МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

СИМЕТРІЯ В АЛГЕБРІ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала: студентка 2 курсу, 221М групи
Спеціальності 014 Середня освіта
Спеціалізації 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)»
Желєзагло Алла Володимирівна

Керівник кандидатка фізико-математичних наук, доцентка Котова Ольга Володимирівна
Рецензент доцентка кафедри природничо-наукової підготовки Херсонської державної морської академії Спичак Тетяна Сергіївна

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія симетричних многочленів дозволяє застосовувати її для отримання більш раціонального розв’язання задач алгебри та доведення тверджень. Тому тема дослідження є актуальною.

В часи становлення та розвитку алгебри наступне твердження отримало назву основної теореми алгебри: многочлен степеня n з комплексними коефіцієнтами має рівно n коренів. Вперше це твердження сформулював Альбер да Жірар у 1629 році. Проте він навіть не намагався його довести. Першим усвідомив необхідність доведення основної теореми алгебри Даламбер, проте його доведення (1746 р.) не було визнане переконливим. Свої доведення запропонували Ейлер (1749 р.), Фонсене (1759 р.) та Лагранж (1771 р.), проте й ці доведення не були досконалими.

Першим доведення основної теореми алгебри отримав Гаус, який навів три її доведення та опублікував їх. Найбільш строгим вважається доведення основної теореми, що безпосередньо використовує теорію симетричних многочленів.

Найпростішими прикладами симетричних многочленів є сума всіх змінних, сума квадратів змінних, добуток змінних, добуток квадратів змінних тощо. Крім того, до кільця симетричних многочленів належать всі числа пояла, над яким вони розглядаються, та нуль-многочлен.

Теорія симетричних многочленів, зокрема, основна теорема цієї теорії має широке практичне застосування в курсі алгебри, зокрема, при обчисленні степеневих сум, розв’язуванні рівнянь третього та четвертого степенів, систем алгебраїчних рівнянь з двома невідомими тощо. Саме аспект широкого застосування теорії симетричних многочленів визначив вибір теми дослідження.

Основна *мета* роботи полягає у систематизації теоретичних відомостей про симетричні многочлени та розкритті питання застосування теорії симетричних многочленів в різних розділах математики.

Предмет дослідження – многочлени від кількох змінних. *Об'єкт* дослідження – клас симетричних многочленів.

Виходячи з мети, визначені такі основні *завдання* роботи:

- розгляд основних теоретичних відомостей з теорії симетричних многочленів;
- розкриття питання застосування симетричних функцій в різноманітних задачах алгебри;
- вивчення доведення основної теореми алгебри за допомогою симетричних многочленів.

Для досягнення мети дослідження і розв'язання основних завдань застосовані *методи*: теоретичний аналіз літератури з теорії симетричних многочленів, вивчення та узагальнення досвіду розв'язування задач, пов'язаних з симетричними многочленами, метод математичної індукції, метод доведення від супротивного.

Теоретична значущість теми – в найбільш доступній формі донесена інформація про симетричні многочлени, показана їх роль в алгебрі. Практична значущість полягає у розробці практичних завдань з теми дослідження.

В структурі роботи виділено три основні розділи та висновки.

Перший розділ містить теоретичний матеріал, пов'язаний з основними аспектами теорії симетричних многочленів. В ньому наведені основні властивості многочленів та визначено роль так званих елементарних симетричних многочленів.

У другому розділі розглядаються питання застосування симетричних многочленів до розв'язування різноманітних задач алгебри, зокрема, розкривають властивості таких понять, як результант та дискримінант двох многочленів та застосування їх до розв'язування алгебраїчних рівнянь та систем рівнянь.

В третьому розділі наведено доведення основної теореми алгебри за допомогою симетричних многочленів, а також розглянуті приклади розв'язування цікавих задач, пов'язаних з ними. Матеріал роботи може бути використаний студентами та викладачами вищих навчальних закладів, а також вчителями загальноосвітніх шкіл.

Апробація результатів роботи. Результати дослідження докладались на засіданнях наукового гуртка кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу (гурток з алгебри та геометрії, алгебри та теорії чисел, числових систем) та на Всеукраїнській науково-практичній конференції «Актуальні проблеми природничо-математичної освіти в Україні» (Херсон, 17.09.2021р.).

Публікації. Желєзагло А.В., Котова О.В. Симетричні многочлени в шкільному курсі математики. Актуальні проблеми природничо-математичної освіти в Україні. Зб. тез доп. Всеукр. наук.-практ. конф., м. Херсон, 16-17 вересня 2021 р. Херсон, 2021.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ З ТЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Аспекти теорії симетричних многочленів

Нехай $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ – многочлен з коефіцієнтами з деякої області цілісності. Розташуємо його за спадними степенями букви x_1. Одночлени, які містять x_1 в однаковому степені, розташуємо за спадними степенями букви x_2, одночлени, які містять x_1 і x_2 в однаковому степені, розташуємо за спадними степенями букви x_3 і т. д. Одночлени розмістяться в так званому лексикографічному порядку, який нагадує розташування слів у словниках. Будемо казати, що попередній в лексикографічному порядку одночлен вище наступних. Із означення зрозуміло, що одночлен $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}..x_n^{\alpha_n}$ вище одночлена $Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}..x_n^{\beta_n}$ тоді і тільки тоді, коли перша відмінна від нуля серед різниць $\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, ..., \alpha_n - \beta_n$ додатна.

Одночлен, який знаходиться на першому місці при лексикографічному впорядкуванні, носить назву *вищій член* многочлена. Зрозуміло, що якщо

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0(x_2, x_3, ..., x_n)x_1^{\alpha} + a_1(x_2, x_3, ..., x_n)x_1^{\alpha-1} + ...,$$

то вищім членом многочлена F є добуток x_1^{α} на вищий член многочлена $a_0(x_2, x_3, ..., x_n)$.

Приклад 1.1.

Вищий член добутку двох многочленів дорівнює добутку вищих членів співмножників.

Для $n = 1$ це вірно. Залишається застосувати тривіальним способом математичну індукцію, враховуючи зауваження, які передують формулюванню прикладу.

Серед многочленів від декількох невідомих виділяються ті, які не змінюються при будь-якій перестановці невідомих. До таких многочленів невідомі входять цілком симетричним чином, і тому ці многочлени називаються *симетричними многочленами* (або *симетричними функціями*). Найпростішими прикладами будуть: сумма

всіх невідомих $x_1 + x_2 + ... + x_n$,

сума квадратів невідомих $x_1^2 + x_2^2 + ...+ x_n^2$,

добуток невідомих $x_1 x_2 ....x_n$

тощо. В силу зображення будь-якої підстановки n символів у вигляді добутку транспозицій [11], при доведенні симетричності деякого многочлена достатньо перевірити, що він не змінюється ні при якій транспозиції двох невідомих.

Ми розглядатимемо далі симетричні многочлени від n невідомих з коефіцієнтами з деякого поля P. Легко бачити, що сума, різниця і добуток двох симетричних многочленів самі будуть симетричними, тобто симетричні многочлени складають підкільце в кільці $P[x_1, x_2, ..., x_n]$ всіх многочленів від n невідомих над полем P, яке називається *кільцем симетричних многочленів від n невідомих над полем P*. До цього кільця належать всі елементи з P (тобто всі многочлени нульового степеня, а також нуль), оскільки вони не змінюються ні при якій перестановці невідомих. Всякий інший симетричний многочлен неодмінно містить все n невідомих і навіть має один і той же степінь по кожній з них: якщо симетричний многочлен $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ містить член, до якого невідома x_i входить з показником k, то містить і член, що одержується з нього транспозицією невідомих x_i і x_j, тобто що містить невідому x_j в тому ж степені k.

Наступні n симетричних многочленів від n невідомих називаються *елементарними симетричними многочленами:*

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n,\\
&\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_{n-1}x_n,\\
&\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots\ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sigma_{n-1} = x_1x_2\ldots\ldots x_{n-1} + x_1x_2\ldots x_{n-2}x_n + \ldots\ldots + x_2x_3\ldots x_n,\\
&\sigma_n = x_1x_2\ldots . x_n
\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Ці многочлени, симетричність яких очевидна, грають в теорії симетричних многочленів дуже велику роль. Вони підказані формулами Вієта [5], і тому можна сказати, що коефіцієнти многочлена від однієї змінної, що має старший коефіцієнт рівний одиниці, будуть, з точністю до знака, елементарними симетричними многочленами від його коренів.

Оскільки симетричні многочлени від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем P утворюють кільце, то очевидні наступні твердження: симетричним многочленом буде будь-який цілий додатний степінь будь-якого з елементарних симетричних многочленів, а також добуток таких степенів, причому взятий з будь-яким коефіцієнтом з P, і, нарешті, будь-яка сума вказаних добутків. Іншими словами, будь-який многочлен від елементарних симетричних многочленів $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, з коефіцієнтами з P, що розглядається як многочлен від невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, буде симетричним.

Так, покладемо n =3 візьмемо многочлен $\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3$. Замінюючи σ_1, σ_2 і σ_3 їх виразами, ми отримаємо:

$$\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3 = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + 5x_1x_2x_3;$$

справа стоїть, очевидно, симетричний многочлен від x_1, x_2, x_3.

Многочлен називається *моногенним*, якщо всі одночлени, які його утворюють, отримують з інших шляхом перестановки букв. Очевидно, що кожний моногенний многочлен є симетричним.

Із означення симетричного многочлена зрозуміло, що якщо він містить якийсь одночлен, то він містить всі одночлени, які отримують із нього шляхом перестановки букв, і їх сума складає моногенний многочлен. Тому будь-який симетричний многочлен є сумою моногенних. Об'єднуючи разом моногенні многочлени однакового степеня, отримаємо, що будь-який симетричний многочлен є сумою однорідних симетричних многочленів.

1.2. Основна теорема про симетричні многочлени

Значимим результатом теорії симетричних многочленів є основна теорема про симетричні многочлени. Розглянемо насамперед допоміжне твердження.

Лема 1.1. Показники у вищому члені симетричного многочлена утворюють незростаючу послідовність.

Доведення.

