МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп’ютерних наук, фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ЕЛЕМЕНТИ ГРАНИЧНОГО ПЕРЕХОДУ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти “магістр”

Виконала: студентка 2 курсу, 221М групи
Спеціальності 014 Середня освіта
Спеціалізації 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)»
Редько Леся Володимирівна

Керівник кандидат фізико-математичних наук,
доцент Кузьмич Валерій Іванович

Рецензент директор Херсонської
загальноосвітньої школи I-III ступенів № 44
Херсонської міської ради
Перегняк Олександр Адамович

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП …………………………………………………………….. 3

РОЗДІЛ 1. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ

1.1. Поняття границі послідовності та властивості збіжних послідовностей ……………………………………………………... 7

1.2. Граничний перехід та нерівності …………………………… 12

РОЗДІЛ 2. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

2.1. Поняття границі функції та її властивості …………………. 15

2.2. Основні теореми про границю функції в точці …………… 23

РОЗДІЛ 3. ВИВЧЕННЯ ГРАНИЦЬ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

3.1. Застосування означення границі функції в точці та основних теорем про границю …………………………………….. 27

3.2. Неперервність функції в точці ……………………………… 32

3.3. Асимптоти та граничний перехід …………………………… 44

ВИСНОВКИ ………………………………………………………... 48

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ………………………….. 50

ДОДАТКИ ………………………………………………………….. 53

ВСТУП

Актуальність дослідження. Однією з тем, яка вивчається в шкільному курсі математики, є теорія границь. Історія виникнення цієї теорії поринає корінням в далеке минуле. Так, ще грецькі філософи та математики, починаючи з VII ст. і до III ст. до н.е. у своїх міркуваннях підходять до ідеї нескінченності, а потім і до прийомів аналізу нескінченно малих. Проте це не сприяло особливому розвитку даного питання і інтерес до нього почав відновлюватися тільки в епоху Відродження наприкінці XVI ст. Принципово новим кроком уперед виявилося виникнення в філософських школах V ст. до н.е. ідеї нескінченності, яка в різних формах застосовується у математиці та її розділах. Так, Демокріт [12] створює спосіб визначення об’ємів, що являло собою перший варіант методу неподільних, який є одним із вихідних числення нескінченно малих. Стандартним прийомом вимірювання різноманітних площ, об’ємів, які не піддаються визначенню елементарними способами, став метод вичерпування, суть якого полягає в наближенні шуканої величини знизу і зверху послідовностями відомих величин [21].

Прогрес алгебри як теоретичної дисципліни, а не тільки як певного набору практичних правил для розв’язування задач, відображається у розумінні природи ірраціональних чисел, як відносин несумірних величин [18]. Тут же виникають перші ідеї стосовно нескінченно великих і нескінченно малих величин. Вивчення змінних величин та функціональних залежностей сприяє виникненню основних понять математичного аналізу: ідеї нескінченного у явному вигляді, поняття границі, похідної, диференціалу та інтегралу. Створюється аналіз нескінченно малих, у першу чергу у вигляді диференціального та інтегрального числення [26].

Створення нової математики змінних величин у XVII ст. було справою учених передових країн Західної Європи, причому найбільше І. Ньютона та Г. Лейбніца [13]. Крім того, заслуга подальшої розробки теорії про граничні переходи в рамках чистого належить аналізу Даламберу та його послідовникам [14]. Але в тій конкретній формі, яку метод границь набув у теперішній час, він ще не мав строгості так, як числення нескінченно малих. Визначення границі монотонних змінних, було недостатньо. Нові широкі перспективи відкрилися, коли Больцано і Коші встановили основний критерій збіжності послідовності і застосували його [27].

У теперішній час початки математичного аналізу є невід'ємним складовим курсу алгебри старшої школи. В умовах диференційного навчання виділені загальноосвітні та спеціальні обсяги елементів математичного аналізу, що вивчаються в загальноосвітніх та вищих школах і класах з поглибленим вивченням математики. Елементи теорії границь, вивчаються у спеціалізованих математичних школах, ліцеях і гімназіях. Однак не припиняються науково-методичні пошуки, що ставлять на меті удосконалення як ідейно-змістового наповнення теми «Границя» так і методичного забезпечення її викладу, що свідчить про актуальність зазначеної проблематики.

Мета дослідження – розглянути основні положення, що стосуються поняття граничного переходу, а також питання застосування його в шкільному курсі математики.

Об'єктом дослідження виступає теорія границь, а ***предметом дослідження*** – безпосередньо методи та прийоми розв'язування задач із застосуванням граничного переходу.

Виходячи з мети, визначені основні завдання дослідження:

- розглянути основні теоретичні положення, що стосуються поняття границі послідовності;

- розкрити питання про існування границі функції та основні важливі твердження, що стосуються властивостей границі функції в точці;
- розглянути приклади розв’язування задач на застосування граничного переходу, що можуть бути запропоновані при розгляді відповідних тем шкільного курсу математики в класах з поглибленим вивченням математики, або на гурткових заняттях з математики для учнів старших класів загальноосвітніх шкіл.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що були виділені та узагальнені основні відомості з теорії границь, які можуть бути залучені до вивчення границь в шкільному курсі математики. ***Практичне значення*** дипломної роботи полягає в можливості застосування матеріалу студентами та вчителями загальноосвітніх шкіл при викладанні відповідних тем в школі та при різних формах неформальної освіти з математики.

Для вирішення поставлених завдань було застосовано наступні ***методи***: вивчення літератури з теми дослідження, порівняльний аналіз та узагальнення.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Апробація результатів дослідження. За результатами виконаного дослідження було опубліковано тези в збірнику тез Всеукраїнської науково-практичної конференції «Актуальні проблеми природничо-математичної освіти в Україні» (16-17 вересня 2021 р., Херсонський державний університет).

Робота складається з трьох основних розділів. Перший розділ містить теоретичні положення, які стосуються поняття границі послідовності. Зокрема, в ньому розглянуто властивості збіжних послідовностей та питання використання граничного переходу в нерівностях. В другому розділі наведено основні твердження, які стосуються поняття границі функції в точці та властивостей границь. Третій розділ носить прикладний характер та містить добірку прикладів на застосування граничного переходу до розв’язування різноманітних задач, що можуть бути запропоновані при розгляді тем «Границя послідовності» та «Границя функції» шкільного курсу математики.

РОЗДІЛ 1
ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ

1.1. Поняття границі послідовності та властивості збіжних послідовностей

Послідовність – це функція натурального аргументу. Якщо кожному натуральному числу n поставити у відповідність дійсне число x_n, то кажуть, що задана *послідовність* $\{x_n\}$. Інакше послідовність позначають так: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.

Число x_n називається n–м елементом (або n–м членом) послідовності. Елементи послідовності вважаються різними, навіть якщо вони рівні, але мають різні номери. Наприклад, послідовність 1, 1, ..., у якої всі $x_n = 1$. Послідовність може бути задана формулою, яка по заданому n дозволяє вирахувати значення x_n, наприклад, $((-1)^n + 1)/2$. Можна задавати послідовність рекурентно [7], тобто вказувати закон, за яким кожен наступний елемент обчислюється за відомим попереднім, наприклад, арифметична $x_{n+1} = x_n + d$, або геометрична $x_{n+1} = x_n \cdot q$ прогресії [12] (при цьому потрібно визначити один або декілька перших елементів). Можна задавати послідовність, описуючи її елементи, наприклад, x_n – n-й десятковий знак після коми у числа π.

Число a називається *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для будь якого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер N, що залежить від ε, такий, що для всіх номерів $n \geq N$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

У цьому випадку пишуть $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, або

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

У кванторах це означення виглядає наступним чином:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\, N \equiv N_\varepsilon : \forall n \geq N\ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Якщо послідовність має границю, то кажуть, що вона *збігається*. В противному випадку кажуть, що послідовність розбіжна.

Для того, щоб визначити геометричний зміст границі послідовності, перепишемо нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ в такому еквівалентному вигляді

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Тоді зрозуміло, що з геометричної точки зору рівність $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ означає, що всі члени послідовності, починаючи з деякого номера $N(\varepsilon)$, що залежить від ε, знаходяться в ε – околі точки a. Поза цим околом знаходиться, можливо, лише скінчене число елементів, а саме, ті x_n, номера n яких менші, ніж $N(\varepsilon)$.

В термінах околу означення границі можна переформулювати наступним чином [9].

Число a називається *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для будь-якого ε – околу $U_\varepsilon(a)$ числа a знайдеться такий номер $N(\varepsilon)$, починаючи з якого всі члени послідовності належать цьому околу, тобто

$$\forall\, U_\varepsilon(a) \exists N: \forall n \geq N\ x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Приклад 1.1. Нехай $x_n = a\ (n = 1,2,\dots)$. Така послідовність називається стаціонарною. Зрозуміло, що $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Приклад 1.2. Нехай $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 .$$

Покладемо значення $\varepsilon > 0$ і розглянемо нерівність

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Вона виконується, якщо тільки $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Покладемо $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, де $[b]$ позначає цілу частину числа b. Тоді з нерівності $n \geq N$ маємо, що $n > \frac{1}{\varepsilon}$, а отже,

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Таким чином, ми показали за означенням, що число $a = 0$ є границею послідовності x_n.

Приклад 1.3. Покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

Задамо $\varepsilon > 0$. Тоді отримаємо, що нерівність

$$\left|\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - 0\right| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

справедлива, якщо тільки $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$. тому достатньо взяти $N = [\frac{1}{\varepsilon^2}]$+1.

Зауваження. При доведенні рівності $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ за означенням не потрібно знаходити найменший номер N, починаючи з якого виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. Достатньо вказати лише будь-який номер $N(\varepsilon)$, починаючи з якого $|x_n - a| < \varepsilon$.

Число a не є границею послідовності $\{x_n\}$, якщо знайдеться таке додатне ε, що для будь-якого N існують $n \geq N$, таке, що $|x_n - a| \geq \varepsilon$, тобто

$$\exists\varepsilon > 0: \forall n \geq N: |x_n - a| \geq \varepsilon.$$

У цьому записі число N не може залежати від ε, а n залежить від N.

В термінах околу маємо, що число a не є границею послідовності $\{x_n\}$, якщо знайдеться такий окіл числа a, поза якого знаходиться нескінченно багато елементів послідовності x_n [11].

