МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Вивчення «Стереометрії» у старшій школі на профільному рівні

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала: здобувачка 2 курсу, 121М групи

Спеціальності 014.04 Середня освіта

Спеціалізації 014.04 Математика

Освітньо-професійної програми

«Середня освіта (Математика)»

Барболіна Анна Сергіївна

Керівник: кандидат педагогічних наук, доцент

Таточенко Володимир Іванович

Рецензент: в.о. директора Херсонської

загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 46

Херсонської міської ради, вчитель вищої категорії,

вчитель-методиста Співак Інна Наумівна

Івано-Франківськ – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП 3

РОЗДІЛ 1. Аналіз літератури з теми дослідження 7

1.1 Аналіз психолого-педагогічної, методичної літератури шкільної практики з проблеми дослідження 7

1.2 Цілі та задачі профільного навчання математики старшої школи 9

1.3 Загальна характеристика профілів 12

1.4 Особливості побудови шкільного курсу стереометрії старшої школи в класах різної профільної спрямованості 14

1.5 Психологічний супровід профільного навчання 16

1.6 Критерії відбору змісту матеріалу стереометрії для класів різної профільної спрямованості 19

1.7 Характеристика провідних змістових ліній стереометрії старшої профільної школи 23

1.7.1. Просторові геометричні фігури та їх властивості. 23

1.7.2. Геометричні перетворення 24

1.7.3. Координати і вектори у просторі. 25

1.7.4. Геометричні величини 26

РОЗДІЛ 2. Методика вивчення окремих тем курсу стереометрії старшої профільної школи 27

2.1 Методика проведення перших уроків стереометрії 27

2.2 Методика вивчення теми «Паралельність та перпендикулярність у просторі» 32

2.3 Методика вивчення теми «Координати і вектори у просторі» 38

2.4 Методика вивчення многогранників 43

2.5 Методика вивчення тіл обертання 50

РОЗДІЛ 3. Експериментальний дослід 58

ВИСНОВКИ 65

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 67

ВСТУП

Актуальність теми «Вивчення стереометрії у старшій школі на профільному рівні» полягає в тому, що у сучасній освіті великого значення набуває саме профільна спрямованість навчання, тому метою вивчення геометрії на профільному рівні, а саме стереометрії, є підготовка здобувачів освіти до свідомого розв'язання будь-яких життєвих задач, в тому числі задач, пов'язаних з професійною діяльністю. Розділ «Стереометрія» завершує шкільний курс геометрії. Він є найважливішим і найскладнішим серед усіх розділів геометрії. Увесь планіметричний матеріал є пропедевтичним для вивчення даного розділу.

Проблема пошуку оптимального вирішення питань, пов'язаних з методикою вивчення стереометрії у старшій школі, була і залишається однією з найважливіших проблем, що постають перед учителем у його педагогічний діяльності. У даній роботі запропоновано деякі аспекти підвищення ефективності і осучаснення процесу вивчення стереометрії у старшій профільній школі шляхом використання найбільш доцільних форм і методів роботи під час вивчення конкретних тем розділу, в тому числі застосування мобільних додатків для побудови 3D моделей для розв'язання різних типів стереометричних задач.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Процес виконання даної кваліфікаційної роботи (проєкту) супроводжувався глибоким порівняльним аналізом чинних навчальних програм з математики середньої та старшої школи різних рівнів (рівня стандарту, профільного та академічного), навчального плану, основних підручників з геометрії 10-11 класів, рекомендованих Міністерством освіти та науки України, методичних рекомендацій щодо організації процесу вивчення стереометрії у старшій школі з метою виявлення особливостей вивчення стереометрії на профільному рівні. А також методичних розробок провідних педагогів та методистів щодо вивчення стереометричного матеріалу, а саме Акуленко І. А. [1], Бевза Г.П. [5], Бурди М.І. [13 - 14], Слєпкань З.І. [44], Тарасенкової Н.А. [47 - 50], Моторіної В. Г. [32].

Мета дослідження – пошук шляхів оптимізації процесу вивчення стереометрії у старшій школі профільного рівня.