Нехай $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ – симетричний многочлен і $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}..x_n^{\alpha_n}$ – його вищий член. Потрібно довести, що $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_n$.

Припустимо обернене, що при деякому i має місце $\alpha_i < \alpha_{i+1}$.

Переставивши в одночлені $Ax_1^{\alpha_1}..x_i^{\alpha_i}x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}..x_n^{\alpha_n}$ місцями x_i і x_{i+1}, ми отримаємо одночлен $Ax_1^{\alpha_1}..x_i^{\alpha_{i+1}}x_{i+1}^{\alpha_1}..x_n^{\alpha_n}$, який також міститься в F в силу симетричності. Але побудований одночлен вище даного, так як показники при $x_1, ..., x_{i-1}$ у них одинакові, а показники α_{i+1} при x_i у другому одночлені більше показника α_i при x_i в даному. Ми отримали протиріччя з тим, що даний одночлен був вищім. Це протиріччя і дає доведення леми.

Лему доведено.

Теорема 1.1. (основна теорема про симетричні многочлени).

Будь-який симетричний многочлен від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, над полем P є многочленом від елементарних симетричних многочленів $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, з коефіцієнтами, що належать до поля *P*.

Доведення.

Нехай задано симетричний многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і в його лексикографічному записі вищим буде член

$$a_0 x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}. \tag{1.2}$$

Показники при змінних в цьому члені повинні задовольняти нерівностям:

$$k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n. \tag{1.3}$$

Дійсно, нехай при деякому i буде $k_i < k_{i+1}$. Многочлен $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, як симетричний, повинен містити член

$$a_0 x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_i^{k_{i+1}} x_{i+1}^{k_i} \ldots x_n^{k_n}, \tag{1.4}$$

що одержується з члена (1.2) транспозицією невідомих x_i та x_{i+1}. Це проводить нас до протиріччя, оскільки член (1.4) в розумінні лексикографічного розташування вище за член (1.2): показники при $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в обох членах співпадають, але показник при x_i в члені (1.4) більший, ніж в члені (1.2).

Візьмемо тепер наступний добуток елементарних симетричних многочленів (зважаючи на нерівності (1.3) всі показники будуть від'ємними):

$$\varphi_1 = a_0 \sigma_1^{k_1 - k_2} \sigma_2^{k_2 - k_3} \ldots \sigma_{n-1}^{k_{n-1} - k_n} \sigma_n^{k_n}, \tag{1.5}$$

Це буде симетричний многочлен від невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причому його вищий член дорівнює члену (2.1). Дійсно, вищі члени многочленів $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ дорівнюють відповідно $x_1, x_1 x_2, x_1 x_2 x_3, \ldots, x_1 x_2 \ldots x_n$, а оскільки вищий член добутку дорівнює добутку вищих членів співмножників [9], то вищим членом многочлена φ_1 буде:

$$a_0 x_1^{k_1-k_2}\left(x_1x_2\right)^{k_2-k_3}\left(x_1x_2x_3\right)^{k_3-k_4}\left(x_1x_2....x_{n-1}\right)^{k_{n-1}-k_n}\left(x_1x_2...x_n\right)^{k_n}=a_0x_1^{k_1}x_2^{k_2}....x_n^{k_n}.$$

Звідси випливає, що при відніманні φ_1 з f вищі члени многочленів взаємно знищуються, тобто вищий член симетричного многочлена

$$f-\varphi_1=f_1$$

буде нижчим за член (2.1), який є вищим в многочлені f. Повторюючи для многочлена f_1, коефіцієнти якого належать очевидно, до поля P, цей же процес, ми прийдемо до рівності $f_1 = \varphi_2 + f_2$, де φ_2 є добутком ступенів елементарних симетричних многочленів з деяким коефіцієнтом з поля P, а f_2 – симетричний многочлен, вищий член якого нижче, ніж вищий член в f_1. Звідси випливає рівність $f = \varphi_1 + \varphi_2 + f_2$.

Продовжуючи цей процес, ми для деякого s отримаємо $f_s=0$ і тому прийдемо до виразу для f у вигляді многочлена від $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n$ з коефіцієнтами з P $f\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{s}\varphi_i=\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)$.

Дійсно, якби цей процес був нескінченним, то ми отримали б нескінченну послідовність симетричних многочленів

$$f_1, f_2,\dots,f_s,\dots, \tag{1.6}$$

причому вищий член кожного з них був би нижче, ніж вищі члени попередніх многочленів, і тим більше нижче, ніж (2.1). Проте, якщо

$$bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n} \tag{1.7}$$

є вищий член многочлена f_s, то з симетричності цього многочлена випливають нерівності:

$$l_1\geq l_2\geq\dots\geq l_n \tag{1.8}$$

подібні нерівностям (2.2). З іншого боку, оскільки член (2.1) вище за член (1.7), то:

$$k_1 \geq l_1. \qquad (1.9)$$

Легко бачити, проте, що системи цілих невід'ємних чисел $l_1, l_2, . l_n$, які задовольняють нерівностям (1.8) і (1.9), можна вибрати лише скінченним числом способів. Дійсно, якщо навіть відмовитися від вимоги (1.8) і лише припускати, що всі l_i, $i = 1, 2,.., n$, не більше k_1, то однаково вибір чисел l_i буде можливий лише $(k_1 + 1)^n$ способами. Звідси випливає, що послідовність многочленів (1.6) з вищими членами, що строго зменшуються, не може бути нескінченною.

Теорему доведено.

Зазначений вище зв'язок елементарних симетричних многочленів з формулами Вієта [5] дозволяє вивести наступний важливий наслідок з основної теореми про симетричні многочлени:

Наслідок. Нехай $f(x)$ – многочлен однієї змінної над полем P, який має старшим коефіцієнтом одиницю. Тоді будь-який симетричний многочлен (з коефіцієнтами з P) від коренів многочлена $f(x)$, що належать до деякого поля розкладу многочлена $f(x)$ над P, буде многочленом (з коефіцієнтами з P) від коефіцієнтів многочлена $f(x)$ і тому буде елементом поля P.

Викладене вище доведення основної теореми дає одночасно і метод для практичного розшуку виразів симетричних многочленів через елементарні. Заздалегідь введемо наступне позначення: якщо

$$a\ x_1^{k_1} x_2^{k_2} ....x_n^{k_n} \qquad (1.10)$$

є деякий добуток степенів невідомих x_1, x_2,..., x_n, (причому серед показників можуть бути і рівні нулю), то через

$$S(a\ x_1^{k_1} x_2^{k_2} ....x_n^{k_n}) \qquad (1.11)$$

позначатиметься сума всіх членів, що одержується з (1.10) при різних перестановках невідомих. Очевидно, що це буде симетричний многочлен, притому однорідний, і що будь-який симетричний многочлен від n невідомих, що містить член (1.10), буде міститиме і решту членів многочлена (1.11). Наприклад, $S(x_1)=\sigma_1$, $S(x_1x\quad)=\sigma_2$, $S(x_1^2)$ є сума квадратів усіх невідомих і т.д.

Приклад 1.2.

Симетричний многочлен $f=S(x_1^2x_2)$ від n невідомих виразити через елементарні симетричні многочлени.

Розв'язання.

Тут вищий член $x_1^2x_2$ і тому $\varphi_1=\sigma_1^{2-1}\sigma_2=\sigma_1\sigma_2$, тобто

$$\varphi_1=(x_1+x_2+.....+x_n)(x_1x_2+x_1x_3+...+x_{n-1}x_n)=S(x_1^2x_2)+3S(x_1x_2x_3), \qquad (1.12)$$

звідки

$$f_1=f-\varphi_1=-3S(x_1x_2x_3)=-3\sigma_3. \qquad (1.13)$$

Тому

$$f=\varphi_1+f_1=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3. \qquad (1.14)$$

В більш складних прикладах краще заздалегідь встановити, які члени можуть увійти до виразу даного многочлена через елементарні, а потім знайти коефіцієнти цих членів методом невизначених коефіцієнтів [19].

Приклад 1.3.

Знайти вираз для симетричного многочлена $f=S(x_1^2x_2^2)$.

Розв'язання.

Ми знаємо, що члени шуканого многочлена $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,.......,\sigma_n)$ визначаються через вищі члени симетричних многочленів f_1, f_2,...., причому ці вищі члени нижче за вищого члена даного многочлена f, тобто нижче $x_1^2x_2^2$. Знайдемо всі добутки $x_1^{l_1}x_2^{l_2}.....x_n^{l_n}$, що задовольняють наступним умовам:

1) вони нижче за член $x_1^2x_2^2$;

2) вони можуть служити вищими членами симетричних многочленів, тобто задовольняють нерівностям $l_1 \geq l_2 \geq .... \geq l_n$;

3) за сукупністю невідомих вони мають степінь 4 (оскільки всі многочлени мають той же степінь, що і однорідний многочлен *f*).

Виписуючи лише відповідні комбінації показників і вказуючи поряд ті добутки ступенів σ, які ними визначаються, ми одержуємо наступну таблицю:

$$22000......\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0} = \sigma_2^2$$
$$21100........\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0} = \sigma_1\sigma_3$$
$$11110........\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^{1-0} = \sigma_4$$

Таким чином, многочлен має вигляд:

$$f = \sigma_2^2 + A\sigma_1\sigma_3 + B\sigma_4.$$

Коефіцієнт при σ_2 ми поклали рівним одиниці, оскільки цей член визначений вищим членом многочлена *f* і має, як ми знаємо з доведення основної теореми, такий же коефіцієнт. Коефіцієнти *A* і *B* ми знайдемо наступним чином.

Нехай $x_1 = x_2 = x_3 = 1, x_4 = \ldots = x_n = 0.$

Легко бачити, що при цих значеннях невідомих многочлен *f* набуває значення 3, а многочлени $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ – відповідно значення 3, 3, 1, 0. Тому $3 = 9 + A \cdot 3 \cdot 1 + B \cdot 0$, звідки *A* = – 2. Нехай тепер

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1, x_5 = \ldots = x_n = 0.$$

Значення многочленів *f*, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, будуть рівними відповідно 6, 4, 6, 4, 1. Тому $6 = 36 - 2 \cdot 4 \cdot 4 + B \cdot 1$, звідки *B* = 2. Таким чином, шуканий вираз для *f* буде $f = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4$.

