МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп’ютерних наук, фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ТЕОРЕМИ КОНСЕРВАТИВНОСТІ МАТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти “магістр”

Виконала: студентка 2 курсу, 221М групи
Спеціальності 014 Середня освіта
Спеціалізації 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)»
Чорна Юлія Володимирівна

Керівник кандидат фізико-математичних наук,
доцент Кузьмич Валерій Іванович

Рецензент директор Херсонської
загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 44
Херсонської міської ради
Перегняк Олександр Адамович

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Різні положення з галузі математичного аналізу (розбіжність, добуток двох розбіжних рядів тощо) звичайним чином висунули питання підсумовування розбіжних рядів в певному новому сенсі. До виникнення строгої теорії границь Коші (та пов'язаною з нею теорією рядів) розбіжні ряди в математичній практиці зустрічалися достатньо часто. І хоча при застосуванні їх при доведенні тверджень і виникали певні суперечності, проте іноді виникали спроби надати їм навіть конкретний числовий зміст.

Сучасний аналіз формулює дане питання інакше. В основі лежить те чи інше точно сформульоване означення так званої «узагальненої суми» ряду, яке не застосовується тільки для конкретного числового ряду, а застосовується до цілого ряду класів певних рядів [5]. Зазвичай подібні питання стосовно підсумовування рядів розв'язуються за допомогою певного перетворення, в якості якого найчастіше виступає матричне перетворення послідовності у послідовність.

Засновником теорії підсумовування розбіжних рядів є Леонард Ейлер. Більшість математиків (Лейбніц, Бернуллі, Даламбер, Лагранж та ін. [16]) довго сперечалися стосовно того, чому повинна дорівнювати сума розбіжного ряду. Сучасна теорія підсумовування розбіжних рядів набула бурхливого розвитку наприкінці XIX – на початку XX ст. Цій обставині значно сприяла той факт, що виявилися зв'язки цієї теорії з іншими математичними дисциплінами. Починаючи з кінця XIX ст. питаннями дослідження методів підсумовування розбіжних рядів займалася значна кількість математиків. Деякі класичні методи підсумовування розбіжних рядів виявилися досить зручними для застосування узагальненого підсумовування, у зв'язку з чим вони визначили основні регулярні методи з теорії підсумовування розбіжних рядів. Першими такі методи запропонували Пуассон при знаходженні суми степеневого ряду та Чезаро, який поклав в основу використання так званих середніх арифметичних [12]. Узагальненням цих методів стали інші класичні методи, такі, як метод Гельдера, метод Вороного-Ньорлунда, метод середніх логарифмічних Рісса, методи Ейлера-Кноппа та Хаусдорфа та інші. Крім визначення умов регулярності методів, дослідниками було розв’язано і питання застосування узагальненого підсумовування для вирішення певних проблем теорії розбіжних числових рядів.

Більшість із основних теорем теорії підсумовування можна розглядати як частинний випадок теорем про включення та сумісність двох методів підсумовування. Доведення останніх теорем зводиться, як правило, до доведення консервативності та регулярності деяких методів підсумовування. Необхідні та достатні умови для консервативності та регулярності матричних перетворень в основному визначаються теоремами Кожима-Шура та Тьопліца [14, 18, 26]. Також дослідженням консервативності займалися у своїх роботах Вороний, Ньорлунд [23], Харел, Курх та ін.

Завдяки практичному прикладенню узагальненого підсумовування клас консервативних методів відіграє значну роль в теорії підсумовування рядів, а питання, пов’язані з властивостями цих методів, залишаються актуальними і в наш час

Мета даної роботи полягає у встановленні взаємозалежності різних видів абсолютної консервативності для конкретних класичних матричних методів підсумовування рядів.

Об’єктом дослідження виступає загальна теорія підсумовування розбіжних рядів, а ***предметом*** дослідження – клас консервативних матричних методів.

Виходячи з мети, визначені основні ***завдання*** роботи:

1. Зробити огляд монографічної, методичної літератури та наукових публікацій з теорії підсумовування рядів.

2. Зробити огляд основних видів консервативних матричних перетворень, умов їх абсолютної консервативності та розглянути взаємозалежність різних видів абсолютної консервативності для конкретних класичних матричних методів підсумовування рядів.

3. Розкрити питання стосовно викладання елементів теорії підсумовування числових рядів в шкільному курсі математики

Основні ***методи***, що використовувалися в дослідженні – це метод граничного переходу, матричний метод розв'язування систем рівнянь, методи підсумовування рядів, метод оберненого перетворення.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що були класифіковані основні умови абсолютної консервативності матричних перетворень. ***Практичне значення*** дипломної роботи полягає в можливості застосування матеріалу студентами та вчителями загальноосвітніх шкіл при викладанні відповідних тем в школі, а також при різних формах неформальної освіти з математики.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Апробація результатів дослідження. За результатами виконаного дослідження було опубліковано тези в збірнику тез Всеукраїнської науково-практичної конференції «Актуальні проблеми природничо-математичної освіти в Україні» (16-17 вересня 2021 р., Херсонський державний університет).

Робота складається з трьох основних розділів. Перший розділ містить теоретичні положення, які стосуються теорії підсумовування розбіжних рядів. Зокрема, в ньому розглянуто властивості матричних перетворень та класичні методи підсумовування рядів. В другому розділі здійснено огляд основних видів консервативних матричних перетворень, а також розглянуто умови їх абсолютної консервативності. Третій розділ носить прикладний характер та містить добірку прикладів на знаходження сум числових рядів та дослідження їх на збіжність, що можуть бути запропоновані на факультативних або гурткових заняттях з математики для учнів старших класів шкіл з поглибленим вивченням математики.

РОЗДІЛ 1
ОСНОВНІ ФАКТИ З ТЕОРІЇ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ

1.1. Матричні перетворення

Для сучасно теорії рядів відмінною рисою є той факт, що вона вивчає ряди, які розбігаються. Багато визначних математиків працювало над створенням та впровадженням різних методів підсумовування рядів [11, 16, 26, 32]. Розглянемо деякі матричні перетворення, які найчастіше визначають ці методи.

Нехай $a = (a_{\text{nk}})$ – нескінченна матриця (n, k = 0, 1, …). Для даної послідовності (U_n) утворюємо нову послідовність (U'_n):

$$U'_n = \sum_k a_{nk} U_k \,. \tag{1.1}$$

«Якщо U'_n існують при будь-якому n = 0, 1,… та $\lim U'_n = U'$, то послідовність (U_n) називається *підсумованою* методом a до суми U'» [5].

Перетворення (1.1) називається *матричним перетворенням* послідовності в послідовність. Проте разом з перетворенням (1.1) використовують і наступні матричні перетворення:

1) перетворення

$$U'_n = \sum_k \alpha_{nk} u_k \tag{1.2}$$

ряду в послідовність;

2) перетворення

$$u'_n = \sum_k \overline{\alpha}_{nk} u_k \tag{1.3}$$

ряду в ряд;

3) перетворення

$$U'_n = \sum_k \overline{a}_{nk} U_k \tag{1.4}$$

послідовності в ряд.

Перетворення (1.1) називається *трикутним*, якщо $a_{nk} = 0$ при $k > n$. Аналогічно можна визначити і трикутні перетворення (1.2), (1.3), (1.4).

Для того, щоб «визначити теореми, які формулюють необхідні й достатні умови для того, щоб дане матричне перетворення переводило один клас послідовностей в інший, існують три загальні методи» [7].

1. Метод «швидко зростаючих послідовностей». Історично – це перший метод для доведення теорем про матричні перетворення, застосований Тьоплицем у 1911 році [17].

2. Метод, заснований на застосуванні теореми Банаха-Штейнгауза «про поточкову збіжність на банаховому просторі послідовностей неперервних лінійних функціоналів» [4]. Систематичне застосування вище згаданого методу використовувалося для перетворення так званих подвійних послідовностей.

3. Метод Целлера. Він був розроблений у 1953 році німецьким математиком Целлером і базується на використанні теореми Банаха «про замкнений графік» [32].

Проте методи 2 та 3 достатньо незручні для використання при перетворенні просторів *c* (послідовностей, що збігаються) та *m* у простір *l* (рядів, що збігаються абсолютно).

Зрозуміло, що найбільш важливі твердження, які стосуються властивостей методу збіжності, не можуть мати місце для довільного методу підсумовування. Тому розглянемо деякі важливі обмеження для них.

Якщо $\mathrm{A}' \supset l$, тобто, якщо метод підсумовування *A* підсумовує всі збіжні ряди, то кажуть, що «метод *A зберігає збіжність* або є *консервативним»* [12].

Розглянемо деякі теореми, які будуть використовуватися у подальшому вивченні матеріалу.

Теорема 1.1 (*Хана*). Для того, щоб перетворення (1.2) існувало й переводило усі ряди, що збігаються абсолютно, у послідовності ($U^{'}$), що збігаються, необхідно й достатньо виконання умов:

1. Існують $\lim \alpha_{nk} = \alpha_k$,
2. $\alpha_{nk} = \mathrm{O}(1)$.

При цьому $\lim U'_n = \sum \alpha_k u_k$.

Банаховий простір числових послідовностей називається «*ВК-простором*, якщо в ньому із збіжності послідовності по нормі випливає її покоординатна збіжність» [8].

Теорема 1.2 (*Целлера*). Нехай *X* та *У* є *ВК*-просторами та в *X* має місце збіжність за відрізками. Для того, щоб перетворення (1.2) існувало й переводило *X* в *У*, необхідно й достатньо існування сталої *M* > 0 такої, що умови:

$\alpha)\ A\overset{m}{x} \in Y$,

$\beta)\ \left\|A\overset{m}{x}\right\| \le M\left\|\overset{m}{x}\right\|$,

виконуються для будь-якого відрізку $\overset{m}{x} \in X$ (де відрізок $\overset{m}{x} = \{u_0, u_1, \ldots, u_m, 0, \ldots\} = \sum_{k=0}^{m} u_k e_k$).

Отже, при $X = l$ за вище наведеною теоремою можна зробити висновок, що «*l* є *ВК*-простором і в ньому має місце збіжність за відрізками» [2]. Тоді з умов $\alpha)$ та $\beta)$ випливає, що:

а) $Ae_v \in Y$;

б) $\|Ae_v\| = \mathrm{O}(1)$.

Обернено, при *X* = *l* з а) та б) випливає виконання умов $\alpha)$ та $\beta)$.

Наслідок 1.1. Для того, щоб перетворення (1.1) існувало й переводило простір *l* в *ВК*-простір *У*, необхідно й достатньо виконання умов а) та б).

