МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

РОЗВИТОК ВЧЕННЯ ПРО ІЗОПЕРИМЕТРИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала: студентка 2 курсу, 221М групи
Спеціальності 014 Середня освіта
Спеціалізації 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)»
Матійків Світлана Володимирівна

Керівник кандидатка педагогічних наук,
доцентка Кузьмич Людмила Василівна

Рецензент директор Херсонської
загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 44
Херсонської міської ради
Перегняк Олександр Адамович

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП ……………………………………………………………….. 3

РОЗДІЛ 1. ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ ВЧЕННЯ ПРО ІЗОПЕРИМЕТРИ ……………………………………………… 7

РОЗДІЛ 2. ОСНОВНА ТЕОРЕМА ПРО ІЗОПЕРИМЕТРИ

2.1. Ізопериметрична лема про трикутники …………………… 12

2.2. Строге доведення основної теореми ……………………….. 14

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІЗОПЕРИМЕТРІВ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

3.1. Рівнобедрений трикутник і квадрат як максимальні фігури 25

3.2. Порівняння рівновеликих фігур …………………………… 31

3.3. Півкруг і частини круга …………………………………… 41

3.4. Вписані многокутники ……………………………………… 44

3.5. Результати експериментального дослідження …………….. 46

ВИСНОВКИ ………………………………………………………….. 50

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ………………………… 52

ДОДАТКИ …………………………………………………………….. 56

ВСТУП

Актуальність дослідження. Геометрична теорія ізопериметрів являє собою одну з найбільш цікавих розділів застосування основних методів та теорем евклідової геометрії до дослідження ряду максимальних та мінімальних властивостей як плоских, так і просторових фігур. В той час як задачі на побудову та на доведення теорем у шкільному курсі математики мають певні прогалини, пов'язані з обмеженістю часу, який відводиться на них, тут ми маємо справу із зв'язною теорією. З іншого боку, питання про існування шуканих екстремальних об'єктів пов'язує теорію ізопериметрів з більш сучасною математичною проблематикою та дає привід познайомити учнів з деякими ідеями, які відіграють значну роль в курсі математичного аналізу. Усе це сприяє тому, що ознайомлення учнів з початками теорії ізопериметрів є досить вдалою темою для гурткових занять з математики в школі.

Інтерес до задач на відшукання максимальних та мінімальних значень досить суттєво виріс у XVII столітті, спроби розв'язати задачі цього роду за допомогою алгебри та аналітичної геометрії, які сформувалися в той час, призвели до появи поняття похідної та створення диференціального числення, завдяки якому виникли прийоми розв'язування великої кількості екстремальних задач, які досить швидко та легко досягали мети. У подальшому виникали спроби розв'язувати такі задачі за допомогою поєднування таких методів, як синтез та аналіз, проте, на думку Штейнера, що здійснив вагомий внесок в теорію ізопериметрів, саме синтетичний метод є найбільш вдалим для встановлення таких основних положень, які розкривають дійсну природу максимальних та мінімальних властивостей [12]. Тому у своїх положеннях Штейнер користується виключно синтетичними методами, при цьому надаючи аналізу можливість сприяти подальшому розвитку закладених основ.

Наведені Штенейром результати з теорії ізопериметрів є досить фундаментальними, проте їх можна одержати за допомогою досить простих прийомів, що має певне значення, враховуючи рівень математичної підготовки учнів. Це дозволяє пропонувати учням знаходити нові ізопериметричні властивості фігур з різними додатковими умовами, що сприятиме розвитку їх логічного мислення, вміння аналізувати та доводити твердження.

Актуальність теми у «важливості ізопериметричної задачі, її можливих варіантів і узагальнень для сучасної математики і математичної фізики», а також у ролі оптимізаційних задач різного типу у науці й техніці. Наявність комп'ютерів додала ізопериметричним задачам ще більшого значення в питанні «про «прямі» й «непрямі» методи розв'язування оптимізаційних задач, про критерії існування розв'язку і про апроксимаційні підходи до таких задач» [42].

Мета дослідження – розглянути основні положення, що стосуються ізопериметричних фігур, а також прийоми розв'язування ізопериметричних задач.

Об'єктом дослідження виступають методи та прийоми розв'язування задач елементарної геометрії, а ***предметом дослідження*** – безпосередньо методи та прийоми розв'язування ізопериметричних задач.

Виходячи з мети, визначені основні завдання дослідження:

- розглянути історичний аспект виникнення вчення про ізопериметри;
- розкрити питання методів доведення основної теореми теорії ізопериметрів;
- розглянути основні властивості ізопериметричних фігур, які вивчаються в шкільному курсу математики, а також розробити факультативний курс з теми дослідження, що може бути впроваджений

на гурткових заняттях з математики для учнів старших класів загальноосвітніх шкіл.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що були узагальнені основні відомості, що стосуються теорії ізопериметричних фігур та визначені основні твердження стосовно фігур найбільшого периметру в множині планіметричних фігур. ***Практичне значення*** дипломної роботи полягає в можливості застосування матеріалу здобувачами вищої освіти та вчителями закладів середньої освіти.

Для вирішення поставлених завдань було застосовано наступні ***методи***: вивчення літератури з теми дослідження, порівняльний аналіз та узагальнення.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Апробація результатів дослідження. За результатами виконаного дослідження було опубліковано тези в збірнику тез Всеукраїнської науково-практичної конференції «Актуальні проблеми природничо-математичної освіти в Україні» (16-17 вересня 2021 р., Херсонський державний університет).

Робота складається з трьох основних розділів. Перший розділ присвячено історичному аспекту виникнення вчення про ізопериметри. У другому розділі наведено основні методи доведення так званої основної теореми теорії ізопериметрів, а також наведено основні наслідки, що випливають з цього твердження. Третій розділ носить прикладний характер та містить відомості стосовно властивостей ізопериметричних фігур. Зокрема, в ньому наведено ряд тверджень, що стосуються відшукання серед ізопериметричних многокутників певного класу многокутників найбільшої площі.

Матеріал роботи може бути використаний здобувачами вищої освіти та викладачами закладів вищої освіти, а також вчителями закладів середньої освіти (загальноосвітніх шкіл, ліцеїв та гімназій).

РОЗДІЛ 1
ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ ВЧЕННЯ ПРО ІЗОПЕРИМЕТРИ

Питання про найбільші та найменші величини є найбільш цікавими в суто математичному відношенні та досить важливими за своїм практичним, прикладним значенням. Просторові форми, як, наприклад, траєкторія руху, форми оболонок тощо, відграють поруч з часом, швидкістю, масою, роботою, енергією тощо велику роль у більшості проблем максимально-мінімального або так званого екстремального [12] характеру. Частина цих екстремальних питань носить суто геометричний характер, а серед них на першому місці зустрічаємо проблеми «ізопериметричні».

Ізопериметрична задача у вузькому сенсі слова полягає у тому, що серед даної сукупності фігур, які мають однакову довжину контуру – однаковий периметр (такі фігури і називаються ізопериметричними фігурами або «ізопериметрами»), – потрібно знайти ту, площа якої більша за площу усіх інших фігур даної сукупності. Якщо дана сукупність складається з усіх трикутників з даним периметром, то найбільша площа належить рівносторонньому трикутнику. Серед усіх прямокутників однакового периметру найбільшу площу має квадрат. А серед усіх взагалі плоских фігур з однаковим периметром максимальну площу має коло того самого периметру [6].

У більш широкому сенсі «ізопериметричними» називають також задачі про знаходження серед даної сукупності тіл, обмежених поверхнями даної величини, того тіла, яке має найбільший об’єм (такі тіла з однаковими за величиною поверхнями називають «ізоепіфанними» [21]); задачі про найбільші сферичні фігури за даним за довжиною контуром, задачі про найбільші плоскі фігури, частина контуру яких задана не за формою, а за довжиною, та задачі, обернені до даних: у таких задачах фігури, що порівнюються, мають однакову площу і слід знайти фігуру, яка має найменший периметр.

Враховуючи важливу роль питань про максимальні та мінімальні величини, можна стверджувати, що вже з давніх часів люди намагалися відшукати їхнє розв’язання, в тому числі й основних ізопериметричних проблем. Спочатку метод цих пошуків був суто емпіричним, проте з розвитком геометрії з’явилась потреба перевірити знайдені розв’язки шляхом строгих умовиводів у дусі доведень Евкліда [3].

Так, вже в стародавній Греції було відомо, що коло має більшу площу, ніж усі інші фігури, які мають однаковий периметр, а куля має найбільший об’єм серед усіх тіл з тією ж самою поверхнею [19]. Пізніше питання такого змісту без сумніву отримали значний розвиток, оскільки вже на початку II ст. до н.е. грецький геометр Зенодор написав спеціальний трактат «Про фігури, які мають рівну периферію» [7]. На жаль, ця робота була загублена, проте зберіглося 14 тверджень, серед яких є наступні теореми: «при однаковій силі сторін та рівних периметрах у правильного многокутника площа більше, ніж у неправильного»; «з двох правильних многокутників з рівними периметрами той більший, у якого більше сторін» тощо [12]. У середньовіччя ніхто не підтримав робіт Зенодора, а в книжках того часу лише іноді згадуються деякі з його результатів.

У XVII ст. досить сильно виріс інтерес до задач на відшукання максимальних та мінімальних значень взагалі (пов’язаних із задачею на проведення дотичної до даної кривої [25]). Спроби розв’язати цю задачу за допомогою алгебри, яка сформувалася незадовго до цього, та аналітичної геометрії призвели до виникнення поняття похідної, до створення диференціального числення, яке розробило певні прийоми розв’язання множини екстремальних задач, що досить легко та швидко призводили до вирішення проблеми.

Дещо пізніше для розв’язування більш складних задач, в яких шуканими є криві або поверхні, що мають певні екстремальні властивості, були розроблені нові прийоми, які використовували інтегральне числення. Це призвело до появи у другій половині XVIII ст. спеціальної дисципліни для розв'язування такого роду питань, так званого «варіаційного числення» (Ейлер та Лагранж [30]).

До епохи створення диференціального числення відноситься також поява однієї з найбільш цікавих задач теорії ізопериметрів – так званої «проблеми шарнірного многокутника», в якій з даних за величиною (та порядку) відрізків (сторін) потрібно скласти многокутник з найбільшою площею, змінюючи довільним чином кути між суміжними сторонами [8]. Цю задачу вперше розв'язав математик Крамер, тому її часто називають «задачею Крамера» [13].

Крамер доводить спочатку елементарними засобами, а потім за допомогою диференціального числення, що серед усіх чотирикутників з даними сторонами найбільшу площу має той, навколо якого можна описати коло. Звідси вже Крамер виводить як наслідок, твердження, що вписаний в коло многокутник (з довільним числом сторін) має більшу площу, ніж будь-який інший многокутник з тими самими сторонами.

Захоплені успіхами диференціального та варіаційного числення, математики зовсім закинули до кінця XVIII ст. метод Евкліда або синтетичний метод розв'язування екстремальних задач взагалі та ізопериметричних зокрема, на перевагу новому обчислювальному або аналітичному методу. Проте час від часу та і в більш пізній історії математики з'являються геометри з виключною схильністю до синтетичного мислення та творчості. Одним з таких геометрів був математик Люїл'є. У 1782 р. він видав у Варшаві книгу під назвою «Геометричне дослідження взаємодій між площею та контуром фігур, або про найбільші та найменші» [7].

Пройшло вже півстоліття, перш ніж з'явився геніальний захисник та продовжувач робіт Люїл'є – німецький математик Якоб Штейнер [11]. В результаті своїх довготривалих досліджень питань про максимуми та мінімуми в геометрії Штейнер переконався в неможливості встановити єдиний принцип, який можна однаково застосовувати до усіх питань у цій галузі. У своїх роботах він викладає п'ять методів, до яких він прийшов в результаті своїх досліджень [22]. Хоча ці п'ять методів відрізняються лише ходом міркувань, які призводять до однієї й тієї ж «головної» теореми (так Штейнер називає теорему про круг як про фігуру, що має найбільшу площу з усіх плоских фігур однакового периметру), яка слугує основою для усіх подальших висновків, – викладення в роботах Штейнера усіх п'яти методів пояснюється глибокими внутрішніми причинами. Річ у тім, що неможливо, на думку Штейнера, обійтися без загальної співпраці цих методів: кожний з них легко приводить до таких теорем, «доведення яких лише із великим трудом вдалося би знайти, якби користуватися рештою чотирма методами» [29].

Перший з цих п'яти методів, який можна застосовувати і для випадку сферичних фігур, сам Штейнер вважає найбільш універсальним та витонченим, та його викладенню він присвятив весь перший мемуар. В другому мемуарі Штейнер розвиває решту чотири методи (з них лише другий можна застосовувати до сферичних фігур), потім встановлює ряд ізопериметричних властивостей призматичних та пірамідальних тіл і, нарешті, доводить, користуючись двома різними методами, що серед усіх тіл з рівновеликими поверхнями куля має найбільший об'єм.

Основною ізопериметричною проблемою є наступне твердження: яка з усіх можливих фігур з одним і тим самим периметром має найбільшу площу? Відповідь, що шуканою фігурою є круг, і складає зміст теореми, яку Штейнер називає «головною» у своїх дослідженнях [26].

Міркування Штейнера були досить наочними, але не строгими. Заповнили прогалини штейнерівських міркувань два розв'язання ізопериметричної задачі, які знайшов пізніше український математик професор Одеського університету Дмитро Антонович Крижанівський (1883-1939) [42]. Вперше зміст цих та інших споріднених задач було опубліковано у 1912 р. на сторінках фізико-математичного журналу для школярів «Вестник опытной физики и элементарной математики» (ВОФЭМ), який почав виходити у 1884 р. під керівництвом київського професора В.П. Єрмакова, а з 1904 р. очолюваний одеським професором В.Ф. Каганом – відомим геометром і педагогом, популяризатором математичних знань в Україні. У своїй книзі «Ізопериметри», яка вперше вийшла в 1913 р. в Одесі і перевидавалася в Москві у 1939 та 1959 рр., Д.А. Крижанівський розглянув близькі за змістом до ізопериметричної «простіші задачі, що стосуються відшукання многокутників найбільшої площі, які задовольняють ті чи інші додаткові умови» [42], а також подібні, зокрема стереометричні задачі.

Свій внесок в «оптимізаційний напрям» науки зробили багато інших учених: П. Ферма, брати Якобі, Й. Бернуллі, Л. Ейлер, Ж.Л. Лагранж, Я. Штейнер, Л.В. Канторович, Л.С. Понтрягін та ін.

РОЗДІЛ 2
ОСНОВНА ТЕОРЕМА ПРО ІЗОПЕРИМЕТРИ

2.1. Ізопериметрична лема про трикутники

При доведенні подальших теорем про ізопериметри нам знадобиться наступна лема, яка лежить в основі першого методу Штейнера.

Лема 2.1. Із двох нерівних трикутників з рівними основами і рівними сумами бічних сторін меншу площу має той, якому належить найменший і найбільший з чотирьох кутів при згаданих основах.

Зокрема, з цієї леми випливає, що площа будь-якого рівнобедреного трикутника більша площі будь-якого нерівнобедреного трикутника з таким самим периметром і з такою самою основою.

Доведення. Простіше всього доводиться ця лема, якщо скористатися означенням еліпса. А саме, якщо трикутники попередньо суміщені їх основами і кінці A і B спільної основи трикутників прийняти за фокуси еліпса, а однакову суму їх бічних сторін – за суму його фокальних радіусів-векторів, то вершини C, D, E всіх трикутників зі сталою сумою бічних сторін упорядкуються вздовж цього еліпса. При цьому висоти, а з ними і площі, трикутників будуть спадати по мірі збільшення найбільшого з кутів при основі (див. рис. 2.1). Найбільшу висоту і площу має рівнобедрений трикутник ACB.