Приклад 1.4.

Знайти суму кубів коренів многочлена

$$f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

Розв'язання.

Для розв'язання задачі знайдемо вираз через елементарні симетричні многочлени для симетричного многочлена $S\left(x_1^3\right)$. Застосовуючи той же метод, як і в попередньому прикладі, ми отримаємо таблицю

$$3000.........\sigma_1^3,$$
$$2100.........\sigma_1\sigma_2,$$
$$1110...........\sigma_3$$

а тому $S\left(x_1^3\right)=\sigma_1^3+A\sigma_1\sigma_2+B\sigma_3$.

Поклавши спочатку

$$x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = \ldots = x_n = 0,$$

а потім

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1,\ x_4 = \ldots = x_n = 0,$$

ми отримаємо $A = -3$, $B = 3$, тобто

$$S\left(x_1^3\right)=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3. \qquad (1.15)$$

Для знаходження суми кубів коренів даного нам многочлена $f(x)$ потрібно, зважаючи на формули Вієта [5], в знайденому вище виразі замінити σ_1 через коефіцієнт при x^3 з протилежним знаком, тобто через – 1, замінити σ_2 через коефіцієнт при x^2, тобто через 2, і, нарешті, замінити σ_3 через коефіцієнт при x з протилежним знаком, тобто через – 1. Таким чином, необхідна сума кубів коренів дорівнює:

$$(-1)^3-3\cdot(-1)\cdot 2+3\cdot(-1)=2.$$

Цей результат можна перевірити, якщо врахувати, що $f(x)$ має коренями числа $i,-i,-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Очевидно також, що формула (1.15) не залежить від заданого многочлена $f(x)$ і дозволяє знаходити суму кубів коренів будь-якого многочлена.

Метод для зображення симетричного многочлена f через елементарні, отриманий при доведенні основної теореми, приводить до цілком певного многочлена від $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Виявляється, що жодним іншим способом не можна отримати для f іншого виразу через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Це показує наступна теорема єдиності:

Теорема 1.2. Будь-який симетричний многочлен володіє лише єдиним зображенням у вигляді многочлена від елементарних симетричних многочленів [21].

Теорему можна сформулювати наступним чином:

Система елементарних симетричних многочленів $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, що розглядаються як елементи кільця многочленів $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, алгебраїчно незалежна над полем P.

Доведення основної теореми про симетричні многочлени дозволяє зробити декілька істотних доповнень до формулювання теореми. По-перше, коефіцієнти того многочлена $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, який знайдений нами як вираз для симетричного многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ через елементарні симетричні многочлени, не тільки належать до поля P, але навіть виражаються через коефіцієнти многочлена f за допомогою складання і віднімання, тобто належать до кільця L, яке породжується коефіцієнтами многочлена f всередині поля P [23].

Дійсно, всі коефіцієнти многочлена φ_1 (1.5) відносно невідомих x_1, x_2, ..., x_n є, як легко бачити, цілі кратні від коефіцієнта a_0 при вищому члені многочлена f і тому належать до кільця L. Нехай вже доведено, що до L належать коефіцієнти (відносно x_1, x_2, ..., x_n) многочленів $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$. Тоді коефіцієнти многочлена

$$f_l = f - \varphi_1 - \varphi_2 - \ldots\ldots - \varphi_l$$

також належатимуть до L, а тому в L лежать і всі коефіцієнти многочлена φ_{l+1} відносно x_1, x_2, ..., x_n.

З іншого боку, степінь многочлена $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ за сукупністю $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, дорівнює степеню, який має многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

за кожною з невідомих x_i. Дійсно, оскільки (1.2) є вищий член многочлена f, то k_1 буде степенем f щодо невідомої x_i, а тому, беручи до уваги симетричність, і відносно будь-кого іншого з невідомих x_i. Проте степінь φ_1 за сукупністю σ дорівнює числу

$$(k_1 - k_2) + (k_2 - k_3) + ... + (k_{n-1} - k_n) + k_n = k_1.$$

Далі, оскільки старший член многочлена f_1 нижчий за старший член многочлена f, то степінь f_1 по кожній з x_i не буде вищим, ніж степінь f по кожній з цих невідомих. Проте многочлен φ_2 грає для f_1 таку саму роль, як φ_1 для f, тому степінь φ_2 за сукупністю σ дорівнює степеню f_1 по кожній з x_i, тобто він не більший, ніж k_1 і т.д. Таким чином, і степінь $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ не вищий, ніж k_1. Оскільки жодне φ_i для $i > 1$ не може містити усі σ_1, σ_2, …, σ_n у тих же степенях, що й φ_1, то степінь $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, …, \sigma_n)$ у точності дорівнює k_1. Тим самим наше твердження доведено.

Нарешті, нехай $a\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}...\sigma_n^{l_n}$ – один із членів многочлена $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, …, \sigma_n)$. Назвемо *вагою* цього члена число $l_1 + 2l_2 + … + nl_n$, тобто суму показників, помножених на індекси відповідних σ_1. Це буде, інакше кажучи, степінь узятого нами члена за сукупністю невідомих x_1, x_2, …, x_n, як випливає з теореми про степінь добутку многочленів [26]. Тоді справедливе наступне твердження:

Якщо однорідний симетричний многочлен $f(x_1, x_2, …, x_n)$ має за сукупністю невідомих степінь s, то всі члени його виразу $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, …, \sigma_n)$ через σ будуть однієї й тієї самої ваги, що дорівнює s.

Дійсно, якщо (1.2) – вищий член однорідного многочлена f, то

$$s = k_1 + k_2 + …+ k_n,$$

проте вага члена φ_1 дорівнює

$$(k_1 - k_2) + 2(k_2 - k_3) +…+ (n - 1)(k_{n-1} - k_n) + nk_n = k_1 + k_2 + k_3 +…+ k_n,$$

тобто так само дорівнює s. Далі, многочлен $f_1 = f - \varphi_1$ як різниця двох однорідних многочленів степеня s сам буде однорідним степеня s [14], а тому й член φ_2 многочлена φ буде маси s і т. д.

РОЗДІЛ 2
СИМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ В РІЗНИХ РОЗДІЛАХ МАТЕМАТИКИ

2.1. Степеневі суми та їх обчислення

На практиці часто зустрічаються симетричні многочлени

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k,\ k = 1,2,\ldots,$$

тобто суми k-х степенів невідомих x_1, x_2, …, x_n. Ці многочлени, які називають *степеними сумами*, повинні виражатися, за основною теоремою, через елементарні симетричні многочлени. Пошук цих виразів при великих k є досить громіздким, тому представляє інтерес той зв'язок між многочленами s_1, s_2, … і σ_1, σ_2, …, σ_n, який буде зараз встановлений.

Перш за все

$$s_1 = \sigma_1. \tag{2.1}$$

Далі, якщо $k \le n$, то легко перевірити справедливість рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}
&s_{k-1}\sigma_1 = s_k + S(x_1^{k-1}x_2),\\
&s_{k-2}\sigma_2 = S(x_1^{k-1}x_2) + S(x_1^{k-1}x_2x_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_{k-i}\sigma_i = S(x_1^{k-i+1}x_2\ldots x_i) + S(x_1^{k-1}x_2\ldots x_i x_{i+1}), 2 \le i \le k-2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_1\sigma_{k-1} = S(x_1^2 x_2\ldots x_{k-1}) + k\sigma_k
\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Беручи альтернативну суму цих рівнянь [11] (тобто суму із знаками, що чергуються), а потім переносячи всі члени до однієї частини рівняння, ми отримаємо наступну формулу:

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0,\ (k \le n). \tag{2.3}$$

Якщо ж $k > n$, то система (2.2) приймає вигляд:

$$s_{k-1}\sigma_1 = s_k + S(x_1^{k-1}x_2),$$

$$s_{k-2}\sigma_2 = S(x_1^{k-1}x_2) + S(x_1^{k-2}x_2x_3)$$

……………………………………………………………

$$s_{k-i}\sigma_i = S(x_1^{k-i+1}x_2..x_i) + S(x_1^{k-1}x_2..x_i x_{i+1}), 2 \le i \le n-1,$$

……………………………………………………………

$$s_{k-n}\sigma_n = S(x_1^{k-n+1}x_2..x_n),$$

звідки випливає формула:

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - ... + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n = 0,\ (k > n). \qquad (2.4)$$

Формули (2.3) та (2.4) називаються *формулами Ньютона*. Вони зв'язують степеневі суми з елементарними симетричними многочленами й дозволяють послідовно знаходити вирази для s_1, s_2, s_3, ... через σ_1, σ_2, …, σ_n. Дійсно, ми знаємо, що $s_1 = \sigma_1$, що випливає з формули (2.4). Якщо, далі, $k = 2 \le n$, то $s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0$, звідки $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$.

Далі, при $k = 3 \le n$ буде $s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0$,

звідки, користуючись знайденими вже виразами для s_1 та s_2, отримаємо:

$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3,$$

що нам вже відомо. Якщо ж $k = 3$, але $n = 2$, то за (2.4)

$$s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 = 0,$$

звідки $s_3 = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2$.

Користуючись формулами Ньютона, можна отримати загальну формулу, яка виражає s_k через σ_1, σ_2, …, σ_n [6].

Якщо основне поле P має характеристику 0 [3] і тому ділення на довільне натуральне число n має місце, то формула (2.3) дає можливість послідовно виразити елементарні симетричні многочлени σ_1, σ_2, …, σ_n через перші n степеневих сум s_1, s_2,…s_n. Так, $\sigma_1 = s_1$, а тому

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(s_1\sigma_1 - s_2) = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2),$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{3}(s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2) = \frac{1}{6}(s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3)$$

і т. д. Звідси і з основної теореми випливає наступний результат:

Будь-який симетричний многочлен від n невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем P характеристики нуль можна зобразити у вигляді многочлена від степеневих сум $s_1, s_2, \ldots s_n$ з коефіцієнтами, які належать полю P.