Наслідок 1.2. Для того, щоб перетворення (1.2) переводило усі ряди, що збігаються абсолютно, у послідовності (U'_n), що збігаються, і виконувалася рівність $\lim U'_n = \sum u_k$ необхідно й достатньо виконання умов 1) та 2) теореми 1.1 з $\alpha_k = 1$.

Введемо тепер поняття *A*-обмеженої послідовності та поля обмеження. Послідовність частинних сум ряду називається *A-обмеженою*, якщо одержана після перетворення послідовність обмежена, тобто якщо

$$U' = O(1),$$

причому, якщо метод заданий перетворенням (1.3) або (1.4), то вважаємо

$$U'_n = \sum_{k=0}^{n} u'_k.$$

Множина усіх послідовностей (рядів), «які метод *A* обмежує, називається *полем обмеженості* методу *A»* [6] й позначається одним із символів A'_0, *mA* або *bA*. З вищезазначеного зрозуміло, що:

$$|A|' \subset A' \subset A'_0.$$

Якщо матричний метод A заданий у вигляді перетворень (1.1) або (1.2), то

$$A\{\sum u_n\} = A\{U_n\} = \lim u'_n,$$

а у вигляді (1.3) або (1.4) –

$$A\{\sum u_n\} = A\{U_n\} = \sum u'_n.$$

«Матричний метод називається *трикутним*, якщо він заданий трикутним перетворенням. Метод $A = (\alpha_{nk})$ називається *нормальним*, якщо він трикутний і $\alpha_{nn} \neq 0$ при будь-якому $n = 0,1,\ldots$» [8]

Всі ці чотири перетворення самостійні. Покажемо як переходити від перетворення (1.1) до (1.4) і обернено, і від (1.2) до (1.3) і обернено.

Якщо врахувати збіжність всіх рядів в перетворені (1.1.), то маємо:

$$u'_n = \bar{\Delta} U'_n = \sum_k a_{nk} U_k - \sum_k a_{n-1,k} U_k = \sum_k \Delta \bar{a}_{nk} U_k \ , \qquad (1.5)$$

звідки $\bar{a}_{nk} = \bar{\Delta}\, a_{nk}$. Аналогічно можна довести, що

$$\bar{\alpha}_{nk} = \bar{\Delta}\, \alpha_{nk}.$$

Також навпаки, враховуючи збіжність рядів в перетворені (1.4), маємо:

$$U'_n = \sum_{m=0}^{n} u'_n = \sum_{m=0}^{n} \sum_k \bar{a}_{nk} U_k = \sum_k \left(\sum_{m=0}^{n} \bar{a}_{mk} \right) U_k \ , \qquad (1.6)$$

звідки $a_{nk} = \sum\limits_{m=0}^{n} \bar{a}_{mk}$.

Аналогічно

$$\alpha_{nk} = \sum_{m=0}^{n} \bar{\alpha}_{mk} \ .$$

Для трикутних методів формули $a_{nk} = \sum\limits_{m=0}^{n} \bar{a}_{mk}$ і $\alpha_{nk} = \sum\limits_{m=0}^{n} \bar{\alpha}_{mk}$ отримують вигляд

$$a_{nk} = \sum_{m=k}^{n} \bar{a}_{mk} \ , \ \alpha_{nk} = \sum_{m=k}^{n} \bar{\alpha}_{mk} \ . \qquad (1.7)$$

Формула $\bar{a}_{nk} = \bar{\Delta}\, a_{nk}$ є формулою переходу від перетворення (1.1) до перетворення (1.4); формула $a_{nk} = \sum\limits_{m=0}^{n} \bar{a}_{mk}$ – від (1.4) до (1.1.); формула $\bar{\alpha}_{nk} = \bar{\Delta}\, \alpha_{nk}$ – від (1.2) до (1.3); формула $\alpha_{nk} = \sum\limits_{m=0}^{n} \bar{\alpha}_{mk}$ – від (1.3) до (1.2).

Відмітимо, що перехід від перетворення (1.1) до (1.2) або навпаки не завжди можливий. Тому в загальному випадку перетворення (1.1.) та (1.2) самостійні. «Однак, якщо метод трикутний, то всі чотири види перетворень рівносильні» [12].

Знайдемо тепер формули переходу від перетворення (1.1.) до перетворення (1.2) і навпаки у випадку трикутного методу. Маємо:

$$U'_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} U_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} \sum_{k=0}^{\nu} u_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\nu=k}^{n} a_{n\nu} \right) u_k ,$$

звідки $\alpha_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} a_{n\nu}$.

Із формули $\alpha_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} a_{n\nu}$ при $k < n$ виводимо

$$\Delta\alpha_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} a_{n\nu} - \sum_{\nu=k+1}^{n} a_{n\nu} = a_{nk} , \tag{1.8}$$

звідки (при всіх k) $\Delta\alpha_{nk} = a_{nk}$.

Формула $\alpha_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} a_{n\nu}$ є формулою переходу від перетворення (1.1.) до (1.2) у випадку трикутного методу, а формула $\Delta\alpha_{nk} = a_{nk}$ – від (1.2) до (1.1) [5].

Деякі проблеми теорії рядів часто вирішуються за допомогою оберненого перетворення. «Наприклад, для перетворення (1.1) це означає знайти формулу, яка виражає члени послідовності (u_n) через члени послідовності (u'_n)» [7]. Відмітимо, що для нескінченої трикутної матриці $A = (a_{nk})$ *оберненою матрицею* називається матриця $A^{-1} = (\xi_{nk})$, якщо

$$\sum_{\nu=k}^{n} a_{n\nu} \xi_{\nu k} = \sum_{\nu=k}^{n} \xi_{n\nu} a_{\nu k} = \delta_{nk} ,$$

тобто якщо

$$AA^{-1} = A^{-1}A = (\delta_{nk}). \tag{1.9}$$

Теорема 1.5. Для трикутного матричного методу A обернене перетворення A^{-1} існує тоді і тільки тоді, якщо A нормальний, до того ж матриця A^{-1} є оберненою матрицею для матриці A.

1.2. Класичні методи підсумовування рядів

«Послідовність називається сумовною *методом арифметичних середніх* до числа U', якщо послідовність

$$H_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} U_k \,, \tag{1.10}$$

збігається до U'» [18].

Метод арифметичних середніх позначається через *H*, або H^1, або (*H*, 1). Таким чином, наприклад, для ряду

$$\sum(-1)^n = 1-1+1-1+\ldots \tag{1.11}$$

маємо

$$H\left\{\sum(-1)^n\right\} = \frac{1}{2}.$$

Якщо ж утворюємо квадрат ряду (1.11) за правилом Коші [7], то він не підсумовується методом *H*. Дійсно,

$$\left[\sum(-1)^n\right]^2 = \sum_n\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(-1)^{n-k}\right] = \sum_n(-1)^n\sum_{k=0}^{n}1 = \sum(-1)^n(n+1),$$

а частинними сумами ряду

$$\sum(-1)^n(n+1) \tag{1.12}$$

є

$$U_n = \begin{cases} k+1 & при\;\; n = 2k \\ -k-1 & при\;\; n = 2k+1 \end{cases}$$

Тому для ряду (2.3) маємо:

$$H_{2k+1} = 0,$$
$$H_{2k} = \frac{1}{2k+1}U_{2k} = \frac{k+1}{2k+1} \to \frac{1}{2} \neq 0,$$

тобто ряд $\sum(-1)^n(n+1)$ не є *H*-сумовним.

Проте цей ряд підсумовується більш сильнішим методом. А саме, Гельдер [3] показав, що «ряд $\sum(-1)^n(n+1)$ підсумовується введеним ним методом H^2 арифметичних середніх другого порядку» [4], що визначається через границю послідовності

$$H_{2n}^{2}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}H_k\ .$$

Таким чином, можна прийти до *методу Гельдера* порядку α, введеним Гельдером у 1882 році. Його позначають через H^{α} або (H,α). За означенням

$$H^{\alpha}\left\{\sum u_n\right\}=\lim_{n} H_n^{\alpha}$$

При $\alpha=0$ метод H^{α} є методом збіжності: $H^{0}=E$.

Має місце

Теорема 1.6. Метод H^{α} регулярний.

Теорема 1.7. Якщо $\beta>\alpha$, то $H^{\beta}\supset H^{\alpha}$, і обидва методи сумісні.

Очевидно, чим більше α, тим більш складний вигляд має матриця методу H^{α}. У зв'язку з цим на практиці застосовують інший метод, рівносильний методу H^{α}, матриця якого дуже проста. Таким методом виступає метод Чезаро [45], до якого можна прийти наступним чином. Утворюємо чезарівські суми порядку α ряду, для цього покладемо

$$S_n^{0}=U_n=\sum_{k=0}^{n}u_k\ ,$$

та при $\alpha\geq 1$

$$S_n^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}S_k^{\alpha-1}\ .$$

Разом з чезарівськими сумами S_n^{α} у визначенні методу Чезаро важливі й так звані «біноміальні коефіцієнти – числа Чезаро» [12] –

$$A_n^{\alpha}=\binom{n+\alpha}{n}, \tag{1.13}$$

які є коефіцієнтами біноміального ряду

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}}=\sum A_n^{\alpha}x^n\ . \tag{1.14}$$

Чезарівські середні, коротко C^{α}-середні, визначаються відношенням

$$\sigma_n^\alpha = \frac{S_n^\alpha}{A_n^\alpha}. \tag{1.15}$$

Якщо існує скінченна границя

$$\lim \sigma_n^\alpha = U'$$

то кажуть, що ряд підсумовується *методом Чезаро* порядку α до числа U'. Метод Чезаро порядку α позначають через C^α або (C, α).

Розглянемо регулярність та збереження абсолютної збіжності. У даному випадку будуть справедливі наступні теореми.

Теорема 1.8. Метод (С, α) регулярний, якщо $\operatorname{Re}\alpha > 0$ або $\alpha = 0$

Теорема 1.9. Метод $|\mathrm{C}, \alpha|$ зберігає абсолютну збіжність, якщо $\operatorname{Re}\alpha > 0$ або $\alpha = 0$.

Теорема 1.10. Якщо $\operatorname{Re}\beta > \operatorname{Re}\alpha > -1$, то (С, β)$\supset (C, \alpha)$, то обидва методи сумісні.

Теорема 1.11. Для будь-яких комплексних чисел $\beta \neq \alpha$, що задовольняють умові $\operatorname{Re}\beta = \operatorname{Re}\alpha > -1$, існує ряд, що підсумовується (С, α) та не підсумовується (С, β).