Засобами елементарної геометрії доведення можна провести наступним чином. Розташувати трикутники ACB і ADB на спільній основі AB таким чином, щоб більш довші бічні сторони обох трикутників виходили з одного і того ж кінця основи, наприклад, з кінця A (див. рис. 2.2). Тоді кути трикутників при вершинах A виявляться меншими за відповідні кути при вершинах B

$$\alpha \leq \beta, \gamma < \delta \text{ або } \alpha < \beta, \gamma \leq \delta$$

(знак рівності відноситься до того випадку, коли один з трикутників – рівнобедрений; обидва ж трикутника не можуть бути рівнобедреними, не будучи в той же час конгруентними [11]).

Кути α і γ не можуть бути рівними, так як інакше трикутники були би конгруентними. Нехай $\alpha > \gamma$. Тоді виявиться, що $\delta > \beta \geq \alpha > \gamma$, так як вершина D другого трикутника ADB повинна впасти поза першим трикутником ACB (інакше периметри не були би рівними). Отже, доведено, що найбільший і найменший із чотирьох кутів при основі належить завжди одному і тому ж трикутнику.

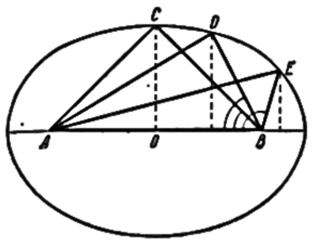

Рис. 2.1

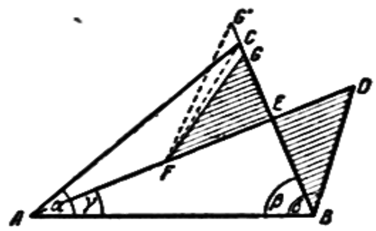

Рис. 2.2

Доведемо, що тому ж трикутнику належить і найдовша, і найкоротша з чотирьох бічних сторін, а саме, що $AD > AC \geq BC > BD$.

Якщо б $AD = AC$, то і $BC = BD$ (у силу рівності сум бічних сторін); але тоді трикутники були б конгруентні, всупереч умові. Припустимо тепер, що $AD < AC$. Тоді з тієї ж причини буде $BD > BC$. Перша з цих нерівностей показує, що у трикутнику ACD кут ACD менше кута ADC, а друга – що в трикутнику BDC кут BCD, який складає тільки частину кута ACD, більший, чим кут BDC, який перевершує кут ADC, що неможливо. Отже, відношення між бічними сторонами, яке доводиться, завжди вірне.

Тут же зауважимо, що якщо один з цих трикутників рівнобедрений, а інший – нерівнобедрений, то найбільша і найменша сторони належать, звичайно, нерівнобедреному трикутнику.

Покажемо тепер, дотримуючись Штейнера, що площа трикутника ADB, який володіє, за доведеним, одночасно найбільшими і найменшими з кутів при основі і з бічних сторін, менше площі іншого трикутника ACB (див. рис. 2.2).

Так як $\gamma < \beta$, то $BE < AE$. Тому якщо покласти на EA відрізок $EF = EB$, то точка F впаде між A і E. Відкладемо, далі, на EC відрізок $EG = ED$. Точка G повинна впасти між E і C. Дійсно, якщо б G співпало з C, то трикутники CEF і DEB були б рівними, так що сторона CF дорівнювала б DB. Але за умовою

$$AC + CB = AD + DB$$

або

$$AC + CE + EB = AF + FE + ED + DB;$$

звідси знаходимо, у силу рівностей $CE = ED$, $EB = EF$, що

$$AC = AF + DB = AF + FC,$$

що неможливо.

Якщо б точка G', для якої $EG' = ED$, впала на продовження EC, за іншу сторону точки C, то аналогічне міркування призвело б до такого абсурдного результату, що пряма AC рівна ламаній $AFG'C$.

Так як $\triangle EDB = \triangle EFG$, то площа $\triangle ADB$ дорівнює сумі площ трикутників AEB і EFG, які складають в сукупності тільки частину трикутників ACB. Отже,

$$\triangle ADB < \triangle ACB,$$

що і треба було довести.

Зокрема, за доведеним, будь-який нерівнобедрений трикутник має у порівнянні з рівнобедреним (при таких же основі і периметрі) найбільший і найменший кути; тому площа першого менше площі другого.

2.2. Строге доведення основної теореми

Штейнер вважає очевидним існування максимальної фігури, між тим як це твердження потребує строге доведення [7]. Познайомимося з повним доведенням теореми про круг, без посилань на очевидність існування шуканої фігури.

Перше з таких доведень належить Едлеру і розміщене в «Сообщениях Геттингенской Академии наук» за 1882 рік [5]. Едлеру вдалося використати один з методів самого Штейнера (а саме: п'ятий метод) для отримання безуперечно строгого доведення того, що круг має більшу площу, ніж будь-яка інша плоска фігура однакового з ним периметру. Усе доведення розпадається на три частини: по-перше, доводиться, що будь-який неправильний многокутник менший деякого правильного многокутника з тим ж периметром; по-друге, порівнюючи площі будь-якого правильного многокутника і круга з рівними периметрами, Едлер показує, що перша площа менша другої; по-третє, дається доведення того, що площа будь-якої фігури менша площі ізопериметричного круга.

Для проведення доведення Едлера нам знадобляться наступні три леми, які є складовими сутності п'ятого методу Штейнера [18].

Лема 2.2. З усіх трикутників із спільною основою й однаковою висотою сума бічних сторін менша всього у рівнобедреного трикутника.

Доведення. Порівняємо для доведення рівнобедрений трикутник ACB і нерівнобедрений трикутник ADB із спільною основою AB і рівними висотами CC' і DD' (див. рис. 2.3).

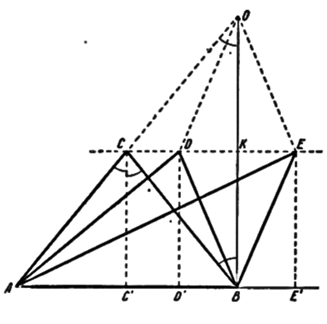

Рис. 2.3

З точки B проведемо перпендикуляр до AB і на продовженні його за точку K (точка перетину з CD) відкладемо відрізок $KO = BK$ (тобто побудуємо точку O, симетричну B відносно прямої CD). Трикутники

CBO і DBO будуть рівнобедреними, так як їх (спільна) висота CDK є також і медіаною (ділить BO навпіл). Тому

$$AC + BC = AC + CO, AD + DB = AD + DO.$$

Але так як

$$\angle BOC = \angle OBC = \angle BCC' = \angle ACC',$$

то відрізки AC і CO, які утворюють кути з паралельними прямими CC' і OB, складають одну пряму, і

$$AC + CB = AO < \text{лом.} ADO = AD + DO = AD + DB.$$

Розглядаючи ще один трикутник AEB з такою ж висотою EE', бачимо, що $BE = EO$, так що

$$AE + EB = AE + EO = \text{лом.} AEO > \text{лом.} ADO,$$

або ламана, яка охоплює, довше опуклої ламаної, яка охоплює. У той же час $C'E' > C'D'$. Отже, із двох трикутників із спільною основою і рівними висотами сума бічних сторін більша у того трикутника, у якого основа висоти віддалена далі від середини спільної основи.

Лема 2.3. Із усіх трапецій з рівними основами і висотами сума бічних сторін менша всього у рівнобічної трапеції.

Доведення. Побудуємо дві трапеції – рівнобічну $ACEB$ і нерівнобічну $ADFB$ – на одній основі AB (див. рис. 2.4). Так як, за умовою, $CE = DF$, то пряма CO, паралельна EB, і пряма DO, паралельна FB, перетнуть основу AB в одній і тій же точці O. Сума бічних сторін трапеції, тобто $AC + EB$ і $AD + FB$, дорівнюють відповідно сумам бічних сторін $AC + CO$ і $AD + DO$ трикутників ACO, AEO, які мають спільну основу AO і рівні висоти.

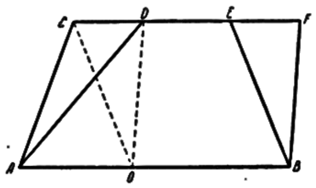

Рис. 2.4

Так як перший трикутник рівнобедрений, то, за першою лемою, перша сума менша другої, що і треба було довести.

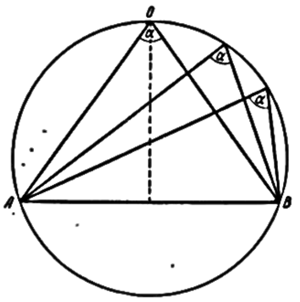

Рис. 2.5

Лема 2.4. З усіх трикутників із спільною основою і з рівними кутами при протилежних їй вершинах найбільшу площу має рівнобедрений трикутник.

Доведення. Дійсно, навколо всіх трикутників з спільною основою AB і з рівними кутами α при протилежних йому вершинах можна описати одне спільне коло (див. рис. 2.5). Рівнобедреному трикутнику AOB належить, очевидно, найбільша висота, так що він більший всіх інших трикутників, які розглядали.

Тепер ми можемо перейти до викладення доведення Едлера.

1. Візьмемо який-небудь неправильний многокутник $ABCDE$ (див. рис. 2.6). Через всі його вершини проведемо паралельні між собою прямі в якому-небудь напрямі, яке відмінне від напряму всіх сторін многокутника.

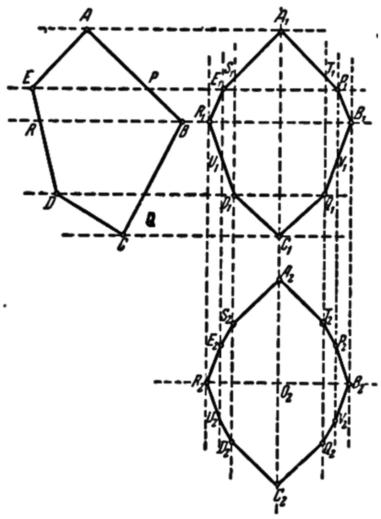

Рис. 2.6

Вони поділять наш многокутник на два трикутника і на декілька трапецій. Загальне число тих та інших не перевищує $(n-1)$, якщо у многокутника n сторін [12]. «Верхню» вершину A перенесемо в яку-небудь іншу точку A_1 тієї паралелі, яка проходить через A, і проведемо через A_1 перпендикулярно до цієї паралелі пряму A_1C_1. Відрізки паралелей EP, RB, DQ, розташовані всередині многокутника, і точку C перенесемо уздовж цих паралелей, зберігаючи їх довжину, у такі положення E_1P_1, R_1B_1, D_1Q_1, C_1, щоб пряма A_1C_1 ділили всі їх навпіл. Сполучивши точки $A_1, P_1, ..$ прямими, отримаємо новий многокутник $A_1P_1B_1Q_1C_1D_1R_1E_1$ з наступними властивостями. Він, по-перше, володіє віссю симетрії A_1C_1. По-друге, його площа дорівнює площі першого многокутника, бо окремі трикутники і трапеції, з яких він складається, мають такі ж основи і висоти, як і ті трикутники і трапеції, на які ми розбили перший многокутник. Нарешті, по-третє, периметр його менший, ніж у першого многокутника. Дійсно, за першою лемою суми бічних сторін у рівнобедрених трикутників $A_1P_1E_1$ і $C_1D_1Q_1$ не більші, ніж у трикутників APE і CDQ, тобто

$$A_1P_1 + A_1E_1 \leq AP + AE$$

і

$$C_1D_1 + C_1Q_1 \leq CD + CQ;$$

а за другою лемою

$$E_1R_1 + P_1B_1 \leq ER + PB \text{ і т. д.,}$$

причому знак рівності не може бути у всіх випадках одночасно, якщо тільки многокутник $ABCDE$ уже не був симетричний по відношенню до перпендикуляра, який проходить через точку A. Але у цьому останньому випадку достатньо скільки завгодно мало змінити напрям паралелей, щоб така симетрія порушилась. Тому завжди можна обрати напрям паралелей так, щоб хоча б одному відношенні мав місце знак $<$, так що сума лівих частин або периметр другого многокутника буде менший суми правих частин або периметра першого многокутника.

Так як кожна частина многокутника $ABCDE$, тобто кожен трикутник або трапеція, дає по дві сторони другого многокутника, то останній має не більше $2(n-1)$ сторін.

Із другим многокутником вчинимо так само, як з першим, причому за напрям паралелей візьмемо вісь симетрії A_1C_1. Отримаємо третій многокутник $A_2T_2 \dots S_2$. Легко помітити, що другий многокутник розпадеться найбільше як на $2(n-2)$ частин (трикутників і трапецій), так що третій многокутник не більше $4(n-2)$ сторін. Він буде володіти двома взаємно перпендикулярними осями симетрії A_2C_2 і B_2R_2, які перетинаються у точці O_2. Його площа дорівнює площі другого многокутника, його периметр не більший за периметр другого многокутника.

Для подальших перетворень розглянемо окремо квадрант $O_2A_2T_2P_2B_2$ (див. рис. 2.7). Прямою A_2B_2 розділимо його на прямокутник трикутник $O_2A_2B_2$ і на «сегмент» $A_2T_2P_2B_2$.

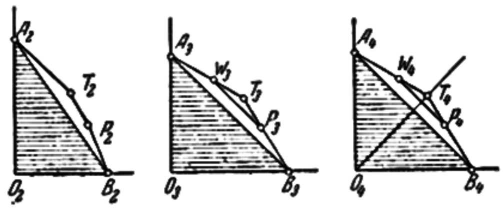

Рис. 2.7

Не змінюючи довжин відрізка A_2B_2, перенесемо його всередині прямого кута разом з сегментом у таке положення $A_3T_3P_3B_3$, щоб $O_3A_3 = O_3B_3$. За третьою лемою рівнобедрений трикутник $O_3A_3B_3$ більший трикутника $O_2A_2B_2$, якщо останній сам не був рівнобедреним. Нарешті, прямі, які проведені через точки P_3 і T_3, паралельні прямій A_3B_3, перетворимо за допомогою описаного способу сегмент $A_3T_3P_3B_3$ у симетричний сегмент $A_4W_4T_4P_4B_4$, вісь симетрії якого перпендикулярна до сторони A_4B_4 і проходить через її середину. При цьому площа сегмента залишається попередньою. Отже, приєднуючи новий сегмент до трикутника $O_3A_3B_3$, отримаємо новий квадрант $O_4A_4W_4T_4P_4B_4$, площа якого не менша, а частина периметра, яка міститься між сторонами прямого кута, не більша, ніж у квадранта $O_2A_2T_2P_2B_2$. Новий квадрант має вісь симетрії O_4T_4, яка ділить кут $A_4O_4B_4$ навпіл.

Число ж сторін, які розташовані всередині цього кута, яке у першого квадранта не перевищує $(n-2)$, у нового квадранта не більше $2(n-3)$.