2.2. Рівняння третього та четвертого степенів

Нехай $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – деякий многочлен від $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Під дією деяких підстановок букв $x_1, x_2, \ldots, x_n$ він може не змінюватися. Зрозуміло, що множина підстановок, які не змінюють даний многочлен, утворює групу [13]. Ця група H є підгрупою симетричної групи S_n [6], і її індекс k дорівнює числу різних многочленів $F = F_1, F_2, \ldots, F_k$, які можна отримати із многочлена F з допомогою підстановок $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Під дією цих підстановок многочлени $F_1, F_2, \ldots, F_k$ переміщуються так само, як ліві класи суміжності групи S_n за підгрупою H при множенні на елементи із S_n справа. Тому довільний симетричний многочлен від $F_1, F_2, \ldots, F_k$ є разом з тим симетричним многочленом від $x_1, x_2, \ldots, x_n$, так що якщо замість $x_1, x_2, \ldots, x_n$ підставити корені даного многочлена

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

тоді можливі значення многочленів $F_1, F_2, \ldots, F_k$ будуть коренями многочлена степеня k з коефіцієнтами, що виражаються у вигляді многочленів від коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ полінома f.

Розглянемо в якості прикладу застосування цих ідей питання про алгебраїчне розв'язування алгебраїчних рівнянь $f(x) = 0$ при $n = 3$ і $n = 4$ у полі комплексних чисел.

Нехай $n = 3$.

Розглянемо многочлен $\theta_1 = x_1 + x_2\rho + x_3\rho^2$, де $\rho = \ell^{2\pi i/3}$ – первісний корінь степеня 3 з одиниці. При кругових підстановках

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ многочлен θ_1 приймає множники ρ і ρ^2 і, звідси, θ_1^3 при цьому не змінюється. Кругові підстановки утворюють підгрупу індексу 2 в симетричній групі S_3 [13], і представниками класів суміжності можна вважати і транспозицію (x_2, x_3).

Вона переводить θ_1 в $\theta_2 = x_1 + x_2\rho^2 + x_3\rho$ і, відповідно, θ_1^3 в θ_2^3. Тому $\theta_1^3 + \theta_2^3$ і $\theta_1^3\theta_2^3$ є симетричними многочленами від x_1, x_2, x_3. Саме, $\theta_1^3 + \theta_2^3 = 2x_1^3 + 2x_2^3 + 2x_3^3 - 3\left(x_1^2 x_2 + \ldots\right) + 12x_1x_2x_3 = 2f_1^3 - 9f_1f_2 + 27f_3$.

Симетричним виявляється не тільки $\theta_1^3\theta_2^3$, але і:

$$\theta_1\theta_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = f_1^2 - 3f_3.$$

Таким чином, θ_1^3 і θ_2^3 визначаються як корені квадратного рівняння з відомими коефіцієнтами. Після цього θ_1 і θ_2 знаходяться за допомогою добування кубічного кореня, причому значення коренів потрібно співставити так, щоб добуток $\theta_1\theta_2$ дорівнював $f_1^2 - 3f_3$.

Далі, x_1, x_2, x_3 знаходяться через розв’язання лінійної системи:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = f_1, \\ &x_1 + x_2\rho + x_3\rho^2 = \theta_1, \\ &x_1 + x_2\rho^2 + x_3\rho = \theta_2, \end{aligned} \qquad (2.5)$$

яка дає:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}\left(f_1 + \theta_1 + \theta_2\right), \\ x_2 &= \frac{1}{3}\left(f_1 + \theta_1\rho^2 + |\,\theta_2\rho\right), \\ x_3 &= \frac{1}{3}\left(f_1 + \theta_1\rho + \theta_2\rho^2\right). \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Легко бачити, що цей розв’язок нічим не відрізняється від розв’язку за формулою Кардано [25].

Нехай тепер $n = 4$. У якості F_1 візьмемо $x_1x_2 + x_3x_4$.

Многочлен F_1 не змінюється при восьми підстановках, які складають підгрупу індексу 3 у симетричній групі S_4. Інші підстановки переводять F_1 у $F_2 = x_1x_3 + x_2x_4$ і $F_3 = x_1x_4 + x_2x_3$.

Симетричні поліноми від F_1, F_2, F_3 будуть симетричними і від x_1, x_2, x_3, x_4. Саме, основні симетричні многочлени будуть:

$$\begin{aligned} &F_1 + F_2 + F_3 = f_2, \\ &F_1F_2 + F_1F_3 + F_2F_3 = f_1 f_3 - 4 f_4, \\ &F_1F_2F_3 = f_1^2 f_4 + f_3^2 - 4 f_2 f_4. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Вважаючи, що x_1, x_2, x_3, x_4 – корені полінома $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$, ми можемо скласти кубічне рівняння для F_1, F_2, F_3. Знайшовши один із коренів $F_1 = x_1x_2 + x_3x_4$, ми можемо знайти x_1, x_2, x_3, x_4, розв'язуючи ланцюг квадратних рівнянь. Отримуємо спосіб, який співпадає зі способом Феррарі [24].

Відомий під назвою метод Ейлера [31] спосіб отримаємо, якщо візьмемо $F_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 = f_1^2 - 4 f_2 + 4(x_1x_2 + x_3x_4)$.

Многочлен F_1 не змінюється при тій же групі із восьми підстановок, що і $x_1x_2 + x_3x_4$.

Підстановки із класів суміжності групи S_4 по цій підгрупі переводять F_1 в $F_2 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2$ і $F_3 = (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2$.
Виразивши основні симетричні многочлени від F_1, F_2, F_3 потрібно вилучити з них квадратні корені, визначаючи знаки коренів так, щоб їх добуток дорівнював $f_1^2 - 4 f_1 f_2 + 8 f_3$.
Корені x_1, x_2, x_3, x_4 знайдемо із системи лінійних рівнянь. Отримаємо:

$$\begin{aligned} &x_1 = \frac{1}{4}\left(f_1 + \sqrt{F_1} + \sqrt{F_2} + \sqrt{F_3}\right), \\ &x_2 = \frac{1}{4}\left(f_1 + \sqrt{F_1} - \sqrt{F_2} - \sqrt{F_3}\right), \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$x_3 = \frac{1}{4}\left(f_1 - \sqrt{F_1} + \sqrt{F_2} - \sqrt{F_3}\right),$$
$$x_4 = \frac{1}{4}\left(f_1 - \sqrt{F_1} - \sqrt{F_2} + \sqrt{F_3}\right)$$

Аналіз близьких ідей привів Руфіні і Абеля [41] до доведення нерозв'язності в радикалах загальних рівнянь п'ятого і вище степенів.

2.3. Результант та його застосування

Якщо дано многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з кільця $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, то його *розв'язком* називається така система значень для змінних

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \ \ldots, x_n = \alpha_n,$$

взятих з поля P або з деякого розширенні $\overline{P}$ цього поля [12], яка обертає многочлен f в нуль $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$.

Всякий многочлен f, степінь якого більше за нуль, має розв'язки: якщо змінна x_1 входить до запису цього многочлена, то в якості $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ можна взяти, по суті, довільні елементи з поля P, тільки б степінь многочлена $f(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ залишався б строго додатнім, а потім, використовуючи теорему про існування кореня [5], взяти таке розширення $\overline{P}$ поля P, у якому многочлен $f(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ від однієї змінної x_1 володіє коренем α_1. Ми бачимо разом з тим, що властивість многочлена степеня n від однієї змінної володіти в будь-якому полі не більше, ніж n коренями, для многочленів від кількох змінних перестає бути справедливою.

Якщо дано кілька многочленів від n змінних, то можна поставити питання про знаходження розв'язків, спільних для всіх цих многочленів, тобто розв'язків тієї системи рівнянь, яку отримуємо в результаті прирівнювання заданих многочленів нулю. Розглянемо випадок системи двох рівнянь довільного степеня від двох змінних і покажемо, що цей випадок може бути зведений до випадку одного рівняння з однієї змінною.

Займемося спочатку питанням про існування спільних коренів у двох многочленів від одної змінної. Нехай дано многочлени:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \\ g(x) &= b_0x^s + b_1x^{s-1} + \ldots + b_{s-1}x + b_s \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

над полем *P*, при цьому $a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0.$

Як було зазначено раніше, многочлени $f(x)$ та $g(x)$ тоді і тільки тоді мають спільний корінь в деякому полі *P*, якщо вони не є взаємно простими. Таким чином, питання про існування спільних коренів у даних многочленів може бути розв’язане за допомогою алгоритму Евкліда [7].

Розглянемо інший метод для отримання відповіді на це питання. Нехай $\overline{P}$ – таке розширення поля *P,* у якому $f(x)$ має *n* коренів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, а $g(x)$ має *s* коренів $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$. В якості $\overline{P}$ можна взяти поле розширення для добутку $f(x)g(x)$. Елемент:

$$R(f,g) = a_0^s b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{s} (\alpha_i - \beta_j) \tag{2.10}$$

поля $\overline{P}$ називають *результантом* многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Очевидно, що $f(x)$ і $g(x)$ тоді і тільки тоді мають в $\overline{P}$ спільні корені, якщо $R(f,g) = 0.$ Оскільки $g(x) = b_0 \prod_{j=1}^{s} (x - \beta_j)$ і тому $g(\alpha_i) = b_0 \prod_{j=1}^{s} (\alpha_i - \beta_j)$, то результант $R(f,g)$ можна також записати у вигляді:

$$R(f,g) = a_0^s \prod_{j=1}^{n} g(\alpha_i)\,. \tag{2.11}$$

Многочлени $f(x)$ і $g(x)$ використовуються в означенні результанта не симетричним чином. Дійсно,

$$R(g,\, f) = b_0^s a_0^s \prod_{j=1}^{s} \prod_{i=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) = (-1)^{ns} R(f,g)\,. \tag{2.12}$$

Відповідно до (2.11) $R(f,g)$ можна записати у вигляді:

$$R(g,\, f) = b_0^n \prod_{j=1}^{s} f(\beta_i)\,. \qquad (2.13)$$

Запис (2.10) для результанта потребує знання коренів многочленів $f(x)$ і $g(x)$ і тому існування у цих многочленів спільного кореня не є необхідним для розв’язання. Виходить, що результант $R(f,g)$ може бути представлений у вигляді многочлена від коефіцієнтів $a_0,\ a_1,\ ...,a_n, b_0,\ b_1,\ ...,b_s$, многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Можливість такого зображення легко випливає з попередніх результатів. Дійсно, формула (2.24) показує, що результант $R(f,g)$ є симетричним многочленом від двох систем невідомих: системи $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ і системи $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$.