Для абсолютного підсумовування має місце

Теорема 1.12. Якщо $\operatorname{Re}\beta > \operatorname{Re}\alpha > -1$, то $|C, \beta| \supset |C, \alpha|$.

Теорема 1.13. Для будь-яких комплексних чисел $\beta \neq \alpha$, що задовольняють умові $\operatorname{Re}\beta = \operatorname{Re}\alpha > -1$, можна побудувати ряд, що підсумовується $|C, \alpha|$, проте не підсумовується $|C, \beta|$, однак $|C, \alpha| \subset |C, \beta|$ та обидва методи сумісні.

З даної теореми очевидно, що метод $|C, \alpha|$ при чисто уявному α не зберігає абсолютну збіжність.

З теорем 1.12 та 1.13 також випливає, що метод $|C, \beta|$ сильніше методу $|C, \alpha|$ при $\operatorname{Re}\beta > \operatorname{Re}\alpha > -1$.

Розглянемо питання про абсолютне підсумовування ряду $\sum(-1)^n A_n^\alpha$. Якщо у формулі

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha}\sum U_n x^n = \sum S_n^\alpha x^n$$

замінити U_n на $n\,u_n$, отримаємо

$$(1-x)^{-\alpha}\sum nu_n x^n = \sum T_n^\alpha x^n ,$$

та диференціюванням рівності

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum A_n^\alpha x^n$$

маємо:

$$\sum nA_n^\alpha x^{n-1} = (\alpha+1)(1-x)^{-\alpha-2} . \tag{1.16}$$

Для ряду $\sum(-1)^n A_n^\alpha$ маємо:

$$\sum nu_n x^n = -x\sum nA_n^\alpha (-x)^{n-1} = -x(\alpha+1)(1+x)^{-\alpha-2} .$$

Враховуючи

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha}\sum U_n x^n = \sum S_n^\alpha x^n$$

та

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum A_n^\alpha x^n$$

одержуємо:

$$\sum T_n^{\alpha+2} x^n = -(\alpha+1)x(1-x^2)^{-\alpha-2} = -(\alpha+1)\sum A_n^{\alpha+1} x^{2n+1}. \tag{1.17}$$

Як наслідок,

$$T_n^{\alpha+2} = \begin{cases} 0 & \text{при } \; n = 2k, \\ -(\alpha+1)A_k^{\alpha+1} & \text{при } \; n = 2k+1, \end{cases}$$

Звідси

$$T_{2k}^{\alpha+1} = T_{2k}^{\alpha+2} - T_{2k-1}^{\alpha+2} = (\alpha+1)A_{k-1}^{\alpha+1}$$

Отже, ряд $\sum(-1)^n A_n^\alpha$ є $\left|C^{\alpha+2}\right|$-сумовним, проте не є $\left|C^{\alpha+1}\right|$- сумовним.

Метод підсумовування зважених середніх Рісса можна розглядати як узагальнення методу арифметичних середніх. «Тому його часто називають також методом зважених середніх арифметичних» [13].

Цим методом називають трикутний матричний метод, що визначається послідовністю комплексних чисел p_n у вигляді перетворення (1.1) матрицею чисел

$$a_{nk} = \frac{p_к}{P_n},$$

де

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} p_к\,,\ P_n \neq 0. \tag{1.18}$$

Метод зважених середніх Рісса позначають через (R, p_n). Як випадок, метод $(R, 1)$ є методом середніх арифметичних.

Метод $(R, \frac{1}{n+1})$, зазвичай називають *методом логарифмічних середніх* й позначають через l *або* (l).

Метод (R, p_n) при $p_n = (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha}$, тобто при $P_n = (n+1)^{\alpha}$ найчастіше називають «*методом Зиґмунда* порядку α» [5] й позначають через (Z, α), оскільки Зиґмунд вивчав швидкість наближення $h \leq \alpha$ раз диференційованих функцій (Z, α)-середніми їх ряду Фур'є при $\alpha = 1, 2, \ldots$. [16].

Враховуючи означення абсолютного підсумовування трикутного методу (R, p_n), ряд називають $|R, p_n|$- сумовним, якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{k=1}^{n} P_{k-1} u_k \right| < \infty, \tag{1.19}$$

причому

$$(R, p_n)\left\{\sum u_k\right\} = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{k=1}^{n} P_{k-1} u_k\ .$$

Метод збіжності не є частковим випадком методу (R, p_n). Тому особливо важливо знати, яким умовам повинні задовольняти p_n, щоб метод (R, p_n) був рівносильним збіжності. Тут має місце

Теорема 1.14. Для того, щоб регулярний метод (R, p_n) був рівносильним збіжності, необхідно й достатньо виконання умови $P_n = O(p_n)$.

Теорема 1.15. Для того, щоб регулярний метод $|R, p_n|$ був рівносильним абсолютній збіжності, необхідно й достатньо виконання умови $P_n = O(p_n)$.

Дві попередні теореми належать Кангро [21].

Умові $P_n = O(p_n)$ задовольняють методи (R, p_n) при $p_n = a^n$ з $|a| > 1$ при $p_n = n \cdot n!$.

Для довільних *T*-матриць Бруно [4] отримав наступний результат.

Теорема 1.15. Для того, щоб регулярний метод $A = (a_{nл})$ був рівносильним збіжності, необхідно й достатньо існування числа $\delta > 0$ такого, що

$$\overline{\lim_n} \left| \sum_k a_{nk} U_k \right| \geq \overline{\lim_n} |U_n|$$

для будь-якої обмеженої послідовності (U_n).

Ряд називається абсолютно (R, λ_n, α)-сумовним, якщо

$$\int_\alpha^\infty \left| \frac{\alpha}{d\omega} R_\lambda^\alpha(\omega) \right| d\omega < \infty \tag{1.20}$$

при деякому $a > 0$. Метод (R, λ_n, α) також називають *неперервним методом Рісса* (введений ним у [41]). Зрозуміло, що

$$(R, \lambda_n, \alpha) \subseteq (R^*, \lambda_n, \alpha).$$

Методи Рісса регулярні та зберігають абсолютну збіжність.

Методом Ейлера-Кноппа E_λ називають трикутний матричний метод, визначений у вигляді перетворення (1.1) матрицею $(a_{n\lambda})$ з елементами

$$(a_{n\lambda}) = (\overset{n}{k}) \lambda^k (1 - \lambda)^{n-k},$$

де параметр λ – деяке комплексне число.

Ейлер розглядав випадок $\lambda = \frac{1}{2}$ [8], Кнопп у 1922 році – випадок дійсного λ [19], а Агн'ю – загальний випадок комплексного λ у 1944 році. Цей метод підсумовування позначають E_λ або (E, q).

Теорема 1.16. Метод E_λ зберігає збіжність тоді й тільки тоді, коли $0 \le \lambda \le 1$, та регулярний при $0 < \lambda \le 1$. Метод (E, q) зберігає збіжність й регулярний тоді й тільки тоді, коли $q \ge 0$.

Також має місце

Теорема 1.17. Метод $|E, q|$ зберігає абсолютну збіжність тоді й тільки тоді, якщо $0 \le \lambda \le 1$.

Добуток двох методів Ейлера-Кноппа є також методом Ейлера-Кноппа, так що множина методів Ейлера-Кноппа замкнено відносно операції множення. Метод Хаусдорфа, до розгляду якого ми приступаємо, також володіє цією властивістю. Множина методів Хаусдорфа є достатньо широкою: метод є узагальненням методів Гельдера, Чезаро та Ейлера-Кноппа.

Візьмемо числову послідовність (μ_n) та введемо діагональну матрицю $\mu = (\delta_{nk} \mu_n)$.Відповідно матриці μ утворюємо добуток

$$H = D\mu D,$$

який назвемо *матрицею Хаусдорфа*, а послідовність (μ_n) – *послідовністю Хаусдорфа*.

Метод підсумовування, матриця якого у вигляді перетворення (1.1) є матрицею Хаусдорфа, називається *методом Хаусдорфа* й позначається через (H, μ_n). Має місце

Теорема 1.18. Добуток методів Хаусдорфа (H, μ_n) та (H, λ_n) є метод Хаусдорфа $(H, \lambda_n \mu_n)$.

РОЗДІЛ 2
ТЕОРЕМИ КОНСЕРВАТИВНОСТІ

2.2. Теореми Кожима-Шура та Тьопліца

Матричне перетворення називається «таким, що *зберігає абсолютну збіжність*, якщо воно перетворює усі ряди (послідовності), що збігаються абсолютно, знов на такі, що абсолютно збігаються» [20]. Якщо при цьому сума ряду, що абсолютно збігається, не змінюється, тобто $\sum u'_n = \sum u_n$, то перетворення часто називають *абсолютно регулярним*.

Теорема 2.1 (*Кожима-Шура*). «Для того, щоб перетворення (1.2) існувало й переводило усі ряди, що збігаються абсолютно, у послідовності (U'_n), що збігаються абсолютно, необхідно й достатньо виконання умови

$$\sum_n \left|\overline{\Delta}\alpha_{nk}\right| = \mathrm{O}(1).$$

При цьому

$$\sum u'_n = \sum (\lim \alpha_{nk}) u_k$$ » [15].

Дана теорема вперше була доведена Суноуті [11].

Теорема 2.2 (*Шура*). Для того, щоб перетворення (1.1) існувало й переводило усі послідовності (U_n), що збігаються абсолютно, у послідовності (U'_n), що абсолютно збігаються, необхідно й достатньо виконання умов:

1) збігаються ряди $\sum_\nu \alpha_{n\nu}$ (якщо $A = (a_{nk})$ – трикутна, то дана умова виконана);

2) $\sum_{n}\left|\overline{\Delta}\sum_{\nu=k}^{\infty}\ \alpha_{n\nu}\right| = 0(1)$.

При цьому має місце формула:

$$\lim U'_n = aU + \sum a_k (U_k - U) = (a - \sum a_k)U + \sum a_k U_k \ . \qquad (2.1)$$

Вперше цю теорему довів Марс [26].

Нехай A – деякий матричний метод підсумовування. Ряд «називається *абсолютно сумовним* методом A, якщо перетворений ряд абсолютно збігається» [11], тобто $\sum\left|u^{'}\right| < \infty$

При цьому, якщо метод заданий перетворенням (1.1) або (1.2), то вважаємо:

$$u^{'} = \Delta\ \mathrm{U'}_{\overline{\mathrm{n}}}$$

Множину всіх рядів (послідовностей), які метод A абсолютно підсумовує, називаються *полем абсолютного підсумовування* методу A й позначається одним із символів $\left|A\right|'$, lA або aA.