Завдання дослідження:

1) Дослідити та проаналізувати науково-методичну літературу з проблеми вивчення стереометричного матеріалу в курсі 10-11 класів профільної спрямованості.
2) Представити результати експерименту щодо розробленої методики вивчення окремих тем курсу стереометрії старшої профільної школи з використанням мобільних застосунків для розв'язання стереометричних задач та побудови об'ємних моделей стереометричних фігур.

Об'єктом дослідження є методика вивчення стереометричного матеріалу в старшій школі на профільному рівні.

Предметом дослідження є методика вивчення окремих тем розділу «Стереометрія» з використанням мобільних застосунків, за допомогою яких можна роз'язувати стереометричні задачі або виконувати 3D-рисунки до них.

Методами дослідження, що використовувалися під час виконання даної кваліфікаційної роботи є аналіз джерел інформації з теми дослідження та педагогічний експеримент щодо визначення ефективності запропонованої методики.

Гіпотезою даного дослідження є те, що використання мобільних застосунків для побудови 3D-рисунків та моделей просторових тіл, а також розв'язаннях стереометричних задач під час вивчення матеріалу із розділу «Стереометрія» може підвищити рівень успішність здобувачів освіти з геометрії.

Науковою новизною є використання під час вивчення стереометричного матеріалу мобільних застосунків учнями та вчителем на етапах розгляду нового матеріалу та розв'язування стереометричних задач різних типів.

Практичне значення одержаних результатів. На даному етапі розвитку системи освіти є велика потреба у застосуванні інформаційно-комунікаційних технологій до процесу навчання. Проте це потребує великих фінансових затрат для покращення матеріально-технічної бази навчального закладу. Для ефективного залучення ІКТ до освітнього процесу навчальні кабінети мають бути оснащені мультимедійними інтерактивними дошками, сучасними ноутбуками чи комп'ютерами. Тому більш доцільним є використання мобільних пристроїв для поліпшення якості математичної освіти (зокрема, під час вивчення стереометрії). Це можна реалізувати шляхом використання застосунків для мобільних пристроїв на кшталт «GeoGebra 3D Калькулятор», «Stearometry», «Geometry 3D» тощо. Отже, практичне значення одержаних результатів дослідження полягає в ефективній інтеграції до вивчення стереометрії мобільних застосунків, що можуть допомогти при побудові плоских перерізів многогранників, обчислення площ та об'ємів тіл тощо.

Апробація результатів дослідження. Запропонована методика вивчення окремих тем курсу стереометрії з використанням додатків для мобільних пристроїв була використана під час педагогічного експерименту з учнями 11 класу, спрямованого на перевірку її ефективності.

Основні положення та результати кваліфікаційної роботи пройшли апробацію на науково-практичних конференціях, за результатами яких було опубліковано наступні тези:

- Шляхи мотивації вивчення стереометрії здобувачів освіти різної профільної спрямованості. Концептуальні шляхи розвитку освіти та педагогічної науки. Матеріали науково-практичної конференції (м. Чернігів, 16-17 вересня 2022р.). – Одеса: Видавництво «Молодий вчений», 2022. – 124 с. - С. 20-24;
- Методичні особливості вивчення теми «Піраміда» в шкільному курсі стереометрії профільного рівня. Магістерські студії. Альманах. Вип. 22. 2022. – Херсон. ХДУ, 2022 – 440с.

РОЗДІЛ 1. Аналіз літератури з теми дослідження

1.1 Аналіз психолого-педагогічної, методичної літератури шкільної практики з проблеми дослідження

Геометрія є одним із найскладніших предметів шкільного курсу, який потребує від учнів багато уваги, часу та зусиль для засвоєння. Для розв'язування геометричних задач, учні повинні володіти не лише теоретичним матеріалом з конкретної теми, а й матеріалом з попередніх тем, мати розвинену просторову уяву та уявлення.

У роботах Слєпкань З.І. чітко прослідковується розділення понять «уява» та «уявлення», адже «уявлення трактується як образ раніше сприйнятого предмета або явища (уявлення пам'яті), а також образ, створений продуктивною уявою; це вища форма чуття, відображення у вигляді наочно-образного знання» [44]. Уява ж в свою чергу є видом психічної діяльності, що відбувається шляхом створення мисленєвих ситуацій.