Його можна подати у вигляді многочлена від елементарних симетричних многочленів по цим двом системам змінних (за допомогою формул Вієта [5]) у вигляді многочлена від часток $\dfrac{a_i}{a_0},\ i = 1,\ 2,\ ...,n,$ та $\dfrac{b_j}{b_0},\ j = 1,\ 2,\ ...,s.$ Множник $a_0^s b_0^n$, який входить до (2.10), звільняє отриманий вираз від a_0, b_0 в знаменниках.

Знайдений вираз для результанта многочленів (2.9) буде вірним для будь-якої пари дійсних чисел. Ми будемо вважати, що система коренів

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_s \qquad (2.14)$$

многочленів (2.9) є системою $n + s$ незалежних змінних, тобто системою $n + s$ елементів, алгебраїчно незалежних над полем P.

Ми отримаємо вираз для результанта, що розглядається як многочлен від змінних (2.14) (після заміни у формулах Вієта коефіцієнтів через корені), і буде рівним правій частині рівняння (2.10), яке також розглядається як многочлен від змінних (2.14).

Розуміючи рівняння виключно у розумінні такого тотожного рівняння відносно системи невідомих (2.14), можна показати, що результант $R(f,g)$ многочленів (2.9) рівний наступному визначнику порядку $n + s$:

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_n & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & a_0 & a_1 & \dots & a_n & \\ b_0 & b_1 & \dots & b_s & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_s & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & b_0 & b_1 & \dots & b_s & \end{vmatrix} \qquad (2.15)$$

(на вільних місцях знаходяться нулі). Побудова цього визначника дуже легка; ми відзначимо тільки, що на його головній діагоналі знаходиться s раз коефіцієнт a_0 і потім n раз коефіцієнт b_s.

Відмовимося тепер від умови, щоб вищі коефіцієнти многочленів (2.9) були відмінні від нуля. Про дійсні степені цих многочленів можна тільки стверджувати, що вони не більше їх «формальних» степенів n і s. Вираз (2.10) для результанта не має тепер значення, оскільки многочлени, що розглядаються, мають, можливо, більше коренів, ніж n або s. З іншого боку, визначник (2.14) і тепер може бути записаний, і оскільки вже доведено, що при $a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0.$

Цей визначник дорівнює результанту, то і в нашому загальному випадку назвемо його *результантом* многочленів $f(x)$ і $g(x)$ та позначимо через $R(f,g)$.

Тепер вже не можна розраховувати на те, що рівність результанта нулю рівносильне існуванню у наших многочленів спільного кореня.

Теорема 2.1. Якщо дано многочлени (2.9) з довільними старшими коефіцієнтами, то результант (2.28) цих многочленів тоді і тільки тоді дорівнює нулю, якщо ці многочлени мають спільний корінь, або їх старші коефіцієнти дорівнюють нулю.

Знайдемо результант двох квадратних многочленів:

$$f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, \quad g(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2.$$

За (2.15):

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

або, обчислюючи визначник розкладанням за першим і третім рядками,

$$R(f, g) = (a_0b_2 - a_2b_0)^2 - (a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1). \tag{2.16}$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 2,\; g(x) = x^2 - x + 5,\; R(f, g) = 233.$$

Тому ці многочлени не мають спільних коренів.

Якщо $f(x) = x^2 - 4x - 5,\; g(x) = x^2 - 7x + 10,\; R(f, g) = 0,$

тобто ці багаточлени мають спільний корінь; цим коренем є число 5.

Нехай дано два многочлени f і g від двох змінних x і y з коефіцієнтами із деякого поля P. Ми запишемо ці многочлени за спадними степенями змінної x:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= a_0(y)x^k + a_1(y)x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}(y)x + a_k(y), \\ g(x, y) &= b_0(y)x^l + b_1(y)x^{l-1} + \ldots + b_{l-1}(y)x + b_l(y); \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

Коефіцієнти будуть многочленами із кільця $P[y]$ [21]. Знайдемо результант многочленів f і g, які розглядаються як многочлени від x, та позначимо його через $R_x(f, g)$. В силу (2.15) він буде многочленом від однієї змінної y з коефіцієнтами з поля P:

$$R_x(f, g) = F(y). \tag{2.18}$$

Нехай система многочленів має в деякому розширенні поля P загальний розв'язок $x=\alpha, \quad y=\beta.$

Підставляючи в (2.31) замість y значення β, ми отримаємо два многочлени $f(x,\beta)$ і $g(x,\beta)$ від однієї змінної x. Ці многочлени мають спільний корінь α, і тому їх результант $F(\beta)$ повинен дорівнювати нулю, тобто β повинен бути коренем результанта $R_x(f,g)$.

Обернено, якщо результант $R_x(f,g)$ многочленів (2.17) має спільний корінь β, то результант многочленів $f(x,\beta)$ і $g(x,\beta)$ дорівнює нулю, тобто або ці многочлени мають спільний корінь, або їх старші коефіцієнти дорівнюють нулю $a_0(\beta)=b_0(\beta)=0$.

Цим способом пошук спільник коренів системи многочленів (2.17) зведено до пошуку коренів одного многочлена (2.32) від однієї змінної y, тобто, як прийнято говорити, невідома x виключена з системи многочленів (2.17).

Наступна теорема відповідає на запитання про степінь того многочлена, який ми отримуємо після виключення однієї змінної з системи двох многочленів від двох змінних.

Теорема 2.2. Якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ мають за сукупністю змінних відповідно степені n і s, то степінь многочлена $R_x(f,g)$ від змінної y не перевищує добуток ns, якщо цей многочлен тотожно не дорівнює нулю.

Приклад 2.4.

Знайти спільний розв'язок системи многочленів:

$$f(x,y)=x^2y+3xy+2y+3,\ g(x,y)=2xy-2x+2y+3.$$

Розв'язання.

Виключимо з цієї системи змінну x, для цього перепишемо її у вигляді:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= y\cdot x^2 + (3x)\cdot y + (2y+3), \\ g(x,y) &= (2y-2)\cdot x + (2y+3); \end{aligned}\right\}$$

тоді

$$R_x(f,g) = \begin{vmatrix} y & 3y & 2y+3 \\ 2y-2 & 2y+3 & 0 \\ 0 & 2y-2 & 2y+3 \end{vmatrix} = 2y^2 + 11y + 12.$$

Коренями результанта будуть числа $\beta_1 = -4,\ \beta_2 = -\frac{3}{2}$.

При цих значеннях *x* змінної *y* старші коефіцієнти многочленів не дорівнюють нулю, тому кожне з них разом з деяким значенням для *x* складає розв’язок вихідної системи многочленів.

Многочлени $f(x,-4) = -4x^2 - 12x - 5, g(x,-4) = -10x - 5,$ мають спільний корінь $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$.

Многочлени $f(x,-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x, g(x,-\frac{3}{2}) = -5x$ мають спільний корінь $\alpha_2 = 0$.

Таким чином, вихідна система многочленів має два розв’язки:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2},\quad \beta_1 = -4 \quad i \quad \alpha_2 = 0,\quad \beta_2 = -\frac{3}{2}.$$

Приклад 2.5.

Виключити одну змінну з системи многочленів

$$f(x,y) = 2x^3y - xy^2 + x + 5, g(x,y) = x^2y^2 + 2xy^2 - 5y + 1.$$

Розв’язання.

Оскільки два многочлени мають по змінній *y* степінь 2, тоді як у одного з них по змінній *x* степінь 3, то раціонально виключити *y*.

Перепишемо систему у вигляді:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= (-x)\cdot y^2 + (2x^3)\cdot y + (x+5), \\ g(x,y) &= (x^2+2x)\cdot y^2 - 5y + 1 \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

і знайдемо її результант, застосовуючи формулу (3.34):

$$R_y(f,g)=\left[(-x)\cdot 1-(x+5)(x^2+2x)\right]^2-\left[(-x)(-5)-2x^3(x^2+2x)\right]\times$$
$$\times\left[2x^3\cdot 1-(x+5)(-5)\right]=4x^8+8x^7+11x^6+84x^5+161x^4+154x^3+96x^2-125x.$$

Одним із коренів є 0. Але при цьому значенні змінної x два старших коефіцієнти многочленів стають нулями, причому, як бачимо, многочлени $f(0,y)$ і $g(0,y)$ не мають спільних коренів. У нас немає іншого способу знайти інші корені результанта. Можна стверджувати тільки, що якщо б ми знайшли (наприклад, в полі розкладу [12] для $R_y(f,g)$), то жоден з них не перетворює в нуль два старших коефіцієнті многочленів (2.19) і тому кожен з цих коренів разом з деяким значенням для y (одним чи навіть декількома) складав би розв'язок заданої системи многочленів.

Існують методи, які допомагають послідовно виключати змінні із систем з довільним числом многочленів і змінних, але вони досить громіздкі.

По аналогії з питанням, що приводить до поняття результанта, можна поставити питання про умови, за яких многочлен $f(x)$ степеня n з кільця $P[x]$ має кратні корені. Нехай

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\qquad a_0\neq 0,$$

і нехай в деякому розширенні поля P цей многочлен має корені

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n.$$

Очевидно, що серед цих коренів тоді і тільки тоді будуть рівні, якщо дорівнює нулю добуток

$$\begin{aligned}\Delta=&(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\ \ldots\ (\alpha_n-\alpha_1)\times\\ &\times(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_2)\ \ldots\ (\alpha_n-\alpha_2)\times\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\times(\alpha_n-\alpha_{n-1})=\prod_{n\geq i\geq j\geq 1}(\alpha_i-\alpha_j)\end{aligned}$$

або якщо дорівнює нулю добуток $D=a_0^{2n-2}\prod\limits_{n\geq i\geq j\geq 1}(\alpha_i-\alpha_j)^2$, який називають *дискримінантом* многочлена $f(x)$.