Якщо будь-яка обмежена послідовність є $\left|A\right|$-сумовною, то кажуть, що метод A *породжує абсолютну збіжність*. «Відмітимо, що регулярний метод, що зберігає абсолютну збіжність, абсолютно регулярний» [17].

Збереження абсолютної збіжності пояснюється наступними теоремами, що базуються на теоремах Кожима-Шура, Тьопліца, Кноппа-Лоренца [12].

Теорема 2.3. Метод (R, p_n) зберігає збіжність тоді і тільки тоді, якщо виконуються умови:

1^0 *існує* $\lim P_n \neq 0$,

2^0 $\sum_{k=0}^{n}\left|pk\right| = 0(P_n)$.

Метод (R, p_n) регулярний тоді і тільки тоді, якщо виконано умову 2^0 та 1^0 $\lim\left|P_n\right| = +\infty$.

Теорема 2.4. Метод (R, p_n) зберігає абсолютну збіжність тоді і тільки тоді, якщо

$$P_{k-1}\sum_{n=k}^{\infty}\left|\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\right| = 0(1) \quad (k = 1,\, 2,\, \dots),$$

або, якщо

$$P_k \sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\right| = 0(1)\,.$$

Якщо P_n монотонно зростає, то має місце:

Теорема 2.5. Якщо $p_n > 0$, то метод (R, p_n) зберігає збіжність й абсолютну збіжність; цей метод регулярний, якщо $\sum p_n = +\infty$.

З теорем 2.4 та 2.5 випливає:

1) метод логарифмічних середніх регулярний й зберігає абсолютну збіжність;

2) метод (Z, α) регулярний й зберігає абсолютну збіжність тоді й тільки тоді, коли $\operatorname{Re}\alpha > 0$;

3) метод (R, a^n) з $a \neq 0$ та $a \neq 1$ зберігає збіжність й абсолютну збіжність тоді й тільки тоді, коли $|a| \neq 0$, а регулярний тоді й тільки тоді, коли $|a| > 1$.

Нехай задана консервативна матриця $A = (a_{nk})$ (n і $k = 0, 1, 2, \dots$). Вона задає деякий консервативний метод підсумовування рядів. Кажуть, що послідовність $\{S_k\}$ (або ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ з частинними сумами $S_k = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$) *підсумовується до числа* S матрицею $A = (a_{nk})$, якщо ряди $t_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}\, S_k$ збіжні для усіх $n = 0, 1, 2, \dots$ та $\lim_{n\to\infty} t_n = S$.

Нехай A – матричний метод підсумовування у вигляді перетворення (1.1). Для того, щоб метод A зберігав збіжність, необхідно і достатньо виконання умови теореми Кожима-Шура. Для того, щоб метод A породжував збіжність, необхідно і достатньо виконання умов теореми Шура.

Якщо A зберігає збіжність, то число

$$\rho(A) = a - \sum a_k$$

називається *характеристикою методу* A.

Якщо $\rho(A) \neq 0$, то метод A називається *корегулярним*. Регулярний матричний метод A є корегулярним з характеристикою $\rho(A) = 1$. Якщо $\rho(A) = 0$, то метод A називається *конульовим*.

Покажемо, що будь-який матричний метод, який породжує збіжність, є конулевим. Дійсно, із умови теореми Шура випливає,

$$\lim_n \sum_k (a_{nk} - a_k) = 0,$$

звідки

$$a = \lim_n \sum_k a_{nk} = \sum a_k$$

і маємо $\rho(A) = 0$. Оскільки за означенням матричний метод не може бути одночасно корегулярним і конульовим, то він також не може бути одночасно корегулярним і таким, що породжує збіжність.

Теорема 2.6. Жоден корегулярний матричний метод не може підсумовувати усі обмежені послідовності.

Теорема 2.7. Для будь-якої обмеженої і розбіжної послідовності існує регулярний матричний метод, який підсумовує її до будь-якого заданого числа.

Розглянемо включення й сумісність.

Нехай B – довільний трикутний матричний метод, що зберігає збіжність, заданий у вигляді перетворення (1.1) матрицею $B = (b_{nk})$, а у вигляді перетворення (1.3) – матрицею $B = (\overline{\beta}_{nk})$. Тоді справедлива

Теорема 2.8. Трикутний метод $B = (b_{nk})$, що зберігає збіжність, включає нормальний метод (R, p_n) тоді й тільки тоді, коли

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| P_k \Delta \frac{b_{nk}}{P_k} \right| + \left| \frac{P_n}{p_n} b_{nn} \right| = 0(1) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

При цьому методи B та (R, p_n) сумісні, якщо B регулярний.

Слід відмітити, що у випадку, якщо у теоремі 2.8 метод B

регулярний, то й метод (R, p_n) повинен бути регулярним, якщо він зберігає збіжність. Дійсно, з теореми 2.4 випливає, що метод (R, p_n), що зберігає збіжність, є або регулярним, або конульовим. Якщо ж (R, p_n) конульовий, то за теоремою Целлера [22] і метод B повинен бути конульовим, що неможливо.

Теорема 2.8 доведена Кангро [11]. Як випадок $B = (R, p_n)$ дана теорема доведена Гарабедяном й Рандельсом, а якщо відношення $p_n : q_n$ монотонне – вже Чезаро та Харді [31].

Теорема 2.9. Трикутний метод $B = (\overline{\beta}_{nk})$, що зберігає абсолютну збіжність, абсолютно включає нормальний метод $\left|R, p_n\right|$ тоді й тільки тоді, якщо виконані умови:

$$\left|\overline{\beta}_{kk}\right| + \sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\Delta\overline{\beta}_{nk}\right| = 0(\frac{p_k}{P_k}).$$

Теорема 2.9 належить Кангро [11], , а достатні умови при $B = (R, q_n)$ з $p_n . q_n > 0$ наведені Суноути [31].

З двох вищезазначених теорем випливає

Теорема 2.10. Мають місце включення

$$\beta(R, \frac{1}{(n+1)\ln(n+2)\ln\ln(n+2)}) \supset \beta(R, \frac{1}{(n+1)\ln(n+2)}) \supset$$
$$\supset \beta(R, \frac{1}{(n+1)}) \supset \beta(R,1) \sim \beta(\mathrm{R}, (\mathrm{n}+1)^{\alpha} \sim \beta(\mathrm{Z}, \alpha+1) \sim$$
$$\sim \beta(\mathrm{R}, (\mathrm{n}+1)\ln(\mathrm{n}+2))$$

де $\mathrm{Re}\alpha > \text{-}1$ та $\beta = c, l$, причому всі методи сумісні.

Розглянемо збереження збіжності й абсолютної збіжності. Застосовуючи теорему Кожима-Шура до матриці $a_{пл} = (\overset{n}{k})\Delta^{n-k}\mu_k$, маємо наступну

Теорема 2.11. Метод (H, μ_n) зберігає збіжність тоді й тільки тоді, якщо виконані наступні умови:

1) $\lim\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\mu_k = a_k$ існує при $k = 0,1,\ldots,$

2) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left|\Delta^{n-k}\mu_k\right| = 0(1)$.

Метод (H,μ_n), що зберігає збіжність, регулярний тоді й тільки тоді, коли $a_k = 0$ для всіх $k = 0,1,\ldots$ та $\mu_0 = 1$.

Теорема 2.12. Метод (H,μ_n) зберігає абсолютну збіжність, якщо тільки він зберігає збіжність.

Консервативна матриця підсумовує кожну збіжну послідовність. Якщо консервативна матриця не підсумовує жодної розбіжної послідовності з деякого класу F, то кажуть, що ця матриця *неефективна* на цьому класі. Якщо E – клас обмежених (клас усіх) послідовностей, то матриця, неефективна на цьому класі, називається *обмежено* (*досить*) *неефективною*.

Справедливі наступні твердження.

Теорема 2.13. Консервативна нижня трикутна додатна матриця $A = (a_{nk})$ обмежено неефективна, якщо вона задовольняє одночасно наступним умовам:

1) для кожного фіксованого $k \geq k_0$ справедливі нерівності

$$a_{nk} - a_{k+1k} \geq \alpha,\ a_{nk} \geq a_{k+1k} \text{ при } n > k, \tag{2.2}$$

де α не залежить від k;

2) існує число $p \geq 0$ таке, що для $n \geq n_0 \geq 0$ справедливі нерівності

$$a_{nn-p} + a_{nn-p+1} + \ldots + a_{nn} \geq \theta > \alpha / 2, \tag{2.3}$$

де $a = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$ і θ не залежить від n.

Теорема 2.14. Консервативна верхня трикутна додатна матриця $A = (a_{nk})$ обмежено неефективна, якщо вона задовольняє одночасно наступним умовам:

3) для кожного фіксованого $k \geq k_0$ справедливі нерівності

$$a_{n+1k} \geq a_{nk} \text{ для } n = 0, 1, 2, \ldots, k-2,\ a_{kk} - a_{k-1k} \geq \alpha > 0, \tag{2.4}$$

де α не залежить від n;

4) існує число $p \geq 0$ таке, що для $n \geq n_0 \geq 0$ справедливі нерівності

$$a_{nn} + a_{nn+1} + \ldots + a_{nn+p} \geq \theta > \alpha / 2, \tag{2.5}$$

де $a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$ і θ не залежить від n.

Теорема 2.15. Якщо ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ підсумовується консервативною нижньою трикутною додатною матрицею $A = (a_{nk})$, що задовольняє умовам (1) та (2), і якщо

$$x_k = O(1), \tag{2.6}$$

то $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = S$.

Теорема 2.16. Нехай консервативна (зокрема, регулярна) нижня трикутна додатна матриця $A = (a_{nk})$ задовольняє одночасно трьом мовам: для кожного фікосваного $k \geq k_0$ справедливі нерівності

$$a_{nk} \geq a_{k+1k} \text{ при } n > k, \tag{2.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{nn} = \alpha > 0, \tag{2.8}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1n} = 0. \tag{2.9}$$

Якщо $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = O(1)$, то з рівності $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = S(A)$ випливає рівність $x_n = O(1)$.

Теорема 2.17. Нехай консервативна (зокрема, регулярна) верхня трикутна додатна матриця $A = (a_{nk})$ задовольняє одночасно трьом мовам: для кожного фікосваного $k \geq k_0$ справедливі нерівності

$$a_{nk} \leq a_{k+1k} \text{ при } n = 0, 1, 2, \ldots, k-2, \tag{2.23}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{nn} = \alpha > 0, \tag{2.24}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{nn+1} = 0. \tag{2.25}$$

Якщо $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = O(1)$, то з рівності $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = S(A)$ випливає рівність $x_n = O(1)$.