Тепер легко можна сформулювати в кванторах означення розбіжної послідовності:

$$\forall a\ \exists\varepsilon = \varepsilon(a) > 0: \forall N\ \exists n \geq N: |x_n - a| \geq \varepsilon.$$

Приклад 1.4. Доведемо, що послідовність $x_n = (-1)^n$ розбіжна. Задамо довільне $a \in \mathbb{R}$ і покладемо $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Якщо $a \geq 0$, то поза околом $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ знаходяться елементи послідовності з непарними номерами, а якщо $a < 0$, то з парними номерами. Отже, яке б N ми не взяли, знайдеться $n \geq N$ (наприклад, $n = 2N + 1$, якщо $a \geq 0$ і $n = 2N$, якщо $a < 0$), для якого справедлива нерівність $|x_n - a| \geq \varepsilon$.

Теорема 1.1 (єдиність границі). Якщо послідовність має границю, то вона єдина.

Доведення. Припустимо обернене. Нехай

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a' \text{ і } \lim_{n\to\infty} x_n = a'' \text{ і } a' \neq a''.$$

Виберемо

$$\varepsilon = \frac{1}{2}|a' - a''| > 0.$$

Тоді знайдуться номери N' і N'', такі, що для всіх $n \geq N'$ справедлива нерівність $|x_n - a'| < \varepsilon$, а для всіх $n \geq N''$ справедлива нерівність $|x_n - a''| < \varepsilon$. Покладемо $N = \max\ \{N', N''\}$. Тоді при $n \geq N$ нерівності

$$|x_n - a'| < \varepsilon \text{ і } |x_n - a''| < \varepsilon$$

повинні виконуватися одночасно, що неможливо, оскільки при обраному ε околи $(a' - \varepsilon, a' + \varepsilon)$ і $(a'' - \varepsilon, a'' + \varepsilon)$ не мають спільних точок.

Числова послідовність $\{x_n\}$ називається *обмеженою зверху* (*знизу*), якщо існує таке число $M(m)$, що для всіх номерів $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність $x_n \leq M (x_n \geq m)$. Послідовність називається *обмеженою*, якщо вона обмежена зверху і знизу.

Неважко показати, що обмеженість послідовності $\{x_n\}$ рівносильна тому, що

$$\exists A > 0 : \forall\, n \in \mathbb{N}\ |x_n| \leq A.$$

З геометричної точки зору обмеженість послідовності означає, що всі її елементи знаходяться в деякому околі нуля [23].

Теорема 1.2 (необхідна умова збіжності). Якщо послідовність збігається, то вона обмежена.

Доведення. Нехай $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Задамо $\varepsilon = 1$ і знайдемо номер N такий, що для всіх $n \geq N$ справедлива нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. Серед скінченого числа елементів $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ знайдемо найбільший x_{n1} і найменший x_{n2}. Тоді, очевидно, нерівність

$$m = \min(a - 1, x_{n2}) \leq x_n \leq M \equiv \max(a + 1, x_{n1})$$

має місце для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Наведемо ще одне доведення. Для $\varepsilon = 1$ знайдемо номер N, такий, що $|x_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n \geq N$. Нехай

$$A = \max\ (|a| + 1, |x_1|, \dots, |x_{N-1}|).$$

Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$, очевидно, справедлива нерівність $|x_n| \leq A$.

Обернене до доведеної теореми твердження не має місця, тобто з обмеженості послідовності не випливає збіжність. Дійсно, як було показано у прикладі 1.4, послідовність $x_n = (-1)^n$ розбіжна. Разом з цим вона обмежена, оскільки для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність $|(-1)^n| \leq 1$.

В кванторах означення необмеженої послідовності має наступний вигляд

$$\forall A\ \exists n \in \mathbb{N}: |x_n| > A.$$

З теореми 1.2 випливає

Наслідок (достатня умова розбіжності). Якщо послідовність необмежена, то вона розбіжна.

Приклад 1.5. Нехай

$$x_n = q^n, \text{ де } |q| > 1.$$

Покажемо, що ця послідовність необмежена. Для доведення будемо використовувати відому нерівність Бернуллі

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha,$$

яка легко може бути доведена методом математичної індукції [16].

Покладемо $\alpha = |q| - 1 > 0$. Задамо довільне $A > 0$. В силу нерівності Бернуллі

$$|q^n| = |q|^n = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha > n\alpha > A,$$

якщо тільки $n > \frac{A}{\alpha}$. Отже, для будь-якого $A > 0$ знайдеться номер $n = \left[\frac{A}{\alpha}\right] + 2$, такий що $|q^n| > A$. Це означає що послідовність $\{x_n\}$ необмежена, а отже, в силу наслідку з теореми 1.2, вона розбігається.

Теорема 1.3. *Якщо* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, *то* $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

Доведення. Ця теорема випливає з нерівності

$$\big||x_n| - |a|\big| \leq |x_n - a|.$$

Дійсно, задамо $\varepsilon > 0$ і, користуючись умовою теореми, знайдемо такий номер N, що для всіх $n \geq N$ справедлива нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. Тоді для $n \geq N$ також будуть виконуватися і нерівності

$$\big||x_n| - |a|\big| < \varepsilon.$$

Зауваження. Твердження, обернене до даної теоремі, невірне. Наприклад, послідовність $x_n = (-1)^n$ розбіжна, і в той же час,

$$\lim_{n\to\infty}|(-1)^n| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Легко, проте, бачити, що теорема 1.3 може бути обернена при $a = 0$. Дійсно, достатньо використати рівність

$$\big||x_n| - 0\big| = |x_n - 0| = |x_n|.$$

1.2. Граничний перехід та нерівності

Теорема 1.4. Нехай $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$ і $x_n \leq y_n$ $(n = 1,2,\dots)$. Тоді $a \leq b$.

Доведення. Надамо значення $\varepsilon > 0$ і знайдемо номер N_1 , такий, що для всіх $n \geq N_1$ справедлива нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. Звідси, зокрема, випливає, що $x_n > a - \varepsilon, n \geq N_1$. Далі, для цього ж ε знайдемо номер N_2, такий, що для всіх $n \geq N_2$ виконується нерівність $|y_n - b| < \varepsilon$, з якої випливає, що

$$y_n < b + \varepsilon,\ n \geq N_2.$$

Покладемо $N = \max\ (N_1, N_2)$. Тоді для $n \geq N$, користуючись умовою теореми, отримаємо

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n < b + \varepsilon.$$

Звідси маємо $a - \varepsilon < b + \varepsilon$, або $a < b + 2\varepsilon$. Так як $\varepsilon > 0$ довільне, то $a \leq b$.

Наведемо ще одне доведення теореми 1.4. Припустимо, що $a > b$.

Тоді покладемо $\varepsilon = (a-b)/2$ і знайдемо номери N_1 і N_2, такі, що

$$|x_n - a| < \varepsilon (n \geq N_1) \text{ і } |y_n - b| < \varepsilon (n \geq N_2).$$

Якщо взяти $n \geq \max\ (N_1, N_2)$, то отримаємо

$$x_n > a - \varepsilon = \frac{a+b}{2} = b + \varepsilon > y_n,$$

що суперечить умові $x_n \leq y_n$ теореми.

Зауваження. З умови $x_n < y_n$ $(n = 1,2,\dots)$ не випливає, що $a < b$. Дійсно, нехай, наприклад, $x_n = 0, y_n = \frac{1}{n} (n = 1,2,\dots)$. Тоді

$$x_n < y_n \ (n = 1,2,\dots),$$

але

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Теорема 1.5. Нехай $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ і число $b < a$. Тоді існує такий номер N, що при всіх $n \geq N$ справедлива нерівність $x_n > b$.

Доведення. Покладемо $\varepsilon = a - b > 0$ і знайдемо номер N, такий, що $|x_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n \geq N$. Звідси для $n \geq N$ отримаємо

$$x_n > a - \varepsilon = b.$$

Теорема 1.6 (теорема Гур'єва про три границі). Нехай три границі $\{x_n\}, \{y_n\}\ i\ \{z_n\}$ такі, що $x_n \leq y_n \leq z_n$ $(n = 1,2,\dots)$. Якщо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

то послідовність $\{y_n\}$ збігається і $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

Доведення. Надамо значення $\varepsilon > 0$ і знайдемо номери N_1 і N_2, такі, що

$$|x_n - a| < \varepsilon (n \geq N_1) \text{ і } |z_n - a| < \varepsilon (n \geq N_2).$$

Покладемо $N = \max\ (N_1, N_2)$. Тоді для всіх $n \geq N$ будемо мати

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon.$$

Звідси випливає, що $|y_n - a| < \varepsilon$, а це і означає, що існує $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

Приклад 1.6. Нехай $x_n = q^n$. У прикладі 1.5 було показано, що при $|q| > 1$ послідовність x_n необмежена і, відповідно, розбігається. Далі, при $q = -1$ маємо $x_n = (-1)^n$. У прикладі 1.4 ми показали, що ця послідовність також розбіжна. Якщо $q = 1$, то $x_n = 1$ $(n = 1,2,\dots)$. Це – стаціонарна послідовність і $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Також і при $q = 0$ маємо

$$x_n = 0 \ (n = 1,2,\dots) \text{ і } \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Залишилось розглянути випадок $0 < |q| < 1$. Оберемо таке $\alpha > 0$, що

$$|q| = \frac{1}{1+\alpha} \ \left(\alpha = \frac{1}{|q|} - 1 > 0\right).$$

Тоді, в силу нерівності Бернуллі $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ $(n = 1,2,\dots)$, маємо

$$0 \leq |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} \leq \frac{1}{1+n\alpha} \leq \frac{1}{n\alpha}.$$

Поклавши $a_n = 0, c_n = \frac{1}{n\alpha}, b_n = |q^n|$ $(n = 1,2,\dots)$, і враховуючи, що

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0,$$

з теореми про три границі отримаємо, що $\lim_{n\to\infty} |q^n| = 0$, а із зауваження до теореми 1.3 випливає, що і $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

РОЗДІЛ 2
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

2.1. Поняття границі функції та її властивості

Нехай X і Y – довільні множини. Відображення множини X у множину Y називається *функцією*, що задана на множині X із значеннями у множині Y. Іншими словами, якщо кожному елементу x з множини X відповідає деякий єдиний елемент y множини Y, то кажуть, що на множині X задана функція з значенням в Y. Позначається

$$y = f(x), f: X \to Y, \text{або } x \to f(x).$$

Множину X називають *областю визначення* функції f. Якщо $x \in X$, то $f(x)$ називають *значенням функції* f в точці x. Множина всіх значень функції f називається *областю значень функції* f. Область значень міститься у множині Y, але не обов'язково співпадає з Y. Наприклад, якщо функція $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана рівністю $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, то область її значень $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ міститься в $\mathbb{R}$ але не співпадає з $\mathbb{R}$. Множину значень називають також *образом* множини X при відображенні f і позначають $f(X)$. Нехай $x \in X, y = f(x) \in Y$. Тоді y називають *образом елемента* x, а x – *прообразом елемента* y.