На відміну від добутку Δ, який може змінювати знак при перестановці коренів, дискримінант D симетричний відносно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ і тому може бути виражений через коефіцієнти многочлена $f(x)$. Для пошуку цього виразу, якщо вважати, що поле P має характеристику нуль, можна скористатися зв'язком, що існує між дискримінантом многочлена $f(x)$ і результантом цього многочлена та його похідною [16]: многочлен тоді і тільки тоді має кратні корені, якщо у нього є спільні корені з похідною $f'(x)$, а тому тоді і тільки тоді D = 0, якщо $R(f, f') = 0$.

За формулою (2.25) $R(f, f') = a_0^{n-1}\prod_{i=1}^{n} f'(\alpha_i)$.

Диференціюючи рівняння $f(x) = a_0\prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k)$, ми отримаємо:

$$f'(x) = a_0\sum_{k=1}^{n}\prod_{j\neq k}(x-\alpha_j).$$

Після підстановки сюди α_i замість x всі елементи, крім i-го, перетворюються в нуль і тому $f'(\alpha_i) = a_0\prod_{j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j)$, звідки

$$R(f, f') = a_0^{n-1}a_0^{n}\prod_{i=1}^{n}\prod_{i\neq j}(\alpha_i-\alpha_j).$$

До цього добутку для будь-яких i та j, $i > j$, входять два множники $\alpha_i-\alpha_j$ і $\alpha_j-\alpha_i$. Їх добуток дорівнює $(-1)\cdot(\alpha_i-\alpha_j)^2$, а оскільки існує $\frac{n(n-1)}{2}$ пар індексів i, j, що задовольняють нерівностям $n \geq i > j \geq 1$, то:

$$R(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{2n-1}\prod_{n\geq i\geq j\geq 1}(\alpha_i-\alpha_j)^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0 D.$$

Приклад 2.6.

Знайти дискримінант квадратного тричлена $f(x) = ax^2+bx+c$.

Розв'язання.

Оскільки $f^{/}(x) = 2ax + b$, то

$$R(f, f^{/}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix} = a(-b^2 + 4ac).$$

У нашому випадку $\dfrac{n(n-1)}{2} = 1$ і тому $D = -a^{-1}R(f, f^{/}) = b^2 - 4ac.$

Це збігається з тим, що в шкільному курсі алгебри називають дискримінантом квадратного рівняння [12].

Інший спосіб пошуку дискримінанта полягає у наступному. Складаємо визначник Вандермонда зі степенів коренів $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \ge i \ge j \ge 1} (\alpha_i - \alpha_j) = \Delta,$$

а тому дискримінант дорівнює квадрату цього визначника, помноженому на a_0^{2n-2}. Перемножуючи цей визначник на його транспонований за правилом добутку матриць [11], ми отримаємо:

$$D = a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \qquad (2.20)$$

де s_k – сума $k - x$ степенів коренів $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Приклад 2.7.

Знайти дискримінант кубічного многочленна

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Розв’язання.

За формулою (2.20):

$$D = \begin{vmatrix} 3 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}.$$

Як відомо з попереднього:

$$s_1 = \sigma_1 = -a,$$
$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a^2 - ab,$$
$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = -a^3 + 3ab - 3c.$$

Користуючись формулою Ньютона, ми знайдемо також, що:

$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2.$$

Звідси:

$$\begin{aligned} D &= 3s_2s_4 + 2s_1s_2s_3 - s_2^3 - s_1^2s_4 - 3s_3^2 = \\ &= a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c + 18abc - 27c^2. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Якщо ж a = 0, тобто для неповного кубічного многочлена, ми отримаємо $D = -4b^3 - 27c^2$.

2.4. Розклад раціональних функцій на прості дроби

Основна теорема про симетричні многочлени може бути поширена на випадок раціональних дробів. Назвемо раціональний *дріб* $\frac{f}{g}$ від n змінних x_1, x_2, …, x_n *симетричним*, якщо він залишається рівним сам собі при будь-якій перестановці змінних. Легко показати, що це означення не залежить від того, беремо ми дріб $\frac{f}{g}$ чи рівний йому $\frac{f_0}{g_0}$. Дійсно, якщо ω – деяка перестановка наших змінних, а φ – довільний многочлен від цих змінних, то домовимося через φ^ω позначати той многочлен, в який переводиться φ перестановкою ω.

При будь-якому ω $\quad \frac{f}{g} = \frac{f^\omega}{g^\omega}$, тобто $fg^\omega = gf^\omega$.

З іншого боку, з $\frac{f}{g}=\frac{f_0}{g_0}$ випливає $fg_0 = gf_0$, звідки $f^{\omega}g_0^{\omega}=g^{\omega}f_0^{\omega}$.

Помноживши обидві частини останнього рівняння на f, ми отримуємо $ff^{\omega}g_0^{\omega}=fg^{\omega}f_0^{\omega}=gf^{\omega}f_0^{\omega}$.

Звідки після скорочення на f^{ω} випливає $fg_0^{\omega}=gf_0^{\omega}$, тобто

$$\frac{f_0^{\omega}}{g_0^{\omega}}=\frac{f}{g}=\frac{f_0}{g_0}.$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 2.3. Будь-який симетричний раціональний дріб від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з коефіцієнтами з поля P можна представити у вигляді раціонального дробу від елементарних симетричних многочленів $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ з коефіцієнтами, які знову належать до P.

РОЗДІЛ 3
ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ СИМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

3.1. Доведення основної теореми алгебри комплексних чисел

Використовуючи симетричні многочлени можна довести основну теорему алгебри комплексних чисел.

Теорема 3.1. Будь-який многочлен довільного степеня з дійсними коефіцієнтами має хоча б один комплексний корінь.

Доведення.

Нехай, дійсно, дано многочлен $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, який має степінь $n = 2^k q$, де q – число непарне. Так як випадок $k = 0$ вже розглянутий вище, ми будемо вважати, що $k > 0$, тобто вважати n непарним числом і будемо доводити індукцією по k, припускаючи, що наше твердження вже доведено для всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами, степінь яких ділиться на 2^{k-1}, але не ділиться на 2^k.

Нехай P буде полем розкладу для многочлена $f(x)$ над полем комплексних чисел [13] і нехай $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ будуть коренями $f(x)$, які знаходяться в P. Виберемо довільне дійсне число c і візьмемо елементи поля P, які мають вигляд

$$\beta_{ij} = \alpha_i \alpha_j + c(\alpha_i + \alpha_j),\ i < j. \qquad (3.1)$$

Число елементів β_{ij} дорівнює, очевидно:

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^k q(2^k q - 1)}{2} = 2^{k-1} q(2^k q - 1) = 2^{k-1} q', \qquad (3.2)$$

де q' – непарне число.

Побудуємо тепер многчлен $g(x)$ з кільця $P[x]$, який має своїми коренями всі ці елементи β_{ij} і тільки їх:

$$g(x)=\prod_{i,j,l\le j}(x-\beta_{ij}).$$

Коефіцієнти цього многочленна є елементарними симетричними многочленами від β_{ij}. Вони будуть в силу (3.1) многочленами від $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ з дійсними коефіцієнтами (оскільки число c – дійсне), причому навіть симетричними многочленами. Дійсно, транспозиція довільних двох α, наприклад, α_k *і* α_l, передбачає лише перестановку в системі усіх β_{ij}: будь-яке β_{kj}, де j відмінне від k і l, перетворюється на β_{ij} і обернено, в той час, як усі β_{kj} і усі β_{ij} при i та j, відмінних від k та l, залишаються на місці. Проте коефіцієнти многочлена $g(x)$ не змінюються при перестановці його коренів.

Звідси випливає, в силу основної теореми про симетричні многочлени, що коефіцієнти $g(x)$ будуть многочленами (з дійсними коефіцієнтами) від коефіцієнтів даного многочлена $f(x)$ і тому самі будуть дійсними числами. Степінь цього многочлена, що дорівнює числу коренів β_{ij}, ділиться за (3.2) на 2^{k-1}, але не ділиться на 2^k. Тому, за індуктивним припущенням, хоча б один з коренів β_{ij} многочлена $g(x)$ повинен бути комплексним числом.

Отже, при будь-якому виборі дійсного числа c можна вказати таку пару індексів i, j, де $1\le i\le n$, $1\le j\le n$, що елемент $\alpha_i\alpha_j+c_1(\alpha_i+\alpha_j)$ є комплексним числом – нагадаємо, що поле P містить поле комплексних чисел в якості підполя [9]. Зрозуміло, що при іншому виборі числа c йому буде відповідати інша пара індексів. Проте існує нескінченно множина дійсних чисел c, в той час як у нашому розпорядженні знаходиться лише скінчене число різних пар i, j. Звідси випливає, що можна обрати такі два різні дійсні числа c_1, c_2, $c_1\ne c_2$, яким відповідає одна й та сама пара індексів i, j, для яких:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i\alpha_j + c_1(\alpha_i + \alpha_j) = a \\ \alpha_i\alpha_j + c_2(\alpha_i + \alpha_j) = b\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

є комплексними числами.

З рівності (3.3) випливає:

$$(c_1 + c_2)(\alpha_i + \alpha_j) = a - b,$$

звідки випливає $\alpha_i + \alpha_j = \dfrac{a-b}{c_1 - c_2}$, тобто ця сума виявляється комплексним числом. Звідси та з першої з рівностей (3.3) випливає, що добуток $\alpha_i\alpha_j$ буде комплексних числом. Таким чином, елементи α_i i α_j виявляються коренями квадратного рівняння $x^2 - (\alpha_i + \alpha_j)x + \alpha_i\alpha_j = 0$ з комплексними коефіцієнтами і тому, як впливає з формули для розв’язування квадратного рівняння з комплексними коефіцієнтами [24], вони самі повинні бути комплексними числами. Ми знайшли, таким чином, серед коренів многочленна $f(x)$ навіть два комплексні корені і саме цим довели наше твердження.