Виконавши з кожним із квадрантів третього многокутника $A_2T_2 \ldots S_2$ описане перетворення, складемо з нових квадрантів четвертий многокутник з 4 осями симетрії і більше ніж з $8(n-3)$ сторонами. Площа четвертого многокутника не менша, а периметр не більший, ніж у третього многокутника. Октант ($\frac{1}{8}$ частина) $O_4A_4W_4T_4$ нового многокутник поділимо на трикутник $O_4A_4T_4$ і на сегмент $A_4W_4T_4$. Повторюючи описане перетворення, перетворимо трикутник $O_4A_4T_4$ у рівнобедрений, зберігаючи основу A_4T_4 і кут при вершині O_4, а сегмент перетворимо у симетричний, вісь симетрії якого є бісектриса кута $A_4O_4T_4$. Із перетворених октантів складемо п'ятий многокутник з 8 осями симетрії. Продовжуючи робити таким чином, отримаємо ряд многокутників, число осей симетрії в яких дорівнює відповідно:

$$0, 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots,$$

а число сторін не перевищує чисел:

$$n, 2(n-1), 2^2(n-2), 2^3(n-3), 2^4(n-4), \ldots,$$

причому у дійсне число сторін множники $2, 2^2, 2^3$ повинні входити неодмінно, у силу існування $1, 2, 3, \ldots$ осей симетрії, другі ж множники можуть бути менші написаних. Зрозуміло, що, найбільше, після $n-1$ операцій, подібних описаним, другий множник перетвориться в 1, і отримаємо многокутник, який має 2^k, де $k \leq n-2$ осей симетрії і вдвічі більше сторін, тобто 2^{k+1}, так що між кожними двома сусідніми півосями буде розміщатися по одній стороні многокутника. Залишається перемістити ці сторони всередині кутів між півосями так, що б вони утворили рівні кути з останніми (див. рис. 2.8), від чого площа многокутника збільшується (за лемою 3), і ми отримаємо правильний многокутник, який має не більше 2^{n-1} сторін.

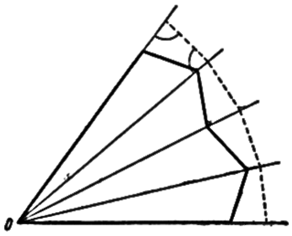

Рис. 2.8

Так як площа кожного нового многокутника не менша, а периметр не більший, ніж у попереднього, причому, зокрема, у другого многокутника периметр напевно менший, ніж у першого, то останній, правильний, многокутник має не меншу площу, але менший периметр, ніж перший, неправильний, многокутник. Побудувавши многокутник, подібний останньому, правильному, але ізопериметричний з першим, отримаємо новий, правильний многокутник, який має явно більшу площу, ніж перший, неправильний. Цим доведено перше твердження Едлера.

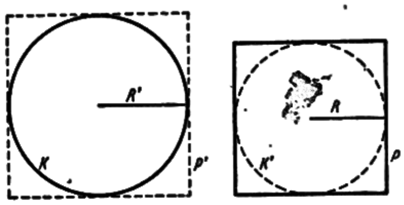

Рис. 2.9

Це твердження справедливе, адже будь-який неправильний n-кутник менший правильного n-кутника з таким же периметром, а останній менший правильного 2^{k+1}-кутника такого ж периметра, якщо $n < 2^{k+1}$ [6]. Але істотне значення має та обставина, що доведення Едлера не використовує ані теорему про круг, ані будь-який інший постулат про існування середовища даної сукупності ізопериметричних фігур.

Доведемо, що будь-який правильний многокутник менший ізопериметричного з ним круга.

Позначимо через P і K правильний многокутник і круг з периметрами, які дорівнюють p (ці фігури показані на рис. 2.9 суцільними лініями), через R і $R^{'}$ позначимо радіус вписаного в P круга K (показано пунктиром) і радіус круга K. Опишемо навколо K правильний многокутник $P^{'}$, який подібний P (показано пунктиром) і позначимо через $p^{'}$ його периметр.

Відношення площ P і K дорівнює:

$$P : K = \frac{1}{2}pR : \frac{1}{2}pR^{'} = R : R^{'}.$$

Так як периметр описаної фігури $P^{'}$ більший периметра круга, то $p^{'} > p$.

З іншого боку, апофеми подібних многокутників P і $P^{'}$ відносяться, як їх периметри [23]:

$$R : R^{'} = p : p^{'} < 1.$$

Але ми знайшли, що

$$P : K = R : R^{'};$$

отже,

$$P : K < 1 \text{ або } P < K,$$

що і треба було довести.

Тепер ми можемо довести, що площа будь-якої плоскої фігури менша площі ізопериметричного круга.

Нехай дано яку-небудь відмінну від круга фігуру F з периметром p і круг K з таким же периметром. Застосовуючи спосіб Штейнера до фігури F, побудуємо опуклу фігуру $F^{'}$ з периметром p, але з більшою, ніж у F, площею, так що

$$F^{'} - F = d > 0.$$

У фігуру $F^{'}$ впишемо многокутник P з настільки малими сторонами, щоб різниця площ $F^{'} - P$ була менша за d. Для цього достатньо, щоб всі точки периметра $F^{'}$ знаходилися від відповідних сторін многокутника P на відстані менше, ніж на $\frac{d}{p}$ (див. рис. 36).

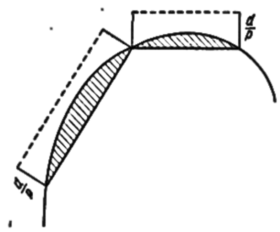

Рис. 2.10

Дійсно, якщо p' є периметром многокутника P, то сума площ сегментів, які розташовані між периметрами F' і P, буде у такому випадку менша $p' \cdot \frac{d}{p}$ і тим паче менша $p \cdot \frac{d}{p} = d$, бо $p' < p$ (див. рис. 2.10).

Отже,

$$F' - F = d, F' - P < d;$$

тому, $F < P$; у той же час $p > p'$.

За доведеним вище, неправильний многокутник P менший деякого правильного многокутника P' з таким же периметром p'. А цей многокутник P', у свою чергу, за 2, менший круга K' з таким же периметром p'. Але так як $p' < p$, то $K' < K$. Отже,

$$F < P < P' < K' < K$$

$$\text{або } F < K,$$

що і треба було довести.

У чому полягає крок, який зробив Едлер, у порівнянні з результатами Штейнера?

У другому з двох мемуарів Штейнера, окрім викладених вище лем, є і те перетворення неправильного многокутника у симетричний многокутник, яке складає головний зміст першої частини доведення Едлера. А саме, Штейнер розглядає будь-який плоский контур як многокутник з нескінченно великою кількістю нескінченно малих сторін. Якщо подібний контур не володіє симетрією відносно деякого напрямку, то Штейнер вважає можливим перетворити за згаданим способом його в більш короткий контур, який охоплює площу, яка дорівнює тій, що охоплював попередній контур, але володіє симетрією відносно названого напрямку. Але фігурою, для якої всі прямі, які проходять через одну і ту ж точку (перетин двох взаємно перпендикулярних осей симетрії), слугують осями симетрії, є тільки круг. Тому, припустивши існування фігури з найменшим периметром при даній площі, Штейнер робить висновок, що такою фігурою є круг, так як будь-яку фігуру, яка відмінна від круга, можна перетворити у рівновелику фігуру з меншим периметром [9].

РОЗДІЛ 3
ВЛАСТИВОСТІ ІЗОПЕРИМЕТРИЧНИХ ФІГУР ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

3.1. Рівнобедрений трикутник і квадрат як максимальні фігури

Досі ми мали справу тільки з двома типами множин плоских ізопериметричних фігур. Кожна множина першого типу складалася з усіх взагалі плоских фігур з даним периметром p, а кожна множина другого типу складалася з усіх трикутників з даним периметром p і даною основою. Найбільшою (за площею) фігурою у випадку кожної множини першого типу є круг з колом довжини p, а у випадку множин другого типу – рівнобедрений трикутник з периметром p і основою даної величини.

Тепер ми розглянемо вивченням двох множин, які складають: перша – із довільних трикутників з даним периметром p і друга – із довільних чотирикутників з даним периметром p. Покажемо, що найбільшою площею володіє у першому випадку рівносторонній трикутник, а в другому – квадрат.

Отже, доведемо насамперед наступну теорему.

Теорема 3.1. З усіх ізопериметричних трикутників найбільшу площу має трикутних рівносторонній.

До Штейнера цю теорему доводили наступним чином. Якщо ABC є найбільший з трикутників з периметром p, то всі його сторони повинні бути рівними між собою. Поклавши, наприклад, $AB \neq BC$, можна було б побудувати рівнобедрений трикутник $AB'C$ з попередньою основою AC і з попереднім периметром p; але його площа була б більше площі найбільшого трикутника ABC [8], що є безглуздим.

Штейнер, хоча і вважає це доведення цілком вірним і строгим, не знаходить можливим, проте, цілком їм задовольняється. Він правильно вказує на наступне: якщо дано два нерівних ізопериметричних трикутники, один – рівносторонній, і інший – нерівносторонній, то наведене доведення не дозволяє безпосередньо показати, що велика площа належить першому з них. Ми би сказали, що наведене доведення у неявній (скритій) формі припускає існування найбільшого трикутника з даним периметром і що ця саме обставина і викликає у Штейнера потребу безпосереднього порівняння двох трикутників – рівностороннього і нерівностороннього.

Люїл’є намагався перетворював даний (нерівносторонній) трикутник у рівнобедрений трикутник з тим ж периметром (і отже, більший), той – знову в ще більший ізопериметричний з ним рівнобедрений трикутник і так далі без кінця, причому ці ізопериметричні трикутники все більш і більш наближаються до рівностороннього трикутника того ж периметра, який перевершує всіх їх [5].

Відтворимо ідею цього доведення Люїл’є у більш повному вигляді.

Даний нерівносторонній трикутник U (див. рис. 3.1) з периметром p замінимо рівнобедреним трикутником G із тією ж основою і з тим периметром, що і трикутник U, так що буде $U < G$. Позначимо через u абсолютну величину різниці між основою і бічною стороною трикутника G. Якщо б виявилося, що $u = 0$, тобто що трикутник G – рівносторонній, то теорема була би вже доведеною. Але нехай $u > 0$.

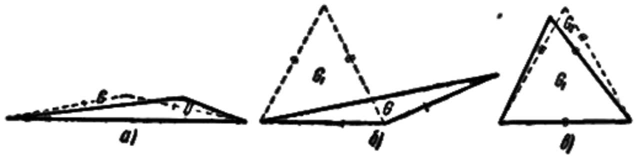

Рис. 3.1

На одній з рівних бічних сторін трикутника G, як на основі, побудуємо ізопериметричний з ним рівнобедрений трикутник G_1.

Різниця між основою і бічною стороною трикутника G_1 виявляється, як легко бачити, дорівнює (за абсолютною величиною) $\frac{u}{2}$. Дійсно, позначивши основу трикутника G через b, його бічні сторони – через a, так що $u = |b - a|$, де дві вертикальні риски замінюють слова «абсолютна величина» (вираз, який стоїть між цими рисками). Якщо c означає довжину бічної сторони трикутника G_1, то ізопериметричність трикутників G_1 і G позначиться такою рівністю:

$$a + 2c = b + 2a,$$

звідки $c = \frac{b+a}{2}$. Тому

$$c - a = \left|\frac{b+a}{2} - a\right| = \left|\frac{b-a}{2}\right| = \frac{u}{2}.$$

З іншого боку, $G_1 > G$, або якщо за основу трикутника G прийняти ту з його рівних бічних сторін, на якій ми будуємо трикутник G_1, то обидва трикутника, які є ізопериметричними, будуть мати одну і ту ж основу, але трикутник G_1 буде рівнобедреним, а трикутник G не буде рівнобедреним. На бічній стороні G_1 будуємо ізопериметричний рівнобедрений трикутник G_2, так що у силу тих ж міркувань $G_2 > G_1$ та різниця основи і бічної сторони трикутника G_2 знову зменшується двічі, тобто дорівнює $\frac{u}{4}$, і т. д. Отримуємо нескінчений ряд рівнобедрених ізопериметричних трикутників $G, G_1, G_2, G_3, ...$, причому $G < G_1 < G_2 < G_3 <, ...$, а різниця між основами і бічними сторонами прямує до нуля, дорівнюючи, відповідно:

$$u,\ \ \frac{1}{2}u,\ \ \frac{1}{4}u,\ \ \frac{1}{8}u, ...,\ \ \frac{1}{2^n}u, ...$$

Отже, трикутники G_n мають своєю границею рівносторонній трикутник T з таким ж периметром, що і U, звідки Люїл'є робить висновок, що початковий трикутник U менше ізопериметричного з ним, але рівностороннього трикутника T .

Але і це доведення не задовольняє Штейнера з тієї причини, що воно потребує нескінченого процесу. Подібні доведення відомий німецький математик Діріхле назвав асимптотичними [17]; вони нескінченно близько наближають нас до цілі, але ніколи остаточно до неї не приводять. Сам Штейнер вигадав наступне абсолютно строге доведення, в якому будь-який нерівносторонній трикутник порівнюється з рівностороннім трикутником такого ж периметра.

Дано нерівносторонній трикутник U з периметром p; перетворимо його в рівнобедрений трикутник G з тим ж периметром, взявши за основу найбільшу сторону (або одну з двох найбільших сторін) трикутника U, так що $G \geq U$ (знак рівності відноситься до того випадку, коли сам трикутник U рівнобедрений і основа його більша бічних сторін). Нехай ABC (див. рис. 3.2) і є цей трикутник G. Так як його основа AB більша кожної з бічних сторін, то вона більша третини периметра. Тому якщо на основі відкласти відрізок BD, який дорівнює $\frac{1}{3}p$, то точка D впаде між A і B. На продовженні сторони BC за C завжди знайдеться така точка E, що

$$DE + EC = DA + AC,$$

так що периметри трикутників ABC і DEB будуть рівні між собою.

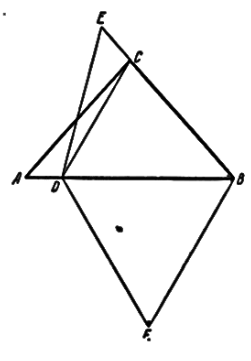

Рис. 3.2

Так як $BC < \frac{1}{3}p$, то $BC < BD$, так що $\angle BCD > \angle BDC$ і, отже, $\angle DCE < \angle ADC$, тобто з двох ізопериметричних трикутників ADC і DCE перший має найбільший кут при загальній основі. Тому площа ADC менше площі DEC. Додаючи ж до трикутника DCB, знаходимо, що

$$\triangle\, ACB < \triangle\, DCB.$$

Побудуємо тепер на основі BD рівнобедрений трикутник DFB з тим же периметром p. Його площа більша за площу ізопериметричного трикутника DEB, сторони ж його рівні між собою, так як основа дорівнює $\frac{p}{3}$, а бічні сторони рівні між собою. Отже, трикутник DFB виявився рівностороннім і таким, що перевершує за площею довільно взятий ізопериметричний з ним трикутник U.

Доведемо тепер другу теорему.

Теорема 3.2. З усіх чотирикутників з даним периметром p найбільшу площу має квадрат.

Візьмемо який-небудь чотирикутник $ABCD$ з периметром p (див. рис. 3.3). Поділимо його діагоналлю AC на два трикутника ABC, ADC. Замінимо їх рівнобедреними трикутниками AEC і ACF з такою ж основою AC з такими ж периметрами і, звідси, із більшими площами. Отже, новий чотирикутник $AECF$ більше попереднього $ABCD$. Пряма EF перпендикулярна до AC в її середині й ділить фігуру $AECF$ на два симетричних трикутники AEF і CEF, так як $AE = EC$, $AF = FC$. Перетворимо трикутники AEF, CEF у рівнобедрені трикутники GEF, HEF, зберігаючи спільну основу EF і периметри. Нова фігура $GEHF$ більша фігури $AECF$ і являє ромб, або симетричні трикутники перетворюються в рівні рівнобедрені трикутники. Залишається зсунути або розсунути сторони ромба так, щоб кути при точках G і H стали прямими, і тоді ромб перетвориться в квадрат $E'H'F'G'$ з периметром P. При цьому, згідно першої основної теореми, площі трикутників GEF і HEF збільшуються, так що отриманий квадрат буде більше ромба і, отже, тим паче більше початкового чотирикутника $ABCD$.

