.$$

Розв'язання.

Очевидно, що x ≤ 0 не може бути розв'язком даного рівняння, оскільки тоді

$$x \cdot 2^{x^2+2x+3} \le 0.$$

Для x > 0 функция $y = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ неперервна та строго зростає як добуток двох неперервних додатних строго зростаючих для цих x функцій [5]

$$\text{f(x) = x та } g(x) = 2^{x^2+2x+3}.$$

Отже, в області x > 0 функція $y = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ приймає кожне своє значення рівно в одній точці. Легко бачити, що x = 1 є розв'язкам даного рівняння, отже, це його єдиний розв'язок.

Відповідь: {1}.

Приклад 2.2. Розв'язати нерівність:

$$2^x + 3^x + 4^x < 3.$$

Розв'язання.

Кожна з функцій y = 2^x, y = 3^x, y = 4^x неперервна та строго зростає на всій своїй осі. Отже, такою самою є й вихідна функція

$$y = 2^x + 3^x + 4^x.$$

Легко бачити, що при x = 0 функція $y = 2^x + 3^x + 4^x$ приймає значення 3. В силу неперервності та строгої монотонності цієї функції при x > 0 маємо:

$$2^x + 3^x + 4^x > 3,$$

при x < 0 маємо:

$$2^x + 3^x + 4^x < 3.$$

Отже, розв'язками даної нерівності є усі x < 0.

Відповідь: (-∞; 0).

Приклад 2.3. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt[4]{18-x}-\sqrt[8]{x-2}=2.$$

Розв'язання.

Областю допустимих значень рівняння [7] є проміжок

$$2\le x\le 18.$$

На ОДЗ функції

$$f(x)=-\sqrt[8]{x-2} \text{ та } g(x)=\sqrt[4]{18-x}$$

неперервні та строго спадають, отже, неперервна та спадає функція

$$h(x)=\sqrt[4]{18-x}-\sqrt[8]{x-2}.$$

Тому кожне своє значення функція h(x) приймає лише в одній точці. Оскільки $h(2)=2$, то x = 2 є єдиними коренем вихідного рівняння.

Відповідь: {2}.

2.2. Використання обмеженості функції

«При розв'язуванні рівнянь і нерівностей властивість обмеженості знизу або зверху функції на деякій множині часто відіграє визначальну роль» [17].

Якщо існує число C таке, що для довільного $x\in D$ виконується нерівність f (x) ≤ C, то функція f називається *обмеженої зверху* на множині D (рис. 2.2).

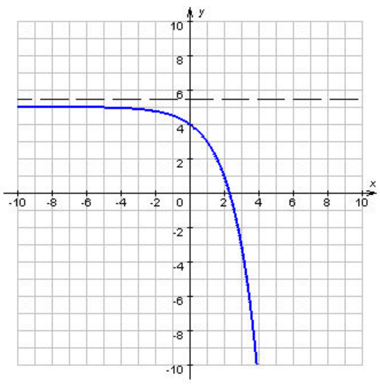


Рис. 2.2

Якщо існує число c таке, що для довільного $x\in D$ виконується нерівність f (x) ≥ c, то функція f називається *обмеженою знизу* на множині D (рис. 2.3).

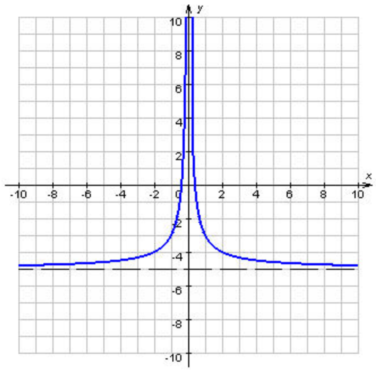


Рис. 2.3

Функція, обмежена і зверху, і знизу, називається *обмеженою* на множині D. Геометрично обмеженість функції f на множині D означає, що графік функції y = f (x) розташований в смузі c ≤ y ≤ C (рис. 2.4).

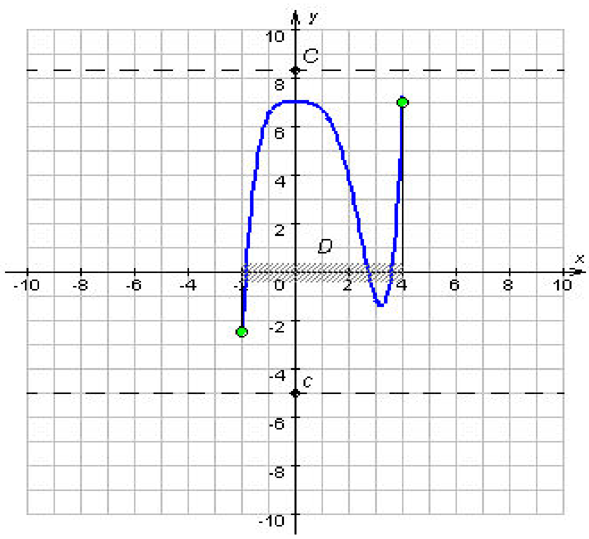


Рис. 2.4

Якщо функція не є обмеженою на множині, то кажуть, що вона *необмежена*.

Прикладом функції, обмеженої знизу на всій числовій осі, є функція $y = x^2$. Прикладом функції, обмеженої зверху на множині (-∞; 0) є функція y = 1 / x. Прикладом функції, обмеженої на всій числовій осі, є функція y = sin x [15].

Приклад 2.4. Розв’язати рівняння:

$$\sin(x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 2.$$

Розв'язання.

Для будь-якого дійсного числа числа x маємо

$$\sin(x^3 + 2x^2 + 1) \le 1,$$

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \ge 1.$$

Оскільки для довільного значення x ліва частина рівняння не перевищує одиниці, а права завжди не менша за 1, то дане рівняння може мати розв'язок тільки при $x = -1$.

При

$$x = -1 \;\; x^2 + 2x + 2 = 1, \;\; \sin\left(-1 + 2\cdot 1 + 1\right) = \sin 2 \ne 1,$$

тобто при $x = -1$ рівняння також коренів не має.

Відповідь: Ø.

Приклад 2.5. Розв'язати рівняння:

$$x^3 - x - \sin \pi x = 0.$$

Розв'язання.

Очевидно, що x = 0, x = 1, x = – 1 є розв'язками даного рівняння. Для знаходження інших розв'язків в силу непарності [3] функції

$$f(x) = x^3 - x - \sin \pi x$$

достатньо знайти його розв'язки в області $x > 0$, $x \ne 1$, оскільки якщо $x_0 > 0$ є його розв'язком, то й $(-x_0)$ також є його розв'язком.

Розіб'ємо множину $x > 0$, $x \ne 1$, на два проміжки: (0; 1) і (1; +∞). Перепишемо початкове рівняння у вигляді

$$x^3 - x = \sin \pi x.$$

На проміжку (0; 1) функція $g(x) = x^3 - x$ приймає лише від'ємні значення, оскільки $x^3 < x$, а функція $h(x) = \sin \pi x$ – лише додатні. Отже, на цьому проміжку рівняння не має розв'язків.