Саме тому під час вивчення курсу геометрії важливо звертати увагу на формування в учнів просторового мислення. На цьому також часто акцентується увага в роботах Моторіної В.Г., яка стверджує, що «образне та візуальне мислення відіграє провідну роль у творчих процесах» [32], які є невід'ємною частиною розв'язування стереометричних (просторових) задач. Також особливу уяву треба приділяти розвитку асоціативного мислення що розглянуто у праці Красницького М. П. [27]. Адже вивчення геометрії не передбачає використання алгоритмів. Кожна конкретна задача, що відповідає достатньому та високому рівню успішності, потребує глибокого аналізу. Тому процес їх розв'язання під час уроків математики доцільно проводити у форматі постійного діалогу учителя із учнями, тобто із використанням елементів евристичного (частково-пошукового) методу. Важливо стимулювати учнів до активної мозкової діяльності та співпраці. На цьому наголошується у роботі Тарасенкової Н.А. «Діалог під час усного розв'язування задач на уроці геометрії» [47]. Значну увагу приділяють методиці розв'язування, саме, прикладних задач, яка розглянута у праці Богатирьової І. М. та Сердюк З. О. [8].

Для ефективного вивчення стереометрії у старшій школі багато методистів сходяться на думці, що розпочинати вивчення цього розділу доцільно ще в 9 класі після вивчення курсу планіметрії. Тобто, необхідно оглядово, стисло, без доведень надавати для ознайомлення матеріал щодо фігур у просторі та деяких формул обчислення площ поверхонь геометричних фігур. Такий підхід до вивчення геометрії вперше можна було зустріти у підручниках з геометрії Колмогорова А.М. Тоді ж у програмах з геометрії 9 класу наприкінці можна було зустріти тему «Початкові відомості зі стереометрії». Розробкою даної програми займалися Бурда М.І., Городній М.Ф., Номіровська Д.А., Паньков А.В., Тарасенкова Н.А., Черемис М.В., Швець В.О. та Якір М.С. [33].

Значна кількість вчителів, яким доводилося працювати за даною програмою, стикалася із тим, що наприкінці навчального року у здобувачів накопичувалася певна втома, що не дозволяла якісно розпочати вивчення такого складного для сприйняття розділу геометрії, як стереометрія. Після значної перерви у вигляді літніх канікул, педагоги підмічати, що їм доводилося розпочинати розгляд стереометричного матеріалу спочатку. Але в 9 класі вже було витрачено час на вивчення даної теми, який більш доцільно було б використати для закріплення планіметричного матеріалу, а також підготовки до державної підсумкової атестації.

Серед методистів досі не вщухають дискусії з приводу того, чи є доцільним розпочинати вивчення стереометрії наприкінці курсу середньої школи. У чинних програмах з геометрії для 9 класу цієї теми немає.

Курс стереометрії, як і курс планіметрії, містить велику кількість математичних тверджень, які потребують доведення. Це і теореми, і задачі на доведення. Саме виконання такого роду завдань викликає в учнів найбільше проблем. Це пов’язано з тим, що розв’язання задач на доведення потребує крім знання теоретичного матеріалу добре розвинутого логічного мислення. В слабких класах вчителі свідомо уникають таких задач і не акцентують увагу на доведенні теорем.

Проте в класах, в яких вивчення математики відбувається на профільному рівні, навпаки, дуже ефективно використовувати вправи на доведення для формування наукового світогляду учнів, для розвитку вміння встановлювати причинно-наслідкові зв’язки та будувати логічні ланцюжки під час розв’язання певної проблеми.

Дослідження розвитку логічного мислення учнів в процесі вивчення геометрії містяться у роботах Акуленко І.А. [2], Баковської О.І. [4], Бондарук В.В. [9], Кравченко З.І. [26], Слєпкань З.І. [45], Чернеги Н.С. [53] та багатьох інших.

Методика викладання стереометрії у старшій профільній школі є складним та об’ємним предметом для вивчення, що включає в себе велику кількість аспектів. Отже, дана проблема залишається актуальною та потребує подальшого дослідження.

1.2 Цілі та задачі профільного навчання математики старшої школи

Відповідно до чинної програми з математики профільного рівня для 10-11 класів, основна мета навчання полягає у «забезпеченні свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою» [34].