2.2. Метод Вороного-Ньорлунда

Метод Вороного-Ньорлунда можна розглядати як узагальнений метод Чезаро. Вперше цей метод розглянув Вороний [6] в 1902 році. Стаття Вороного являла собою коротку замітку в рідкісному виданні. Тому вона не розповсюджувалась серед математиків і залишилась забутою. «Метод став відомим завдяки Ньорлунду, який ввів його незалежно від Вороного, і опублікував свою роботу в 1919 році. Робота Вороного стала відомою завдяки її англійському перекладу у 1932 році Тамаркіним з примітками перекладача» [23].

Методом Вороного-Ньорлунда називають «трикутний матричний метод, визначений послідовністю комплексних чисел ρ_n» [17], у вигляді перетворення (А) матрицею із чисел

$$a_{nk} = \frac{p_{n-k}}{P_n}, \tag{2.26}$$

де

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \,, P_n \neq 0$$

Метод Вороного-Нерлунда позначається через (WN, p_n). Зокрема, метод C^α є методом (WN, p_n) з $p_n = A_n^{\alpha-1}$.

Метод $(WN, \frac{1}{n+1})$, за Ріссом [14] називають *методом гармонійних середніх.*

Метод (WN, p_n) з

$$p_n = 1 \text{ при } n \leq \beta \text{і } p_n = 0 \text{ при } n \geq \beta$$

називають *методом* Z_p *Сільвермана-Саса*. Зрозуміло, що $Z_1 = E_0$.

В силу (2.26) виводимо

$$\alpha_{nk} = \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=k}^{n} p_{n-\nu} = \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n-k} p_{n-k-\nu} = \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n-k} p_\nu$$

а отже, у вигляді перетворення (В) метод (WN, p_n) визначається матрицею чисел (ними визначає цей метод Вороний)

$$\alpha_{nk} = \frac{p_{n-k}}{p_n}. \tag{2.27}$$

Тому замість (WN, p_n) іноді пишуть (WN, P_n)або просто P.

Розглянемо за яких умов метод (WN, p_n) зберігає збіжність. Застосовуючи теорему Кожима-Шура, отримаємо умови

1^0 $\lim\limits_n a_{nk} = \lim\limits_n \frac{p_{n-k}}{P_n} = a_k.$

2^0 $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{nk} = \frac{1}{P_n}\sum\limits_{k=0}^{n} p_{n-k} = \frac{1}{P_n}\cdot P_n = 1.$

3^0 $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_{nk}| = \frac{1}{|P_n|}\sum\limits_{k=0}^{n} |p_{n-k}| = \varphi(1).$

Виявляється, що умову 1^0 можна спростити, а саме, умова 1^0 випливає з існування границі

$$a_0 = \lim \frac{p_n}{P_n}$$

Дійсно, із зображення

$$\frac{p_{n-k}}{P_n} = \frac{p_{n-k}}{P_{n-k}}\frac{p_{n-k}}{P_{n-k+1}}\dots\frac{p_{n-2}}{P_{n-1}}\frac{p_{n-1}}{P_n}$$

можна зробити висновок, що існує a_k і

$$a_k = a_0(1-a_0)^k$$

$$\lim_n \tfrac{p_{n-k}}{P_{n-k}} = a_0 \lim_n \tfrac{p_{n-k}}{P_{n-k+1}} = \lim_n (1 - \tfrac{p_{n-k+1}}{P_{n-k+1}}) = 1 - a_0.$$

Отже, доведена

Теорема 2.18. Метод (WN, p_n) зберігає збіжність тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

1^0 $\lim\limits_n \frac{p_n}{P_n} = a_0.$

2^0 $\sum\limits_{k=0}^{n} |p_k| = \varphi(P_n).$

Зрозуміло, що умова 2^0 теореми 3.4 відпадає, якщо $p_k \geq 0$. Відмітимо, що з умови 2^0 теореми 3.4 випливає необхідна умова

$$P_m = \varphi(P_n) \text{ при всіх } 0 \leq m \leq n$$

Із теореми 2.18та теореми Тьопліца випливає

Наслідок 2.1. Метод (WN, p_n), що зберігає збіжність, буде регулярним тоді і тільки тоді, якщо $a_0 = 0$.

Ньорлунд [34] розглянув випадок, коли $a_0 = 0$. У Вороного [8] величини $P_n > 0$ такі, що ряд

$$\sum P_n = \infty \text{ і } P_0 + \cdots + P_n = \varphi\left(n^{\lambda}\right)$$

при деякому λ.

Із наслідку 3.1 при $p_k = A_k^{\alpha-1}$ випливає теорема 2.1, а при « $p_k = \frac{1}{k+1}$ отримаємо, що метод гармонійних середніх регулярний» [24]. Метод Z_β також регулярний при $n \geq \beta$, для нього $P_n = \beta$ і $p_n = 0$.

Подивимося, що буде у випадку $a_0 \neq 0$. Для цього обчислимо характеристику методу [17]. Маємо

$$\rho(P) = 1 - \sum a_k = 1 - \sum a_0 \, (1 - a_0)^k = 1 - a_0 \colon [1 - (1 - a_0)] = 0$$

Звідси, враховуючи наслідок 3.1, робимо висновок

Наслідок 2.2. Метод (WN, p_n), що зберігає збіжність, є регулярним або конульовим.

«Метод (WN, p_n) нормальний тоді і тільки тоді, коли $p_0 \neq 0$ або $a_{nn} = \frac{1}{P_n} p_0$. Тому метод (WN, p_n) обернений тоді і тільки тоді, якщо $p_0 \neq 0$» [21].

Знайдемо обернену матрицю $(WN, p_n)^{-1} = (\xi_{nk})$. В нашому випадку формула маємо:

$$\sum_{\nu=k}^{n} p_{n-\nu} \, \xi_{nk} = \sigma_{nk} P_n, \tag{2.28}$$

де ліва частина нагадує член добутку Коші [12] двох рядів. Тому застосовуємо наступний штучний прийом. В силу (3.3) маємо

$$\sum p_n x^n \cdot \sum_n \xi_{nk} x^n = \sum_n (\sum\nolimits_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu} \xi_{\nu k}) x^n = \sum_n \sigma_{nk} P_n x^n = P_k x^k$$

Звідки, позначивши

$$\frac{1}{\sum p_n x^n} = \sum c_n x^n \tag{2.29}$$

(частка існує, якщо $p_0 \neq 0$), виводимо

$$\sum_n \xi_{nk} x^n = P_k x^k \cdot \sum c_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} P_k c_{n-k} x^n$$

і після того, як прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x, знаходимо

$$\xi_{nk} = P_k c_{n-k} \tag{2.30}$$

Якщо (2.4) замінити через

$$\frac{1}{\sum P_n x^n} = \sum d_n x^n \tag{2.31}$$

і аналогічно отримуємо

$$\eta_{nk} = P_k d_{n-k} \tag{2.32}$$

Формули (2.30) і (2.32) можна також отримати одну з одної , якщо враховувати, що

$$\sum P_n x^n = \sum x^n \cdot \sum p_n x^n$$

звідси

$$\sum d_n x^n = (1-x) \sum c_n x^n$$

і, отже,

$$d_n = \bar{\Delta} c_n, \;\; c_n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} d_k.$$

Величини (2.30) суть визначники системи лінійних рівнянь (2.28). Зокрема, при $P_n = A_n^{\alpha}$ із (2.31) і (2.25) отримаємо

$$\sum d_n x^n = (1-x)^{\alpha+1} = \sum A_n^{-\alpha-2} x^n$$

в наслідок чого із (2.30) і (2.32) заново виводимо формули (2.28) і (2.30).

Далі, поклавши в (2.29) числа $p_n = \frac{1}{n+1}$, для методу гармонічних середніх, враховуючи (2.1) знаходимо

$$\sum c_n x^n = (\sum \frac{x^n}{n+1})^{-1} = -\frac{x}{\ln(1-x)} = \int_0^1 (1-x)^Z dz$$
$$= \int_0^1 \sum A_n^{-z-1} x^n dz$$

звідки

$$c_n = \int_0^1 A_n^{-z-1} dz \qquad (2.33)$$

і, отже, для методу гармонійних середніх

$$\xi_{nk} = H_k \int_0^1 A_{n-k}^{-z-1}\, dz$$

$$\eta_{nk} = H_k \int_0^1 A_{n-k}^{-z-2}\, dz$$

де $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} \sim \ln(n+1)$.

Нехай $A = (WN, p_n)$ і $B = (WN, g_n)$. Питання про включення $B \supset A$ вирішимо за допомогою теореми [5]. Дійсно, позначивши

$$\sum k_n x^n = \sum Q_n x^n \cdot \sum d_n x^n = \sum q_n x^n \cdot \sum c_n x^n \qquad (2.34)$$

або, за (2.6) те ж саме,

$$\sum P_n x^n \cdot \sum k_n x^n = \sum Q_n x^n \qquad (2.35)$$

для елементів q_{nk} матриці $G = BA^{-1}$ знаходимо

$$q_{ni} = \sum_{\nu=i}^{n} \frac{q_{n-\nu}}{Q_n} P_i c_{\nu-i} = \frac{P_i}{Q_n} \sum_{\nu=0}^{n-i} q_{n-i-\nu} c_\nu = \frac{P_i}{Q_n} k_{n-i}$$

Приходимо до наступного результату Рісса, якщо врахувати (2.35),

$$\sum_{i=0}^{n} P_{n-i} k_i = Q_n \qquad (2.36)$$

звідки

$$\sum_{i=0}^{n} g_{ni} = \frac{1}{Q_n} \sum_{i=0}^{n} P_i\, k_{n-i} = \frac{1}{Q_n} Q_n = 1$$

Теорема 2.19. Для того, щоб $(WN, g_n) \supset (WN, p_n)$ необхідно і достатньо виконання умов:

1^0 існує $\lim\limits_{n} \dfrac{k_{n-i}}{Q_n} = q_i$.

2^0 $\sum\limits_{i=0}^{n} |k_i P_{n-i}| = \varphi(Q_n)$.

При цьому обидва методи сумісні тоді і тільки тоді, коли $q_i = 0$.

Якщо метод (WN, g_n) зберігає свою збіжність, то в умові 1^0 теореми 2.5 можна покласти $i = 0$.

Дійсно, нехай

$$b_0 = \lim \left({}^{q_n}/_{Q_n} \right).$$

Із рівності

$$\frac{k_{n-i}}{Q_n} = \frac{k_{n-i}}{Q_{n-i}} \frac{Q_{n-i}}{Q_{n-i+1}} \cdots \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}} \frac{Q_{n-1}}{Q_n}$$

робимо висновок, що якщо існує q_n, то $q_i = q_0(1 - b_0)^i$.