Нехай x належить проміжку (1; +∞). Для кажного з таких значень x функція $g(x) = x^3 - x$ приймає додатні значення, функція $h(x) = \sin \pi x$ приймає значення різних знаків, причому на проміжку (1; 2] функція

$h(x) = \sin \pi x$ недодатна. Отже, на проміжку (1; 2] рівняння розв'язків не має.

Якщо ж $x > 2$, то

$$|\sin \pi x| \le 1,$$
$$x^3 - x = x(x^2 - 1) > 2\cdot 3 = 6,$$

а це означає, що і на проміжку $(1; +\infty)$ рівняння також розв'язків не має.

Отже, $x = 0$, $x = 1$ і $x = -1$ і лише вони є розв'язками вихідного рівняння.

Відповідь: $\{-1; 0; 1\}$.

Приклад 2.6. Розв'язати нерівність:

$$\frac{1-x}{1+x} < 2^x.$$

Розв'язання.

ОДЗ нерівності є усі дійсні x, окрім $x = -1$. Розіб'ємо ОДЗ нерівності на три множини:

$$-\infty < x < -1,\ -1 < x \le 0,\ 0 < x < +\infty$$

та розглянемо нерівність на кожному з цих проміжків.

Нехай $-\infty < x < -1$. Для кожного з цих x маємо:

$$g(x) = \frac{1-x}{1+x} < 0, \text{ а } f(x) = 2^x > 0.$$

Отже, усі ці x є розв'язками нерівності.

Нехай $-1 < x \le 0$. Для кожного з цих x маємо:

$$g(x) = 1 - \frac{2x}{1+x} \ge 1, \text{ а } f(x) = 2^x \le 1.$$

Отже, жодне з цих x не є розв'язком даної нерівності.

Нехай $0 < x < +\infty$. Для кожного з цих x маємо:

$$g(x) = 1 - \frac{2x}{1+x} < 1, \text{ а } f(x) = 2^x > 1.$$

Отже, усі ці x є розв'язками вихідної нерівності.

Відповідь: $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

2.3. Використання періодичності функції

Функція f (x) називається *періодичною* з періодом T ≠ 0, якщо виконуються дві умови:

• якщо $x \in D$, то x + T і x – T також належать області визначення D (f (x));

• для будь-якого $x \in D$ виконується рівність f (x + T) = f (x).

Оскільки $x-T \in D$, то з наведеного означення випливає, що

$$f(x-T)=f(x)$$

Якщо T – період функції f (x), то очевидно, що кожне число nT, де $n \in Z$, n ≠ 0, також є періодом цієї функції [12].

Найменшим додатним періодом функції називається найменше з додатних чисел T, що є періодом даної функції.

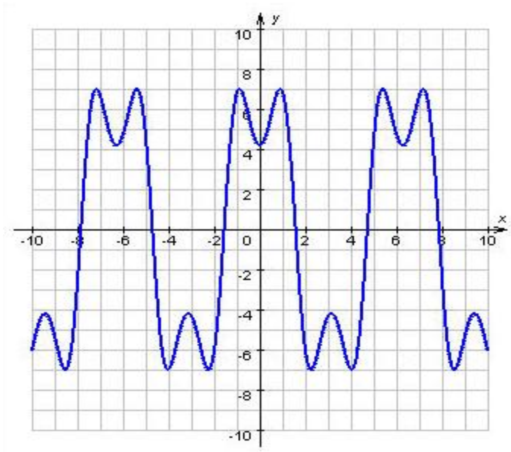


Рис. 2.5. *Графік періодичної функції* $y = 7\sin\left(\frac{5}{2}\cos x\right)$

Графік періодичної функції зазвичай будують на проміжку $[x_0; x_0 + T)$, а потім повторюють на всю області визначення [6].

Гарним прикладом періодичних функцій можуть служити тригонометричні функції y = sin x, y = cos x (період цих функцій дорівнює 2π), y = tg x (період дорівнює π) та інші. Функція y = const також є періодичною. Для неї періодом є будь-яке число $T \neq 0$.

Відзначимо властивості періодичних функцій [19]:

• Якщо f (x) – періодична функція з періодом T, то функція g (x) = A · f (kx + b), де $k \neq 0$, також є періодичною з періодом $T_1 = \frac{T}{k}$.

• Нехай функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ визначені на всій числовій осі і є періодичними з періодами $T_1 > 0$ і $T_2 > 0$. Тоді якщо $\frac{T_2}{T_1} \in Q$, то функція $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ періодична з періодом T, рівним найменшому загальному кратному чисел T_1 і T_2.

Приклад 2.7. Функція $f(x)$ періодична з періодом T = 5. Відомо, що

$$f(1) = 4;\ f(-2) = 1.$$

Знайти:

$$f(11) - 3f(-7) + f(3).$$

Розв'язання.

Перетворимо окремо кожний доданок:

$$f(11) = f(1 + 2 \cdot 5) = f(1) = 4$$

$$f(-7) = f(-2 - 5) = f(-2) = 1,$$

$$f(3) = f(2 + 5) = f(-2) = 1$$

Тоді:

$$f(11) - 3f(-7) + f(3) = 4 - 3 \cdot 1 + 1 = 2$$

Відповідь: 2.

Приклад 2.8. Знайти період функції

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + \left\{ \frac{x}{\pi} \right\}$$

Розв'язання.

Перетворимо даний вираз:

$$f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+\left\{\frac{x}{\pi}\right\}=1-2\sin^2 x\cos^2 x+\left\{\frac{x}{\pi}\right\}=$$
$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\left\{\frac{x}{\pi}\right\}=1-\frac{1}{4}(1+\cos 4x)+\left\{\frac{x}{\pi}\right\}.$$

$f_1(x)=\cos 4x$ має період:

$$T_1=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2};$$

$f_2(x)=\left\{\frac{x}{\pi}\right\}$ має період:

$$T_2=1/\frac{1}{\pi}=\pi.$$

Тоді функція $f(x)$ має період:

$$T=\text{НОК}\,(T_1;T_2)=\text{НОК}\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)=\pi$$

Відповідь: π.

Приклад 2.9. Нехай $f(x)$ – періодична функція з періодом з така, що

$$f(x)=x^2;\ 0\le x<3.$$

Розв’язати рівняння:

$$f(2x+6)+3f(x)=9$$

Розв’язання.

Графік функції $f(x)=x^2$ на множині [0;3) зображено на рис. 2.6:

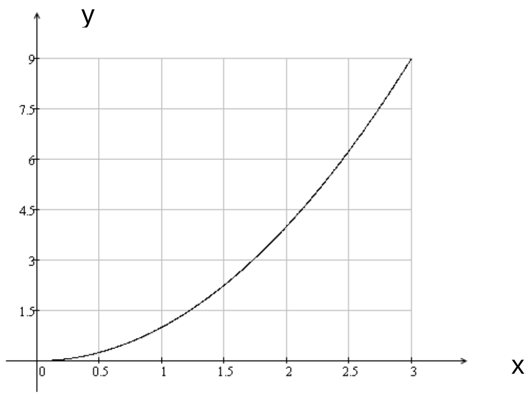


Рис. 2.6

Так як 3 – період функції $f(x)$, то

$$f(2x+6)=f(2x+3)=f(2x),$$

тоді рівняння прийме вигляд:

$$f(2x)+3f(x)=9$$

Розглянемо два випадки:

1) нехай

$$\begin{cases}0\le x<3\\0\le 2x<3\end{cases},$$

тобто $0\le x<\frac{3}{2}$, тоді рівняння прийме вигляд:

$$\begin{cases}4x^2+3x^2-9=0\\0\le x<\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\frac{9}{7}\\0\le x<\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\frac{3}{\sqrt{7}}\\0\le x<\frac{3}{2}\end{cases},$$

отже, $x=\frac{3}{\sqrt{7}}<\frac{3}{2}$ і тому $x_1=\frac{3}{\sqrt{7}}+3n$, $n\in Z$.