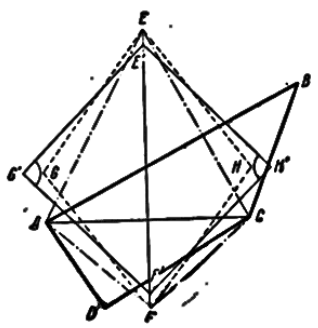

Рис. 3.3

Із останньої теореми випливає такий наслідок: з усіх прямокутників з даним периметром найбільшу площу має квадрат.

Дійсно, множина M' всіх прямокутників з периметром p складає частину множини M всіх чотирикутників з тим же периметром p. Квадрат з периметром p, перевершуючи за площею будь-який елемент множини M, тим самим перевершує і будь-який елемент множини M'. Будучи ж сам елементом множини M', він є його найбільшим елементом.

Цьому наслідку можна надати таку форму. Стрижень AB довжиною $\frac{P}{2}$ згинаємо під прямим кутом в якій-небудь його точці C і доповнюємо сторони цього кута до прямокутника $ABCD$ (з периметром p). Найбільша площа цього прямокутника отримається у тому випадку, якщо точку C взято рівно у середині AB.

Алгебраїчно це можна виразити так: число $a\left(=\frac{p}{2}\right)$ поділимо на 2 доданки x і $a-x$; їх добуток $x(a-x)$ буде мати найбільшу можливу величину у тому випадку, якщо $x=\frac{a}{2}$). Неважко довести алгебраїчно це твердження. Доведемо навіть більш загальне твердження: добуток двох частин числа a тим більший, чим ближче ці частини до рівності між собою, тобто чим ближче кожна з них підходить до $\frac{a}{2}$.

Нехай $x<y\leq\frac{a}{2}$. Розглянемо добуток: $x(a-x)$, $y(a-y)$. У другому з них співмножники менш відмінні між собою:

$$(a-y)-y=a-2y,$$

$$(a-x)-x=a-2x.$$

Але

$$x-y,\,2x<2y;$$

отже, $a-2y<a-2x$ (причому $a\geq 2y$, $a>2x$), так що дійсно $(a-y-y<a-x-x$. Покажемо, що $ya-y>x(a-x)$.

Для цього додамо почленно нерівності:

$$\frac{a}{2}\geq y,\qquad \frac{a}{2}>x,$$

що дає

$$a>y+x.$$

Помножимо цю нерівність почленно на додатний вираз $(y-x)$:

$$a(y-x)>y^2-x^2$$

або

$$ay-ax>y^2-x^2,$$

або

$$ay-y^2>ax-x^2,$$

або

$$(a-y)y>(a-x)x$$

що і треба було довести.

3.2. Порівняння рівновеликих фігур

У задачах, які ми розглядали, про круг, рівносторонній трикутник і квадрат периметр фігур, що порівнюються, вважається відомим, а шуканою є фігура, яка належить даній сукупності ізопериметричних фігур з цим периметром і яка має найбільшу площу. Кожній такій задачі відповідає у даному разі «обернена» або «взаємна» задача, в якій відомою є площа, а шуканою – та з визначеної сукупності рівновеликих між собою фігур з цією площею, яка має найменший периметр. Так, наприклад, прямій задачі про круг відповідає обернена задача: яка з усіх плоских фігур з даною площею має найменший периметр?

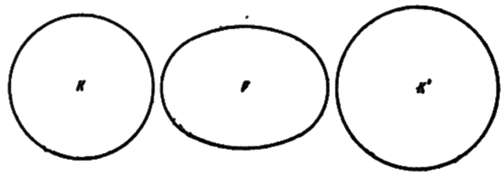

Рис. 3.4

Шуканою фігурою виявляється круг, і ось так Штейнер доводить це «обернене» твердження, вважаючи вже справедливою «пряму» теорему про те, що серед всіх фігур з даним периметром круг має найбільшу площу. Позначимо (див. рис. 3.4) через K круг, а через F – яку-небудь іншу плоску фігуру з площею, яка дорівнює площі цього круга (наприклад, еліпс). Новий круг K', ізопериметричне з фігурою F, буде, згідно прямої теореми, більше її і, разом з тим, більше рівновеликого з ним круга K, тобто $K' > K$. Але більшому кругу належить і більше коло; тому периметр круга K' або рівний йому периметр фігури F більший периметра круга K, що і треба було довести.

Аналогічно цьому, рівносторонній трикутник має найменший периметр у порівнянні з усіма іншими рівносторонніми трикутниками; у квадрата периметр менше, ніж у всіх інших рівновеликих чотирикутниках. Ці й подібні їм «обернені» теореми доводяться за тільки що вказаним способом, якщо вважати вірними прямі теореми.

Щоб дати загальну схему цих доведень, домовимося спочатку відносно деяких термінів.

У всякій фігурі будемо розрізняти «форму» і розміри. Одній і тій же «формі» відповідає нескінченна множина фігур різної величини; всі вони подібні між собою. У задачах, які нас цікавлять, ми розглядаємо фігури, які належать певному «класу форм». Таким класом форм є в одному випадку форми всіх плоских фігур, у другому випадку – форми всіх трикутників, у третьому – форми всіх чотирикутників і т. д. Відповіддю на задачі, які розглядаємо, є та чи інша форма, наприклад, круг, квадрат і т. д.

Припустимо, що справедлива така пряма теорема.

Теорема 3.3. Серед усіх ізопериметричних фігур, форми яких належать класу форм C, найбільшу площу має фігура з формою F.

У такому випадку можна довести таку обернену теорему.

Теорема 3.4. Серед усіх рівновеликих фігур, форми яких належать класу форм C, найменший периметр має фігура з формою F.

Для доведення позначимо через P цю фігуру з формою F і візьмемо для порівняння будь-яку іншу фігуру Q з числа фігур, які розглядаємо, тобто довільну фігуру, форма якої належить класу C і площа якої дорівнює площі фігури P. Побудуємо фігуру P' подібну фігурі P і яка володіє тією ж формою F, але з периметром, який дорівнює периметру фігури Q. За прямою теоремою, площа P' більше площі Q або рівній їй площі P. Але фігури P' і P подібні; отже, і периметр фігури P' або рівний йому периметр фігури Q більше периметра фігури P, що і треба було довести.

У прямих і обернених задачах (про фігури ізопериметричні і про фігури рівновеликі) важливу роль відіграє відношення між такими трьома ознаками будь-якої фігури:

форма – периметр – площа.

Останні дві ознаки – числові, перша же носить виключно якісний характер. Правда, найбільша належність фігури до тієї, а не іншої форми – інакше кажучи, подібність або неподібність двох фігур – пов’язана з визначеними кількісними показниками (рівність кутів, пропорційність сторін). Крім того, останнє загальне доведення «оберненості» теорем про ізопериметри спирається на те, що та з двох фігур однакової форми (тобто подібних між собою), яка має більшу площу, має і більший периметр [8].

Покажемо тепер, як пов’язати з кожною формою певну числову її характеристику, яку можна називати «коефіцієнтом» цієї форми. Введення цих коефіцієнтів дозволяє ще наочніше представити внутрішній зв'язок між «прямими» і «оберненими» задачами на ізопериметри й ізоепіфани.

Спочатку нагадаємо загальне означення «подібності» плоских фігур. Якщо яку-небудь точку O, яка лежить у площині даної фігури Ф, уявно сполучити з усіма точками $A, B, C, \ldots$ її контур прямими і відмітити на цих прямих такі точки $A', B', C', \ldots$, щоб було (див. рис. 3.5)

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \cdots = k,$$

де k – довільне додатне число, яке називається «відношення подібності», то сукупність точок A', B', C' ... утворює деякий новий контур. Фігуру Ф$'$, яка обмежена цим новим контуром, називають «*центрально-подібною*» або «*гомотетичною*» (а також «*подібною і подібно розташованою*») по відношенню до початкової фігури Ф, а точку O – центром подібності або гомотетії [26].

Якщо задано дві фігури в одній площині, певним чином розташовані одна відносно іншої, то або існує принаймні одна точка у тій же площині, відносно якої, як центра, дані фігури виявляються гомотетичними, або такої точки не існує.

Тепер можемо сформулювати загальне означення подібності плоских фігур.

Дві плоскі фігури називаються *подібними* у тому і тільки у тому випадку, якщо можливо так розташувати їх на одній площині, щоб вони виявились центрально-подібними (гомотетичними).

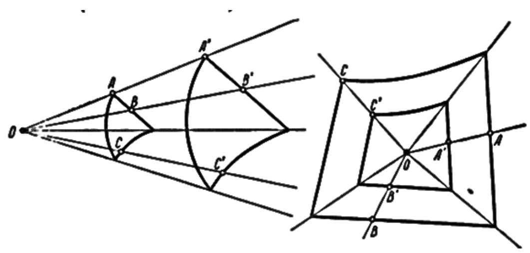

Рис. 3.5

Звернемо увагу на те, що подібність фігур є властивість їх як таких, що не залежать від того, де і як ми їх вважаємо розташованими, а гомотетія є визначене взаємне розташування двох подібних фігур [5].

Подібність трикутників і многокутників, які детально вивчають у курсах елементарної геометрії, зображує окремий випадок визначеного вище поняття подібності із тією відмінністю, що пропорційність сторін і рівність кутів, які входять в елементарно-геометричні означення подібності многокутників при вищезазначеному більш загальному означенні подібності є наслідком цього означення.

Узагалі у будь-яких двох подібних фігур з відношенням подібності k довжини всіх відповідних («схожих» або «гомотетичних») ліній знаходяться також у відношенні k; зокрема, периметри обох фігур мають таке ж відношення $p' : p = k$ [19].

Далі, можна довести, що будь-які дві фігури, подібні порізно одній і тій самій третій фігурі, подібні і між собою («транзитивна властивість» подібності [21]). Із цієї властивості можна зробити наступний вкрай важливий висновок. Розглянемо яку-небудь плоску фігуру Ф і всі плоскі фігури, які подібні їй: $\Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots$ Позначимо через C сукупність фігур $\Phi, \Phi', \Phi'', \ldots$ В силу згаданої властивості всі ці фігури попарно подібні між собою і жодна фігура, що не належить до цієї сукупності C, не подібна жодній з фігур сукупності C. Тому всі плоскі фігури, які тільки можливі, розкладаються на такі класи $C, C', \ldots$ фігур, що всі фігури одного класу попарно подібні, але фігури, які належать до різних класів, ніколи не можуть бути подібними одна одній.

Ми будемо говорити, що всі можливі фігури, які належать одному й тому ж самому класу C (тобто подібні між собою), мають одну й ту ж форму. Кожному класу відповідає своя форма: скільки є класів взаємно подібних плоских фігур, стільки ж існує і різних форм плоских фігур. Фігура, яка має замкнений контур, однозначно визначається своєю формою і довжиною периметра. Всі кола подібні між собою, утворюючи один клас з формою «коло». Всім правильним п’ятикутникам відповідає також одна і та ж форма. Форма рівнобедреного трикутника визначається, наприклад, величиною кута при вершині або відношенням бічної сторони до основи. Кожному додатному числу q відповідає особлива форма C_q прямокутника, у якого відношення суміжних сторін дорівнює цьому числу q.

Звернемося до розгляду площ. Як відомо, площі S_1 і S_2 двох подібних многокутників P_1 і P_2 відносяться, як квадрати будь-яких двох подібних сторін [7]:

$$S_2 : S_1 = (A_2B_2)^2 : (A_1B_1)^2 = (A_2B_2 : A_1B_1)^2 = k^2,$$

де k – відношення подібності взятих многокутників. Але ж $p_2 : p_1 = k$, де p_1 і p_2 – периметри P_1 і P^2. Тому

$$S_2 : S_1 = p_2^2 : p_1^2,$$

тобто площі двох подібних многокутників відносяться як квадрати їх периметрів. Ця властивість має місце і для кіл: їх площі відносяться, як квадрати їх радіусів або довжин кіл.

Виявляється, що у випадку подібних плоских фігур іншої форми, хоча б самої неправильної, площі відносяться, як квадрати їх периметрів.

Із отриманої пропорції випливає:

$$S_1 : p_1^2 = S_2 : p_2^2,$$

тобто відношення площі фігури даної форми до квадрата її периметра є величина постійна. Звичайно при цьому необхідно притримуватися звичайного правила – вимірювати площі такими ж квадратними одиницями (наприклад, см^2), якими лінійними одиницями (наприклад, см) вимірювалась довжина периметра; одиниця ж довжини може бути довільна.

Отже, для всіх фігур $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$ однієї і тієї ж форми F відношення $S_j : p_i^2$ має однакове значення, яке не залежить від вибору одиниці довжини. Позначимо це значення K_F і назвемо «*коефіцієнтом форми F*» (не слід плутати цей коефіцієнт з відношенням подібності k):

$$S : p^2 \equiv K_F,$$

звідки:

$$S = K_F \cdot p^2. \tag{3.1}$$

Таким чином, кожній формі F плоских фігур відповідає свій коефіцієнт форми K_F). Він дорівнює відношенню площі S будь-якої фігури з формою F до площі квадрата, який побудований на її периметрі p (так як площа останнього дорівнює як раз p^2 квадратних одиниць, які вибрані умовним чином у відповідності з вибором тієї лінійної одиниці, якою вимірювався периметр p).

Обчислимо цей коефіцієнт для декількох найпростіших форм.

У випадку правильного n-кутника:

$$S_n = \frac{1}{2} p_n \cdot a_n$$

(a_n – апофема).

Але

$$a_n = \frac{p_n}{2n} \cdot \mathrm{ctg}\frac{\pi}{n},$$

так що

$$S_n = \frac{1}{4n} p_n^2 \cdot \mathrm{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

Отже, коефіцієнт форм для правильного n-кутника дорівнює:

$$K_n = S_n : p_n^2 = \frac{1}{4n} \cdot \mathrm{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

Зокрема, при $n = 3, 4, 6$ отримуємо для рівностороннього трикутника, квадрата і правильного шестикутника такі значення коефіцієнта їх форми (з точністю до 10^{-4}):

$$K_3 = \frac{\sqrt{3}}{36} = 0{,}0481,$$

$$K_4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625,$$

$$K_6 = \frac{\sqrt{3}}{24} = 0{,}0722.$$

Для кола отримуємо:

$$K_{\text{кр}} = \pi r^2 : (2\pi r)^2 = \frac{1}{4\pi\pi} = 0{,}0795.$$

Для прямокутника зі сторонами x і $2x$ знаходимо:

$$K_F = \frac{2x^2}{(6x)^2} = \frac{1}{18} = 0{,}0555.$$

Ці результати можна наочно інтерпретувати наступним чином. Маючи матеріал для побудови паркану вздовж контуру будь-якої форми загальної довжини в p метрів, можна обгородити їм площі, які відносяться, як числа

$$481 : 555 : 625 : 722 : 795,$$

якщо надати паркану відповідної форми рівностороннього трикутника, прямокутника з відношенням сторін $1:2$, квадрата, правильного шестикутника, кола (див. рис. 14).

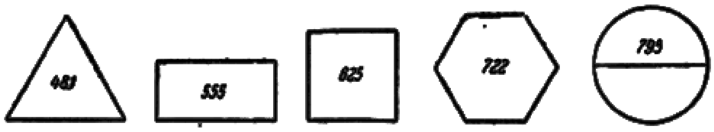

Рис. 14.