Покладемо тепер числа $P_n = H_n$, $Q_n = A_n^{\beta}$. Тоді знаходимо

$$k_n = \sum_{i=0}^{n} A_i^{\beta-1} \int_0^1 A_{n-i}^{-z-1} dz = \int_0^1 A_n^{\beta-z-1} dz = \varphi(1) \int_0^1 (n+2)^{Re\beta - z - 1} dz$$

Так як метод гармонійних середніх регулярний і, отже, (WN, p_n)ↄC^0, то нас цікавить лише частина $Re\beta > 0$.

В цьому випадку

$$g_0 = \lim \frac{\varphi(1)}{n^{Re\beta}} \int_0^1 (n+2)^{Re\beta - z - 1} dz = \lim \varphi(1) \int_0^1 (n+$$

$$2)^{-z-1} dz = \lim \frac{1}{n+2} \ln(n+2) = 0,$$

і враховуючи доповнення до теореми 2.5, бачимо, що умова 1^0 теореми 3.5 виконується. Для того, щоб довести виконання умови 2^0, вкажимо, що

$$\sum_{i=0}^{n} (i+2)^{Re\beta - z - 1} = \begin{cases} \varphi(1)(n+1)^{Re\beta - z} \text{ при } 0 \le z < Re\beta \\ H_{n+1} \text{ при } z = Re\beta \\ \varphi(1) \text{ при } Re\beta < z \le 1 \end{cases}$$

Тому

$$\sum_{i=0}^{n} |H_{n-i}k_i| = \varphi(H_n)\int_0^1 (n+2)^{-z-1}dz = \varphi(H_n)\left\{\frac{(n+2)^{Re\beta}}{\ln(n+2)} + \varphi(1)\right\}$$

$$= \varphi(A_n^{\beta})$$

Таким чином, доведена

Теорема 2.20. Якщо $Re\beta > 0$, то $C^{\beta} \supset \left(WN, \frac{1}{n+1}\right)$ і обидва методи сумісні.

Теорема 2.21. Метод $\left(C, \quad 1\right) \supset Z_{\beta}$, і обидва методи сумісні.

Дійсно, в нашому випадку

$$\sum k_n x^n = \sum {x^n}/{(1 + x + \cdots + x^{\beta-1})} = (1 - x^{\beta})^{-1} = \sum x^{\beta n}$$

звідки $0 \leq k \leq 1$. Тому умова 2^0 теореми 3.5 випливає із (3.11), а $q_i = 0$.

Теорема 2.22. Якщо $0 < q_n \uparrow$ і $\lim \left({q_n}/{Q_n}\right) = 0$, то $(WN, g_n) \supset \left(C, \quad 1\right)$ і вони обидва сумісні.

Дійсно, так як

$$\sum c_n x^n = 1 - x,$$

то $k_n = \bar{\Delta} q_n > 0$ і умова 2^0 теореми 3.5 виконана через (2.11), а $q_0 = 0$, так як $Q_n \to \infty$.

Із теореми 3.7 випливає, що метод гармонійних середніх слабше методу Чезаро C^{α} при $Re\alpha > 0$. Покажемо також існування такого метода Вороного–Ньорлунда, який сильніший за метод Чезаро. Для цього розглянемо метод (WN, a^n), який зберігає збіжність за теоремою 3.1 при будь-якому комплексному а. Він є регулярним тільки при $|\mathrm{a}| < 1$ і $\mathrm{a} = 0$, так як при $|\mathrm{a}| > 1$ маємо $\mathrm{a}_0 = (\mathrm{a} - 1){:}\, \mathrm{a}$.

Формула (2.29) при $p_n = A_n^{\alpha-1}$дає $c_n = A_n^{-\alpha-1}$, і поклавши в (2.34) числа $q_n = a^n$, знаходимо що

$$k_n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} A_k^{-\alpha-1}. \qquad (2.37)$$

Звідси $k_n = \varphi(a^n)$ при $|a| > 1$ і умови теореми 2.2 виконані, так як границя послідовності чисел

$$\frac{k_n}{Q_n} = \frac{a^n(a-1)}{a^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} a^{-k} A_k^{-\alpha-1}$$

існує при $|a| > 1$ через збіжність ряду $\sum |a|^{-к}$; а

$$\sum_{k=0}^{n} |P_i k_{n-i}| = \sum_{i=0}^{n} \left| A_i^{\alpha} \varphi(a^{n-i}) \right| = \varphi(a^n) \sum_{i=0}^{n} A_i^{Re\alpha} \, |a|^{-i} = \varphi(a^n)$$

Отже, доведена

Теорема 2.23. Якщо $Re\alpha > 0$ і $|a| > 1$, то $(WN, a^n) \supset C^{\alpha}$.

Приклад регулярного методу Вороного-Ньорлунда, який сильніший за метода Чезаро будь-якого порядку навів Харді [46]. Торпе [24] дав умову включення $(WN, p_n) \supset C^{\alpha}$ при даному $\alpha > 0$ у випадку $0 < p_n \downarrow$.

Теорема 2.24. Для того, щоб два регулярних метода Вороного-Ньорлунда(WN, p_n) і (WN, g_n) були рівносильними, необхідно і достатньо, щоб

$$\sum |k_n| < \infty, \ \sum |l_n| < \infty, \qquad (2.38)$$

де

$$\sum k_n x^n = \frac{\sum q_n x^n}{\sum p_n x^n}, \qquad \sum l_n x^n = \frac{1}{\sum k_n x^n}$$

РОЗДІЛ 3
ВИВЧЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ ЗБІЖНОСТІ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Фундаментальними поняттями математичного аналізу є поняття границі послідовності, границі функції. Розділи «Границя послідовності», «Границя функції» неодноразово включалися та виключалися зі шкільної програми. У 80-х роках минулого століття вивчення границь було виключено зі шкільних підручників (за винятком підручників для шкіл з поглибленим вивченням математики). Поняття похідної та інтегралу вводилися без застосування означення границі [31]. В наш час програми шкільної математики пропонують достатньо різноманітний обсяг матеріалу та різні підходи до вивчення границь від короткого згадування границі послідовності та границі функції до детального вивчення границь, їх властивостей, методів обчислення тощо.

У відповідності з програмою границя послідовності вивчається у 10-му класі. Як правило, спочатку вводиться поняття нескінченно малої величини, а потім означення границі [24]. Властивості границі суми, різниці, добутку, частки містяться в розділах для поглибленого вивчення математики. Далі розглядається сума нескінченної спадної геометричної прогресії. У подальшому в 11 класі за допомогою наочних прикладів на інтуїтивному рівні пояснюється, що таке границя функції, розглядаються приклади на обчислення границь функції в точці і при $x \to \infty$. За допомогою означення односторонніх границь вводиться друге поняття границі функції в точці.

Теорія границь, як і інші розділи математичного аналізу, потребує особливої уваги від шкільного вчителя та певної підготовки учнів до сприйняття матеріалу. Вивчення границь часто викликає труднощі навіть у студентів вишів в силу високого рівня абстракції матеріалу.

Можливими варіантами вирішення питання про вивчення границь в школі є наступні:

1) детальне вивчення теорії границь в старших класах, при цьому вивчення похідної функції та визначеного інтегралу виключається зі шкільної програми та залишається лише у змісті математичних дисциплін, які викладаються у вишах. Проте це призведе до значних змін у змісті матеріалів ЗНО;

2) вивчення теорії границь у меншому обсязі, ніж пропонують шкільні підручники, без використання формальних означень, використовуючи в основному інтуїтивне наочне викладання матеріалу. При цьому похідна та інтеграл вивчаються в школі у тому ж обсязі, як і зараз.

У шкільному курсі математики завдання на підсумовування великої кількості величин частіше викликають труднощі навіть на рівні найпростіших ситуацій. Прикладом може служити вивчення формул для знаходження суми початкових членів арифметичної або геометричної прогресії [19]. Не секрет, що в застосуванні цих формул виникає маса помилок, і, в основному, пов'язаних з неправильним використанням загальних формул.

Ситуація ще більше ускладнюється, якщо розглядати інші завдання на підсумовування. Найчастіше кожна така задача являє собою завдання високого рівня складності і може пропонуватися тільки учням, що виявляють особливий інтерес до математики, в тому числі й олімпіадникам. Більш того, багато із завдань на підсумовування і на такому рівні слід сприймати як складні. Порівняно простими слід вважати окремі задачі, в яких потрібно довести, що розглянута сума дорівнює заданому виразу, який залежить від змінного числа доданків. В цьому випадку відповідна рівність, як правило, доводиться методом математичної індукції [7].

Інша справа – подати задану суму у вигляді деякого невідомого заздалегідь виразу, що залежить від змінного числа доданків. В такому випадку відшукати розв'язок задачі вже значно складніше. Більш того, іноді доводиться придумувати не зовсім стандартні кроки, щоб дістатися до мети. Проте, і в даному напрямку можна виявити деякі загальні підходи.

Перш за все, зазначимо, що якщо ми бажаємо в деякій сумі виду

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

отримати відповідь, яка виражається компактною формулою $S(n)$, то тоді можна записати дві рівності:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = S(n), \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S(n-1)$$

Віднімаючи від першої рівності частинами другу рівність, отримаємо

$$a_n = S(n) - S(n-1),$$

і така рівність повинна виконуватися при кожному $n > 1$. Якщо додатково прийняти, що $S(0)$ визначено та $a_1 = S(1) - S(0)$, то при кожному натуральному n отримуємо наступний результат.

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= S(1) - S(0) + (S(2) - S1)) + \cdots + (S(n) - S(n-1)) \\ &= S(n) - S(0) \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $S(0) = 0$, то для побудованої послідовності (a_k) відразу виконується поставлена спочатку умова, що

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = S(n)$$

Якщо ж $S(0) \neq 0$, то можна трохи змінити вимоги до очікуваного значення суми і отримати наступний результат:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = S(n) - S(0)$$

Аналогічний результат можна отримати і в тому випадку, коли очікуване значення суми $\sum_{k=1}^{n} a_k$, можна подати у вигляді *C – F(n)*, де С – деяка постійна величина, *F (n)* – функція, задана компактним виразом.

На основі наведених результатів можна отримувати численні приклади на підсумовування членів послідовностей.