2) нехай

$$\begin{cases}0\le x<3\\3\le 2x<6\end{cases}$$

тоді $\frac{3}{2}\le x<3$, тому $0\le 2x-3<3$ і рівняння прийме вигляд:

$$\begin{cases}(2x-3)^2+3x^2-9=0\\\frac{3}{2}\le x<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x_2-12x=0\\\frac{3}{2}\le x<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{12}{7}\end{array}\right.\\\frac{3}{2}\le x<3\end{cases}\Rightarrow x=\frac{12}{7};$$

отже,

$$x=\frac{12}{7},\quad (\frac{3}{2}<\frac{12}{7}<3)$$

тобто $x_2=\frac{12}{7}+3k$, $(k\in Z)$.

Відповідь: $\{\frac{3}{\sqrt{7}}+3n,\ \mathrm{n}\in Z;\ \frac{12}{7}+3k,\ k\in Z\}$.

2.4. Використання парності функції

Функція f (x) називається *парною*, якщо для довільного $x\in D$ виконуються рівності:

1) $-x\in D$,

2) f (–x) = f (x).

Графік парної функції на всій області визначення симетричний відносно осі OY. Прикладами парних функцій можуть слугувати y = cos x, y = |x|, y = x^2 + |x| [9].

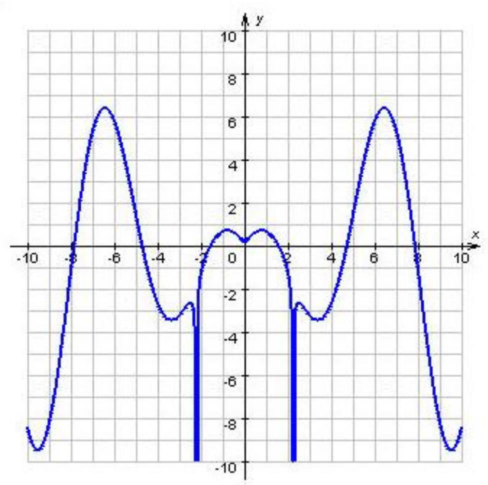


Рис. 2.7. *Графік парної функції* $y=|x|\cos x+\frac{\cos x}{|x^2-5|}$

Функція f (x) називається *непарною*, якщо для довільного $x\in D$ виконуються рівності:

1) $x\in D$,

2) f (–x) = –f (x).

Інакше кажучи, функція називається непарною, якщо її графік на всій області визначення симетричний відносно початку координат [9]. Прикладами непарних функції є y = sin x, y = x^3.

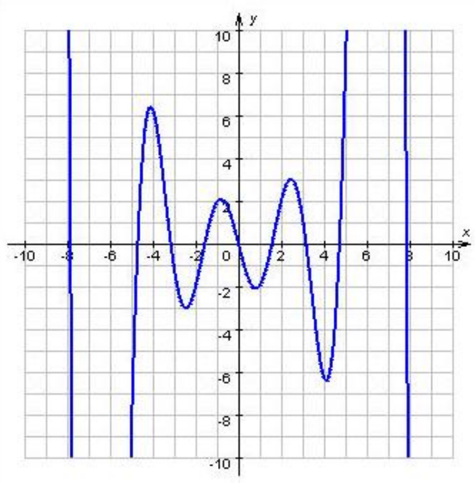


Рис. 2.8. *Графік непарної функції* $y = (0.4x^2 - 4x)\cos x$

Не слід думати, що будь-яка функція є або парною, або непарною. «Так, функція $y = \sqrt{x+1}$ не є ані парною, ані непарною, так як її область визначення $D = [-1;\infty)$ несиметрична відносно початку координат. Область визначення функції $y = x^3 + 1$ охоплює всю числову вісь і тому симетрична щодо початку координат, проте $f(-1) \neq f(1)$. А це означає, що функція не є ані парною, ані непарною, тобто є функцією загального вигляду» [16].

Якщо область визначення функції симетрична відносно початку координат, то цю функцію можна подати у вигляді суми парної і непарної функцій [13].

Такою сумою є функція:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x - f(-x))}{2}$$

Перший доданок є парною функцією, другий – непарною.

Порівняльна ілюстрація функцій різної парності зображена на рис. 2.9.

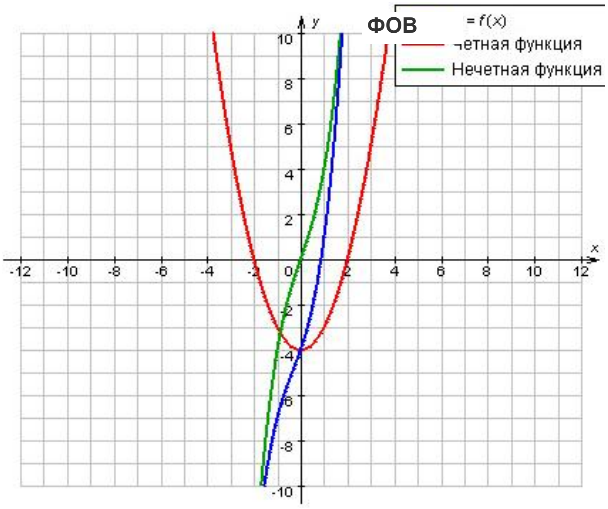


Рис. 2.9

Дослідження функцій на парність полегшується наступними твердженнями [18].

• Сума парних (непарних) функцій є парною (непарною) функцією.

• Добуток двох парних або двох непарних функцій є парною функцією.

• Добуток парної і непарної функції є непарною функцією.

• Якщо функція f – парна (непарна), то і функція 1 / f – парна (непарна).

Приклад 2.10. Чи може при деякому значенні a рівняння

$$2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 = 5$$

мати 5 коренів?

Розв'язання.

Позначимо

$$f(x) = 2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2.$$

f(x) – функція парна, тому, якщо x_0 – корінь даного рівняння, то $-x_0$ – також. x = 0 не є коренем даного рівняння ($0 \neq 5$). Отже, число коренів у цього рівняння при будь-якому дійсному a парне, а тому 5 коренів воно мати не може.

Відповідь: не може.

2.5. Використання ОДЗ функції

Область визначення функції – це «множина усіх допустимих дійсних значень аргументу x (змінної x), при яких функція визначена» [15]. Область визначення іноді ще називають областю допустимих значень функції (ОДЗ). Для знаходження ОДЗ функції слід проаналізувати дану функціональну відповідність та встановити, чи зустрічаються заборонені операції (ділення на нуль, піднесення до раціонального степеня від'ємного числа, логарифмічні операції над від'ємними числами тощо).