Для повного доведення основної теореми залишається розглянути випадок многочлена з довільними комплексними коефіцієнтами. Нехай:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

буде таким многочленом. Візьмемо многочлен:

$$\bar{f}(x) = \bar{a}_0x^n + \bar{a}_1x^{n-1} + \ldots + \bar{a}_n,$$

що одержується з $f(x)$ заміною усіх коефіцієнтів спряженими комплексними числами, і розглянемо добуток:

$$F(x) = f(x)\bar{f}(x) = b_0x^{2n} + b_1x^{2n-1} + \ldots + b_kx^{2n-k} + \ldots + b_{2n},$$

де, очевидно, $b_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i\bar{a}_j, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n.$

Спираючись на властивості спряжених комплексних чисел, ми тримаємо, що:

$$\bar{b}_k = \sum_{i+j=k} \bar{a}_i a_j = b_k,$$

тобто усі коефіцієнти многочлена $F(x)$ виявляються дійсними.

Звідси, як доведено вище, випливає, що многочлен $F(x)$ має хоча б один комплексний корінь β, $F(\beta)= f(\beta)\bar{f}(\beta)=0$, тобто

$$\text{або } f(\beta)=0, \text{ або } \bar{f}(\beta)=0.$$

В першому випадку теорему доведено. Якщо ж має місце другий випадок, тобто $\bar{a}_0\beta^n+\bar{a}_1\beta^{n-1}+\ldots+\bar{a}_n=0$, то, замінюючи усі комплексні числа, які входять до рівняння, спряженими (що, як відомо [5], не порушує рівності), ми отримаємо:

$$f(\overline{\beta})=a_0\overline{\beta}^n+a_1\overline{\beta}^{n-1}+\ldots+a_n=0,$$

тобто $f(x)$ має своїм коренем $\overline{\beta}$.

Теорему доведено.

3.2. Симетричні многочлени в шкільному курсі математики

У поглибленому курсі алгебри учні зустрічаються з графіками функцій симетричними відносно осі та відносно точки, симетричними рівняннями та многочленами від однієї та багатьох змінних.

Розглянемо деякі приклади розв'язування задач алгебри, які використовують досить раціонально теорію симетричних многочленів.

Приклад 3.1.

Довести, що якщо $a+b+c+d=2$ та $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=2$, то:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1-d}=2.$$

Розв'язання.

Нехай $\sigma_k - k$-а елементарна симетрична функція від a,b,c,d. За умовою $\sigma_1=2, \sigma_3=\sigma_4$.

Тому

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1-d}=\frac{4-3\sigma_1+2\sigma_2-\sigma_3}{1-\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3+\sigma_4}=$$

$$=\frac{4-6+2\sigma_2-2\sigma_4}{1-2+\sigma_2-2\sigma_2+\sigma_4}=2.$$

Приклад 3.2.

Довести, що $\sum_{r=0}^{n}(-1)^{\gamma}\sigma_{\gamma}\,p_{n-r}=0.$

Розв'язання.

Твірні функції $\sigma(t), p(t)$ пов'язані відношенням:

$$\sigma(t)\,p(-t)=1.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $t^n, n\geq 1,$ в лівій та правій частині, отримаємо необхідне.

Приклад 3.3.

Довести, що $np_n=\sum_{r=1}^{n}s_r\,p_{n-r}.$

Розв'язання.

Твірна функція $s(t)$ виражається через $p(t)$ наступним чином:

$$s(t)=\frac{d}{dt}\ln\,p(t)=\frac{p'(t)}{p(t)},$$

тобто

$$s(t)\,p(t)=p'(t).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при t^{n+1}, отримаємо необхідне.

Приклад 3.4.

Нехай $s_k=x_1^k+\ldots+x_n^k.$

Довести, що $n\sigma_n=s_1\sigma_{n-1}-s_2\sigma_{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}s_n\sigma_0.$

Розв'язання.

Перший спосіб.

Необхідну рівність можна переписати у вигляді:

$$s_0\sigma_n-s_1\sigma_{n-1}+s_2\sigma_{n-2}+\ldots+(-1)^n s_n\sigma_0=0.$$

Добуток $s_{n-k}\sigma_k$ складається із членів виду $x_i^{n-k}x_{j_1}\ldots x_{j_k}$.

Якщо i співпадає з одним із чисел $j_1,\ldots,j_k$, то цей член скорочується із членом $x_i^{n-k+1}(x_{j_1}\ldots\hat{x}_i\ldots x_{j_k})$ добутку $s_{n-k+1}\sigma_{k-1}$ (символ $\hat{x}_i$ означає, що число x_i виключено з добутку), а якщо i відмінне від $j_1,\ldots,j_k$, то цей член скорочується із членом $x_i^{n-k-1}(x_i x_{j_1}\ldots x_{j_k})$ добутку $s_{n-k-1}\sigma_{k+1}$.

Другий спосіб.

Твірна функція $s(t)$ виражається через $\sigma(t)$ наступним чином:

$$s(-t) = -\frac{d}{dt}\ln\sigma(t) = -\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)},$$

тобто

$$s(-t)\sigma(t) = -\sigma'(t).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при t^{n+1}, отримаємо:

$$n\sigma_n = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}s_r\sigma_{n-r}.$$

Приклад 3.5.

Сума трьох цілих чисел x, y, z дорівнює нулю. Довести, що $2\left(x^4+y^4+z^4\right)$ – квадрат цілого числа.

Розв'язання.

Нехай:

$$\sigma_1 = x+y+z,$$
$$\sigma_2 = xy+yz+zx,$$
$$\sigma_3 = xyz,$$
$$s_k = x^k+y^k+z^k.$$

Запишемо формули Ньютона для n =1, 2 та 4, враховуючи, що $\sigma_1 = s_1 = 0$. В результаті отримаємо $2\sigma_2 = -s_2, s_4 + s_2\sigma_2 = 0$.

Отже, $2s_4 = -s_2(2\sigma_2) = s_2^2$.

Приклад 3.6.

Цілі числа $x_1,\ldots,x_5$ такі, що $x_1+\ldots+x_5$ та $x_1^2+\ldots+x_5^2$ діляться на непарне число n. Доведіть, що $x_1^5+\ldots+x_5^5-5x_1\ldots x_5$ також ділиться на n.

Розв'язання.

Запишемо формули Ньютона $\sigma_1=s_1, 2\sigma_2=s_1\sigma_1-s_2$.

За умовою числа $\sigma_1=s_1$ та s_2 діляться на n. Отже, $2\sigma_2$ також ділиться на n. А оскільки число n непарне, то σ_2 ділиться на n. Запишемо тепер формулу Ньютона $5\sigma_5=s_1\sigma_4-s_2\sigma_3+s_3\sigma_2-s_4\sigma_1+s_5$. Числа $s_1\sigma_4, s_2\sigma_3, s_3\sigma_2, s_4\sigma_1$ діляться на n, тому $s_5-5\sigma_5$ діляться на n.

Приклад 3.7.

Нехай x_1, x_2, x_3 – корені многочлена x^3+px+p.

Обчисліть $s_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$ для n =1, 2,…, 10.

Розв'язання.

Рівність $x_i^{n+3}+px_i^{n+1}+qx_i^n=0$ показує, що має місце рекурентне співвідношення $s_{n+3}+ps_{n+1}+qs_n=0$.

Зрозуміло також те, що:

$$s_0=3, s_1=0.$$

Крім того,

$$s_{-1}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=-\frac{p}{q}.$$

Тепер можна обчислювати s_n, користуючись відомими значеннями s_{-1}, s_0, s_1 та рекурентним співвідношенням. В результаті отримаємо:

$$s_2=-2p, s_3=-3q, s_4=2p^2, s_5=5pq, s_6=-2p^3+3q^2,$$
$$s_7=-7p^2q, s_8=2p^4-8pq^2, s_9=9p^3q-3q^3, s_{10}=-2p^5+15p^2q^2.$$

Приклад 3.8.

Нехай:

$$x_1=b+c+d, x_2=-(a+b+c), x_3=a-d,$$
$$y_1=a+c+d, y_2=-(a+b+d), y_3=b+c.$$

Нехай, далі,

$$t^3 + p_1 t + q_1 \text{ та } t^3 + p_2 t + q_2$$

– многочлени з коренями x_1, x_2, x_3 та y_1, y_2, y_3 відповідно. Доведіть, що $p_1 = p_2$ тоді і тільки тоді, коли $ad = bc.$

Розв'язання.

Зрозуміло, що:

$$p_1 = x_1 x_2 + (x_1 + x_2)x_3 = x_1 x_2 - x_3^2 =$$
$$= -(b+c+d)(a+b+c) - (d-a)^2,$$

$$p_2 = -(a+c+d)(a+b+d) - (b-c)^2 .$$

Тому

$$p_1 - p_2 = 3(ad - bc).$$

Приклад 3.9.

Нехай

$$f_{2n} = (b+c+d)^{2n} + (a+b+c)^{2n} + (a-d)^{2n} - (a+c+d)^{2n} -$$
$$-(a+b+d)^{2n} - (b-c)^{2n},$$

причому $ad = bc.$ Довести, що $f_2 = f_4 = 0$ та $64 f_6 f_{10} = 45 f_8^2$ (тотожності Рамануджана).

Розв'язання.

Визначимо числа $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ та многочлени

$$t^3 + p_1 t + q_1 \text{ та } t^3 + p_2 t + q_2 ,$$

як за умовою попереднього прикладу. Згідно цієї задачі $p_1 = p_2$, тому що $ad = bc$.