Приклад 3.1. Нехай $S(n) = n^3$.Тоді

$$a_k = k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$$

при кожному $k \geq 1$, причому *S(0)=0*. Звідси випливає, що

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1) = n^3$$

Цей результат можна представити також у вигляді

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$
$$= n^3$$

звідки виходить, що

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Приклад 3.2. Нехай $S(n) = n^4$. Тоді $a_k = k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$ при кожному $k \geq 1$, причому *S(0)=0*. Звідси випливає, що

$$\sum_{k=1}^{n}(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) = n^4$$

Цей результат також можна представити у вигляді

$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = k(k+1)(2k+1) - 2k(k+1) + k + k^4 = k^2(k+1)^2$,

звідки

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Приклад 3.3. Нехай *S(n) = n!*. Тоді

$$a_k = k! - (k-1)! = (k-1)(k-1)!$$

при кожному $k \geq 1$, причому $S(0)=1$. Звідси випливає, що

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)!-1$$

Приклад 3.4. Нехай $S(n) = q^n$, де q – задане число, що не дорівнює 1. Тоді $a_k = q^k - q^{k-1} = q^{k-1}(q-1)$ при кожному $k \geq 1$, причому $S(0)=1$. Звідси випливає, що

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}(q-1) = q^n - 1.$$

Отже, приходимо до відомої формули

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Приклад 3.5. Нехай $S(n) = C - \frac{1}{n+1}$ де C– тимчасово невідоме постійне число. Тоді

$$a_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

при кожному $k \geq 1$, причому $S(0)=C-1$. Звідси випливає, що

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = C - \frac{1}{n+1} - (C-1) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Приклад 3.6. Нехай $S(n) = \sin nx$ де x – деяке число. Тоді

$$a_k = \sin kx - \sin((k-1)x) = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{(2k-1)x}{2}$$

при кожному $k \geq 1$, причому $S(0)= 0$. Звідси випливає, що

$$\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{(2k-1)x}{2} = \sin nx\,.$$

Цей результат можно представити також у вигляді

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{(2k-1)}{2} = \frac{\sin nx}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Іноді при знаходженні сум можна застосовувати метод невизначених коефіцієнтів [15], коли на основі відомих прикладів можна висловити гіпотезу щодо загального вигляду суми з невідомими коефіцієнтами. Тоді з використанням значень сум при початкових значеннях змінних можна скласти, розв'язати деяку систему рівнянь, підставити знайдені значення в припущену формулу суми і довести отриманий результат, наприклад, методом математичної індукції.

Приклад 3.7. У прикладі 3.5 було знайдено, що

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Тому переходячи до знаходження суми

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

є підстави припускати, що

$$S_n = a - \frac{b}{(n+1)(n+2)}$$

де a, b – деякі константи. Підставляючи значення $n=1,2$, приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = a - \dfrac{b}{2\cdot 3} \\ \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} = a - \dfrac{b}{3\cdot 4} \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему отримаємо $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{2}$. В результаті приходимо до гіпотези, що

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

в вірності якої можна переконатися, провівши доведення методом математичної індукції.

Приклад 3.8. Із розглянутих прикладів 3.1 і 3.2 відносно сум виду

$$\sum_{k=1}^{n} k^p,$$

де p – натуральне число, для суми можна висловити гіпотезу, що

$S(n) = a_0n^5 + a_1n^4 + a_2n^3 + a_3n^2 + a_4n + a_5$, де a_i, $0 \le i \le 5$ – деякі конкретні числа. Підставляючи значення $n=1,2,3,4,5$, приходимо до системи рівностей

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 \\ 32a_0 + 16a_1 + 8a_2 + 4a_3 + 2a_4 + a_5 = 1 \\ 243a_0 + 81a_1 + 27a_2 + 9a_3 + 3a_4 + a_5 = 1 \\ 1024a_0 + 256a_1 + 64a_2 + 16a_3 + 4a_4 + a_5 = 1 \\ 3125a_0 + 625a_1 + 125a_2 + 25a_3 + 5a_4 + a_5 = 1 \end{cases}$$

Після цього з теоретичної точки зору поставлену задачу можна вважати розв'язаною, тому що залишається отримати розв'язок даної системи, підставити знайдені значення невідомих в заготовлену форму відповіді і довести правильність методом математичної індукції. З іншого боку, даний метод досить громіздкий, так як вимагає виконання великого обсягу обчислювальної роботи. В даному прикладі більш зручним є спосіб розв'язання, аналогічний розглянутому в прикладах 3.1 і 3.2.

Отримані результати можна узагальнювати також в напрямку підсумовування членів нескінченної послідовності чисел. З цією метою вводяться поняття числового ряду, збіжність (підсумовування) і розбіжність ряду.

Числовим рядом називають вираз виду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, де a_k – нескінченна послідовність чисел. Кожному числовому ряду ставлять у відплвідність послідовність сум

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \,,$$

кожна з яких називастя частинною сумою заданого ряду, і досить часто використовується позначення

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

Далі в класичному випадку вводяться основні визначення.

Числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ називається збіжним, якщо послідовність

(S_n) частинних сум має границю.

Якщо ця границя дорівнює S_0 , то число S_0 називають сумою ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Іноді збіжний ряд називають сумовним.

Числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ називається розбіжним, якщо послідовність (S_n) його частинних сум не має границі.

При такому підході сумовний ряд в якомусь сенсі можна вважати узагальненням підсумовування суми з нескінченним числом доданків. Зрозуміло, що розбіжному ряду в класичному випадку ніякої суми не приписують

В тих випадках, коли частинні суми ряду вдається подати у вигляді формули, питання про збіжність ряду зводиться до з'ясування збіжності або розбіжність послідовності частинних сум.

Приклад 3.9. В прикладі 3.5 отримано, що

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Так як $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$ то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

збіжний, і його сумма дорівнює 1.

Приклад 3.10. Нехай $|q| < 1$. В прикладі 3.4 отримано, що

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \ .$$

Так як $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right) = \frac{1}{1-q}$ то ряд $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$ збіжний, і його сумма дорівнює $\frac{1}{1-q}$. Аналогічно виходить, що

$$\sum_{k=1}^{n} b_1 q^{k-1} = \frac{b_1}{q-1},$$

а це відповідає відомій формулі для суми «нескінченно спадної» геометричної прогресії.

В тих випадках, коли частинні суми ряду не вдається подати у виді компактної формули, завдання про з'ясування збіжності або розбіжністі ряду ускладнюється. Багато способів розв'язання такої задачі розглядаються у вузівських курсах математичного аналізу [18]. Обмежимося лише одним із критеріїв збіжності числового ряду з додатними членами.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ з додатними членами збігається тоді і тільки тоді, коли послідовність його частинних сум обмежена.

Цього критерію іноді досить, щоб розібратися зі збіжністю ряду.

Приклад 3.11. Розглянемо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. В даному випадку подати частинні суми ряду у вигляді компактного виразу від кількості доданків не вдається. Однак, можна провести наступні міркування. При кожному $k > 1$ Отримаємо, що $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$

Тому

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + (1 - \frac{1}{n}) < 2$$

Отже, послідовність S_n обмежена, а тому розглянутий ряд збіжний. Зазначимо, що суму даного ряду, що дорівнює $\frac{\pi^2}{6}$, без додаткових результатів з курсу математичного аналізу знаходити непросто [21].

Приклад 3.12. Розглянемо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. В даному випадку подати частинні суми ряду у вигляді компактного виразу від кількості доданків також не вдається. Однак, можна провести наступні міркування. При кожному $m > 1$ Отримаємо, що

$$\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\frac{1}{2^{m-1}+3}\cdots+\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}>$$
$$>\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}\cdots$$
$$+\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}>\frac{2^{m-1}}{2^m}=\frac{1}{2}$$

Тому

$$S_{2^n}=\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)>1+\frac{n-1}{2}$$

Звідси робимо висновок, що послідовність S_n не обмежена, а тому розглянутий ряд не збіжний.

Крім розглянутих сум розглядають також подвійні суми, потрійні і т. д., коли набори чисел розглядаються у вигляді масивів з двома або кількома індексами [17]. Наприклад, якщо розглядається набір чисел

$$a_{ijk}\text{ ,де } 1\le i\le m,\ 1\le j\le n, 1\le k\le p,$$

то символом

$$\sum_{i=1,j=1,k=1}^{m,n,p} a_{ijk}$$

позначають суму всіх чисел данного набору. Зазначимо, що

$$\sum_{i=1,j=1,k=1}^{m,n,p} a_{ijk} = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{p} a_{ijk})),$$

причому порядок підсумовування за індексами можна змінювати.

За аналогією з рядами, які розглядалися вище, розглядаються також кратні ряди, тобто подвійні ряди, потрійні і т. д. Збіжність кратних рядів в загальному випадку розглядати складно, а у випадку рядів з додатними членами все різко спрощується. Наприклад, якщо розглядається подвійний ряд з додатними членами, який позначається як $\sum_{i=1,j=1}^{\infty} a_{ij}$, то для нього суми виду

$$S_{mn} = \sum_{i=1,j=1}^{m,n} a_{ij}$$

називаються частинними сумами, і ряд називається сумовним (таким, що підсумовується), якщо множина всіх частинних сум обмежена. В цьому випадку точна верхня грань множини $\{S_{mn}, m \in N, n \in N\}$ називается сумою подвійного ряду.

Іноді розглядається і узагальнення у вигляді $\sum_{k \in M} a_k$, де підсумовування проводиться за індексами, що належать заданій множині, зокрема, підмножині множини натуральних чисел. Вище на прикладах було показано, що в компактному вигляді суми рядів подаються далеко не завжди. Більш того, коли члени сумовної послідовності мають досить простий вигляд, то в багатьох випадках суму виразити в простому вигляді або складно, або неможливо. На цьому тлі може здатися дивовижним, що для окремих рядів, які зовні виглядають досить громіздко, вдається знайти суму, причому з використанням математичного апарату, що мало відрізняється від апарату шкільної математики. Так, розглянемо, наприклад, ряд, який має вигляд

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\frac{1}{31}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\frac{1}{99}+\frac{1}{120}+\frac{1}{124} + \frac{1}{127}+\cdots,$$

де в знаменниках дробів по порядку без повторення перераховані всі числа виду n - 1, де число n є точним степенем деякого натурального числа, більшого за 1, тобто квадрати натуральних чисел, куби, четверті ступені, п'яті степені, і так далі.

Наведені вище приклади і поняття дозволяють встановити, що сума даного ряду дорівнює 1.