Реалізація цієї мети досягається шляхом виконання деяких завдань, таких як:

- створення та розвиток наукової картини світу школярів, що реалізується шляхом усвідомлення ідей та методів математики;
- засвоєння здобувачами освіти математичної мови, її системи знань, вмінь та навичок, необхідних для здобуття подальшої освіти та ефективної професійної діяльності;
- розвиток інтелектуальних здібностей школярів шляхом розвитку їх критичного та логічного мислень, графічної культури, а також просторової уяви та уявлень, уваги та пам'яті;
- виховання свідомого громадянина своєї держави, що в змозі займатися самоосвітою для реалізації подальшої трудової діяльності на високому рівні;
- розвиток мобільності здобувачів освіти, вміння швидко пристосовуватися до змін;
- формування таких важливих компетенстностей, як честолюбність, зосередженість, наполегливість, вміння відстоювати власну думку, відповідати за свої вчинки;

У ході вивчення математики на профільному рівні здобувач середньої освіти має отримати певні результати, які дозволять йому реалізувати свої здібності, дозволять полегшити навчання у вищих навчальних закладах та закладуть фундамент для подальшого успішного кар'єрного росту. В ході профільного навчання учень має досягти таких цілей:

- перш за все, учень має аналізувати життєві ситуація чи проблеми, що постають перед ним під час вивчення будь-яких навчальних дисциплін та розглядати їх із позиції задач, що потребують вирішення методами математики, оцінювати власні можливості розв'язання цих задач в конкретних умовах;

- здобувач освіти повинен вміти застосовуватися знання, отримані під час вивчення математики до вивчення інших дисциплін, а отже повинен вміти відслідковувати міжпредметні зв'язки (будувати графіки залежностей, таблиці тощо);
- навчитися вибудовуватися логічні ланцюжки шляхом пошуку причинно-наслідкових зв'язків та закономірностей предметів та явищ;
- навчитися раціонально використовувати джерела інформації, що дозволятимуть продовжувати навчання самостійно, критично ставитися до інформації, аналізувати її та піддавати сумніву або навпаки доводити;
- навчитися виконувати усні та письмові розрахунки, а також навчитися раціонально використовувати обчислювальні пристрої;
- оволодіти математичними знаннями в області аналізу та дослідження елементарних функції, навчитися будувати їх графіки;
- навчитися виконуватися тотожні перетворення виразів, розв'язувати рівняння та нерівності (показникові, логарифмічні, тригонометричні тощо), а також їх системи та застосовуватися отримані знання до вирішення математичних задач;
- оволодіти знаннями з теорії ймовірностей (вміти оцінити ймовірність випадкової події та шанси її настання за певних умов), а також математичної статистики;
- вміти зображувати плоскі та об'ємні геометричні фігури, коректно виконувати малюнки до геометричних задач та користуватися ними для їх роз'язання;
- вміти вимірювати геометричні величини (відстані: між точками, між прямими, між площинами; величини кутів тощо);

- вміти знаходити площі та об’єми геометричних тіл.

1.3 Загальна характеристика профілів

«Профільне навчання – вид диференційованого навчання, який передбачає врахування освітніх потреб, нахилів, здібностей учнів; створення умов для навчання старшокласників відповідно до їхнього професійного самовизначення, що забезпечується за рахунок змін у цілях, змісті, структурі та організації навчального процесу» [39].

Профільне навчання відбувається після закінчення учнями 9 класів у старшій школі, тобто протягом 10-11 класів. Воно є важливим для тих підлітків, що вже визначитися з напрямком свого подальшого життя, професією та готові отримувати практичні знання за обраним родом заняття, або для підготовки до вступу у вищі навчальні заклади за фахом.

Навчання здобувачів освіти за профілями є спрямованим на:

- формування в них певних компетентностей, необхідних для трудової діяльності, розвиток навичок дослідницької діяльності, вмінь самостійно роз’язувати наукові питання, виконувати пошукову роботу,
- формування прагнення до навчання та саморозвитку протягом усього життя;
- розвиток творчих та моральних якостей особистості, необхідних за фахом.