Іноді знання ОДЗ дозволяє довести, що рівняння (або нерівність) не має розв'язків, а іноді дозволяє знайти розв'язок рівняння (або нерівності) безпосередньою підстановкою чисел з ОДЗ.

Приклад 2.11. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt{3-x} = \log_5(x-3).$$

Розв'язання.

ОДЗ цього рівняння містить усі x, які одночасно задовольняють умовам

$$3-x \geq 0 \text{ і } x-3 \leq 0,$$

тобто ОДЗ є пустою множиною. Цим розв'язання і завершується, так як встановлено, що жодне з чисел не може бути розв'язком, тобто що рівняння коренів не має.

Відповідь: Ø.

Приклад 2.12. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt{|\sin x|} = \sqrt[4]{-|\sin x|} + \operatorname{tg} x.$$

Розв'язання.

ОДЗ цього рівняння містить усі x, які одночасно задовольняють умовам

$$|\sin x| \geq 0,\quad -|\sin x| \geq 0,\quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,$$

тобто ОДЗ є $x = \pi k,\ k \in Z$. Підставляючи ці значення x в рівняння, отримаємо, що його ліва частина і права частина дорівнюють нулю, а це означає, що усі $x = \pi k,\ k \in Z$ є його розв'язками.

Відповідь: $\{\pi k,\ k \in Z\}$

Приклад 2.13. Розв'язати нерівність:

$$\log_5 x < \sqrt{1 - x^4}.$$

Розв'язання.

ОДЗ нерівності містить усі x, які задовольняють умові $0 < x \leq 1$. Зрозуміло, що x = 1 не є розв'язком нерівності. Для x з проміжку $0 < x < 1$ маємо

$$\log_5 x < 0, \text{ а } \sqrt{1 - x^4} > 0.$$

Отже, усі x з проміжку $0 < x < 1$ є розв'язками нерівності.

Відповідь: $(0;1)$.

Приклад 2.14. Розв'язати нерівність:

$$\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} < \sqrt{3}.$$

Розв'язання.

ОДЗ нерівності містить усі x з проміжку $-3 \leq x \leq 9$. Розіб'ємо цю множину на два проміжки:

$$-3 \leq x \leq 0 \text{ та } 0 < x \leq 9.$$

Для x з проміжку $-3 \leq x \leq 0$ маємо:

$$\sqrt{x+3} \geq 0,\quad \sqrt[4]{9-x} \geq \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}.$$

Отже,

$$\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} \geq \sqrt{3}$$

на цьому проміжку, і тому нерівність не має розв'язків на цьому проміжку.

Нехай x належить проміжку $0 < x \leq 9$, тоді

$$\sqrt{x+3} \geq \sqrt{3} \text{ і } \sqrt[4]{9-x} \geq 0.$$

Отже, $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$ для таких x, і тому на цьому проміжку нерівність також не має розв'язків.

Отже, нерівність розв'язків не має.

Відповідь: Ø.

2.6. Множення рівняння на функцію

Іноді розв'язання алгебраїчного рівняння істотно полегшується, якщо помножити обидві його частини на деяку функцію – многочлен від невідомої. При цьому треба пам'ятати, що можлива поява зайвих коренів – коренів многочлена, на який помножили рівняння [21]. Тому треба або помножити на многочлен, який не має коренів, і одержувати рівносильне рівняння, або множити на многочлен, що має корені, і тоді кожен з таких коренів треба обов'язково підставити у вихідне рівняння і встановити, чи є це число його коренем.

Приклад 2.15. Розв'язати рівняння:

$$x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1 = 0.$$

Розв'язання.

Помножимо обидві частини рівняння на многочлен $x^2 + 1$, який не має коренів, отримаємо рівняння:

$$\left(x^2+1\right)\left(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1\right) = 0,$$

рівносильне вихідному рівнянню. Одержане рівняння можна записати у вигляді: $x^{10} + 1 = 0$. Зрозуміло, що це рівняння не має дійсних коренів, тому і вихідне рівняння їх не має.

Відповідь: Ø.

Приклад 2.16. Розв'язати рівняння:

$$6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0.$$

Розв'язання.

Помножимо обидві частини рівняння на многочлен $x+1/2$, отримаємо рівняння:

$$6x^4+2x^3-\frac{41}{2}x^2+2x+6=0$$

яке є наслідком вихідного рівняння, оскільки одержане рівняння має корінь $x=-1/2$, який не є коренем вихідного рівняння.

Одержане рівняння є симетричним рівнянням четвертого степеня [23]. Оскільки $x=0$ не є коренем цього рівняння, то, розділивши обидві його частини на $2x^2$ та перегрупувавши його члени, отримаємо рівняння:

$$3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-\frac{41}{4}=0$$

рівносильне симетричному рівнянню. Позначимо $y=x+\frac{1}{x}$, перепишемо одержане рівняння у вигляді

$$3y^2+y-\frac{65}{4}=0.$$

Це рівняння має два корені $y_1=-\frac{5}{2}$ і $y_2=\frac{13}{6}$. Тому попереднє рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6} \text{ і } x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}.$$

Розв'язавши кожне з цих рівнянь, знайдемо чотири корені рівняння, а тим самим і симетричного рівняння:

$$x_1=\frac{2}{3},\ x_2=\frac{3}{2},\ x_3=-2,\ x_4=-\frac{1}{2}$$

Оскільки корінь $x_4=-\frac{1}{2}$ є стороннім для вихідного рівняння, то звідси одержуємо, що вихідне рівняння має три корені x_1, x_2, x_3.

Відповідь: $\left\{\frac{2}{3};\frac{3}{2};-2\right\}$

РОЗДІЛ 3
ОРГАНІЗАЦІЯ ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА АНАЛІЗ ЙОГО РЕЗУЛЬТАТІВ

В ході проведення дослідження, об’єктом якого виступає процес навчання здобувачів середньої освіти профільної школи, а предметом – методика організації і проведення контролю навчальних досягнень, була висунута робоча гіпотеза: використання функціональної складової під час розв’язування рівнянь та нерівностей в класах з поглибленим вивченням математики сприяє:

1) вдосконаленню в учнів уміння розв’язувати типи рівнянь та нерівностей, які допускають стандартне та функціональне розв’язання;
2) розвитку логічного мислення учнів та вміння бачити математичні об’єкти з різної точки зору;
3) зростанню інтересу учнів до цієї змістової лінії.

З метою з’ясування педагогічної ефективності запропонованої методики навчання функціональним методам розв’язування рівнянь та нерівностей було проведено педагогічний експеримент.

На першому етапі дослідження було проведено констатуючий експеримент, завданнями якого було: вивчити досвід вивчення змістової лінії «Рівняння та нерівності» в закладах повної середньої освіти профільного напрямку, проаналізувати рівень навчальних досягнень та мотивації самостійної навчальної та навчально-пізнавальної діяльності учнів з даної змістової лінії, виявити актуальні проблеми щодо організації навчання та контролю його результатів в умовах сучасної системи навчання.