В означенні функції множини X і Y довільні. Так, послідовність також є функцією, що визначена на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ і дійсна в $\mathbb{R}$. Це можна записати так: $x_n = f(n), n \in \mathbb{N}$. Інший приклад отримаємо, якщо взяти в якості Xсукупність всіх числових послідовностей, а $Y = \overline{\mathbb{R}}$. Тоді на X можна визначити функцію наступним чином. Кожній послідовності $x \in X$ поставимо у відповідність її верхню границю, тобто

$$y = f(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n, \text{де } x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Нехай $\mathbb{R}^2$ – сукупність всіх впорядкованих пар дійсних чисел [9].

Визначимо функцію $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, що діє за таким правилом $f(x) = (\sin x, \cos x)$. Множину всіх значень такої функції можна зобразити на площині у вигляді кола з центром в початку координат радіуса 1. Іншу функцію $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ можна, наприклад, визначити рівністю $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Ми визначили функції, які називаються *однозначними*. Цим підкреслюється той факт, що кожному елементу $x \in X$ відповідає єдиний елемент з множини Y. Під функцією ми завжди будемо розуміти однозначну функцію, тобто таку, що з умови $f(x_1) \neq f(x_2)$ випливає $x_1 \neq x_2$. Обернена імплікація справедлива не для кожної функції. Наприклад, якщо $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, то $f(1) = f(-1) = 1$.

Функція $f: X \to Y$ називається *взаємно однозначною*, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ з умови $x_1 \neq x_2$ випливає $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Наприклад, розглянута нами функція $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ не є взаємно однозначною. Якщо ж розглянути іншу функцію $F: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, що діє за правилом $f(x) = x^2$, то така функція буде взаємно однозначною. Це випливає з теореми про існування та єдиність границі. Інакше кажучи, взаємно однозначна функція – це така функція, для якої у кожного образу існує єдиний прообраз.

Будемо розглядати функції $f: X \to \mathbb{R}$, де $X \subset \mathbb{R}$. *Околом* радіуса $\delta > 0$ (δ – околом) точки $a \in \mathbb{R}$ ми називаємо множину таких $x \in \mathbb{R}$, що

$$a - \delta < x < a + \delta,$$

або, що те ж саме, $|x - a| < \delta$. Виколотим δ – околом точки a називається δ – окіл точки $a \in \mathbb{R}$, з якого видалена сама точка a. Іншими словами, виколотий δ – окіл точки a – це множина всіх точок $x \in \mathbb{R}$, таких, що

$$a - \delta < x < a \text{ або } a < x < a + \delta.$$

Це можна записати так: $0 < |x - a| < \delta$.

Означення границі функції по Коші. Нехай функція f визначена в деякому виколотому околі точки a. Число A називається *границею* функції f в точці a, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що залежить від ε, що для всіх x, які задовольняють умову

$$0 < |x - a| < \delta,$$

справедлива нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Якщо число A є границею функції x в точці a, то кажуть, що функція f прямує до A при x, що прямує до a, і позначають:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \text{ або } f(x) \to A \text{ при } x \to a.$$

Приклад 2.1. Нехай $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}, x \neq 0, a = 0$. Задана функція визначена в виколотому околі точки $a = 0$. Покажемо, що $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Задамо $\varepsilon > 0$. Тоді для $x \neq 0$ нерівність

$$|f(x) - 0| = \left|x \cdot \sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| < \varepsilon$$

справедлива, якщо тільки

$$0 < |x - 0| = |x| < \delta,$$

де в якості δ ми обираємо ε, тобто $\delta = \varepsilon$. Так як $\varepsilon > 0$ довільне, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta(\delta = \varepsilon)$, що для всіх x, що задовольняють умові $0 < |x - 0| < \delta$, справедлива нерівність

$$\left|x \cdot \sin\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon.$$

За означенням, це і означає, що $\lim_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$.

Приклад 2.2. Нехай

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Покажемо, що функція f не має границі в точці $a = 0$, тобто для будь-якого $A \in \mathbb{R}$ знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що для кожного $\delta > 0$, знайдеться такий x, що задовольняє умові $0 < |x - 0| < \delta$, при якому $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$.

Нехай $A \in \mathbb{R}$. Покажемо, що $\varepsilon_0 = 1$ володіє потрібною властивістю. Дійсно, задамо довільне $\delta > 0$. Якщо $A \geq 0$, то оберемо такий x, що

$$-\delta < x < 0,$$

наприклад, $x = -\frac{\delta}{2}$. Тоді

$$0 < |x - 0| < \delta, \text{ і } |f(x) - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon_0.$$

Якщо ж $A < 0$, то оберемо такий x, що $0 < x < \delta$, наприклад, $x = \frac{\delta}{2}$. Тоді знову отримаємо, що

$$0 < |x - 0| < \delta, \text{ і } |f(x) - A| = |1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon_0.$$

Отже, жодне $A \in \mathbb{R}$ не є границею функції $f(x) = \operatorname{sign} x$ в точці $a = 0$.

Зауваження 2.1. В означенні границі ми припускаємо, що функція f визначена у виколотому околі точки a. Може виявитися, що в самій точці a функція f також визначена. Однак значення функції f в цій точці a зовсім не надає впливу на границю функції в цій точці, так як в означенні границі ми розглядаємо лише ті значення x, які відмінні від a.

Приклад 2.3. Нехай

$$f(x) = |\operatorname{sign} x| = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Покажемо, що $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. Дійсно, задамо $\varepsilon > 0$ і в якості δ оберемо будь-яке додатне число, наприклад, $\delta = 1$. Тоді з нерівності

$$0 < |x - 0| = |x| < \delta$$

випливає

$$|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon.$$

Слід звернути увагу на те, що нерівність $|f(x) - 1| < \varepsilon$ може і не виконуватися при $x = 0$ (вона дійсно не виконується, якщо $\varepsilon \leq 1$). Але ми і не вимагаємо, щоб вона виконувалася при $x = 0$, так як розглядаються лише такі значення x, для яких $|x| > 0$.

Приклад 2.4. Доведемо, що $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$. Дійсно, якщо $x \neq 1$, то

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1,$$

і тоді

$$|f(x) - 2| = |(x + 1) - 2| = |x - 1| < \varepsilon,$$

якщо тільки $0 < |x - 0| < \delta$, де $\delta = \varepsilon$.

Зауваження 2.2. Означення границі носить локальний характер. Це означає, що існування границі та її величина залежать лише від значень, що приймаються функцією в достатньо малому виколотому околі точки a. Іншими словами, якщо ми змінимо функцію поза деякого виколотого околу точки a, то це ніяк не вплине на існування границі і її величини.

Приклад 2.5. Доведемо, що $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ при будь-якому $a > 0$.

Надамо значення $\varepsilon > 0$. Тоді для $x > 0$ нерівність

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \le \frac{1}{\sqrt{a}}|x - a| < \varepsilon$$

буде мати місце, якщо тільки

$$0 < |x - a| < \sqrt{a} \cdot \varepsilon = \delta.$$

Теорема 2.1 (єдиність границі). Якщо функція f має границю в точці a, то вона єдина.

Доведення. Нехай

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ і } \lim_{x \to a} f(x) = B.$$

Задамо $\varepsilon > 0$ і знайдемо $\delta_1 > 0$, таке, що з нерівності

$$0 < |x - a| < \delta_1$$

випливає

$$|f(x) - A| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Далі, знайдемо $\delta_2 > 0$, таке, що з нерівності $0 < |x - a| < \delta_2$ випливає

$$|f(x) - b| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Покладемо $\delta = \min\ (\delta_1, \delta_2)$ і оберемо таке x, що $0 < |x - 0| < \delta$. Тоді

$$|B - A| \le |f(x) - A| + |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне і $|B - A| < \varepsilon$, то це означає, що $A = B$.

Функція f називається *обмеженою зверху* (*знизу*) на множині E, якщо існує таке число $M(m)$, що для всіх $x \in E$ справедлива нерівність

$f(x) \leq M(f(x) \geq m)$. Функція f називається *обмеженою* на множині E, якщо вона обмежена на цій множині зверху та знизу.

Інше еквівалентне означення обмеженості функції можна дати, використовуючи поняття модуля [13]. А саме, функція f називається обмеженою на множині E, якщо існує таке число A, що для всіх $x \in E$ справедлива нерівність $|f(x)| \leq A$.

Доведення рівносильності цих двох означень обмеженості елементарне і ми ним знехтуємо.

Вище ми встановили, що збіжна послідовність обмежена. Розглянемо аналогічне питання для функції. А саме, чи випливає з існування границі функції її обмеженість? Негативну відповідь на це питання дає, наприклад, функція $f(x) = \frac{1}{x}, 0 < x < +\infty$. Дійсно, неважко побачити, що функція f необмежена на $(0, +\infty)$. В той же час $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$. Насправді,

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| = \frac{|x-1|}{x} \leq 2|x-1| < \varepsilon,$$

якщо тільки $|x-1| < \delta = \min \ \{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\}$. Тим не менш справедлива

Теорема 2.2. Нехай функція f визначена в виколотому околі U точки a і має границю в цій точці. Тоді існує такий виколотий окіл $V \subset U$, на якому функція f обмежена.

Доведення. Нехай $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Задамо $\varepsilon = 1$ і знайдемо таке $\delta > 0$, що для всіх $x \in U$, що задовольняють умові

$$0 < |x - a| < \delta,$$

справедлива нерівність $|f(x) - A| < 1$. Позначимо

$$V = U \cap \{x: 0 < |x - a| < \delta\}.$$

Тоді для всіх $x \in V$ справедлива нерівність

$$|f(x)| \leq |f(x) - A| + |A| \leq |A| + 1,$$

яка і означає, що функція f обмежена на V.

Пов’яжемо означення границі функції та границі послідовності.