Рис. 3.6

Отже, кожній плоскій формі відповідає певний коефіцієнт. Але різним формам можуть відповідати і однакові коефіцієнти. Візьмемо, наприклад, який-небудь неправильний п'ятикутник, який вписаний в коло. Змінивши тільки порядок його сторін, можна скласти новий п'ятикутник, який не дорівнює (не конгруентний) початковому, але також вписаний у те ж коло і тому має однакову площу з попереднім п'ятикутником (див. рис. 3.7). Дійсно, площі обох вписаних многокутників дорівнюють сумам площ попарно рівних трикутників з загальною вершиною у центрі кола.

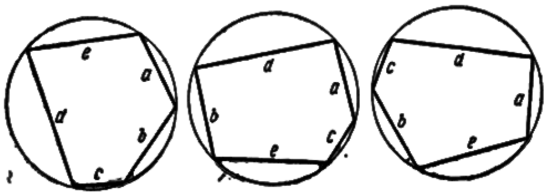

Рис. 3.7

Отже, периметри і площі в обох п'ятикутниках однакові; тому і коефіцієнти їх форм однакові.

Це показує, що коефіцієнт форми не може слугувати повною її характеристикою, так як знання величини коефіцієнта не виділяє однієї визначеної форми (крім значення $\frac{1}{4\pi}$, якому, у силу єдиності розв'язку ізопериметричної задачі, відповідає тільки форма кола).

Порівняємо тепер ще раз, користуючись поняттям коефіцієнта форми і відношенням (3.1), пряму і обернену ізопериметричні задачі.

Нехай заданий деякий клас форм C (наприклад, всі форми трикутників). Формам класу C відповідають цілком визначені значення коефіцієнтів форми K_F, причому серед них можуть зустрічатися і однакові значення. Обравши довільне додатне число p_0, почнемо розглядати всі плоскі фігури з периметром, який дорівнює p_0, форми яких належать класу C Чим більший коефіцієнт K_F, тим більша площа відповідної фігури F, у силу відношення (3.1). Якщо серед всіх значень K_F, які відповідають класу C, є найбільше – назвемо його K_{max} , а Ф – одна з форм класу C, якій цей коефіцієнт відповідає (хоча б одна така форма у класі C обов'язково знайдеться у силу припущень, що K_{max} належить до числа коефіцієнтів форм C), то фігура з формою Ф і периметром p_0 буде мати найбільшу площу S_{max} серед всіх фігур, які розглядаємо, а саме:

$$S_{max} = K_{max}\,p_0^2.$$

Звернемо увагу на те, що форма Ф максимальної фігури не залежить від вибору величини периметра p_0, тобто від абсолютних розмірів фігур, які порівнюють, а залежить тільки від складу класу C форм, які порівнюють. Наприклад, серед всіх коефіцієнтів K_F, які відповідають будь-яким формам трикутників, значення 0,0481, яке належить рівносторонньому трикутнику, виявляється найбільшим; тому при будь-якому заданому периметру p_0 рівносторонній трикутник виявляється більшим за площею будь-якого нерівностороннього трикутника такого ж периметра.

Оберемо тепер довільне додатне число S_0 і почнемо порівнювати всі фігури з площами, які дорівнюють S_0, форми яких належать тому ж класу C. Із відношення (3.1) виводимо $p = \sqrt{S/K_F}$ і звідси підсумовуємо, що при постійній S_0 найбільшому з можливих значень коефіцієнта K_F відповідає найменший периметр p_{min}. Отже, та сама фігура з площею S_0 і такої ж форми Ф, яка при рівності периметрів гарантувала найбільшу площину, тепер, при рівності площ, має найменший периметр:

$$p_{min} = \sqrt{S_0/K_{max}}.$$

Цим ще раз доведено оберненість терем про ізопериметри.

Якщо, навпаки, встановлено, що серед всіх форм класу C формі Ф відповідає найбільша площа при заданому периметрі або найменший периметр при заданій площі, то коефіцієнт цієї форми $K_Ф$ обов'язково виявиться найбільшим серед коефіцієнтів, які відповідають всім формам класу C.

Із всього вище зазначеного можна зробити висновок: якщо заданий певний клас C форм плоских фігур, то проблеми:

1) серед ізопериметричних фігур з периметром p_0 і формами, які належать класу C, знайти ту, яка має найбільшу площу (ізопериметрична задача),

2) серед рівновеликих фігур з площею S_0 і формами, які взято з класу C, знайти ту, яка має самий короткий периметр,

– або обидві одночасно припускають розв'язок або у вигляді фігур однієї і тої ж самої форми класу C, або обидва розв'язки не припускаються.

Перший випадок (обидві проблеми мають розв'язок) має місце тоді і тільки тоді, коли серед значень всіх коефіцієнтів форм класу C існує найбільше значення (яке належить одній або декільком, можливо, навіть нескінченій кількості, формам).

Формула для коефіцієнта, який відповідає правильному n-кутнику,

$$K_n = \frac{1}{4n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} = \frac{1}{4\pi}\frac{\frac{\pi}{n}}{\tan\frac{\pi}{n}},$$

дозволяє довести аналогічним шляхом, що при рівних периметрах площа правильного многокутника тим більша, чим більше у нього сторін, але, зростаючи, залишається завжди менше площі ізопериметричного кола. (Не слід плутати з площами многокутників, які вписані в одне і те ж саме коло.) Дійсно, із тригонометрії відомо [29], що для гострих кутів x завжди $\frac{x}{\operatorname{tg} x} < 1$, а в теорії границь доводять, що

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1,$$

причому відношення $\frac{x}{\operatorname{tg} x}$ прямує, постійно зростаючи, до цієї своєї границі 1 при прагненні кута x до нуля.

Тому

$$\left(\frac{\pi}{n}\right) : \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} < \left(\frac{\pi}{n+1}\right) : \operatorname{tg}\frac{\pi}{n+1},$$

так що

$$K_n < K_{n+1} < \frac{1}{4\pi} = K_{\text{кр}},$$

що і доводить наше твердження.

3.3. Півкруг і частини круга

З’ясувавши взаємовідношення прямих і обернених ізопериметричних задач, повернемося властивостей ізопериметричних фігур особливих типів; ці властивості Штейнер виводить безпосередньо з своєї «головної» теореми про круг [13].

Перший тип таких фігур – це фігури, контур яких складається з прямолінійного відрізку довільної довжини і з лінії довільної довжини, яка сполучає його кінці. Відносно таких фігур має місце наступна подвійна теорема.

Теорема 3.5. З усіх фігур, які обмежені довільною за формою лінією

ABC певної довжини l і прямолінійним відрізком AC довільної довжини, найбільшу площу має півкруг, дуга якого має довжину l.

Обернена теорема. З усіх рівновеликих фігур, які обмежені прямолінійним відрізком AC довільної довжини і довільної лінії ABC, найменшу довжину лінії ABC має півкруг.

Доведення. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ (див. рис. 3.8) являють собою півкруг і будь-яку іншу фігуру, які задовольнятимуть всім умовам першої частини теореми. Додаючи до цих фігур фігури ADC і $A_1D_1C_1$, симетричні з першими відносно осей AC і A_1C_1, складемо дві нові фігури: круг $ABCD$ і відмінну від круга фігуру $A_1B_1C_1D_1$, периметри яких дорівнюють $2l$. Згідно теореми про круг, круг $ABCD$ більший за фігуру $A_1B_1C_1D_1$. Тому півкруг ABC більший за фігуру $A_1B_1C_1$, яка дорівнює половині фігури $A_1B_1C_1D_1$.

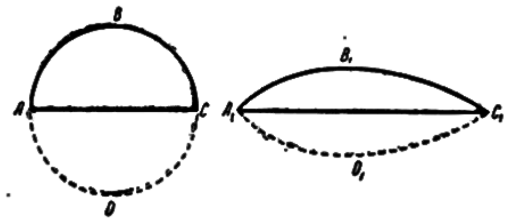

Рис. 3.8

Друга половина теореми доводиться або за загальним методом доведення обернених теорем про ізопериметри [24] або наступним чином: доповнюючи за симетрією рівновеликі півкруг ABC й іншу фігуру $A_1B_1C_1$ до круга $ABCD$ і до рівновеликої з ним фігури $A_1B_1C_1D_1$, знайдемо, що периметр круга менший периметра $A_1B_1C_1D_1$; тому і півколо коротше лінії $A_1B_1C_1$.

Зауваження. Стосовно цієї теореми Штейнер зауважує, що її можна довести незалежно від попереднього доведення теореми про круг і тоді вивести з неї, як наслідок, теорему про круг. Дійсно, якщо б існувала фігура F, більша ізопериметричного з нею круга, то хоча б одна половина F, обмежена яким-небудь її діаметром, перевершувала ізопериметричний з нею півкруг, що суперечить останньої теореми.

«Причому, – говорить далі Штейнер, – це доведення можна провести дуже коротко, якщо задовольнятися менш суворими і загальними міркуваннями, чим при доведенні головної теореми про круг, а саме, якщо припустити, що повинна існувати найбільша фігура: адже будь-яку фігуру типу $A_1B_1C_1$, відміну від півкруга, можна збільшити, розсовуючи або зсуваючи до прямого кута хорди A_1B_1 і B_1C_1 разом з їх сегментами, якщо кут $A_1B_1C_1$ не дорівнює прямому» [32]. Приголомшливо те, що Штейнер сам же підкреслив необхідність обґрунтувати існування максимальної фігури і не звертає увагу на те, що в його доведенні головної теореми про круг такого доведення по суті немає; адже і у випадку останньої теореми про півкруг обмеженість зверху всієї сукупності площ фігур, які розглядаються, є поза сумнівом, і проте ж Штейнер не вважає це достатнім виправданням для впевненості в існуванні шуканої фігури.

Наступний тип фігур, які розглядає Штейнер, відрізняється від тільки що розглянутих тим, що прямолінійна частина контуру має задану довжину. Тут має місце

Теорема 3.6. Із всіх фігур, які обмежені даним прямолінійним відрізком a і довільною за формою лінією L, найбільшу площу, при даній довжині l лінії L (або, що все рівне, при даному периметрі), має сегмент круга, який обмежений хордою A і дугою кола довжини l; при рівності площ S всіх фігур, які порівнюють, дуга такого сегмента круга виявляється самою короткою з всіх ліній L.

Доведення. Розглянемо сегмент круга (див. рис. 3.9) і яку-небудь іншу фігуру aL, причому довжина лінії L дорівнює довжині дуги круга α. Доповнимо дугу α дугою β до повного кола; за теоремою про круг, круг $\alpha\beta$ більший ізопериметричної фігури $L\beta$. Отже, сегмент $a\alpha$ більше фігури aL.

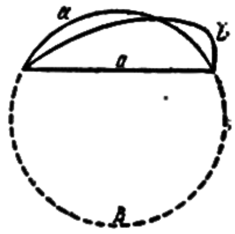

Рис. 3.9

Для доведення другої частини теореми припустимо, що сегмент круга $a\alpha$ і фігура aL (див. рис. 3.9) рівновеликі. Доповнюючи сегмент до повного круга $\alpha\beta$, знайдемо, що цей круг рівновеликий фігурі $L\beta$ і тому периметр круга менше периметра $L\beta$. Отже, дуга α коротше лінії L.

Із цієї теореми безпосередньо випливає такий цікавий

Наслідок. Якщо яка-небудь фігура при деяких умовах відносно її контуру повинна мати найбільшу можливу площу, то будь-яка частина ACB її контуру, яка може, за умовою, мати між точками A і B будь-яку форму, зберігаючи певну довжину, повинна представляти собою дугу круга.

У подальшому будемо, слідуючи Штейнеру, називати «частиною круга, укладеною між n хордами» будь-яку фігуру, обмежену n хордами деякого кола і з'єднуючи ці хорди її дугами.

Теорема 3.7. Із всіх фігур, які обмежені двома даними за величиною прямолінійними відрізками (a і b) і однією або двома лініями довільної форми, які з'єднують кінці цих відрізків, частина круга, яка укладена між відрізками a і b, як хордами, має найбільшу площу при рівності периметрів всіх фігур, які порівнюють і найменший периметр при рівності площ фігур, які порівнюють.

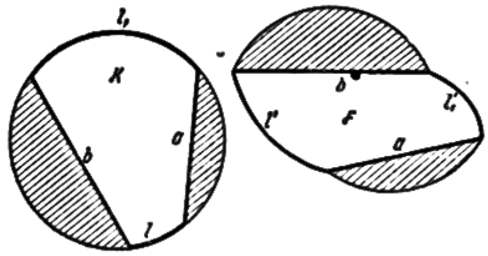

Рис. 3.10

Доведення. Порівняємо частину круга K і яку-небудь іншу фігуру F, яка задовольняє умови першої частини теореми (див. рис. 3.10). Доповнимо фігуру K до повного круга K_1, додаючи до неї заштриховані сегменти. Такі ж сегменти прикладемо до відрізка a і b периметра фігури F, що дасть нову фігуру F_1. Периметр круга K_1 і фігури F_1 рівні, так що $K_1 > F_1$. Віднімаючи ж сегменти, знайдемо, що $K > F$.

Якщо ж фігури K і F рівновеликі, то і фігури K_1 і F_1 будуть рівновеликими, так що, згідно оберненої теореми про круг, периметр K_1, менше периметра F_1, отже, $l + l_1 < l' + l_1'$, тому периметр K менше периметра F.

3.4. Вписані многокутники

Останню теорему неважко узагальнити на той випадок, коли задано не два, а більше число відрізків $a_1, a_2, \dots, a_n$ і периметр p (або площу S). Виявляється, що і у цьому випадку найбільшою площею (або найменшим периметром) володіє частина круга, яка укладена між заданими відрізками, як хордами, і яка має заданий периметр (або задану площу), якщо тільки така частина круга існує.

Не зупиняючись на доведенні цього узагальнення, наведемо доведення наступної теореми, яка є тим окремим випадком першої половини цієї узагальненої теореми, коли заданий периметр p дорівнює сумі довжин відрізків:

$$p = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

так що довжина ліній, яка сполучає кінці відрізків, перетворюється в нуль і вся фігура перетворюється у многокутник зі сторонами $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Теорема Крамера. З усіх многокутників з даними сторонами $a_1, a_2, a_3, \dots$ найбільшу площу має той, навколо якого можна описати круг.

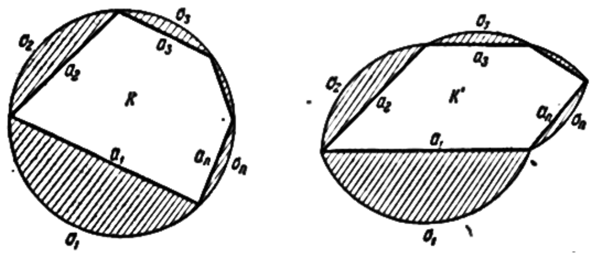

Рис. 3.11

Доведення. Позначимо через K многокутник із заданими сторонами $a_1, a_2, \dots, a_n$, вписаний у деякий круг C, а через K' – який-небудь інший многокутник з тими ж сторонами (див. рис. 3.11). Той та інший многокутник ми припускаємо, звичайно, опуклими. Позначаючи через σ_i ту з двох дуг, які стягуються хордою a_i, що не проходить через останні вершини многокутника K, приставимо до сторін $a_1, a_2, \dots, a_n$ обох многокутників K і K' сегменти $a_1\sigma_1, a_2\sigma_2, \dots, a_n\sigma_n$ круга C. При цьому K обернеться в круг C, а K' – у деяку фігуру F, периметр якого дорівнює колу круга C. Отже, круг C більше фігури F; відкидаючи ж сегменти, знайдемо, що вписаний многокутник K більший многокутника K'.