Констатувальний етап включав детальний аналіз нормативно-правових документів, науково-методичної літератури з проблем організації педагогічного контролю в процесі навчання учнів старшої школи математики в закладах з поглибленим вивченням математики, сформульовано мету, завдання та гіпотезу дослідження. Отримані результати підтвердили існування проблеми впровадження функціональної складової під час вивчення методів розв’язування рівнянь та нерівностей, окреслили проблеми, які обумовили завдання дослідження.

На цьому етапі були використані методи дослідження: аналіз державних нормативних документів, навчальних програм з математики для класів з поглибленим вивченням математики; психолого-педагогічної та навчально-методичної літератури з проблеми дослідження; спостереження за процесом навчання, самостійної навчальної та науково-дослідної роботи учнів; анкетування та бесіди з учнями та вчителями, вивчення та аналіз педагогічного досвіду вчителів профільних шкіл.

Вчителі математики закладів середньої освіти та науковці відмічають, що в останні роки простежується зниження рівня математичної підготовки випускників середньої школи і при зниженому інтересі до навчання важко стимулювати учнів до активної навчально-пізнавальної діяльності, забезпечувати розвиток особистості, здатної до мобілізації своїх пізнавальних здібностей, формувати особистісні якості здобувача середньої освіти.

Одним зі шляхів розв’язування даної проблеми є запровадження в процесі підготовки учнів старшої школи сучасних систем навчання, оскільки вони дозволяють сприяти розвитку інтересів, інтелектуальних здібностей, позитивно впливати на підвищення мотивації навчання, забезпечувати реалізацію диференційованого, особистістно-орієнтованого, компетентністного підходів у процесі підготовки учнів.

Аналіз методичного забезпечення навчання математики учнів профільної старшої школи показав, що впровадження у навчальний процес системи контролю результатів навчальних досягнень учнів стримується внаслідок відсутності (або недостатньої надійності та валідності) рівневих завдань щодо роботи на уроках та самостійної роботи учнів, різнорівневих контрольних робіт та тестів, рівневих завдань щодо самостійної навчальної та науково-дослідної роботи учнів.

На другому етапі дослідження було проведено пошуковий експеримент. Пошуковий етап включав обґрунтування педагогічних умов впровадження функціональної складової у процес навчання учнів при вивченні змістової лінії «Рівняння та нерівності»; апробацію та коригування компонентів системи.

Під час вибору контрольних та експериментальних класів для проведення експерименту за рівнем навчальних досягнень були використані результати попереднього контролю з алгебри за критерієм Колмогорова-Смірнова [23]. Значення параметру критерію λ = 0,1039, а критична величина 0,367. Це означає, що необхідно прийняти гіпотезу H_0 : рівень навчальних досягнень з математики в групах однаковий. Це наочно демонструє діаграма (рис. 3.1.)

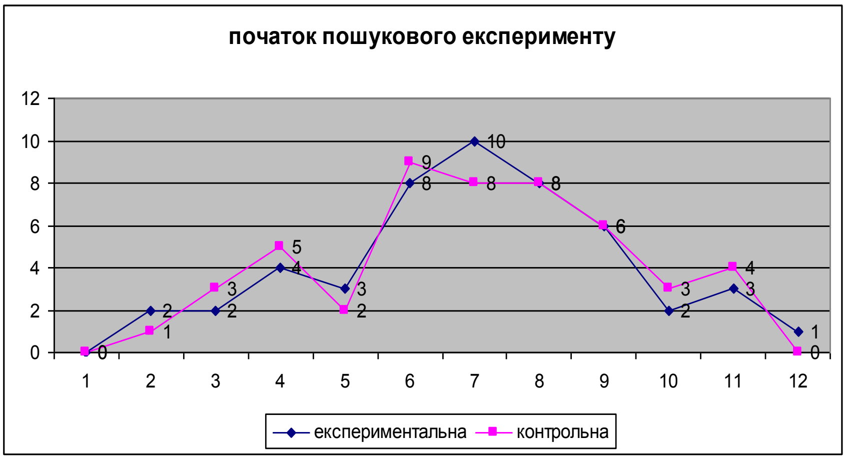


Рис. 3.1. *Результати попереднього контролю з алгебри*

На цьому етапі дослідження було виділено типи рівнянь та нерівностей зі змістової лінії; для кожного типу визначені основні теореми, алгоритми та рівні знань, умінь та навичок учнів відповідно вимогам програми; підібрано методику визначення рівня складності задачі; розроблено рівневі завдання щодо контролюючих заходів при проведенні уроків, контрольних робіт, самостійної навчально-пізнавальної та науково-дослідної діяльності учнів; підібрано методи та засоби контролю для різних форми контролюючих заходів; проведено аналіз результатів експериментального навчання й корекцію експериментальних матеріалів. На цьому етапі були використані такі методи дослідження: анкетування, бесіди, спостереження, аналіз нормативних матеріалів, вивчення науково-методичної літератури, педагогічний експеримент, діагностика його результатів та корекція напрямів дослідження, статистичні методи дослідження. Розроблена система вправ, що спрямована на впровадження функціональної складової під час вивчення методів розв’язування рівнянь та нерівностей.

Розроблена система завдань реалізована у практичному навчанні учнів Надеждівської загальноосвітньої школа І-ІІІ ступенів Хрестівської сільської ради Херсонської області. Проведено діагностику рівня навчальних досягнень алгебри, анкетування учнів, які брали участь у педагогічному експерименті, та тих, хто навчався у контрольних класах, спостереження за процесом навчання, співбесіди з вчителями школи. На підставі обговорення з вчителями результатів експериментального навчання було зроблено висновки про підвищення активізації самостійної навчальної діяльності учнів, що брали участь у експериментальному навчанні та формування в них особистісних якостей. На підставі анкетування учнів та співбесід з ними зроблені висновки про підвищення якості навчання здобувачів за рахунок свідомого, зацікавленого, мотивованого ставлення їх до навчання. На цьому етапі експерименту обґрунтовано та статистично доведено, що рівень навчальних досягнень з математики учнів, які брали участь у експерименті, вищий у порівнянні з тими учнями, під час навчання яких не використовувалися розроблені нами матеріали.

Опишемо перевірку результативності розробленої системи завдань у період проведення пошукового експерименту. Під час вибору контрольних та експериментальних класів для проведення експерименту за рівнем навчальних досягнень були використані результати попереднього контролю з алгебри за критерієм Колмогорова-Смірнова. Першою групою були названі учні 10А класу, другою групою учнів були названі учні класу 10Б. Були висунуті гіпотези H_0– рівень навчальних досягнень з алгебри у групі 1 не вище, ніж у групі 2, H_1– рівень навчальних досягнень з алгебри у групі 1 вищий, ніж у групі 2. На підставі отриманих даних на попередньому контролі було обчислено емпіричну величину параметра Колмогорова-Смірнова. Найбільша різниця між накопиченими частотами у другому розряді, тому значення параметру критерію $\lambda = d_{\max}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$ =0,021 $\sqrt{\frac{49*49}{49+49}}$ =0,1039, а критична величина параметра Колмогорова-Смірнова 0,367. Знайдене значення параметра критерію менше критичного значення параметру, це означає, що треба прийняти гіпотезу H_0, тобто рівень навчальних досягнень з математики в групах однаковий. Це наочно демонструє діаграма.