Спочатку зауважимо, що кожне число, яке більше 1 і є степенем натурального числа, можна єдиним чином подати у вигляді m^k, де $k \geq 2$, а число m вже не є точним степенем. Тому множину всіх точних степенів можна описати як множину всіх чисел виду m^k, де m приймає всі значення, які не є точними степенями, а змінна k – усі натуральні значення, більші за 1. Отже, якщо позначити через S_0, суму ряду, що нас цікавить, то

$$S_0 = \sum_{m\in F} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{m^K - 1},$$

де F є множиною всіх натуральних чисел, що не є точними степенями. Далі, в силу формули з прикладу 3.4 маємо

$$\frac{1}{m^k - 1} = \sum\nolimits_{p=1}^{\infty} \frac{1}{m^{pk}}.$$

Тому

$$S_0 = \sum_{m\in F} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{m^{pk}}$$

Змінюючи порядок підсумовування (для рядів з додатними членами це можливо завжди), отримаємо

$$S_0 = \sum_{k=2}^{\infty} (\sum_{m\in F} \sum_{p=1}^{\infty} (\frac{1}{m^p})^k)$$

При кожному k подвійна сума, що стоїть всередині, являє собою суму k-*х* степенів чисел виду $\frac{1}{m^p}$, де $p \geq 1$, а $m \in F$. Залишається зрозуміти, що множина всіх чисел виду m^k із зазначеними значеннями m і k збігається без повторень з множиною всіх натуральних чисел, більших за 1. Отже,

$$S_0 = \sum_{k=2}^{\infty} (\sum_{m\in F} \sum_{p=1}^{\infty} (\frac{1}{m^p})^k) = S_0 = \sum_{k=2}^{\infty} (\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k}) = \sum_{n=2}^{\infty} (\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k})$$

Так як при кожному значенні n внутрішня сума $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ є сумою членів нескінченної геометричної прогресії з першим членом $\frac{1}{n}$ і знаменником $q = \frac{1}{n}$, то

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}=\frac{1}{(n-1)n}$$

Виходить

$$S_0=\sum_{n=2}^{\infty}(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n^k})=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}=1$$

в силу результату, отриманого в прикладі 3.9. Останній приклад може служити основою для серйозної дослідницької роботи з математики в старших класах.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було здійснено огляд монографічної, методичної літератури та наукових публікацій з теорії підсумовування рядів, зроблено огляд основних видів консервативних матричних перетворень та умов їх абсолютної консервативності, розглянуто взаємозалежність різних видів абсолютної консервативності для конкретних класичних матричних методів підсумовування рядів. Підсумовуючи основні результати виконаного дослідження, можна відмітити наступні твердження:

1. Існують загальні необхідні та достатні умови консервативності матричних перетворень, які в основному визначаються теоремами Кожима-Шура та Тьопліца:

а) для того, щоб матричне перетворення існувало й переводило усі ряди, що збігаються абсолютно, у послідовності (U'_n), що збігаються абсолютно, необхідно й достатньо виконання умови

$$\sum_n \left|\overline{\Delta}\alpha_{nk}\right| = O(1).$$

При цьому

$$\sum u'_n = \sum (\lim \alpha_{nk}) u_k \, .$$

б) для того, щоб матричне перетворення існувало й переводило усі послідовності (U_n), що збігаються абсолютно, у послідовності (U'_n), що абсолютно збігаються, необхідно й достатньо виконання умов:

1) збігаються ряди $\sum\limits_{v} \alpha_{nv}$ (якщо $A = (a_{nk})$ – трикутна, то дана умова виконана);

2) $\sum\limits_{n} \left|\overline{\Delta}\sum\limits_{v=k}^{\infty} \alpha_{nv}\right| = 0(1)$.

При цьому має місце формула:

$$\lim U'_n = aU + \sum a_k (U_k - U) = (a - \sum a_k)U + \sum a_k U_k \ .$$

3. Проведене дослідження акцентує увагу на тому, при вивчені теми «Числові ряди» в програмі обов’язкової освітньої компоненти «Математичний аналіз» досліджувати ряди на збіжність можна не тільки за допомогою основних ознак збіжності, але й із застосуванням методів підсумовування.

4. Розглянутий у роботі фактичний матеріал має зв’язок з відповідним матеріалом шкільного курсу математики. Зокрема, у школі використовується поняття граничного переходу та границі числової послідовності. У шкільному курсі математики завдання на підсумовування великої кількості величин досить часто викликають труднощі навіть на рівні найпростіших ситуацій. Як правило, кожна задача на дослідження збіжності послідовності являє собою завдання високого рівня складності і може пропонуватися тільки учням, що виявляють особливий інтерес до математики. Більш того, іноді доводиться придумувати не зовсім стандартні кроки, щоб дістатися до мети. Проте, і в даному напрямку можна виявити деякі загальні підходи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андриенко В. А. О скорости приближения функций (С,1)- средними их ортогональных разложений. // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. – 1967. – № 8. – С. 3-15.
2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. – М.: Наука, 1961. – 326 с.
3. Барон С. Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости. // Изв. АН ЭстССр. Сер. техн. и физ.-матем. наук. – 1960. – № 1. – С. 47-68.
4. Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов. – М.: Учпедгиз, 1965. – 128 с.
5. Барон С. Теория о множествах суммируемости для методов A^{α}. // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1970. – С. 165-178.
6. Барон С., Таммай Т. О множителях суммируемости для метода Чезаро отрицательного порядка. // Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем и техн. н. – 1962. – 11, № 1. – С. 33-36.
7. Вихманн Ф. О консервативности матриц относительно сходимости по мере. // Изв. АН ЭстССР. физ., матем. – 1971, 20. – № 3. – С. 275-278.
8. Волков И. И. Некоторые вопросы линейных матричных преобразований. / Матем. сб. – 1958, 11. – № 1. – С. 85-112.
9. Волков И. И. К вопросу суммирования расходящихся рядов методом (С, α). / Тр. Моск. ин-та механиз. и электрифик. с. х. – 1959, 4. – № 1. – С. 137-146.
10. Давыдов Н. А. Консервативные положительные матричные методы суммирования, неэффективные на некоторых множествах последовательностей. // Украинский математический журнал. – 1978, 30. – № 6. – С. 723-730.

11. Давыдов Н. А., Неэффективные регулярные линейные интегральные преобразования. // Украинский математический журнал. – 1968. – № 3. – С. 189-200.
12. Давыдов Н. А. О включении и разности методов Кожима суммируемости рядов. // Украинский математический журнал. – 1967, 19. – № 4. – С. 29-47.
13. Давыдов Н. А. Об одном свойстве включения методов суммирования, определяемых нормальными матрицами. // Украинский математический журнал. – 1969. – № 2. – С. 685-690.
14. Давыдов Н. А., О включении и разности методов Теплица суммируемости рядов. // Украинский математический журнал. – 1968. – № 4. – С. 460-471.
15. Давыдов Н. А. Равносильность (C, α) и (A). // Украинский математический журнал. – 1972. – № 5. – С. 221-222.
16. Давыдов Н. А. Включення методів Чезаро методу в нижню трикутну матрицю Тьопліца. Нормальні методи Тьопліца, рівносильні методам Чезаро. // Украинский математический журнал. – 1973. – № 8. – С. 464-468.
17. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. – М.: Наука, 1965. – 312 с.
18. Кангро Г. О суммировании бесконечных рядов при помощи матричних методов. / Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1955. – № 37. – С. 150-190.
19. Кангро Г. О некоторых исследованиях по теории суммируемости. / Изв. АН ЭстССР. физ., матем. – 1967, 16. – № 3. – С. 255-266.
20. Кангро Г. Теория суммируемости последовательностей и рядов. / Итоги науки и техн. – М.: ВИНИТИ АН СССР., 1974. – С. 5-70.
21. Кангро Г., Тыннов М., Множители суммируемости в последовательности для метода взвешенных средних Рисса. / Уч. зап. Тарктуск. ун-та. – 1961. – № 102. – С. 249-262.

22. Кауфман Б. Л. Сравнение по силе некоторых методов суммирования расходящихся рядов с методами чезаровских средних. / Изв. высш. учебн. заведений. Математика. – 1959. – № 5. – С. 131-145.
23. Коханівський О. П., Умова рівносильності логарифмічних методів підсумовування. // Украинский математический журнал 1974. – № 6. – С. 229-234.
24. Кузьмич В.И. О включении и равносильности методов Чезаро абсолютного суммирования рядов. – В кн: Приближенные методы математического анализа. – К.: Изд-во Киев. пед. ин-та, 1979. – С. 18-26.
25. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – Москва, 1960. – 358 с.
26. Кулль И. Г. Умножение суммируемых двойных рядов. / Уч. зап. Тартукс. ун-та. – 1958. – № 62. – С. 3-59.
27. Ламп Ю. Матричне преобразования обобщенных последовательностей. / Тр. Таллинск. политехн. ин-та. – 1971. – В. А313. – С. 73-80.
28. Мерзляк А.Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 256 с. : іл.
29. Мерзляк А.Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 208 с. : іл.
30. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл. : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк,

Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 304 с. : іл.

31. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл. : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 284 с. : іл.
32. Огиевецкий И. И. О включениях между регулярними методами. / Уч. зап. Казанск. ун-та. – 1964, 124. – № 6. – С. 241-265.
33. Папласкаускас А.Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. – М.: Наука, 1966. – 214 с.
34. Реймерс Э. Сходимость по отрезкам и умножение суммируемых рядов./ Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1961. – № 102. – С. 29-42.
35. Реймерс Э. Новые общие методы суммирования. / Уч. зап. Тарктуск. ун-та. – 1962. – № 129. – С. 119-154.
36. Реймерс Э., Континуальные методы суммирования. / Уч. зап. Тарктуск. Ун-та. – 1967. – № 206. – С. 50-89.
37. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
38. Слепенчук К.М. Абсолютная суммируемость рядов методами Чезаро отрицательного порядка. / Изв. высш. учебн. заведений. Математика. – 1965. – № 12. – С. 29-36.
39. Сырмус Т. Об абсолютной суммируемости простых и двойных последовательностей методами Хаусдорфа. / Уч. зап. Тартуск ун-та, – 1967. – № 93. – С. 13-22.
40. Таммерайд И., Тауберовы теоремы с остаточным членом для методов суммирования Чезаро и Гельдера. / Уч. зап. Тартуск. ун-та, – 1971. – № 277. – С. 161-170.
41. Харди Г. Х. Расходящиеся ряды. – М.: Просвещение, 1951. – 386 с.
42. Харшиладзе Ф. И. Множители равномерной сходимости. / Тр. Тбилисск. матем. ин-та, – 1960. – № 27. – С. 195-208.

43. Эспенберг Х. О множителях суммируемости для метода Эйлера-Кноппа. / Уч. зап. Тартуск. Ун-та. – 1962. – № 129. – С. 241-249.

44. Эспенберг Х. О множителях суммируемости в последовательности для метода Эйлера-Кноппа. / Сб. науч. тр. Эст. с.-х. акад. – 1963. – № 131. – С. 73-81.