Доведемо, що при заданому порядку сторін $a_1, a_2, \dots, a_n$ шуканий вписаний многокутник є єдиним (якщо не розрізняти два симетричні многокутники), тобто має цілком визначений радіус.

Дійсно, нехай K і K' – два відмінних таких вписаних многокутники (з даними сторонами, які розташовані у певному порядку). Розглядаючи K як частину круга (радіуса R), в який він вписаний, доповнюючи цей многокутник до повного круга і додаючи ті ж сегменти і до сторін іншого многокутника, отримуємо, що $K > K'$. З іншої сторони, точно таким ж чином можна показати, що $K' > K$. Абсурдність цього результату показує, що ці радіуси повинні бути однаковими, але тоді K і K' не можуть бути різними.

Зауважимо у висновку, що, змінюючи порядок сторін вписаного многокутника, ми не змінимо ані його периметр, ані його площу, так як новий многокутник можна вписати в попередній круг, а двох різних вписаних многокутників з цим новим порядком сторін бути не може.

Ось наочний вираз результатів цієї теми: маючи плоский шарнірний n-кутник, можна (при $n > 3$) надати йому нескінченно багато відмінних форм, але тільки при одній із них многокутник можна вписати в коло. У цьому випадку площа многокутника виявиться більшою, ніж при всіх інших його формах.

3.5. Результати експериментального дослідження

Під час проведення дослідження, об’єктом якого є процес навчання учнів старшої школи, а предметом – зміст, структура та методика організації і проведення контролю навчальних досягнень, була висунута робоча гіпотеза: використання факультативного курсу під час вивчення математики має забезпечити:

1) підвищення якості математичної підготовки випускників за рахунок свідомого, зацікавленого, мотивованого ставлення учнів до навчання;

2) активізацію самостійної навчальної та науково-дослідної діяльності старшокласників

3) формування професійних і особистісних якостей учнів, що відповідатимуть новим соціальним вимогам щодо підготовки учнів старшої школи.

Одним із завдань нашого дослідження було експериментально перевірити вплив використання задач творчого характеру, зокрема, екстремальних задач, на підвищення рівня навчальних досягнень старшокласників. З цією метою було впроваджено факультативний курс з теми «Екстремальні задачі», який було проведено для учнів старших класів Агайманська ЗОШ І-ІІІ ст. Іванівської селищної ради Іванівського району Херсонської області.

Організація і проведення експериментального дослідження дали змогу перевірити робочу гіпотезу, а також ефективність розробленого факультативного курсу.

Результати формувального експерименту визначалися шляхом зіставлення рівнів сформованості відповідних знань в учнів контрольного та експериментального класів, яких вони досягли наприкінці вивчення програмового розділу. На основі аналізу контрольних та самостійних робіт, які учні виконували упродовж місяця, ми визначили рівні сформованості навчальних досягнень старшокласників.

Основним критерієм оцінювання результатів виконання контрольних та самостійних робіт була якість виконання учнями завдань, а саме правильність і повнота відповіді. Кількісний та якісний аналіз результатів виконання учнями експериментального і контрольного класів контрольних та самостійних робіт упродовж місяця в 11 класі представлені у зведеній таблиці (див. табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Результати виконання учнями контрольної та самостійних робіт (*у* %)

Назва розділу	Кількість учнів, що досягли							
	високого рівня		достатнього рівня		середнього рівня		Низького рівня	
	ЕК	КК	ЕК	КК	ЕК	КК	ЕК	КК
Самостійна робота №1	17,4	8,3	52,2	54,2	21,7	29,2	8,7	8,3
Самостійна робота №2	26,1	12,5	52,2	41,7	17,4	29,2	4,3	16,7
Контрольна робота	30,4	16,7	52,2	41,7	17,4	33,3	0,0	8,3

На основі даних табл. 3.1 ми обчислили середнє арифметичне співвідношення рівнів сформованості навчальних досягнень учнів із дисципліни «Математика» наприкінці 10 класу (див. табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Результати контрольної та самостійних робіт, проведених наприкінці навчання в 10 класі

Рівні навчальних досягнень учнів	Контрольний клас	Експериментальний клас
Високий	12,5 %	24,6 %
Достатній	45,9 %	52,2 %
Середній	30,5 %	18,8 %
Низький	11,1 %	4,4 %

Щоб прослідкувати вплив запропонованого факультативного курсу на підвищення рівня навчальних досягнень старшокласників, ми порівняли результати попереднього контролю, проведеного перед початком формувального експерименту (див. табл. 3.1), та результати, отримані наприкінці експериментального навчання (див. табл. 3.2). Зіставивши ці результати, ми дійшли висновку, що в експериментальному класі на 2,9 % збільшилась кількість учнів із високим рівнем сформованості математичних знань і на 26,1 % — із достатнім рівнем. Кількість учнів із середнім і низьким рівнями сформованості природничих знань зменшилась на 16,0 % і 13,0 % відповідно. У контрольному класі теж відбулися певні зміни, проте вони незначні. Зокрема, кількість учнів, що досягли високого рівня сформованості математичних знань зменшилась на 8,3 %; достатнього рівня – збільшилася на 12,6 %; кількість учнів із середнім рівнем сформованості математичних знань зросла на 1,3 %, а учнів із низьким рівнем зменшилася на 5,6 %.

Порівняння вихідних та кінцевих результатів формувального експерименту свідчить про позитивний вплив розробленого факультативного курсу з математики на рівень сформованості математичних знань.

ВИСНОВКИ

Підсумовуючи результати виконаного дослідження, можна відмітити наступні результати.

Питання про найбільш та найменші величини є найбільш цікавими в суто математичному відношенні та досить важливими за своїм практичним, прикладним значенням. Враховуючи важливу роль питань про максимальні та мінімальні величини, можна стверджувати, що вже з давніх часів люди намагалися відшукати розв’язки таких питань, в тому числі й основних ізопериметричних проблем. Спочатку метод цих пошуків повинен був бути суто емпіричним, проте з розвитком геометрії повинна була розвинутись потреба перевірити знайдені розв’язки шляхом строгих умовиводів.

Основною ізопериметричною проблемою є наступне твердження: яка з усіх можливих фігур з одним і тим самим периметром має найбільшу площу? Відповідь, що шуканою фігурою є круг, і складає зміст теореми, яку Штейнер називає «головною» у своїх дослідженнях. Проте не зважаючи на те, що Штейнер наводить аж п’ять доведень цієї теореми, вона залишається, по суті, недоведеною. Ця прогалина була заповнена пізніше іншими математиками. Так, Едлеру вдалося використати один з методів самого Штейнера (а саме: п’ятий метод) для отримання безуперечно строгого доведення того, що круг має більшу площу, ніж будь-яка інша плоска фігура однакового з ним периметру. Проте з’ясування суті дефекту у міркуваннях Штейнера сприяло виникненню ідей, які лягли в основу сучасної строгої побудови математичного аналізу.

В ході виконання дослідження було розглянути основні властивості ізопериметричних фігур, які вивчаються в шкільному курсу математики, а також розроблено факультативний курс з теми дослідження, який було впроваджено на гурткових заняттях з математики для учнів старших класів. Проведений педагогічний експеримент підтвердив гіпотезу дослідження: використання факультативного курсу під час вивчення математики забезпечує підвищення якості геометричної підготовки випускників за рахунок свідомого, зацікавленого, мотивованого ставлення учнів до навчання; активізацію самостійної навчальної та науково-дослідної діяльності учнів; формування особистісних якостей учнів, що відповідають соціальним вимогам щодо підготовки сучасного випускника середньої школи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Актершев С. П. Задачи на максимум и минимум / Актершев С. П. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 192 с/
2. Александров А. Д. О геометрии / А. Д. Александров // Математика в шк. – 1990. – № 3. – С. 56–57.
3. Александров А.Д. Геометрия для 7–9 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение. – 1991. – 416 с.
4. Афанасьев В. В. Профессионализация предметной подготовки учителя математики в педагогическом вузе: Монография. / Афанасьев В. В., Поваренков Ю. П., Смирнов Е. И., Шадриков В. Д. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2000. – 389 с.
5. Баврин И.И. Старинные задачи / И.И. Баврин, Е.А. Фрибус – М.; Просвещение, 1994. – 128 с.
6. Бевз В.Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: монографія / В.Г. Бевз. – К.: НПУ імені Драгоманова, 2005. – 360 с.
7. Бевз В.Г. Практикум з історії математики. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – 312 с.
8. Бевз В.Г. Практикум з історії математики: навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів / В.Г. Бевз. – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2008. – 312 с.
9. Бевз Г.П. Методи навчання математики / Г. Бевз – Х.: Вид. група «Основа». – 2003. – 96 с.
10. Болтянский В. Г. Лекции и задачи по элементарной математике / В. Г. Болтянский. – М. : Наука, 1971. – 592 с.
11. Болтянский В. Г. Элементарная геометрия: Кн: для учителя / В. Г. Болтянский . – М. : Просвещение, 1985. – 319 с.

12. Бурбаки Н. Очерки по истории математики / Н. Бурбаки. – М.: Просвещение, 1963. – 346 с.

13. Варфоломеев В. В. Вписанные многоугольники и полиномы Герона /Варфоломеев В. В. // Матем. сб., 2003. – Т. 194. – № 3. – С. 3-24.

14. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины 19 столетия / Г. Вилейтнер. – М.: Просвещение, 1960. – 346 с.

15. Габович И.Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач / Габович И.Г. – Радянська школа, 1989. – 162 с.

16. Глейзер Г.И. История математики в школе VII – VIII кл. / Г.И. Глейзер – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.

17. Грузін О.І. Система опорних фактів шкільного курсу геометрії / О.І. Грузін, О.Є, Неліна. – Х.: Світ дитинства, 2000. – 168 с.

18. Делоне Б. Н. Сборник геометрических задач : пособие для учителей средней школы / Б. Н. Делоне, О. К. Житомирский, А. И. Фетисов. – М.: УЧПЕДГИЗ, 1951. – 96 с

19. История математики в 3 т.; [Текст]/ под ред. А.П. Юшкевич — М.: Наука.; — т.2 — 1970, 301с.

20. История математики в 3 т.; [Текст]/ под ред. А.П. Юшкевич — М.: Наука.; — т.3 —1970. – 496 с.

21. Киселев А.П. Элементарная геометрия. Книга для учителей / А.П. Киселев. – М.: Просвещение. – 1980. – 286 с.

22. Кольман Э. История математики в древности / Э. Кольман. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 2016. – 236 с.

23. Крижанівський Д.А. Ізопериметри. Максимальні і мінімальні властивості геометричних фігур / Під ред. проф. І.М. Яглома. – Київ: Радянська школа, 1987. – 192 с.

24. Лінник Г.Б. Навчальний посібник з елементарної математики для школярів та студентів / Г.Б, Лінник, Б.С. Лінник, С.М. Решетнікова. – Х.: Парус, 2005. – 384 с.

25. Матяш О. Геометрична компетентність як складова математичної компетентності учнів. / Ольга Матяш // Математика в рідній школі. – 2016.- №3. – С. 28-32

26. Михалін Г. Щодо визначення поняття геометричного тіла у шкільному курсі геометрії / Г. Михалін, В. Швець, Т. Снігур // Математика в рід. шк.: наук.-метод. журн. – 2015. – N 6. – С. 17-21.

27. Мороз. М. Многокутники з непарною кількістю сторін навколо яких можна описати коло / Мороз. М. // Математика в рідній школі. – 2015. – № 5. – С. 37-41.

28. Нейгебауэр О. Лекции по истории античных математических наук. Догреческая математика / О. Нейгебауэр. – Москва: СИНТЕГ, 2010. – 954 с.

29. Ненхо Т. Вивчення шкільної геометрії як засіб розвитку різних видів мислення учнів / Т. Ненхо // Математика в школі. – 2003. – № 2. – С. 34– 35.

30. Самарук Н. Професійна компетентність майбутнього математика та її складові. Педагогічний дискурс. 2017. Вип. 22. С. 146–152. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/0peddysk_2017_22_28

31. Сокол І. Застосуваня аксіом стереометрії до розв'язування задач / Ірина Сокол, Олена Завальнюк // Математика в рід. шк. : наук.-метод. журн. – 2014. – N 6. – С. 20-21.

32. Скуратовський Р.В. Критерій вписаності в коло довільного n-кутника / Скуратовський Р.В. // Всеукраїнська науково-методична конференція “Сучасні науково-методичні проблеми математики”. – С. 80-82.

33. Скуратовський Р.В. Критерії вписаності і описаності в коло довільного n-кутника // Міжнародна науково-практична конференції «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики» / Скуратовський Р.В. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. – С. 64-65.

34. Смирнова А. Вписанные и описанные многоугольники / Смирнова А., Смирнов В. // Квант, 2006. – № 4. – С. 33-34.

35. Тесленко І. Ф. Питання методики геометрії (в 10–11 кл.) / І. Ф. Тесленко. – К.: Радянська школа, 1962. – 356 с.

36. Хрестоматия по истории математики. – М.: Просвещение, 2007. – 531 с.

37. E.Pehkonnen. Use of open-ended problems in mathematical classroom. – Helsinki University (Finland), Research Report 176, 1997. – 130 p.

38. Alexander D. C. Elementary Geometry for College Students / D. C. Alexander, G. M. Koeberlein. – Belmont. – (5).

39. Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. B.G. Teubner, 1875.

40. Steiner, Jakob // Allgemeine Deutsche Biographie (ADB). Bd. 35, Duncker & Humblot, Leipzig 1893, S. 700–703.

ДОДАТКИ

МАТЕРІАЛ ДЛЯ ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТЬ З МАТЕМАТИКИ З ТЕМИ «ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ»

Перші задачі на максимум і мінімум з’явилися в дуже далекі часи: класична ізопериметрична задача обговорювалась ще в V ст. до н. е. Довгий час кожна задача на екстремум розв’язувалась індивідуально. В XVII ст. виникла необхідність створення загальних методів їх розв’язання. Такі методи були розроблені П. Ферма, І. Ньютоном, Г. Лейбніцем та іншими – спочатку для однієї, а пізніше для нескінченної кількості змінних.

Із загальної кількості задач, запропонованих учням старших класів на олімпіадах різних рівнів кількість геометричних задач на максимум і мінімум коливається від 7,5 – 10%. Причому має місце тенденція до їх збільшення.

Розв’язування таких задач сприяє поглибленню знань учнів. Через задачу вони мають змогу ознайомитися з екстремальними властивостями геометричних фігур, вчаться застосовувати їх до розв’язування прикладних задач. Розв’язуючи такі задачі, учні бачать, з одного боку, абстрактний характер математичних понять, і, з другого боку, велике ефективне застосування їх до вирішення життєвих практичних проблем.

Теорія лінійного програмування охоплює величезне число всіляких економічних задач. Математичні методи лінійного програмування знайшли ефективне застосування при плануванні транспортних перевезень, при розробці виробничих планів, тощо.

Навчання учнів розв’язуванню задач на максимум і мінімум стало особливо актуальним у наш час, у зв’язку із зростанням потреб економіки, техніки.

Існує три основні етапи пошуку розв'язків задачі на знаходження екстремумів.

1.Формалізація задачі.

2.Засобами математичного аналізу знаходять найбільше або найменше значення отриманої функції на заданому проміжку.

3.Інтерпретація знайденого розв'язку з урахуванням умови задачі.

Описаний спосіб пошуку екстремуму є основним. Його називають ще *методом математичного моделювання* або *методом опорних функцій*. Ним можна користуватися в школі тільки починаючи з десятого класу, коли розв'язання задачі зводиться до дослідження функції, яка разом з її похідною має досить простий вигляд.