Нехай функція f визначена в деякому виколотому околі U точки a. Візьмемо довільну послідовність аргументів

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \text{ тобто } x_n \in U \ (x_n \neq a, n = 1,2, \dots).$$

Ця послідовність аргументів породжує послідовність значень функції f в точках x_n, тобто ми отримаємо послідовність $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Нехай функція f визначена в деякому околі U точки a. Число A називається *границею функції* f в точці a, якщо кожна послідовність аргументів $\{x_n\}$, що прямують до a (тобто $x_n \in U \ (x_n \neq a, n = 1,2, \dots)$), породжує відповідну послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$, що прямує до A.

Отже, ми маємо два означення границі функції: по Коші та по Гейне [17]. Покажемо, що вони еквівалентні.

Нехай $\lim_{x \to a} f(x) = A$ в сенсі означення по Коші. Візьмемо довільну послідовність

$$\{x_n\}, x_n \to a \ (n \to \infty), x_n \neq a$$

і покажемо, що $f(x_n) \to A(n \to \infty)$. Задамо $\varepsilon > 0$ і знайдемо $\delta > 0$, таке, що з нерівності $0 < |x - a| < \delta$ випливає $|f(x) - A| < \varepsilon$. Користуючись тим, що $x_n \to a \ (n \to \infty)$, для знайденого δ знайдемо номер N, такий, що при кожному $n \geq N$ справедлива нерівність $|x - a| < \delta$. Але тоді при кожному $n \geq N$ буде виконана нерівність

$$|f(x_n) - a| < \varepsilon.$$

Отже, для заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що для всіх $n \geq N$ справедлива нерівність $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Так як $\varepsilon > 0$ довільне, то це означає, що $\lim_{x \to a} f(x_n) = A$.

Обернено, нехай число A є границею функції f при $x \to a$ в сенсі Гейне, тобто для будь-якої послідовності $\{x_n\}, (x_n \to a, x_n \neq a)$ відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ прямує до A. Припустимо, що A не є границею функції f в точці a в сенсі Коші. Це означає, що знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що для будь-якого $\delta > 0$ існує такий

x, що

$$0 < |x - a| < \delta, \text{ але } |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Візьмемо $\delta = 1$ і знайдемо такий x_1, що

$$0 < |x_1 - a| < 1 \text{ і } |f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Далі, для $\delta = \frac{1}{2}$ знайдемо такий x_2, що

$$0 < |x_2 - a| < \frac{1}{2} \text{ і } |f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Поклавши $\delta = \frac{1}{n}$, знайдемо такий x_n, що

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ і } |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0.$$

У результаті отримаємо послідовність $\{x_n\}$. З умови $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ випливає, що $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, а оскільки $|x_n - a| > 0$, то $x_n \neq a$ $(n = 1,2, \dots)$. Крім того, $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. Ця нерівність означає, що $\{f(x_n)\}$ не прямує до A. Врешті-решт, ми побудували таку послідовність аргументів $\{x_n\}, (x_n \to a, x_n \neq a)$, що відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ не прямує до A. Це суперечить умові.

Отже, ми показали, що означення границі по Коші та по Гейне еквівалентні. Часто на практиці означення границі по Гейне використовується для доведення того, що у функції немає границі в точці a [18]. А саме, заперечення означення границі в сенсі Гейне виглядає наступним чином.

Число A не є границею функції f в точці a, якщо існує послідовність аргументів $\{x_n\}, (x_n \to a, x_n \neq a)$, така, що $f(x_n)$ не прямує до A.

Припустимо, що знайдеться така послідовність аргументів, яка відповідає послідовності значень функції $\{f(x_n)\}$, яка є розбіжною. Тоді зрозуміло, що жодне число не є границею функції f в точці a, тобто f не має границі при $x \to a$. Отже, для того щоб показати, що функція f не має границі в точці a, достатньо побудувати послідовність $\{x_n\}, (x_n \to a, x_n \neq a)$, таку, що $\{f(x_n)\}$ не має границі.

Приклад 2.6. Нехай $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$. Оберемо дві послідовності

$$x_k^{'} = \frac{1}{2\pi k} \text{ і } x_k^{''} = \frac{1}{2\pi(k+\frac{1}{4})} \ (k = 1,2,\dots).$$

Тоді $x_k^{'} \to 0, x_k^{''} \to 0 \ (k \to \infty)$ і $f(x_k^{'}) = 0, f(x_k^{''}) = 1$. Складемо послідовність аргументів $x_1^{'}, x_1^{''}, x_2^{'}, x_2^{''}, \dots$. Тоді відповідна їм послідовність значень функції буде мати вигляд $0,1,0,1,\dots$, яка, очевидно, є розбіжною [14]. Отже, ми побудували послідовність, що прямує до нуля, відмінних від нуля аргументів, таку, що відповідна послідовність значень функції не має границі. Отже, на основі означення границі функції, функція $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не має границі при $x \to 0$.

Ідея розв'язання цього прикладу часто використовується і при розв'язанні інших задач. А саме, для того щоб показати, що функція f не має границі при $x \to a$, достатньо побудувати дві послідовності $\{x_n^{'}\}$ і $\{x_n^{''}\}$, що прямують до a $(x_n^{'} \neq a, x_n^{''} \neq a)$, такі, що $\{f(x_n^{'})\}$ і $\{f(x_n^{''})\}$ збігаються до різних границь (або хоча б одна з них є розбіжною). Тоді для послідовності аргументів $x_1^{'}, x_1^{''}, x_2^{'}, x_2^{''}, \dots$ відповідна послідовність значень функції $f(x_1^{'}), f(x_1^{''}), f(x_2^{'}), f(x_2^{''}), \dots$ буде розбіжною, так як у неї є дві різні частинні границі (не виконана умова критерію збіжності в термінах верхньої і нижньої границь послідовності [9]).

2.2. Основні теореми про границю функції в точці

Теорема (*арифметичні властивості границь*). Нехай функції f і g задані в виколотому околі U точки $a, \lim_{x\to a} f(x) = A$ і $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Тоді

1) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$;

2) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;

3) якщо $g(x) \neq 0 (x \in U)$ і $B \neq 0$, то $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Теорема (*граничний перехід і нерівності*). Нехай функції f і g задані в виколотому околі U точки $a,$ $\lim_{x\to a} f(x) = A$ і $\lim_{x\to a} g(x) = B,$ причому $B > A$. Тоді знайдеться виколотий окіл $\Delta\subset U$ точки $a,$ що $f(x) < g(x)$ для всіх $x \in \Delta$.

Доведення. Задамо $\varepsilon = \frac{B-A}{2} > 0$ і знайдемо таке $\delta^{'} > 0$, що для всіх X, що задовольняють умові $0 < |x - a| < \delta'$, справедлива нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

тобто

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Далі знайдемо таке $\delta^{''} > 0$, що якщо тільки $0 < |x - a| < \delta''$, то $|g(x) - A<\varepsilon$, тобто

$$B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon.$$

Покладемо $\delta = \min\ \{\delta^{'}, \delta^{''} > 0\}$. Тоді для всіх x, що задовольняють умові $0 < |x - a| < \delta$, справедливі нерівності

$$f(x) < A + \varepsilon = \frac{A+B}{2} = B - \varepsilon < g(x),$$

з яких випливає, що

$$f(x) < g(x)(x \in \Delta = \{x\colon 0 < |x - a| < \delta\})\ .$$

Наслідок. Якщо $f(x) \geq g(x)$ для всіх x, що належать виколотому околу U точки a, *то*$\lim_{x\to a} f(x) \geq \lim_{x\to a} g(x)$, якщо ці границі існують.

Дійсно, якщо припустити, що $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$, то, у зв'язку з попередньою теоремою, в деякому виколотому околі точки a буде справедлива нерівність $f(x) < g(x)$, що суперечить умові.

Теорема (*про три границі*). Нехай функції f, g, h визначені в виколотому околі U точки a і такі, що $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ для всіх $x \in U$. Якщо $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A,$ то існує $\lim_{x\to a} g(x) = A.$

Для доведення цієї теореми достатньо застосувати означення границі функції по Гейне і відповідну теорему про три границі послідовностей [11].

РОЗДІЛ 3
ВИВЧЕННЯ ГРАНИЦЬ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Поняття границі послідовності, границі функції є фундаментальними поняттями математичного аналізу. Історично поняття границі з'явилося лише у XVIII ст., проте неявно використовувалося значно раніше: при обчисленні площ та об'ємів геометричних фігур, при створенні диференціального та інтегрального числення та ін.

Розділи «Границя послідовності», «Границя функції» неодноразово включалися та виключалися зі шкільної програми. У 80-х роках минулого століття вивчення границь було виключено зі шкільних підручників (за винятком підручників для шкіл з поглибленим вивченням математики). Поняття похідної та інтегралу вводилися без застосування означення границі [31]. В наш час програми шкільної математики пропонують достатньо різноманітний обсяг матеріалу та різні підходи до вивчення границь від короткого згадування границі послідовності та границі функції до детального вивчення границь, їх властивостей, методів обчислення тощо.

У відповідності з програмою границя послідовності вивчається у 10-му класі. Як правило, спочатку вводиться поняття нескінченно малої величини, а потім означення границі [24]. Властивості границі суми, різниці, добутку, частки містяться в розділах для поглибленого вивчення математики. Далі розглядається сума нескінченної спадної геометричної прогресії.

У подальшому в 11 класі за допомогою наочних прикладів на інтуїтивному рівні пояснюється, що таке границя функції, розглядаються приклади на обчислення границь функції в точці і при $x \to \infty$. За допомогою означення односторонніх границь вводиться друге поняття границі функції в точці. Слід відмітити, що чудові границі в прикладах теоретичного матеріалу з’являються досить органічно [17]. Після цього, як правило, вводиться формальне означення границі функції, перераховуються властивості границі функцій, приклади їх застосування до обчислення границь, вводиться поняття неперервної функції.

Теорія границь, як і інші розділи математичного аналізу, потребує особливої уваги від шкільного вчителя та певної підготовки учнів до сприйняття матеріалу. Вивчення границь часто викликає труднощі навіть у студентів вишів в силу високого рівня абстракції матеріалу. Думки стосовно вивчення елементів математичного аналізу в школі різняться. «Не слід забувати, що в школі (в тому числі і у профільній) ми лише знайомимо учнів з елементами математичного аналізу, які складають суттєву частину загальнолюдської культури; формальне вивчення цього предмету – прерогатива вищої математики, яка викладається у вишах, переносити його в середню школу недоцільно (всьому свій час)» [15]. «Викладання елементів вищої математики в школі необхідне, якщо воно буде спиратися на переважно інтуїтивно викладання матеріалу, в противному випадку воно недоцільне» [23].