Після експериментального навчання були проаналізовані результати підсумкового контролю тих самих учнів. На підставі отриманих даних на підсумковому контролі було обчислено емпіричну величину параметра Колмогорова-Смірнова.

Таблиця 3.1

Розрахунки критерію Колмогорова-Смірнова під час аналізу двох емпіричних вибірок за результатами попереднього контролю на початку пошукового експерименту

бали	експериментальні групи		контрольні групи		накопичені частоти		різниця d
	частоти	$f1^*_{екс} = \frac{f_{екс}}{n}$	частоти	$f2^*_{екс} = \frac{f_{екс}}{n}$	$\sum f1^*_{екс}$	$\sum f2^*_{екс}$	
0–3	4	0,082	4	0,082	0,082	0,082	0

4–6	15	0,306	16	0,327	0,388	0,409	0,021
7-9	24	0,490	22	0,449	0,878	0,858	0,020
10–12	6	0,122	7	0,142	1	1	0
РАЗОМ	49		49				

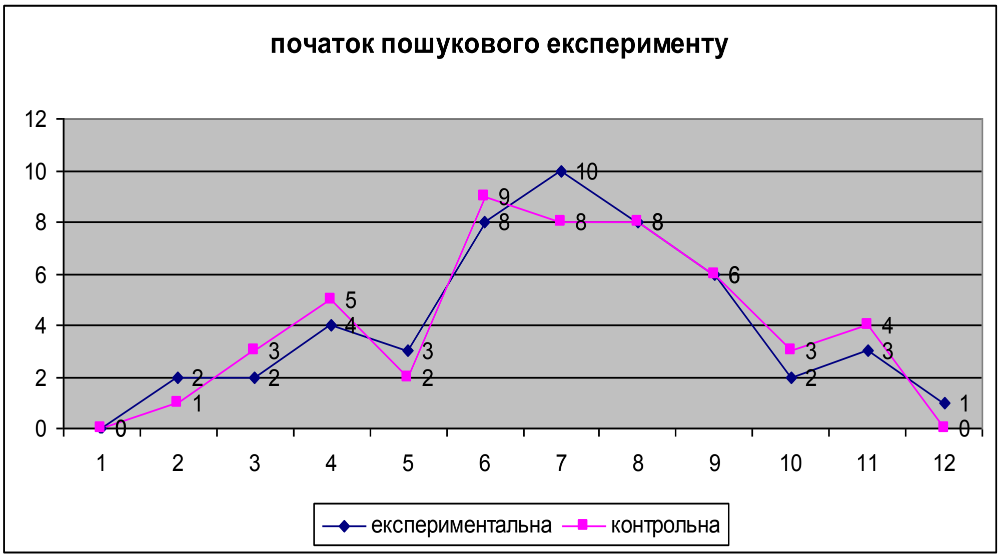


Рис. 3.2. *Результати попереднього контролю з алгебри*

Найбільша різниця між накопиченими частотами у другому розряді, тому значення параметру критерію $\lambda = d_{\max}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$ =0,142 $\sqrt{\frac{49*49}{49+49}}$ =0,703, критична величина параметра Колмогорова-Смірнова 0,367. Це означає, що треба прийняти гіпотезу H_1 – рівень навчальних досягнень з геометрії у групі 1 вищий, ніж у групі 2. Це наочно демонструє діаграма.

Таблиця 3.2

Розрахунки критерію Колмогорова-Смірнова під час аналізу двох емпіричних вибірок за результатами підсумкового контролю наприкінці пошукового експерименту

бали	експериментальні групи	контрольні групи	накопичені частоти	різниця d

	част оти	$f1^*_{екс} = \frac{f_{екс}}{n}$	част оти	$f2^*_{екс} = \frac{f_{екс}}{n}$	$\sum f1^*_{екс}$	$\sum f2^*_{екс}$	
0–3	2	0,041	4	0,082	0,041	0,082	0,041
4–6	16	0,327	21	0,428	0,368	0,510	0,142
7-9	23	0,469	20	0,408	0,837	0,918	0,081
10–12	8	0,163	4	0,082	1	1	0
РАЗОМ	49		49				

Результати пошукового експерименту дозволили зробити висновок про дієвість розробленої системи завдань, внести необхідні корективи у навчально-методичне забезпечення та перейти до останнього етапу дослідження.

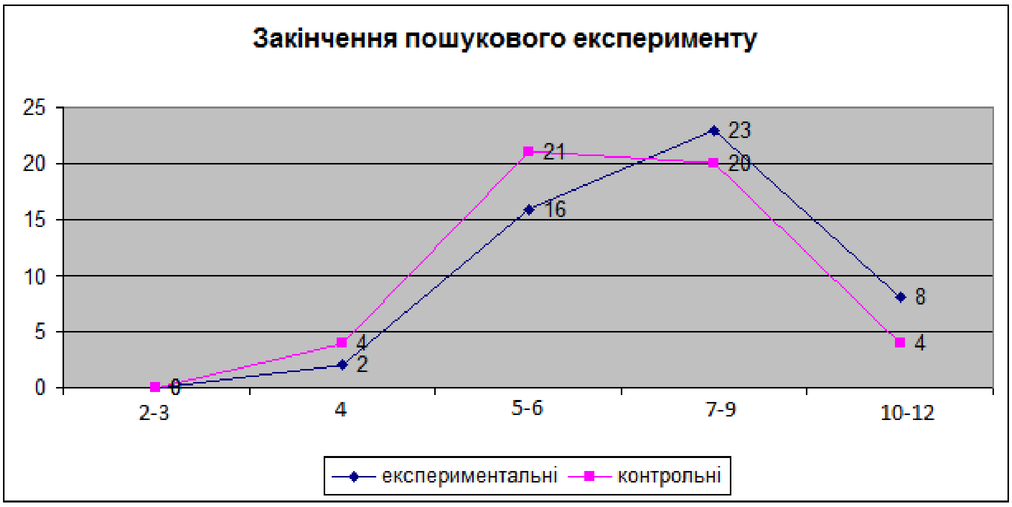


Рис. 3.3. *Результати підсумкового контролю з алгебри*

На третьому етапі дослідження було проведено формуючий експеримент, завданнями якого було:

- перевірити ефективність розробленої системи завдань у процесі навчання старшокласників; опрацювати результати педагогічного експерименту.

На цьому етапі були використані методи дослідження: педагогічний експеримент, статистичні методи опрацювання даних. Вибір експериментальних і контрольних груп відбувався випадковим чином, а під час проведення експерименту виконувалися всі вимоги щодо застосування статистичних методів опрацювання результатів педагогічних досліджень: всі вибірки були однорідними та незалежними, а заняття в контрольних і експериментальних групах проводились одним вчителем. Єдиною відмінністю у навчанні в експериментальних і контрольних групах була система вправ на відпрацювання методів розв’язування різних типів рівнянь та нерівностей.

Контроль в експериментальних групах проводились з використанням методичних матеріалів, розроблених під час пошукового етапу даного дослідження, а в контрольних групах без їх використання. Експериментом було охоплено 44 учні Надеждівської загальноосвітньої школа I-III ступенів.