Згадаємо приклад однієї відомої старовинної задачі, яка належить видатному математику минулого.

Задача 1 (*Архімеда*). *Знайти кульовий сегмент, який містить максимальний об'єм серед усіх сегментів, що мають задану площу сферичної поверхні.*

Запропонований Архімедом спосіб розв'язання цієї задачі вимагає громіздких алгебраїчних перетворень та допоміжних побудов, зокрема побудови конуса, рівновеликого кульовому сегменту, що досліджується.

Застосування похідної дає змогу отримати нескладний, компактний спосіб розв'язання задачі Архімеда.

Розв'язання.

1. Формалізація. Нехай R – радіус кулі, а h – висота кульового сегмента. Об'єм кульового сегмента, як відомо, дорівнює $\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$, а площа його бічної поверхні $2\pi Rh$. Оскільки площу бічної поверхні задано, $2\pi Rh = a$, то $R=\frac{a}{2\pi h}$. Підставимо цей вираз замість R у

формулу для обчислення об'єму і, враховуючи, що $h \le 2R = \dfrac{a}{\pi h}$, отримаємо таку формалізацію: $f_0(h) = \dfrac{ha}{2} - \dfrac{\pi h^3}{3} \to \max$, $0 \le h \le \sqrt{\dfrac{a}{\pi}}$.

2. Необхідна умова екстремуму функції $f_0'(h) = 0$.

Таким чином, $f_0'(h) = \left(\dfrac{ha}{2} - \dfrac{\pi h^3}{3}\right)' = \dfrac{a}{2} - \pi h^2$ тобто $f_0'(h) = 0$ лише тоді, коли $h = \sqrt{\dfrac{a}{2\pi}}$.Отже, $h = \sqrt{\dfrac{a}{2\pi}}$ є критичною точкою функції $f_0(h)$

Функція f_0 неперервна, диференційована всюди і розглядається на скінченому відрізку, тому розв'язок шукаємо серед точок: $f_0(0) = 0$, $f_0\left(\sqrt{\dfrac{a}{2\pi}}\right) = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{6\sqrt{\pi}}$, $f_0\left(\sqrt{\dfrac{a}{\pi}}\right) = \dfrac{a^2}{6\sqrt{\pi}}$. Максимальне значення функція набуває в точці $\sqrt{\dfrac{a}{2\pi}}$. За умови, що $a = 2\pi Rh$, знайдемо $h = R$.

3. Шуканий кульовий сегмент є півкулею, висота якої дорівнює радіусу кулі.

Відповідь. $h = R$.

Методом математичного моделювання можна розв'язати велику кількість геометричних задач. Наведемо приклади.

1. Від каналу завширшки *a* під прямим кутом до нього відходить канал завширшки *b*. Стінки каналів прямолінійні. Знайти найбільшу довжину колоди *l*, яку можна сплавляти по цих каналах з одного в другий.

2. Площа рівнобедреної трапеції з кутом при основі *60*° дорівнює *2* дм^2. Знайти висоту трапеції найменшого периметра.

3. У півкруг радіуса *R* вписати рівнобедрену трапецію найбільшого периметра так, щоб одна її основа збігалася з діаметром півкруга.

Особливим типом задач на знаходження екстремумів є задачі лінійного програмування, які розв'язуються також без допомоги похідної. Не можна застосувати похідну і при розв'язанні багатьох геометричних задач. Для їх розв'язання застосовують такі методи: метод оцінювання, метод перебору, метод перетворення площини.

1. Суть *методу оцінювання* полягає в тому, що розглядається конкретна геометрична фігура F виділяється одна або кілька величин, які її характеризують. Треба оцінити виділену величину або сукупність величин, тобто довести, що значення x задовольняє одній з нерівностей $x \le M$ або $x \ge m$, де m і M визначаються умовами задачі. Об'єктом оцінювання може бути граничне значення площі, відстані, величини кута.

Задача 2. *Точка M рухається по контуру квадрата ABCD (рис. 1). Під яким найменшим кутом можна побачити діагональ квадрата з точки M?*

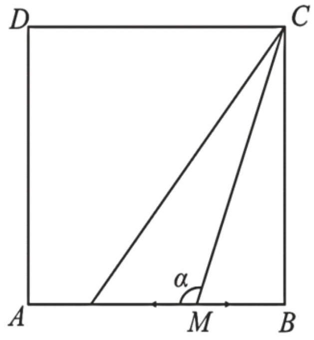

Рис. 1

Розв'язання.

Очевидно, що значення кута α, під яким видно діагональ AC з точки M, знаходиться в межах $\angle ABC \le \alpha < 135°$ Враховуючи, що всі кути квадрата дорівнюють $90°$, отримаємо $90° \le \alpha < 135°$. Тому найменша величина кута α, під яким видно з точки M діагональ квадрата, дорівнює $90°$.

Відповідь. 90°.

Методом оцінювання можуть бути розв'язані, наприклад, такі задачі.

1. На озері, яке має форму кола, розташований об'єкт завдовжки ОА (О - центр кола). В якому місці на березі має зупинитися спостерігач, щоб якомога краще роздивитись об'єкт ОА?

2. Відстань від пункту А до пункту В дорівнює 4 км, а від пункту В до пункту С – удвічі більша. Яка найбільша та найменша відстань може бути між пунктами А та С?

3. Який з усіх паралелограмів із заданими діагоналями a та b має найбільшу площу?

2. Суть *методу перебору* полягає в тому, що спочатку виділяють послідовність точок $\{x_i\}_i^n \in C$. Потім послідовно знаходять всі значення функції $f(x_1)$, $f(x_2),\ldots,$ $f(x_n)$. Ці обчислення тривають доти, поки не знайдеться таке k, що $f(x_k) \le f(x_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Цей метод ефективний і теоретично обґрунтований для скінченої множини допустимих значень змінної.

Задача 3. *З пластинки треба вирізати прямокутний трикутник з катетом 15 см. Якими натуральними числами повинні виражатися довжини сторін, щоб периметр трикутника був мінімальним?*

Розв'язання.

Використовуючи теорему Піфагора, розв'язання задачі зводимо до знаходження $\min(a+c)$, якщо $c^2 - a^2 = 225$, де c і a – натуральні числа. Перебираючи можливі значення для c і a, отримаємо, що периметр трикутника набуває мінімального значення $P_{\min} = 40$ (см), якщо невідомі катет і гіпотенуза набувають значень 8 см та 17 см відповідно.

Відповідь. 8 см, 17 см.

Цей метод не є універсальним, тому що він пов'язаний з розв'язуванням задач, які розглядають скінчену множину елементів.

Методом перебору можна розв'язати, наприклад, такі задачі.

1. З квадрата вирізати шестикутник найбільшої площі.

2. На скільки частин, що не перетинаються, (виключаючи їх межі), розбивають площину два кола різних радіусів?

3. Відрізок даної довжини рухається так, що кінці його перемішуються по сторонах прямого кута. При якому положенні цього відрізка площа

трикутника, що відтинається, буде найбільшою?

3. Суть *методу перетворення площини* полягає в наступному: нехай треба знайти екстремум елемента *x* фігури *F*, однозначно визначеного елементами *x* та a_i (*i*=1, 2,…, *n*). Знаходження екстремуму *x* складається з етапів:

1) надамо елементу *x* певне значення *x*=*c* і розв’яжемо задачу на побудову фігури F' за даними елементами *x* і a_i;

2) вважаючи елемент *c* змінною величиною, виконаємо необхідні перетворення площини, зазначивши ті особливості, які виникають при досягненні елементом *x* максимального чи мінімального значення. Виділення вказаної особливості дає змогу зробити висновок про екстремум елемента *x*

фігури *F*.

Під час розв’язування геометричних задач на екстремуми з усіх перетворень площини частіше використовується *осьова симетрія*. Наведемо приклад важливої геометричної задачі на екстремум, яка може бути застосована учнями при розв’язуванні інших задач.

Задача 4. *Дано пряму l та дві точки A і B, що лежать по один бік від неї. Знайти найкоротший шлях AZB, якщо точка Z належить цій прямій.*

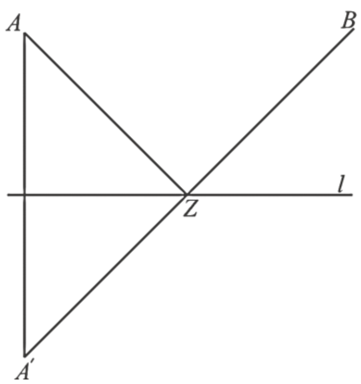

Рис. 2

Розв'язання.

Побудуємо точку $A' = S_l(A)$ (рис. 2). Проведемо пряму $A'B$, яка перетне пряму l у точці Z. За властивостями осьової симетрії $AZ = A'Z$. Тому шлях AZB можемо замінити шляхом $A'ZB$, який є найкоротшим, бо точки A', Z та B лежать на одній прямій. Таким чином, буде побудована шукана точка Z, а отже, і найкоротший шлях, що з'єднує дані точки A та B з точкою Z на прямій l.

Паралельне перенесення частіше застосовують при розв'язуванні задач на знаходження найменшої відстані між даними та шуканими точками, яка залежить від розташування відповідного відрізка. До них належить задача наступного практичного змісту:

Задача 5. *Необхідно побудувати міст через річку з паралельними берегами, щоб з'єднати найкоротшим шляхом пункти A та B, які розташовані по різні боки від річки.*

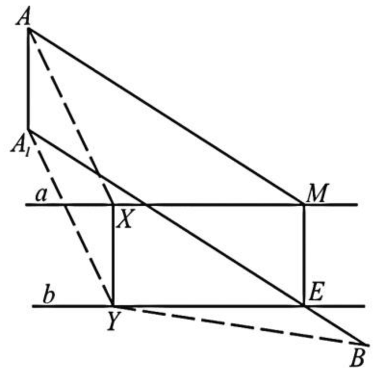

Рис. 3

Розв'язання.

Виконаємо паралельне перенесення точки A на вектор AA_1 такий, що $AA_1 = XY$ та $AA_1 \perp a$, де XY – довжина мосту (рис. 3). Побудуємо відрізок A_1B, який перетне пряму b в точці E. Проведемо $EM \perp a$ і сполучимо точки A та M. Відрізок A_1B – найкоротша відстань між двома точками A_1 та B. Вона завжди менша будь-якої ламаної, що їх сполучає.

Отже, шукане місце для мосту – ME.

Відповідь. ME.

Методом перетворення площини можна запропонувати учням розв'язати, наприклад, такі задачі:

1. На прямій l побудувати точку X так, щоб різниця між AX та BX була найбільшою. A, B – точки, що не належать прямій l.

2. Через точку A що лежить всередині даного кута, провести коло найбільшого радіуса так, щоб воно дотикалося до сторін кута.

3. Дано $\angle ABC$ та точка D всередині нього. Побудувати трикутник найменшого периметру так, щоб однією з його вершин була точка D, а дві інші лежали б на сторонах кута.

Планіметричні задачі на відшукання найбільших і найменших значень зручно вирішувати за наступним планом:

1. Виявляють величину (тобто величину, найбільше або найменше значення якої потрібно знайти), що оптимізується, і позначають її, наприклад, буквою y (або S, P, r, R залежно від фабули задачі).

2. Одну з невідомих величин (сторону, кут) оголошують незалежною змінною і позначають буквою x; встановлюють реальні (у відповідності з умовами задачі) межі зміни x.

3. Виходячи з конкретних умов даної задачі, виражають величину y через x і відомі, тобто задані за умовою задачі, величини (етап геометричного розв'язування задачі).

4. Для отриманої на попередньому етапі функції $y= f(x)$ знаходять найбільше або найменше значення (залежно від вимог завдання) на проміжку реальної зміни x, знайденому в пункті 2.

Інтерпретують результат пункту 4 для даної конкретної геометричної задачі.

Наведемо приклади розв'язування задач згідно даного плану.

1. *На колі радіуса R дано точки A і B, відстань між якими дорівнює a, і довільна точка C. Чому дорівнює найбільше значення виразу $AC^2 + BC^2$ (рис.1.4)?*

Розв'язання.

Величиною, що оптимізується є вираз $AC^2 + BC^2$; Нехай $AC^2 + BC^2 = y$.

Виберемо незалежну змінну: нехай $x = \angle CAB$. Межі цієї змінної: $0 < x < \pi - \gamma$, де $\gamma = \angle ACB$ (цей кут не залежить від вибору точки *C*, оскільки завжди вимірюється половиною меншої дуги *AB);* зрозуміло, що точку *C* за змістом задачі треба вибирати на більшій дузі *AB*.

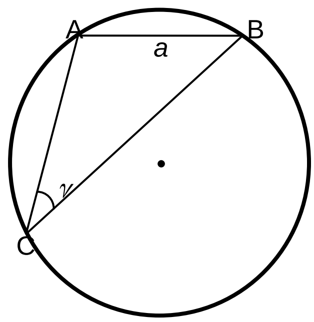

Рис. 4

Виразимо *y*, тобто $AC^2 + BC^2$ через *x, a* і *R*. За теоремою синусів

$$BC = 2R\sin x,\ AC = 2R\sin(\pi - x - \gamma) = 2R\sin(x + \gamma).$$

Оскільки, $AB = 2R\sin\gamma$, то отримаємо, що $a = 2R\sin\gamma$, звідки: $\sin\gamma = \dfrac{a}{2R}$.

В результаті отримаємо:

$$y = AC^2 + BC^2 = (2R\cdot\sin x)^2 + (2R\cdot\sin(x+y))^2 = 4R^2(\sin^2 x + \sin^2(x+y)),$$

де $\sin\gamma = \dfrac{a}{2R}$ (математична модель задачі складена).

Розглянемо функцію

$$y = 4R^2(\sin^2 x + \sin^2(x+y)).$$

Потрібно знайти її найбільше значення на проміжку $(0;\pi-\gamma)$. Зробимо деякі перетворення виразу, який задає функцію. Маємо:

$$y=4R^2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos(2x+2\gamma)}{2}\right)=2R^2(2-(\cos 2x+\cos(2x+2\gamma)))=4R^2(1-\cos(2x+\gamma)\cos\gamma)$$

Найбільше значення отриманого виразу можна знайти без похідної: зрозуміло, що воно досягається там, де $\cos(2x+\gamma)$ досягає найменшого значення, тобто коли $\cos(2x+\gamma)=-1$. Це буде при $2x+\gamma=\pi$, тобто при $x=\dfrac{\pi-\gamma}{2}$. Відмітимо, що точка належить проміжку $(0;\pi-\gamma)$.

Обчислимо найбільше значення функції *y:*

$$y=4R^2(1-(-1)\cos\gamma)=$$

$$=4R^2(1+\cos\gamma)=4R^2(1+\sqrt{1-\sin^2\gamma})=4R^2\left(1+\sqrt{1-\frac{a^2}{4R^2}}\right)=2R(2R+\sqrt{4R^2-a^2}).$$

(на цьому закінчується етап розв'язування задачі всередині складеної математичної моделі).

Повертаючись до висхідної задачі, робимо наступний висновок: найбільше значення виразу AC^2+BC^2 рівне $2R(2R+\sqrt{4R^2-a^2})$; воно досягається, коли $\angle CAB=\dfrac{\pi-\gamma}{2}$, тобто коли трикутник *ABC* рівнобедрений *(AC=CB).*

Відповідь. $2R(2R+\sqrt{4R^2-a^2})$.

2. *Розглядаються всілякі трапеції, вписані в коло радіуса R. Знайти бічну сторону трапеції найбільшої площі, якщо одна з основ трапеції рівна* $R\sqrt{3}$.