Можливими варіантами вирішення питання про вивчення границь в школі є наступні:

1) детальне вивчення теорії границь в старших класах, при цьому вивчення похідної функції та визначеного інтегралу виключається зі шкільної програми та залишається лише у змісті математичних дисциплін, які викладаються у вишах. Проте це призведе до значних змін у змісті матеріалів ЗНО;

2) вивчення теорії границь у меншому обсязі, ніж пропонують шкільні підручники, без використання формальних означень, використовуючи в основному інтуїтивне наочне викладання матеріалу. При цьому похідна та інтеграл вивчаються в школі у тому ж обсязі, як і

зараз.

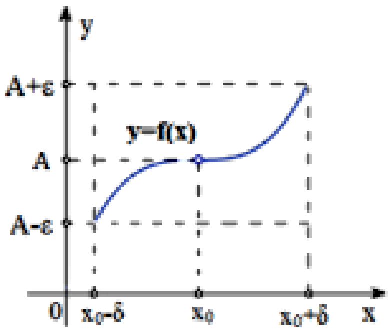
Розглянемо приклади застосування граничного переходу, що можуть бути запропоновані учням під час вивчення тем з теорії границь в класах з поглибленим вивченням математики, або на факультативних заняттях з математики.

3.1. Застосування означення границі функції в точці та основних теорем про границю

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Припускатимемо, що інтервал

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D(f).$$

Суть поняття границі функції $f(x)$ у точці x_0 полягає в тому, що



значення функції $f(x)$ як завгодно близькі до числа A за досить близьких значень незалежної змінної x до числа x_0.

Рис. 3.1

Проміжок виду $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$, називають *околом* точки x_0. Множину виду $(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$ називають проколотим околом точки x_0.

Приклад 3.1. Доведіть, використовуючи означення границі функції в точці, що

$$\lim_{x \to 1}(2x + 1) = 3$$

Розв’язання. Задамо довільне число $\varepsilon > 0$. Розглянемо нерівність:

$$|(2x+1)-3|<\varepsilon. \tag{3.1}$$

Перетворивши ліву частину нерівності (3.1), запишемо її у вигляді

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.2}$$

Отже, щоб виконувалася нерівність (3.1), достатньо, щоб значення x задовольняли нерівність (3.2). Інакше кажучи, з нерівності (3.2) випливає нерівність (3.1), і обернено.

Прийнявши $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, дістанемо, що з нерівності $|x-1|<\delta$ випливає нерівність $|(2x+1)-3|<\varepsilon$.

Отже, за даним ε знайшли $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. Тому, згідно з означенням,

$$\lim_{x\to 1}(2x+1)=3$$

Приклад 3.2. Доведіть, використовуючи означення границі функції в точці, що $\lim_{x\to a}x=a$.

Розв'язання. Задамо довільне число $\varepsilon>0$. Розглянемо нерівність $|x-a|<\varepsilon$.

З останньої нерівності можемо зробити висновок: якщо взяти $\delta=\varepsilon$, одержимо, що

$$|f(x)-a|=|x-a|<\varepsilon,$$

як тільки $|x-a|<\delta$. Тому за означенням границі: $\lim_{x\to a}x=a$.

Приклад 3.3. Доведіть, що функція $f(x)=\frac{|x|}{x}$ не має границі в точці x_0.

Розв'язання. Використаємо означення границі функції за Коші. Припустимо, що границя функції $f(x)$ у точці $x_0=0$ існує і дорівнює A. Покажемо, що, наприклад, для $\varepsilon=1$ неможливо підібрати таке $\delta>0$, щоб із нерівності $0<|x-0|<\delta$ випливала нерівність $\left|\frac{|x|}{x}-A\right|<1$.

Якщо $0<x<\delta$, то нерівність $\left|\frac{|x|}{x}-A\right|<1$ набуває вигляду $|1-A|<1$. Звідси $0<A<2$.

Якщо $-\delta < x < 0$, то нерівність $\left|\frac{|x|}{x} - A\right| < 1$ набуває вигляду $|-1 - A| < 1$. Звідси $-2 < A < 0$.

Оскільки не існує значень A, які б задовольняли кожну з нерівностей $0 < A < 2$ і $-2 < A < 0$, то функція $f(x)$ не має границь в точці $x_0 = 0$.

Полегшити процес знаходження границі функції в точці допомагають теореми про арифметичні дії з границями функції у точці.

Приклад 3.4. Знайдіть границю

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - 3x + 1).$$

Розв'язання. Використавши теореми 1.1. і 1.2., матимемо:

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \to 2} x \lim_{x \to 2} x - 3\lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 1 = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1$$

Відповідь: – 1.

Приклад 3.5. Знайдіть границю

$$\lim_{x \to 0}\left(2 + 3x - \frac{2x}{x^2 + 1}\right).$$

Розв'язання. Використавши теореми розділу 2, матимемо:

$$\lim_{x \to 0}\left(2 + 3x - \frac{2x}{x^2 + 1}\right) = \lim_{x \to 0} 2 + 3\lim_{x \to 0} x - \frac{2\lim_{x \to 0} x}{\lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} x + \lim_{x \to 0} 1} = 2$$

Відповідь: 2.

Приклад 3.6. Знайдіть границю функції

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 4x} \text{ у точці } x_0 = 2.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - 5x + 6) = \lim_{x \to 2}(x^3 - 4x) = 0,$$

то не можна застосовувати границю частки до функції $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 4x}$. У цьому випадку маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$ (символічне позначення). Для того, щоб знайти границю функції $f(x)$ у точці $x_0 = 2$, якщо вона існує, тому що у випадку невизначеності може і не існувати, потрібно перетворити (спростити) її праву частину.

Отже, маємо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-4x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x(x+2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}3}{\lim\limits_{x\to 2}x\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}$$

$$=-\frac{1}{8}$$

Відповідь: $-\frac{1}{8}$

Для границі функції в точці розглядають також поняття нескінченної границі [15].

Функція $f(x)$ має в точці x_0 нескінченну границю, яка дорівнює: а) $+\infty$; б) $-\infty$; в) ∞, якщо для будь-якого числа $M>0$ існує виколотий δ–окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність:

$$\text{а) } f(x)>M; \ \text{ б)} f(x)<-M; \ \ \text{в)} |f(x)|>M.$$

Приклад 3.7. Доведіть, що

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(x-x_0)^{2n}}=+\infty,$$

де n – довільне фіксоване натуральне число.

Розв'язання. Задамо довільне число $M>0$. Розглянемо нерівність:

$$\frac{1}{(x-x_0)^{2n}}>M. \tag{3.3}$$

Перетворивши ліву частину нерівності (3.3), матимемо:

$$0<|x-x_0|<\frac{1}{\sqrt[2n]{M}}. \tag{3.4}$$

Із нерівності (3.4) випливає нерівність (3.3) і обернено. Отже, за даним M знайшли виколотий δ–окіл точки x_0, де $\delta=\frac{1}{\sqrt[2n]{M}}$. Тому, згідно з означенням, $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(x-x_0)^{2n}}=+\infty$,.

За допомогою означення можна довести, що функції вигляду

$$f(x)=\frac{1}{(x-x_0)^{2n}}$$

де n – довільне фіксоване натуральне число, не мають границі в точці

x_0.

Приклад 3.8. Знайдіть границю

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right).$$

Розв'язання. Тут границі зменшуваного та від'ємника в точці $x_0 = 2$ не існують. Тому не можна застосовувати теорему 2.2. Для знаходження цієї границі виконаємо віднімання, а потім спростимо отриманий вираз під знаком границі. Матимемо:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $\frac{1}{4}$.

Вище було розглянуто поняття границі функції в точці x_0, де x_0 – певне дійсне число. Розглянемо поняття границі функції при $x \to \pm\infty$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a; +\infty)$. Число A називається *границею* функції $f(x)$ за $x \to +\infty$, якщо для будь-якого довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M(\varepsilon) \geq a$, що нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

виконується для всіх x, які задовольняють умову $x > M(\varepsilon)$.

Той факт, що число A є границею функції $f(x)$ за $x \to +\infty$ записують у вигляді:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = A.$$

Суть поняття границі функції $f(x)$ за $x \to +\infty$ полягає в тому, що значення функції $f(x)$ як завгодно близькі до числа A для всіх досить великих значень x.

Аналогічно визначається границя функції, коли $x \to -\infty$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(-\infty; -b)$. Число B називається *границею* функції $f(x)$, коли $x \to -\infty$, якщо для будь-якого довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N(\varepsilon) \leq -b$, що нерівність

$$|f(x) - B| < \varepsilon$$

виконується для всіх x, які задовольняють умову $x < N(\varepsilon)$.

З наведених означень випливає таке означення.

Число A називається *границею* функції $f(x)$, коли $x \to \infty$, якщо для будь-якого довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $P(\varepsilon) \leq -b$, що нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

виконується для всіх x, які задовольняють умову $x < P(\varepsilon)$.

Границі функції, якщо $x \to \infty$, притаманні властивості, аналогічні властивостям границі функції у точці (теореми 2.1. та 2.2.).

Аналогічно до границі функції в точці вводиться поняття нескінченної границі функції $f(x)$ та нескінченності [17].

Приклад 3.9. Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + 4x^3 + x^2 - 5}{3x^5 + 2x^4 + x^3 + x}.$$

Розв'язання. Оскільки тут границя чисельника і знаменника прямують до нескінченності, то не можна застосовувати границю частки до функції $f(x) = \frac{x^5+4x^3+x^2-5}{3x^5+2x^4+x^3+x}$. У цьому випадку маємо невизначеність вигляду $\frac{\infty}{\infty}$ (символічне позначення). Для того, щоб знайти границю функції $f(x)$, коли $x \to \infty$, потрібно поділити чисельник і знаменник дробу на незалежну змінну x у найвищому степені. У цьому випадку на x^5. Отже, матимемо:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + 4x^3 + x^2 - 5}{3x^5 + 2x^4 + x^3 + x}.$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{5}{x^5}}{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = \frac{1 + 4 \cdot 0 + 0 - 5 \cdot 0}{3 + 2 \cdot 0 + 0 + 0} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

3.2. Неперервність функції в точці

Функція $f(x)$, визначена в деякому δ–околі точки x_0, називається *неперервною* в цій точці, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Приклад 3.10. Чи є неперервною в точці $x_0 = 2$ функція

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{4-x^2}, & x \neq 2, \\ -3, & x = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо границю функції $f(x)$ в точці $x_0 = 2$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{4-x^2} = -\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = -\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2} = -3$$

Оскільки $f(2) = -3$, то $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$. Тому функція $f(x)$ неперервна в точці $x_0 = 2$.