В процесі подальшого дослідження з учнями експериментальних груп проводились заняття з алгебри з використанням системи завдань, розробленої автором. Результати експериментального навчання, які перевірялися на підсумковому контролі (тестування), представлено на діаграмах.

Отримані дані було оброблені за критерієм Колмогорова-Смірнова

Таблиця 5

Розрахунки критерію Колмогорова-Смірнова під час аналізу двох емпіричних вибірок за результатами підсумкового контролю наприкінці формувального експерименту

бали	експериментальні групи		контрольні групи		накопичені частоти		різниця d
	частоти	$f1^*_{екс} = \frac{f_{екс}}{n}$	частоти	$f2^*_{екс} = \frac{f_{екс}}{n}$	$\sum f1^*_{екс}$	$\sum f2^*_{екс}$	
11-12	3	0,125767	1	0,117647	0,125767	0,117647	0,00812

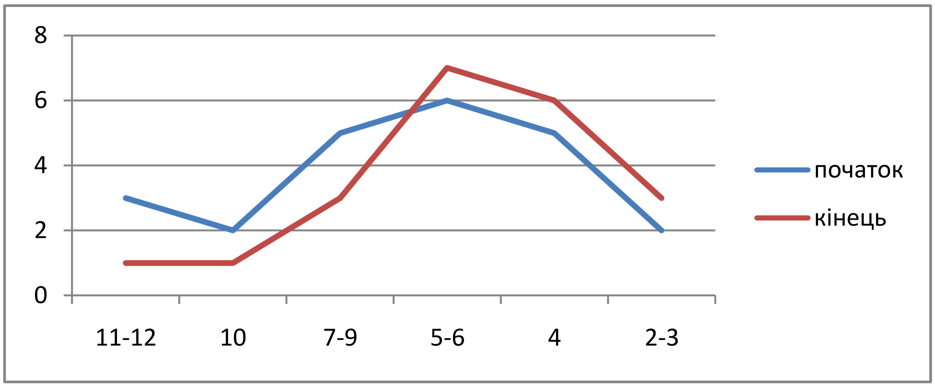
10	2	0,168712	1	0,139319	0,294479	0,256966	0,037513
7-9	5	0,257669	3	0,185759	0,552147	0,442724	0,109423
5-6	6	0,205521	7	0,244582	0,757669	0,687307	0,070362
4	5	0,156442	6	0,22291	0,91411	0,910217	0,003894
2-3	2	0,08589	3	0,089783	1	1	0
РАЗОМ	23		21				

Найбільша різниця між накопиченими частотами у третьому розряді, тому значення параметру критерію

$$\lambda = d_{\max}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} = 0{,}109423\sqrt{\frac{23*21}{23+21}} = 1{,}3938$$

Знайдене значення параметру критерію більше ніж критичне значення параметру. Це означає, що гіпотеза H_o відхиляється.

Нами було також проаналізовано результати попереднього та підсумкового контролю з алгебри окремо в експериментальних та контрольних групах учнів. На діаграмах бачимо наглядно наявність



поліпшення результатів навчання у експериментальних групах учнів.

Рис. 3.4 *Результати попереднього та підсумкового контролю з алгебри в експериментальних групах учнів*

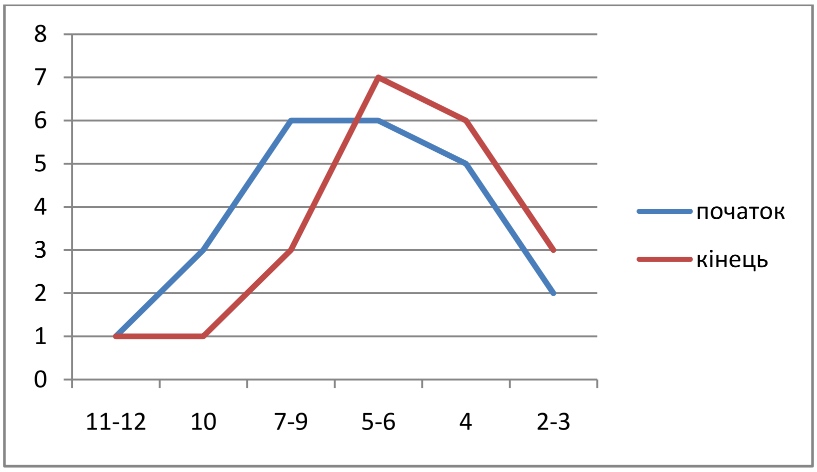


Рис. 3.5 Результати попереднього та підсумкового контролю з алгебри в контрольних групах старшокласників

Таким чином, проведений педагогічний експеримент підтвердив гіпотезу дослідження: використання функціональної складової під час розв'язування рівнянь та нерівностей в класах з поглибленим вивченням математики сприяє:

1) вдосконаленню в учнів уміння розв'язувати типи рівнянь та нерівностей, які допускають стандартне та функціональне розв'язання;

2) розвитку логічного мислення учнів та вміння бачити математичні об'єкти з різної точки зору;

3) зростанню інтересу учнів до цієї змістової лінії.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було розглянуто теоретичні основи вивчення змістової лінії «Рівняння та нерівності» в профільній школі; визначено спеціальні класи рівнянь і задач та розглянуто основні методи їх розв’язання на основі функціонального підходу; експериментально перевірити ефективність системи вправ на впровадження функціональної складової під час вивчення методів розв’язування рівнянь та нерівностей в класах (школах) з поглибленим вивченням математики. Підсумовуючи основні результати дослідження, можна відмітите наступне.

Лінія рівнянь і нерівностей є однією з основних змістовно-методичних ліній шкільного курсу математики. Але аналіз результатів розв'язування рівнянь і нерівностей в завданнях зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) з математики показує, що випускники старшої профільної школи, особливо ті, що вивчали математику на рівні стандарту, не можуть правильно виконувати завдання, пов'язані з розв'язуванням рівнянь і нерівностей. Це свідчить про актуальність проблеми удосконалення методики навчання старшокласників розв'язуванню рівнянь і нерівностей.

Функціональна лінія суттєво впливає і на сам зміст лінії рівнянь та нерівностей, і на стиль її вивчення. Ідея вивчення на функціональній основі методів розв’язування рівнянь та нерівності полягає в наступному:

1) обидві частини рівняння або нерівності розглядають як функції змінних, що входять в рівняння або нерівність, а для запису рівнянь або нерівностей в більш загальному вигляді застосовуються функціональні позначення;

2) визначається область визначення рівняння або нерівності як перетин областей визначення функцій, що входять до обох частин

рівняння або нерівності;

3) систематично застосовується графічний метод розв'язування рівнянь або нерівностей, який передбачає побудову графіків відповідних функцій;

4) при вивченні рівнянь або нерівностей у відповідних випадках використовуються властивості функцій такі, як парність, монотонність, неперервність, періодичність тощо.