Розв'язання. 1. Величина, що оптимізується, - площа *S* трапеції.

2. Позначимо через *x* кут при відомій основі трапеції. Найменше можливе

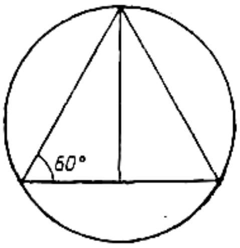

Рис. 5

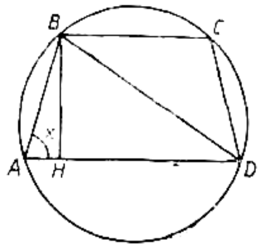

Рис. 6

значення цього кута *60°*, тоді трапеція вироджується в правильний вписаний трикутник, його сторона, як відомо, рівна $R\sqrt{3}$ (рис. 4). З іншого боку, *x* повинен бути менше *120°*, оскільки дуга, на яку опирається вписаний кут при основі трапеції, менша *240°* (рис. 5).

Отже, встановлено межі для введеної незалежної змінної:

$$60° \le x < 120°.$$

3. Виразимо площу *S* трапеції *ABCD* через *x* і *R*. Маємо:

$$AD = R\sqrt{3},\ BD = 2R\sin x,\ \angle ABD = \frac{1}{2}\cup AD = 60°,\ \angle BDA = 120° - x,$$

$BH = BD\sin(120° - x) = 2R\sin x\sin(120° - x)$ (*BH* — висота).

$$HD = \frac{AD + BC}{2} = BD\cos(120° - x) = 2R\sin x\cos(120° - x)$$

$$S = HD\ BH = 2R\sin x\cos(120° - x)\ 2R\sin x\sin(120° - x) = 2R^2\sin^2 x\sin(240° - 2x).$$

4. Знайдемо найбільше значення функції

$S = 2R^2\sin^2 x\sin(240° - 2x)$ на проміжку $[60°; 120°)$.

1) $S' = 2R^2(2\sin x\cos x\sin(240° - 2x) - 2\sin^2 x\cos(240° - 2x)) = 4R^2\sin x(\sin(240° - 2x)\cos x - \sin x\cos(240° - 2x)) = 4R^2\sin x\sin(240° - 2x - x) = 4R^2\sin x\sin(240° - 3x)$.

2) На проміжку $[60°; 120°)$ S' обертається в нуль лише в точці $x = 80°$.

Нехай маємо $\lim\limits_{x\to 120°} S = 0,\ \lim\limits_{x\to 80°} S = 2R^2\sin^3 80°,\ \lim\limits_{x\to 60°} S = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

Порівняємо значення $2R^2\sin^3 80°$ і $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. Припустимо, що

$2R^2\sin^3 80^{\circ} > \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. Тоді $sin^3 80° > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, звідки $sin^3 80° > \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$, тобто

$sin80° > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ чи $sin\ 80° > sin\ 60°$. Остання нерівність, а з нею і припущення, правильні. Отже, найбільшого значення функція S досягає при $x = 80°$.

Отже, найбільшу площу має трапеція з кутом при основі $80°$. Потрібно було знайти бічну сторону цієї трапеції. З ΔABD (рис. 6) маємо: $AB=2Rsin(120°-x)$. При $x = 80°$ отримаємо: $AB = 2R\ sin\ 40°$.

Відповідь. $AB = 2R\ sin\ 40°$.

Отже, дотримуючись плану розв'язування екстремальних задач при врахуванні основних геометричних нерівностей та теорем, що стосуються даної теми учням буде, на мою думку, набагато простіше засвоїти методику розв'язування геометричних задач на максимум і мінімум.

5. Розв'язування екстремальних задач стереометрії

При розв'язуванні стереометричних задач на відшукання найбільших і найменших значень варто дотримуватись того ж плану, яким керувалися при розв'язуванні планіметричних задач на відшукання найбільших і найменших значень.

Наведемо приклад розв'язування стереометричної задачі за цим планом.

1. Куб перетинається площиною, що проходить через одну з його діагоналей. Доведемо, що найменшу площу має той перетин, що утворить з площиною основи кут $arccos\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

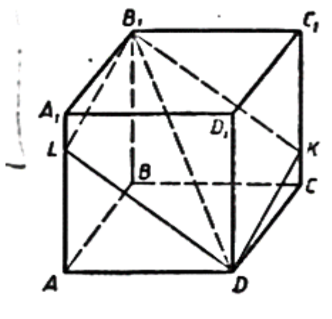

Рис. 7

Доведення. Оптимізується величина S – площа перетину. Нехай ребро куба дорівнює a , а B_1KDL — деякий перетин. Введемо незалежну змінну: $C_1K = x$. За змістом задачі зрозуміло, що $0 < x < a$ – межі зміни x.

Виразимо площу S перетину через x і a. Відмітимо, що в перетині виходить паралелограм, тому що лінії перетину двох паралельних площин із третьою площиною паралельні між собою. Площу паралелограма можна знайти за формулою $B_1K \cdot KD \cdot \sin\alpha, \alpha = \angle B_1KD$. З ΔB_1C_1K знаходимо $B_1K = \sqrt{a^2 + x^2}$, а з ΔDKC знаходимо: $DK = \sqrt{a^2 + (a-x)^2}$. З ΔB_1KD за теоремою косинусів отримаємо: $B_1D^2 = B_1K^2 + KD^2 - 2B_1K \cdot KD\cos\alpha$, тобто

$$(a\sqrt{3})^2 = (a^2 + x^2) + (a^2 + (a-x)^2) - 2\sqrt{a^2 + x^2}\sqrt{a^2 + (a-x)^2}\cos\alpha,$$

звідки після ряду перетворень отримуємо:

$$\cos\alpha = \frac{x^2 - ax}{\sqrt{a^2 + x^2}\sqrt{a^2 + (a-x)^2}}.$$

Тоді

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{(x^2 - ax)^2}{(a^2 + x^2)(a^2 + (a-x)^2)}} = \frac{a\sqrt{2a^2 + 2x^2 - 2ax}}{\sqrt{a^2 + x^2}\sqrt{a^2 + (a-x)^2}}.$$

У підсумку маємо: $S = B_1K \cdot KD\sin\alpha = \sqrt{a^2 + x^2}\sqrt{a^2 + (a-x)^2}$

$$\frac{a\sqrt{2a^2 + 2x^2 - 2ax}}{\sqrt{a^2 + x^2}\sqrt{a^2 + (a-x)^2}} = a\sqrt{2a^2 + 2x^2 - 2ax}$$

Треба знайти найменше значення функції $S(x) = a\sqrt{2a^2 + 2x^2 - 2ax}$ на $[0; a]$

$$S' = a\frac{2x - a}{\sqrt{2a^2 + 2x^2 - 2ax}}.$$

Точок, де S' не існує, у даному випадку немає, тому що знаменник похідної ніде не обертається в нуль: за умовою $a > x$, тоді $a^2 > ax$ і

$2a^2+2x^2-2ax>0$. $S'=0$, якщо $2x-a=0$, тобто при $x=\frac{a}{2}$.

Для того, щоб знайти найменше значення функції, залишилося обчислити значення функції $S(x)$ на кінцях відрізка $[0;a]$ і порівняти їх зі значенням функції в точці $x=\frac{a}{2}$. Маємо: $S(0)=a^2\sqrt{2}$, $S(a)=a^2\sqrt{2}$, $S\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. Найменше значення функції $S(x)$ рівне $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. Воно досягається при $x=\frac{a}{2}$.

У задачі потрібно довести, що кут, який утворить найменший за площею перетин із площиною основи, дорівнює $arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$. Для доведення цього факту скористаємося формулою $S_{осн}=S_{пер}\cos\varphi$, де φ - кут між площинами перетину і основи. Маємо: $a^2=\frac{a^2\sqrt{6}}{2}\cos\varphi$, звідки знаходимо: $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, тобто $\varphi=arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. У кулю вписана правильна n-кутна піраміда. При якому двогранному куті між бічною гранню і площиною основи піраміди об’єм піраміди буде найбільшим?

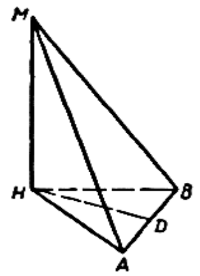

Рис. 8

Розв'язання. Оптимізуємо величина V - об’єм піраміди. Введемо незалежну змінну. Зобразимо на рисунку 1.8 162 n-у частину піраміди: MAB - бічна грань, MH- висота. Позначимо радіус кулі R (допоміжний параметр).Нехай $MB=x$. Межі зміни x: $0<x<2R$.

Виразимо V через x і R. Скористаємося відомою формулою для обчислення описаної кулі у випадку правильної піраміди: $R = \dfrac{b^2}{2H}$, де b - бічне ребро, а H— висота піраміди.

Тоді $R=\dfrac{x^2}{2H}$, звідки $H=\dfrac{x^2}{2R}$. З ΔMBH знаходимо:

$$HB = \sqrt{MB^2 - MH^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^4}{4R^2}}\,.$$

Оскільки AB - сторона правильного n-кутника, то $\angle AHB=\dfrac{2\pi}{n}$, а тому

$$S_{\Delta ABH} = \frac{1}{2}AH \cdot HB\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{4R^2}\right)\sin\frac{2\pi}{n}\,.$$

Отже, $V = \dfrac{1}{3}S_{осн}H = \dfrac{1}{3}n\dfrac{1}{2}\left(x^2 - \dfrac{x^4}{4R^2}\right)\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdot\dfrac{x^2}{2R} = \dfrac{n\sin\dfrac{2\pi}{n}}{12R}\left(x^4 - \dfrac{x^6}{4R^2}\right)$.

Знайдемо найбільше значення функції $V = k\left(x^4 - \dfrac{x^6}{4R^2}\right)$ на інтервалі $(0;2R)$ (для стислості $k = \left(\dfrac{n\sin\dfrac{2\pi}{n}}{12R}\right)$). Маємо: $V' = k\,(4x^3 - \dfrac{6x^5}{4R^2})$

З рівняння $V' = 0$ знаходимо: $x_1 = 0$, $x_2 = R\sqrt{\dfrac{8}{3}}$, $x_3 = -R\sqrt{\dfrac{8}{3}}$. З цих трьох значень інтервалові належить лише $x = R\sqrt{\dfrac{8}{3}}$.

Маємо: $\lim\limits_{x\to 0} V'(x) = \lim\limits_{x\to 2R} V(x) = 0$. Отже, при $x = R\sqrt{\dfrac{8}{3}}$ функція $V(x)$ досягає найбільшого значення. Воно дорівнює $\dfrac{16R^3 n\sin\dfrac{2\pi}{n}}{27}$.

У задачі потрібно знайти кут MDH для піраміди найбільшого об'єму, де MD - висота бічної грані. Нехай $\angle MDH = \varphi$. Маємо: $MH=\dfrac{x^2}{2R} = \dfrac{4R}{3}$ (підставили замість x знайдене вище значення $R\sqrt{\dfrac{8}{3}}$) З ΔBDH знаходимо:

$$HD = HB\ cos\frac{\pi}{n} = \sqrt{x^2 - \frac{x^4}{4R^2}}\cos\frac{\pi}{n} = \frac{2R\sqrt{2}}{3}\cos\frac{\pi}{n}.$$

Тоді $tg\varphi = \frac{SH}{DH} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\frac{\pi}{n}}$. Значить, $\varphi = arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$.

Серед стереометричних задач на дослідження досить часто зустрічаються задачі, розв'язування яких вимагає визначення найбільшого (найменшого) значення величини і порівняння його з деякими значеннями цієї величини.

4. У прямий круговий конус вписано кулю. Чи може відношення об'єму кулі до об'єму конуса набувати значення - $\frac{4}{5}$?

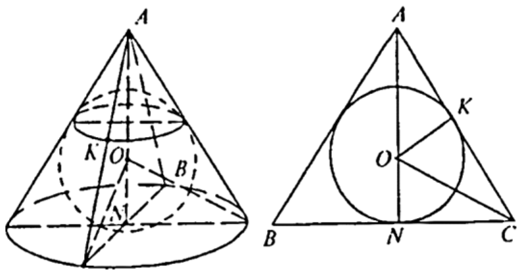

Рис. 9

Розв'язання. Розглянемо осьовий переріз *ABC* конуса і вписаної в нього кулі. ΔABC — рівнобедрений. *(AB=AC),* до якого вписано коло з центром в точні *O* (рис.1.9). Щоб відповісти на питання, слід визначити множину всіх можливих значень відношення об'єму кулі, вписаної в конус, до об'єму конуса. При цьому припускається, що об'єм конуса не дорівнює нулеві, тобто радіус основи конуса і висота конуса відмінні від нуля.

Дослідимо на найбільше (найменше) значення відношення об'єму кулі до об'єму конуса.

1. $\frac{V_{кулі}}{V_{конуса}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot ON^3}{\frac{1}{3}\pi \cdot NC^2 \cdot AN}$.

2. Конус визначаємо радіусом основи *R* і кутом нахилу твірної

конуса до площини основи - $2a$ (для зручності).

3. Позначимо радіус кулі r $(OK = ON = r)$.

4. В прямокутному трикутнику ONC, за властивістю дотичних до кола, вписаного в $\Delta ABC, \angle NCO = \angle KCO = \frac{1}{2}\angle BCA = \alpha$.

$$tg\alpha = \frac{ON}{NC} = \frac{r}{R}, \; tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2\frac{r}{R}}{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2} = \frac{2rR}{R^2-r^2}.$$

З прямокутного ΔNAC $AN = NC \cdot tg\angle ACN = Rtg2\alpha = R\frac{2rR}{R^2-r^2} = \frac{2rR^2}{R^2-r^2}$.

5.

$$\frac{V_{кулі}}{V_{конуса}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot r^3}{\frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \frac{2rR^2}{R^2-r^2}} = \frac{2r^2(R^2-r^2)}{R^4} = 2\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^4\right) = 2(tg^2\alpha - tg^4\alpha) = 2(t^2-t^4),$$

де $t = tg\alpha$.

6. $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}, \; 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, отже, $0 < tg\alpha < 1, \; t \in (0;1)$.

7. $\left(\frac{V_{кулі}}{V_{конуса}}(t)\right) = 2(2t-4t^3) = 4(t-2t^3)$; $4(t-2t^2) = 0$; $t - 2t^3 = 0$; $t(1-2t^2) = 0$

; $t = 0$ або $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Проміжку, визначеному в пункті 6, належить тільки значення $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Похідна при переході через точку $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ змінює знак з „+” на „-”, тому

$$\max_{t\in(0;1)} \frac{V_{кулі}}{V_{конуса}}(t) = \frac{V_{кулі}}{V_{конуса}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

8. $\max\limits_{t\in(0;1)} \frac{V_{кулі}}{V_{конуса}}(t) = 2\left(\frac{2}{4} - \frac{4}{16}\right) = \frac{1}{2}$.

Порівняємо максимально можливе значення $\frac{1}{2}$ відношення об’єму вписаної в конус кулі до об'єму конуса із значенням $\frac{4}{5}$. З того, що $\frac{1}{2} < \frac{4}{5}$, слідує, що відношення об'єму кулі до об'єму конуса не може набувати значення $\frac{4}{5}$.

Протягом всієї історії математики задачі на екстремум викликали інтерес і бажання розв'язати їх. Можливо, вся справа в тому, що людині властиво прагнення до досконалості? А можливо, в екстремальних задачах завжди присутнє щось витончене, привабливе? І саме це спонукає розв'язувати задачі на максимум і мінімум.