Відповідь: неперервна.

Для функцій неперервних у точці справедливі такі теореми.

Теорема 3.1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці також неперервні функції:

$$y = f(x) \pm g(x),\ \ y = kf(x),\ \ y = f(x)g(x),\ \ y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(остання за додаткової умови, що $g(x_0) \neq 0$)

Функція $f(x)$ називається *неперервною на інтервалі* $(a;b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Так, неперервними на своїх областях визначення є раціональні, тригонометричні функції, а також функції, обернені до них [12].

Теорема 3.2. Якщо функція $f(t)$ неперервна в точці t_0, а функція $t = g(x)$ неперервна в точці x_0, причому $t_0 = g(x_0)$, то складена функція $f(g(x))$, що розглядається як функція від x, неперервна в точці x_0.

Приклад 3.11. Обчисліть границю $\lim_{x\to 1} \sin\left(\frac{2x}{2x+1}\right)\pi$.

Розв'язання. Враховуючи неперервність функції $f(x) = \sin\left(\frac{2x}{2x+1}\right)\pi$ в точці $x_0 = 1$, як складену двох неперервних функцій у цій точці, матимемо:

$$\lim_{x\to1}\sin\left(\frac{2x}{2x+1}\right)\pi = \sin(\lim_{x\to1}\left(\frac{2x}{2x+1}\right)\pi) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Приклад 3.12. Обчисліть границю $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$.

Розв'язання. Тут маємо справу з невизначеністю виду $\frac{0}{0}$. Для того, щоб знайти границю функції $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$ у точці $x_0=3$, потрібно перетворити її праву частину. Помножимо чисельник і знаменник дробу $\frac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$ на вираз $\sqrt{2x+10}+4$, спряжений до $\sqrt{2x+10}-4$. Матимемо:

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4} = \lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)}{\left(\sqrt{2x+10}-4\right)(\sqrt{2x+10}+4)} =$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)}{2(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+10}+4}{2} = \lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2\cdot3+10}+4}{2} = 4.$$

Відповідь: 4.

Приклад 3.13. Обчисліть границю $\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

Розв'язання. Тут також маємо справу з невизначеністю виду $\frac{0}{0}$. Для того, щоб знайти цю границю, потрібно помножити чисельник і знаменник дробу $\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$ на вираз $\sqrt[3]{(x-6)^2}+2\sqrt[3]{x-6}+4$. Це робиться задля отримання в чисельнику дробу формули суми кубів [22]. Отже, матимемо:

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} = \lim_{x\to-2}\frac{\left(\sqrt[3]{x-6}+2\right)(\sqrt[3]{(x-6)^2}+2\sqrt[3]{x-6}+4)}{(x^3+8)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)} =$$

$$= \lim_{x\to-2}\frac{(\sqrt[3]{x-6})^3+2^3}{(x+2)(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)} =$$

$$= \lim_{x\to-2}\frac{x+2}{(x+2)(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{1}{(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)} = \frac{1}{12\cdot 12} = \frac{1}{144}.$$

Відповідь: $\frac{1}{144}$

Приклад 3.14. Обчисліть границю $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5}-x)$.

Розв'язання. Тут маємо справу іще з одним видом невизначеності $\infty-\infty$.

Як і в попередніх прикладах, помножимо і поділимо різницю, яка стоїть під знаком границі, на суму $\sqrt{x^2+5}+x$. Одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)(\sqrt{x^2+5}+x)}{\sqrt{x^2+5}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{x^2+5}+x}$$
$$= 0$$

Відповідь: 0.

Для знаходження границі функції також використовують метод заміни змінної.

Приклад 3.15. Обчисліть границю $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Зробивши заміну $x+1=y^6$, отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$$
$$= \lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1} = \lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)}$$
$$= \lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{3}{2}$$

Відповідь: $\frac{3}{2}$.

Поряд із поняттям границі функції в точці також розглядається поняття односторонньої границі функції [27].

Припустимо, що функція $y=f(x)$ визначена на деякому проміжку $< a; b >$, крім, можливо, точки $x_0 \in < a; b >$. Число A називають *правою (лівою) границею* функції $f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого числа

$\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in< a; b >$, які задовольняють нерівність $0 < x - x_0 < \delta$ $(0 < x_0 - x < \delta)$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

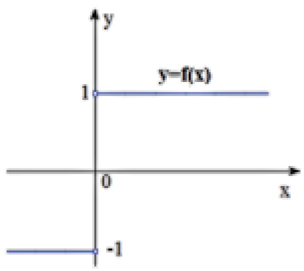
Праву (ліву) границю функції $f(x)$ у точці x_0 позначають $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ $(\lim_{x \to x_0-} f(x))$. праву і ліву границі функції в точці називають односторонніми границями.

Приклад 3.16. Знайдіть ліву і праву границі функції $f(x) = \frac{|x|}{x}$ у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Згідно з означенням маємо

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x<0)}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x<0)}} \frac{-x}{x} = -1.$$



Отриманий результат ілюструє графік функції $y = f(x)$ (рис. 3.2).

Рис. 3.2

Відповідь: $\lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = 1, \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = -1$.

Приклад 3.17. Знайдіть ліву і праву границі функції $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ у точці $x_0 = 1$.

Розв'язання. Використаймо той факт, що для лівої і правої границь $x \neq x_0$, тобто $x \neq 1$. тоді функцію $f(x)$ можна записати у вигляді:

$$f(x) = x + 1, x \neq 1.$$

Отже, маємо:

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2.$$

Отриманий результат ілюструє графік функції $f(x)$ (рис. 3.3).

Відповідь: $\lim_{x \to 1+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2,\ \lim_{x \to 1-} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$

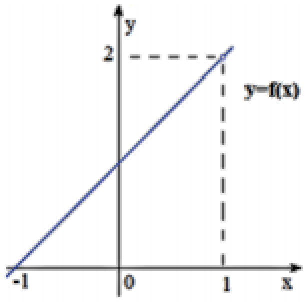


Рис. 3.3

Приклад 3.18. З'ясуйте, чи існують односторонні границі функції $f(x) = \frac{1}{x}$ у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Використавши означення, матимемо:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} \frac{1}{x} = +\infty; \ \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x<0)}} \frac{1}{x} = -\infty;$$

Отже, функція $f(x) = \frac{1}{x}$ у точці $x_0 = 0$ не має ані правої, ані лівої границі. Отриманий результат ілюструє графік функції $f(x) = \frac{1}{x}$ (рис.5).

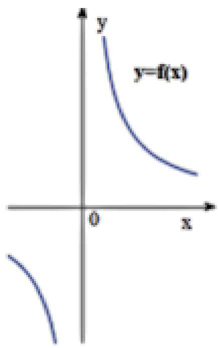


Рис. 3.4

Відповідь: не має ані лівої, ані правої границі.

Поняття границі функції в точці тісно пов'язане з поняттям правої та лівої границь.

Для того, щоб функція $f(x)$ мала в точці x_0 границю, необхідно і достатньо, щоб у цій точці функція $f(x)$ мала праву і ліву границі і права границя дорівнювала лівій границі.

Поряд із поняттям неперервності функції в точці розглядається також поняття про односторонню неперервність.

Функцію $f(x)$ називають *неперервною в точці* x_0 *справа* (*зліва*), якщо:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)\left(\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)\right)$$

Приклад 3.19. Дослідити на односторонню неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \le 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 3, & 1 \le x < 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Для наочності побудуємо графік функції $f(x)$ (рис. 3.5).

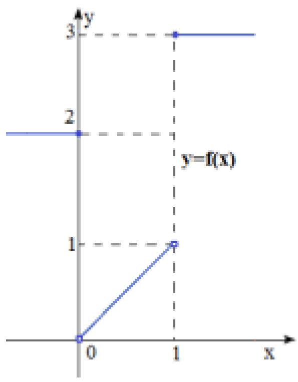


Рис. 3.5

Ця функція неперервна в точці $x_0 = 0$ зліва, оскільки:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ (x<0)}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ (x<0)}} 2 = f(0),$$

і неперервна справа у точці $x_0 = 1$, оскільки:

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ (x>0)}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ (x>0)}} 3 = f(1),$$

Відповідь: неперервна зліва у точці $x_0 = 0$, неперервна справа у точці $x_0 = 1$.

Якщо функція $f(x)$ не є неперервною в точці x_0, то вона називається *розривною* в цій точці, а точка x_0 називається *точкою* *розриву* функції $f(x)$. Враховуючи означення неперервності функції в точці, можна стверджувати, що функція $f(x)$ розривна в точці x_0, якщо виконується принаймні одна з умов:

1) функція $f(x)$ не визначена в точці x_0, хоча в усіх точках деякого околу точки x_0 вона визначена;

2) у точці x_0 не існує границі функції $f(x)$;

3) границя функції $f(x)$ у точці x_0, якщо вона існує, не дорівнює значенню цієї функції в точці x_0.

Тому розрізняють таку класифікацію точок розриву функції

Точку розриву x_0 називають *точкою усувного розриву* функції $f(x)$, якщо існує $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Точку розриву x_0 називають *точкою розриву першого роду* функції $f(x)$, якщо в цій точці існують і ліва, і права границі функції $f(x)$, причому не рівні між собою.

Точку розриву x_0 називають *точкою розриву другого роду* функції $f(x)$, якщо x_0 не є ні точкою усувного розриву, ні точкою розриву першого роду.

Приклад 3.20. Визначте характер розриву функції $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$ у точці $x_0 = 2$.

Розв'язання. Точка $x_0 = 2$ є точкою усувного розриву, оскільки

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+1) = 3.$$

Відповідь: точка усувного розриву.

Функцію $f(x)$, яка має в точці x_0 усувний розрив, можна довизначити в цій точці так, щоб вона була неперервною. Наприклад, функцію $f(x)$, з прикладу 3.20, в точці $x_0 = 2$ можна довизначити до функції:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

Функція $g(x)$ вже неперервна в точці $x_0 = 2$.

Приклад 3.21. Визначте характер розриву функції $f(x) = [x]$, де $[x]$ – ціла частина дійсного числа [5] x,у точці $x_0 = 1$.