Експериментальне дослідження та статистична обробка його результатів підтвердили справедливість гіпотези дослідження і довели, що використання функціональних методів розв'язування рівнянь та нерівностей дозволяє удосконалювати процес навчання математики в школах (класах) з її поглибленим вивченням та сприяє вдосконаленню в учнів уміння розв'язувати типи рівнянь та нерівностей, які допускають стандартне та функціональне розв'язання; розвитку логічного мислення учнів та вміння бачити математичні об'єкти з різної точки зору; зростанню інтересу учнів до цієї змістової лінії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Биков В.Ю. Сучасні завдання інформатизації освіти [Електорнний ресурс]. / В.Ю. Биков //Інформаційні технології і засоби навчання. – 2010. – №1 (15). Режим доступу: http://www.ime.edu-ua.net/em.html.

2. Болюбаш Я. Реформування педагогічної освіти : концептуальні засади / Я. Болюбаш // Рідна шк. – 1999. – № 1. – С. 3–4.

3. Бондар В. І. Дидактика / В. І. Бондар. – К. : Либідь, 2005. – 264 с.

4. Бродський Я. Компетентнісний підхід у навчанні математики / Я. Бродський, С. Великодний, О. Павлов // Математика в школі. – 2011. – № 10. – С. 2–8.

5. Брусило З.О. Розвиток у майбутніх викладачів математики умінь розв’язування рівнянь і нерівностей функціональним методом / З.О. Брусило. Донецьк, 2011. – 56 с.

6. Бурда М. І. Диференційоване навчання : учителю математики / М. І. Бурда, Н. Д. Мацько // Рад. шк. – 1990. – № 9. – С. 59–63.

7. Ваврук Е. М. До питання про мотивацію навчання математики / Е. М. Ваврук // Эвристическое обучение математике : междунар. науч.-метод. конф., 15-17 ноября 2005 г. : тезисы докл. – Донецк, 2005. – С. 12–13.

8. Глобін О. Компетентнісний підхід у навчанні та стандарт шкільної математичної освіти / О. Глобін // Математика в школі. – 2011. – № 11-12. – С. 2–5.

9. Грабарь М. И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях : непараметрические методы / М. И. Грабарь, К. А. Краснянская. – М. : Просвещение, 1977. – 136 с.

10. Державний стандарт базової і повної загальної середньої

освіти. Освітня галузь „Математика” // Інформаційний збірник МОНУ. – К., 2018. – № 6. – С. 31–34.

11. Зварич І. А. Реалізація системи контролю і оцінювання знань студентів / І. А. Зварич // Рідна школа. – 2000. – № 12. – С. 27–28.

12. ЗУБКО, Вікторія. Узагальнення і систематизація при вивченні функціональної лінії в шкільному курсі математики. *Физико-математическое образование,* 2014, 1 (2). https://cyberleninka.ru/article/n/uzagalnennya-i-sistematizatsiya-pri-vivchenni-funktsionalnoyi-liniyi-v-shkilnomu-kursi-matematiki

13. Ігнатенко М. Я. Активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики / М.Я. Ігнатенко. – Київ : Тираж, 1997. – 300 с.

14. Ігнатенко М. Я. Сучасні освітні технології / М. Я. Ігнатенко // Математика в школі : Науково-методичний журнал. – 2003. – №4. – С. 2–6.

15. Капіносов А. М. Тематичне поетапне рівневе вивчення математики в основній школі / А. М. Капіносов. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2005. – 112 с.

16. Касьяненко М. Д. Комплексный контроль учебной деятельности / М. Д. Касьяненко // Советская педагогика. – М. : Педагогика, 1986. – № 10. – С. 46–49.

17. Кондик Ю., Одінцова О.О. Історичний огляд наповнення змістової лінії рівнянь та нерівностей у старшій школі. СумДПУ імені АС Макаренка, 2019. URL: http://repository.sspu.sumy.ua/bitstream/123456789/7378/1/Kondyk_ Istorychnyi.pdf.

18. Концепція базової математичної освіти в Україні / З. І. Слєпкань, М. І. Шкіль, А. Я. Дороговцев та ін. – К. : ВІПОЛ, 1993. – 32 с.

19. Лов'янова І. В. Профільна диференціація навчання математики: історичний аспект. 2012.

http://elibrary.kdpu.edu.ua/bitstream/0564/2340/1/2012_6.pdf

20. Мацюк В.В. Оцінка складності задач при побудові системи контролю результатів навчання / В. В. Мацюк // Дидактика математики: проблеми і дослідження. Міжнар. зб. наук. робіт./ Міжнар. прогр. "Евристика та дидактика точних наук". – Вип. 3 (13). – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2000. – С. 72 -77.

21. Мехед Д.Б. Система диференційованого контролю та корекції навчальних досягнень учнів з математики в основній школі. : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія і методика навчання (математика)» / Д.Б. Мехед. – Херсон, 2010. – 20 с.

22. МОН України. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx.

23. Нелін, Є. П.; Долгова, О. Є. Особливості навчання учнів розв'язуванню рівнянь і нерівностей в старшій профільній школі. *міжнародної науково-методичної конференції ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ ПМО–2019*, 2019, 70. URL: http://elibrary.kdpu.edu.ua/bitstream/123456789/3619/1/pmo-2019.pdf#page=70

24. Про Національну стратегію розвитку освіти в Україні на період до 2021 року. Затверджено Указом Президента України від 25.06.2013 № 344/2013// Офіційний вісник Президента України. – 2013. – №17. – С. 31.

25. Соколенко Л. О. Технологія навчання теоретичних основ змістової лінії "Рівняння і нерівності". 2019. http://erpub.chnpu.edu.ua:8080/jspui/handle/123456789/239.

26. Соколенко, Л. О., Швець, В. О. (2013). Особливості системи прикладних задач, призначених для вивчення функцій у курсі алгебри і

початків аналізу. http://erpub.chnpu.edu.ua:8080/jspui/bitstream/123456789/243/1/Sokolenko%20L.%2C%20Shwets%20V._Peculiarities%20of%20the%20system%20of%20applications.pdf.

27. Соколенко Л.О. Методика навчання наукових основ функціональноїзмістової лінії майбутніх вчителів математики. https://ped-ejournal.cdu.edu.ua/article/view/2152/2235.

28. Таточенко В.І. Розвиток пізнавальної самостійності учнів основної школи на уроках математики./ В.І. Таточенко // Зб. матеріалів Всеукр. студ. наук.-практ. конф. (19-20 квітня 2012 року), – Херсон: ХДУ, 2012. – С. – 155–156.

29. Федак В.І. Розв’язування рівнянь. Доведення нерівностей / В.І. Федак. – Тернопіль, 1997. – 214 с.

30. Філон Л. Г. Функціональна складова змістової лінії “Рівняння та нерівності” у навчанні математики. Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2019), м. Черкаси, 11–12 квітня 2019 р. Черкаси: Вид. ФОП Гордієнко Є.І., 2019. С. 86-88. URL: http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/bitstream/handle/123456789/3619/pmo-2019.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

31. Шаповал Н. В., Кузьмич Л. В. Профільне навчання математики в сучасній школі. *Актуальні проблеми природничо-математичної освіти в середній і вищій школі*, 2013, 180. http://ekhsuir.kspu.edu/bitstream/handle/123456789/2060/%D0%A1%D0%B5%D0%BD%D1%82%202013.pdf?sequence=1#page=185.