Покладемо $p_1 = p_2 = p.$

Нехай $s_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, тоді $f_{2n} = s_{2n} - s'_{2n}.$

В задачі 3.7 отримані вирази для s_n при $n \le 10$. Скористаємося цими виразами. Числа s_2 та s_4 залежать тільки від p, тому

$$f_2 = f_4 = 0 .$$

Далі,

$$f_6 = 3(q_1^2 - q_2^2),\ f_8 = 8p(q_2^2 - q_1^2)$$

$$f_{10} = 15p^2(q_1^2 - q_2^2).$$

Тому

$$64 f_6 f_{10} = 45(8p(q_1^2 - q_2^2))^2 = 45 f_8^2 .$$

З основної теореми про симетричні многочлени виипливає, що якщо $x_1,\ldots,x_n$ – корені многочлена $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, то величина

$$D = \prod_{i<j} \left(x_i - x_j\right)^2$$

називається дискримінантом многочлена. Назвемо многочлен $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ кососиметричним, якщо:

$$f\left(\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots\right) = -\ f\left(\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots\right),$$

тобто при перестановці будь-яких двох змінних x_i та x_j многочлен змінює знак. Прикладом кососиметричного многочлена є

$$\Delta = \prod_{i<j} \left(x_i - x_j\right).$$

Приклад 3.10.

Довести, що будь-який кососиметричний многочлен можна представити у вигляді

$$\Delta\left(x_1,\ldots,x_n\right) g\left(x_1,\ldots,x_n\right),$$

де g – симетричний многочлен.

Розв'язання.

Достатньо перевірити, що f ділиться на Δ. Дійсно, якщо f/Δ - многочлен, то цей многочлен за очевидними причинами симетричний.

Покажемо, наприклад, що f ділиться на $x_1 - x_2$. Зробимо заміну:

$$x_1 = u + v,\ x_2 = u - v.$$

В результаті отримаємо $f(x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n) = f_1(u, v, x_3,\ldots, x_n)$.

Якщо $x_1 = x_2$, то $u = 0.$ Тому $f_1(0, v, x_3,\ldots,x_n) = 0.$

Це означає, що многочлен f_1 ділиться на u, тобто многочлен f ділиться на $x_i - x_j$ при всіх $i < j$.

Нехай $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ – розбиття, тобто впорядкований набір цілих невід'ємних чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$.

Покладемо $|\lambda| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

Вважатимемо, що $\lambda \geq \mu$, якщо $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k \geq \mu_1 + \ldots + \mu_k$ при $k = 1, 2, \ldots, n$.

Кожному набору λ можна співставити однорідний симетричний многочлен

$$M_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_1^{\lambda_{\sigma(1)}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_{\sigma(n)}}. \tag{3.1}$$

Степінь цього многочлена дорівнює $|\lambda|$.

Наприклад, якщо $\lambda = (1, \ldots, 1)$, то $M_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$.

Дійсно, сума (3.1) в цьому випадку складається з $n!$ доданків $x_1, \ldots, x_n$. А якщо $\lambda = (n, 0, \ldots, 0)$, то

$$M_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \left(x_1^n \cdot \ldots \cdot x_n^n\right)/n.$$

Дійсно, сума (3.1) в цьому випадку складається з $(n-1)!$ доданків $x_1^n, (n-1)!$ доданків x_2^n і т.д.

Приклад 3.11.

Довести, що нерівність

$$M_{\lambda(x)} \geq M_\mu(x) \tag{3.2}$$

Виконується для всіх $x = (x_1, \ldots, x_n)$ з додатними $x_1, \ldots, x_n$ в тому і тільки в тому випадку, коли $|\lambda| = |\mu|$ та $\lambda \geq \mu$.

При цьому рівність досягається лише в тому випадку, коли $\lambda = \mu$ та $x_1 = \ldots = x_n$ (Мюрхед).

Розв'язання.

Припустимо спочатку, що нерівність (3.2) виконується при всіх $x > 0$. Нехай $x_1 = ... = x_k = a$ та $x_{k+1} = ... = x_n = 1$.

Тоді $1 \le \lim_{a\to\infty} M_\lambda(x)/M_\mu(x) = \lim_{a\to\infty}(a^{\lambda_1+...+\lambda_k} / a^{\mu_1+...+\mu_k})$.

Як наслідок $\lambda_1 + ... + \lambda_k \ge \mu_1 + ... + \mu_k$.

При $k = n$, поклавши $x_1 = ... = x_k = a$, отримуємо рівність

$$M_\lambda(x)/M_\mu(x) = a^{\lambda_1+...+\lambda_k} / a^{\mu_1+...+\mu_k}.$$

При $a > 0$, як і раніше, отримаємо

$$|\lambda| \ge |\mu|.$$

А при $0 < a < 1$ отримаємо $|\lambda| \le |\mu|$.

Доведення твердження в оберненому напрямку складніше. Воно використовує наступне перетворення R_{ij}. Нехай

$$\mu_i \ge \mu_j > 0, \text{ де } i < j.$$

Покладемо

$$R_{ij}\mu = \mu', \text{ де } \mu'_i = \mu_i + 1, \ \mu'_j = \mu_j - 1$$

та

$$\mu'_k = \mu_k \text{ при } k \ne i, j.$$

Легко перевірити, що

$$\mu' > \mu \text{ та } |\mu'| = |\mu|.$$

ВИСНОВКИ

Кільце симетричних многочленів складає досить значний клас в загальній множині многочленів від багатьох змінних. Вони мають широке прикладення як при доведенні різноманітних тверджень, так і при розв'язуванні задач практичного характеру з курсу алгебри.

При розгляді цього питання отримано наступні результати:

1. Показники у вищому члені симетричного многочлена утворюють незростаючу послідовність.

2. Значимим результатом теорії симетричних многочленів є основна теорема про симетричні многочлени: будь-який симетричний многочлен від змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, над полем P є многочленом від елементарних симетричних многочленів $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$, з коефіцієнтами, що належать до поля P.

3. Якщо дано многочлени з довільними старшими коефіцієнтами, то результант цих многочленів тоді і тільки тоді дорівнює нулю, якщо ці многочлени мають спільний корінь, або їх старші коефіцієнти дорівнюють нулю.

4. Відповідь на запитання про степінь того многочлена, який ми отримуємо після виключення однієї змінної з системи двох многочленів від двох змінних дає наступне твердження: якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ мають за сукупністю змінних відповідно степені n і s, то степінь многочлена $R_x(f, g)$ від змінної y не перевищує добуток ns, якщо цей многочлен тотожно не дорівнює нулю.

5. Симетричні многочлени застосовують при обчисленні раціональних дробів, зокрема, має місце наступне твердження: будь-який симетричний раціональний дріб від змінних x_1, x_2, …, x_n з коефіцієнтами з поля P можна представити у вигляді раціонального

дробу від елементарних симетричних многочленів σ_1, σ_2, …, σ_n з коефіцієнтами, які знову належать до P.

6. Результант та дискримінант двох многочленів можуть досить раціонально застосовувати при розв'язуванні алгебраїчних рівнянь третього та четвертого степенів, а також спрощують процес виключення однієї змінної з системи двох рівнянь з двома невідомими.

Усі ці аспекти дають можливість стверджувати, що теорія симетричних многочленів може досить широко та раціонально використовуватися в різноманітних задачах алгебри.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бахтурин Ю.А. Основные структуры современной алгебры. М.: Наука, 1990. 320 с.
2. Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре. 2002.
3. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. Изд. 2-е. М.: Наука, 1972. 496 с.
4. Бурбаки Н. Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. М.: Наука, 1965. 300 с.
5. Ван-дер-Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1979. 568 с
6. Вейль Г., Симметрия. – М.: Наука, 1968. 192 с.
7. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX ст. М.: Наука, 1986. 188 с.
8. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Розв‘язування алгебраїчних задач: Посібник для вчителів. К.: Рад. шк., 1991. 203 с.
9. Гетманенко Л. Симетрія. Складне чи цікаве? *«Математика в рідній школі», № 1, 2017.* URL :http://ilmaup.com.ua/assets/files/matematika-n1_2017-s.-12-15.pdf
10. Гетманенко Л. Симетрія. Склане чи цікаве? 2017. URL: http://ilmaup.com.ua/assets/files/matematika-n1_2017-s.-12-15.pdf.
11. Гнеденко В.Б. Примеры практического использования математики. Математика и математическое образование в современном мире. М.: Наука, 1985. С.130-188.
12. Депман Я.И. Рассказ о старой и новой алгебре. М.: Наука, 1979. 168 с.
13. Завало С. Т. Елементарна математика. Алгебра – К.: Вища школа, 1971. – 356с.
14. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру. М.: Наука, 1973. 348 с.

15. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX ст.: Пер. с нем.: Гостехиздат, 1975. 224 с.
16. Колягин Ю.М., Луканкин Г.И. Основные понятия современного школьного курса математики. М.: Просвещение, 1974. 267 с.
17. Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968. 246 с.
18. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. – М.: Физматлит, 2000. – 368 с.
19. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977. 248 с.
20. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М.: Высшая школа, 1979. 214 с.
21. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1989. 236 с.
22. Курош А.Г. Теория групп. 3-е изд. М.: Наука, 1967. 468 с.
23. Мазуров В. Конечные группы. М.: Наука, 1976. 236 с.
24. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 234 с.
25. Общая алгебра / Мельников О.В. и др. М.: Наука, 1990. 592 с.
26. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. М.: Просвещение, 1966. 287 с.
27. Окунев Л.Я. Основы современной алгебры. М.: Учпедгиз, 1965. 256 с.
28. Перельман В.И. Занимательная алгебра. М.: Наука, 1986. 206 с.
29. Постников А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971. 416 с.
30. Проскуряков И.В. Числа и многочлены. М.: АПН РСФСР, 1967 326 с.
31. Просолов В.В. Рассказы о числах, многочленах и фигурах. М.: Фазис, 1997. 178 с.
32. Расева Е., Сикорский Р. Математика и математики.: Пер. с англ. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1972. 342 с.
33. Рыбников К.А. Возникновение и развитие математической науки. М.: Просвещение, 1987. 216 с.

34. Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. – М.: Просвещение, 1972. 160 с.

35. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983. 214 с.

36. Стюарт Я. Концепция современной математики: Пер. с англ. Мн.: Вышейшая школа, 1980. 382 с.

37. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1984.

38. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре: Учебное пособие. – М.: Наука, 1972. – 304 с. 2012.

39. Цыбуленко В. В., Колесник С. Г. Алгебра и теория чисел. Часть 2. Херсон: ХГПУ, 1998. 324 с.

40. Черватюк О.Г., Шиманська Г.Д. Елементи цікавої математики на уроках математики. К.: Радянська школа, 1988. 298 с.