Розв'язання. Для кращої наочності зобразимо графік функції $f(x) = [x]$ (рис. 3.6).

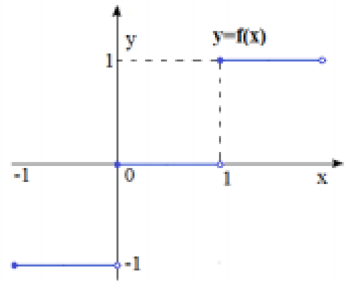


Рис. 3.6

Оскільки $\lim\limits_{x \to 1+} [x] = 1$; $\lim\limits_{x \to 1-} [x] = 0$, то $x_0 = 1$ – точка розриву першого роду функції $f(x) = [x]$.

Відповідь: точка розриву першого роду.

Приклад 3.22. Визначте характер розриву функції

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Для наочності зобразимо графік функції $f(x)$ (рис. 3.7).

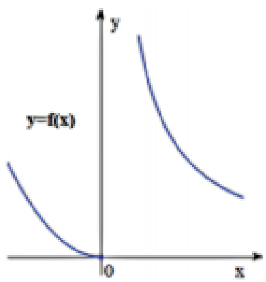


Рис. 3.7

Оскільки $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0$, то $x_0 = 0$ – точка розриву другого роду функції $f(x)$.

Відповідь: точка розриву другого роду.

Функція $f(x)$ називається *неперервною на відрізку* $[a;b]$, якщо вона неперервна в кожній точці інтервалу $(a;b)$, а в точках $x=a, x=b$ неперервна зліва і справа відповідно.

Властивість 3.1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на кінцях цього відрізку набуває значень різних знаків, то існує така точка $c \in (a;b)$, що $f(c)=0$.

Властивість 3.2. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона набуває всіх значень між $f(a)$ і $f(b)$.

Властивість 3.3. Якщо функція $f(x)$ неперервна і не перетворюється на нуль на інтервалі $(a;b)$, то на цьому інтервалі функція зберігає сталий знак.

Приклад 3.23. Доведіть, що рівняння $3\sin x = 2x - 1$ має корінь.

Розв'язання. Розглянемо неперервну функцію

$$f(x) = 3\sin x = 2x - 1.$$

Маємо: $f(0) = 1 > 0, f(\pi) = -2\pi + 1 < 0$. Отже, за властивістю 3.1 на інтервалі $(0;\pi)$ рівняння $3\sin x = 2x - 1$ має корінь.

Приклад 3.24. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} < 3$ методом інтервалів.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} - 3$. Потрібно знайти значення всіх x, для яких функція $f(x) > 0$.

Спочатку знайдемо область визначення цієї функції:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2;3].$$

Отже, $D(f) = [-2;3]$. При цьому функція $f(x)$ неперервна на $D(f)$. Знайдемо нулі функції $f(x)$. Для цього розв'яжемо рівняння $f(x) = 0$:

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{3-x} + 3 \Rightarrow (\sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{3-x}+3)^2 \Leftrightarrow x - 5 = 3\sqrt{3-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-5)^2 = (3\sqrt{3-x})^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1; x_2 = 2.$$

Перевірка: $\sqrt{-1+2} = \sqrt{3-(-1)} + 3, 1 = 5$ – неправильна рівність, $x_1 = -1$ – не є коренем рівняння; $\sqrt{2+2} = \sqrt{3-2} + 3, 2 = 4$ – неправильна рівність, $x_2 = 2$ – не є коренем рівняння.

Отже, функція $f(x)$ не має нулів. Тому, згідно з властивістю 3.3, вона зберігає сталий знак на інтервалі $(-2; 3)$. Оскільки $f(2) = -2 < 0$, то $f(x) < 0$ для всіх $x \in (-2; 3)$. Потім, оскільки $f(-2) = -\sqrt{5} - 3 < 0$ і $f(3) = \sqrt{5} - 3 < 0$, то $f(x) < 0$ для всіх $x \in [-2; 3]$.

Відповідь: $x \in [-2; 3]$.

Приклад 3.25. Довести за допомогою означення границі функції рівність $\lim_{x\to 3}(5x+1) = 16$.

Доведення. Достатньо довести, що для будь-якого наперед заданого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $\delta > 0$, що для всіх $x \neq a$ і таких, що $|x-3| < \delta$, виконується нерівність

$$|(5x+1) - 16| < \varepsilon. \qquad (3.5)$$

Припустимо, що нерівність (3.5) виконується. Виходячи з цієї нерівності, оцінимо $|x-3|$. Для цього розв’яжемо її щодо $|x-3|$, виконавши перетворення в лівій частині нерівності (3.5):

$$|5x - 15| < \varepsilon;\ |5(x-3)| < \varepsilon;\ 5|x-3| < \varepsilon,$$

звідси

$$|x-3| < \frac{\varepsilon}{5}. \qquad (3.6)$$

Отже, для всіх $x \neq 3$ і таких, які задовольняють нерівність (3.5). Тому можна взяти $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$.

Приклад 3.26. Довести, використовуючи означення границі функції, що $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right) = 4$.

Доведення. Покажемо, що для будь-якого наперед заданого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta > 0$, що для всіх $x \neq 2$ і таких, що $|x-2| < \delta$, виконується нерівність

$$\left|\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)-4\right|<\varepsilon. \tag{3.7}$$

Припустимо, що нерівність (3.7) виконується. Виходячи з неї, оцінимо $|x-2|$. Зробити це лише тотожним перетворенням лівої частини і розв'язанням нерівності стосовно $|x-2|$ не вдається. У таких випадках застосовують спосіб підсилення нерівності (3.7) з метою отримати простішу нерівність, яку легко розв'язати щодо $|x-2|$.

Запишемо спочатку нерівність (3.7) у вигляді $\left|\frac{1}{2}x^2-2\right|<\varepsilon$, звідси

$$\frac{|x-2|\cdot|x+2|}{2}<\varepsilon. \tag{3.8}$$

Замінимо множник $|x+2|$ в нерівності (3.8) числом, якого він не перевищує. Цим самим підсилимо нерівність (3.7) і дістанемо іншу, простішу нерівність. З цією метою на шукане δ накладемо обмеження: $\delta\le 1$. Тоді $|x-2|<1$ або $-1<x-2<1$, звідки, додавши по 4 до всіх трьох частин останньої нерівності отримаємо $3<x+2<5$. Отже, $|x+2|<5$.

Замінимо в нерівності (3.8) множник $|x+2|$ числом 5. Матимемо нову нерівність

$$\frac{|x-2|\cdot 5}{2}<\varepsilon. \tag{3.9}$$

Якщо x задовольняє нерівність (3.9), то тим більше воно задовольняє нерівність (3.8), а тому й нерівність (3.7). Останні міркування доцільно проілюструвати учням на прикладі звичайної числової нерівності: якщо $5<8$, то тим більше $2<8$.

Нерівність (3.9) розв'яжемо щодо $|x-2|$. Дістанемо $|x-2|<\frac{2}{5}\varepsilon$. Отже, за δ потрібно взяти менше з двох чисел 1 і $\frac{2}{5}\varepsilon$.

Приклад 3.27. Довести, використовуючи означення границі функції за Гейне, що $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)=4$.

Доведення. Оскільки ця функція визначена для всіх значень x, то візьмемо будь-яку послідовність значень аргументу, яка має границею число 2, тобто $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

Відповідна послідовність значень функції

$$\frac{1}{2}x_1^2 + 2, \frac{1}{2}x_2^2 + 2, \frac{1}{2}x_3^2 + 2, \dots, \frac{1}{2}x_n^2 + 2, \dots$$

має n –й член $f(x_n) = \frac{1}{2}x_n^2 + 2$.

З урахуванням теорем про границі і взявши до уваги, що $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$, знаходимо $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}x_n^2 + 2\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}x_n^2 + \lim_{n\to\infty} 2 = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} x_n^2 \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} x_n^2 + 2 = \frac{1}{2}2\cdot 2 + 2$$
$$= 4.$$

Приклад 3.28. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = [x]$ у точці $x_0 = 2$.

Розв'язання. 1. Надамо $x_0 = 2$ приросту $|\Delta x| < 1$ і запишемо відповідне значення функції $f(x_0 + \Delta x)$. Очевидно, що в разі $0 < \Delta x < 1$, матимемо $f(x_0 + \Delta x) = 2$, а в разі $-1 < \Delta x < 0$, отримаємо $f(x_0 +$ *Δx=1.*

2. Знайдемо $\Delta f(x_0)$. Якщо $0 < \Delta x < 1$, то

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2 - 2 = 0,$$

а якщо $-1 < \Delta x < 0$, то

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 1 - 2 = -1.$$

3. $\lim_{x\to x_0} \Delta f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} 0 = 0$ за $0 < \Delta x < 1$ і

$$\lim_{x\to x_0} \Delta f(x_0) = \lim_{x\to x_0}(-1) = -1 \text{ за } -1 < \Delta x < 0.$$

Отже, за довільного $\Delta x \to 0$ приріст функції не прямує до 0, тому функція $f(x) = [x]$ розривна в точці $x_0 = 2$.

3.3. Асимптоти та граничний перехід

Асимптотою кривої $y = f(x)$ називається пряма, для якої відстань від довільної точки кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точки кривої рухаються по кривій у нескінченність. Розрізняють вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти.

Пряму $x = a$ називають *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \infty \text{ або } \lim_{x \to a-} f(x) = \infty$$

або те і те.

Приклад 3.29. Знайдіть вертикальні асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

Розв'язання. Точки, в яких границя функції $f(x) = \frac{1}{x+2}$ може дорівнювати нескінченності, потрібно шукати серед нулів знаменника дробу $\frac{1}{x+2}$. Такою точкою є $x = -2$.

Оскільки

$$\lim_{x \to -2+} \frac{1}{x+2} = +\infty, \qquad \lim_{x \to -2-} \frac{1}{x+2} = -\infty,$$

то пряма $x = -2$ – вертикальна асимптота кривої (рис.10).

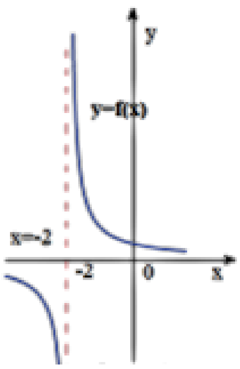


Рис. 3.8

Відповідь: $x = -2$.

Пряму $y = b$ називають *горизонтальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$ за $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, якщо

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = b\right).$$

Приклад 3.30. Знайдіть горизонтальні асимптоти графіка функції

$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

Розв'язання. Для знаходження горизонтальних асимптот, якщо вони існують, знайдемо границю функції $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ за $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 2;\ \ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 2;$$

Отже, пряма $y = 2$ – горизонтальна асимптота графіка функції $f(x)$ (рис. 3.9).

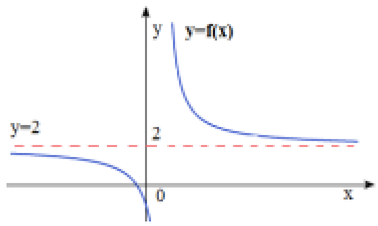


Рис. 3.9

Відповідь: $y = 2$.

Приклад 3.31. Знайдіть горизонтальні та вертикальні асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1} = \infty, \qquad \lim_{x\to-1}\frac{1}{x^2-1} = \infty,$$

то прямі $x = 1$ і $x = -1$ – вертикальні асимптоти кривої.

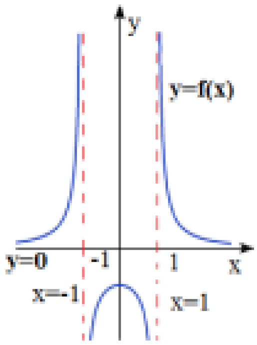


Рис. 3.10

Для знаходження горизонтальних асимптот, якщо вони існують, знайдемо границю функції $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ за $x \to +\infty (x \to -\infty)$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0, \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Отже, пряма $y = 0$ – горизонтальна асимптота графіка функції $f(x)$ (рис. 3.10).

Відповідь: $x = 1, x = -1, y = 0$

Пряма $y = kx + b$ називається *похилою асимптотою* графіка функції $y = f(x)$ за $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, якщо

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0 \; (\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0.).$$

Теорема 3.3. Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції $f(x)$, коли $x \to \pm\infty$, тоді і тільки тоді, коли виконуються рівності

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = b.$$

Приклад 3.32. Знайдіть похилі асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}$.

Розв'язання. Для знаходження похилих асимптот скористаємося теоремою 3.3. Спочатку знайдемо границі

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+3x}{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{x-1} = 1; \; \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

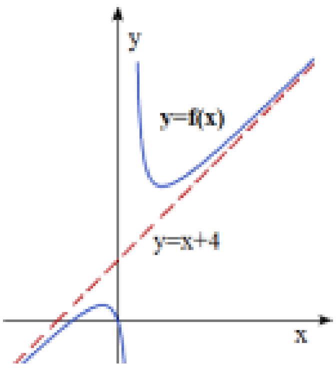


Рис. 3.11

Отже, якщо $x \to +\infty$ і якщо $x \to -\infty$, то маємо $k = 1$. Знаходимо границю

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2 + 3x}{x - 1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x - 1} = 4$$

Отже, $y = x + 4$ – рівняння похилої асимптоти (рис. 3.11).

Відповідь: $y = x + 4$.

ВИСНОВКИ

Підсумовуючи результати виконаного дослідження, можна відмітити наступні положення.

1. Існує декілька означень границі числової послідовності: через поняття нескінченно малих послідовностей; означення по Коші. Проте безумовно важливим є вибір серед них, так би мовити, основного означення границі послідовності. Ми дотримуємося думки, що таким основним означенням є означення в термінах околів, оскільки саме означення в термінах околів найбільш природно, прозоро і наочно передає сутність поняття границі послідовності; воно найкраще підходить для перенесення в простори більш загальної природи; використання цього означення спрощує доведення більшості теорем про границю послідовності як у логічному так і в технічному плані; 4) саме від цього означення найпростіше можна перейти до будь-якого іншого означення границі послідовності.

2. Означення границі функції в точці носить локальний характер. Це означає, що існування границі та її величина залежать лише від значень, що приймаються функцією в достатньо малому виколотому околі точки a. Іншими словами, якщо ми змінимо функцію поза деякого виколотого околу точки a, то це ніяк не вплине на існування границі і її величини. Стосовно основних тверджень, які стосуються поняття границі функції в точці, то серед них можна відмітити як найбільш важливі наступні:

3. Розділи «Границя послідовності», «Границя функції» неодноразово включалися та виключалися зі шкільної програми. В наш час програми шкільної математики пропонують достатньо різноманітний обсяг матеріалу та різні підходи до вивчення границь від короткого згадування границі послідовності та границі функції до детального вивчення границь, їх властивостей, методів обчислення

тощо. Теорія границь, як і інші розділи математичного аналізу, потребує особливої уваги від шкільного вчителя та певної підготовки учнів до сприйняття матеріалу. Наведені в роботі приклади розв'язування задач на застосування граничного переходу можуть бути запропоновані при розгляді відповідних тем шкільного курсу математики в класах з поглибленим вивченням математики, або на гурткових заняттях з математики для учнів старших класів загальноосвітніх шкіл.

4. Елементи граничного переходу вивчаються у шкільному курсі математики як у курсі алгебри, так і в курсі геометрії рівнів стандарту та профільного. Ці елементи використовують при встановленні формул довжини кола, площі круга, об'єму кулі, а також при вивченні поняття похідної функції в точці.

5. При різних формах неформальної освіти можна використовувати більш глибокі властивості границі числової послідовності, границі функції в точці та неперервності функції в точці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аксенов А.П. Математический анализ в 2 ч. часть 1 в 2 т. учебник и практикум для академического бакалавриата / А.П. Аксенов. - Люберцы: Юрайт, 2016. – 626 с.

2. Балдин К.В. Математический анализ: Учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. – М.: Флинта, МПСУ, 2013. – 368 с.

3. Баврин И.И. Математический анализ для педагогических вузов 2-е изд., испр. и доп. учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И.И. Баврин. – Люберцы: Юрайт, 2016. – 327 с.

4. Бевз Г.П. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 288 с. : іл.

5. Бевз Г.П. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 274 с. : іл.

6. Бутузов В., Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. 6-е изд., испр / В.Ф. Бутузов, Г.Н. Крутицкая и др. – СПб.: Лань, 2018. – 480 с.

7. Гаврилов В.И. Математический анализ: Учебное пособие для студентов учреждений высшего профессионального образования / В.И. Гаврилов, Ю.Н. Макаров, В.Г. Чирский. – М.: ИЦ Академия, 2013. – 336 с.

8. Горлач Б.А. Математический анализ: Учебное пособие / Б.А. Горлач. – СПб.: Лань, 2013. – 308 с.

9. Городній М. Ф., Митник Ю. В., Кашпіровський О. І. Основи математичного аналізу. – К.: КМ “Академія”, 2004. – Ч.1. – 98 с.

10. Гурова, З.И. Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами: учеб. для втузов / З.И. Гурова, С.Н. Каролинская, А.П. Осипова; Ред. А.И. Кибзун. - М.: Физматлит, 2002. - 351 с.

11. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов. – 10-е издание. – М.: Наука, 1990. – 346 с.

12. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. – К.: Либідь, 1993. – Ч.1. – 320 с.

13. Ильин В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 2 : учебник для академического бакалавриата / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. – 3-е изд. – М. : Издательство Юрайт, 2019. – 324 с.

14. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966. – 212 с.

15. Злобина С.В. Математический анализ в задачах и упражнениях / С.В. Злобина, Л.Н. Посицельская. - М.: Физматлит, 2018. – 360 с.

16. Зорич В.А Математический анализ. Часть 1 (6-е изд.) / В.А Зорич. — М.: МЦНМО, 2018. - 702 с.

17. Карташев А.П. Математический анализ. 2-е изд., стер. / А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. - СПб.: Лань, 2017. – 448 с.

18. Киркинский, А.С. Математический анализ: Учебное пособие для ВУЗов / А.С. Киркинский. - М.: Академический проект, 2016. – 526 с.

19. Колмогоров А. М., Фомін С. В. Елементи теорії функцій та функціонального аналізу. – К.: Вища шк., 1974. – 456 с.

20. Краткий курс математического анализа : учебник для вузов / А.Ф. Бермант; И.Г. Араманович. - СПб. : Лань, 2005.

21. Кытманов А. М. Математический анализ : учебное пособие для бакалавров / А. М. Кытманов. – М. : Издательство Юрайт, 2019. – 607 с.

22. Ляшко И.И. Справочное пособие по высшей математике. Т. 2. Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента: Часть 2: Дифференциальное исчисление векторного аргумента / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай. – М.: ЛКИ, 2013. – 224 с.

23. Логинова В. В. Математический анализ. Сборник заданий : учебное пособие для вузов / В. В. Логинова [и др.] ; под общей редакцией Е. Г. Плотниковой. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 286 с.

24. Максимова О. Д. Математический анализ в примерах и задачах. Предел функции : учебное пособие для вузов / О. Д. Максимова. – 2-е изд., стер. – М. : Издательство Юрайт, 2019. – 200 с.

25. Мерзляк А.Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 256 с. : іл.

26. Мерзляк А.Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 208 с. : іл.

27. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл. : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 304 с. : іл.

28. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл. : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 284 с. : іл.

29. Никитин А. А. Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. А. Никитин, В. В. Фомичев. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2019. – 460 с.

30. Никольский С. М. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1990. – Т. 1. – 528 с.

31. Плотникова Е. Г. Математический анализ для экономического бакалавриата : учебник и практикум для академического бакалавриата / Е. Г. Плотникова. – М. : Издательство Юрайт, 2019. – 274 с.

32. Покровский В.П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия. Учеб.-метод. пособие. Владим. гос. ун-т им. А.Г. и Н.Г. Столетовых. Владимир: Изд-во ВлГУ, 2014. – 143 с.

33. Протасов, Ю.М. Математический анализ: Учебное пособие / Ю.М. Протасов. - М.: Флинта, Наука, 2017. - 168 с.

34. Рудык Б. М. Математический анализ для экономистов : учебник и практикум для академического бакалавриата / Б. М. Рудык, О. В. Татарников. – М. : Издательство Юрайт, 2019. – 356 с.

35. Шершнев В.Г. Математический анализ: сборник задач с решениями: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 164 с.

36. Godement R. Analyse methematique. I. – Springer-Verlag. – Berlin, 1998. –390 s

37. Kaczor W. J., Nowak M. T. Problems in mathematical analysis. I. – AMS, Providence, 2000. – 368 p.