Профільна освіта відбувається за такими профілями:

- художньо-естетичний (такий напрям навчання характеризується спрямованістю на вивчення предметів, пов’язаних із творчою діяльністю, а також реалізацію творчих здібностей. На поглибленому рівні розглядається дисципліна «Мистецтво», що може вивчатися як окремі предмети «Музичне мистецтво» та «Образотворче мистецтво», а також «Художня культура» та

«Естетика». Вивчення математики для учнів закладів освіти з художньо-естетичною спрямованістю відбувається на рівні стандарту);

- природничо-математичний (цей напрям включає кілька профілів навчання «фізико-математичний, математичний, фізичний, екологічний, біолого-хімічний, біолого-фізичний, біолого-географічний, біотехнологічний, хіміко-технологічний, фізико-технічний, агрохімічний» [41]. Під час навчання за цим профілем математика може вивчатися на профільному рівні, або на академічному рівні в тому випадку, коли вона не є профільним предметом, але є близьким до профільних, тобто базовим (наприклад, за фізико-хімічного спрямування навчання);
- суспільно-гуманітарний (поділяється на такі профілі: «історичний, правовий, філософський, економічний» [41]. За аналогію із попереднім пунктом, математика може вивчатися, як на рівні стандарту, так і на академічному рівні);
- філологічний (диференціюється за такими напрямами: «української філології, іноземної філології, історико-філологічний». Під час навчання за цією профільною спрямованістю, вивчення математики відбувається на рівні стандарту);
- технологічний поділяється на інформаційно-технічний та суто технологічний. Вивчення математики також може реалізуватися на рівні стандарту або на профільному рівні);
- спортивний (цей напрям навчання, як і художньо-естетичний, не має диференціації на піднапрями. Під час навчання за цією профільною спрямованістю, математика вивчається на рівні стандарту).

«Профіль навчання визначається з урахуванням інтересів школярів та їх батьків, перспектив здобуття подальшої освіти і життєвих планів учнівської молоді; кадрових, матеріально-технічних, інформаційних ресурсів школи; соціокультурної і виробничої інфраструктури району, регіону» [39].

Такі вчені, як: Бурда М. І., Зоріна І. А., Пономаренко Л. О., Ніколюк Л. І. Самчук Л. І., Каневська І. М., Тарасенкова Н. А., Лов'янова І. В., Желєзняк Н. П., Окунєв Б. Й. у своїх працях розглянули підходи до організації освіти та викладання, шляхи розвитку профільного навчання [12, 21, 38, 49].

1.4 Особливості побудови шкільного курсу стереометрії старшої школи в класах різної профільної спрямованості

Відповідно до наказу Міністерства освіти та науки України «Про затвердження нової редакції Концепції профільного навчання у старшій школі», вивчення математики у 10-11 класах класах для здобувачів освіти природничо-математичного профілю відбувається за програмою для профільного рівня. Вона передбачає 6 годин на тиждень на вивчення алгебри та початків аналізу та 3 години на тиждень на вивчення геометрії.

Для здобувачів освіти, що навчаються у класах іншої профільної спрямованості (суспільно-гуманітарний, філологічний, художньо-естетичний, технологічний, спортивний профілі) відводиться 1 година на тиждень для вивчення алгебри та початків аналізу та 2 години на тиждень для вивчення геометрії (тобто вивчення математики відбувається на рівні стандарту).

Тож, можна зазначити, що для вивчення математики на профільному рівні відводиться втричі більше часу. Вивчення кожної теми відбувається на більш поглибленому рівні.

Програма з геометрії 10 класу профільного рівня [34] відрізняється від програми рівня стандарту [35] наявністю теми «Вступ до стереометрії», метою якої є: формування в учнів чітких уявлень про логічну побудову курсу геометрії старшої школи, про аксіоматику науки; повторення матеріалу з курсу планіметрії; проведення аналогій між поняттями, аксіомами і теоремами планіметрії та стереометрії. Для класів з математичним профілем такі вчені як: Бурда М. І., Істер О. С., Єргіна О. В., Нелін Є. П. створили низку підручників для 10 і 11 класу [11, 22, 23, 36].

Курс геометрії 10 класу рівня стандарту для здобувачів освіти розпочинається безпосередньо з тем «Паралельність та перпендикулярність прямих та площин у просторі».

У курсі геометрії профільного рівня значна увага приділяється проекціюванню та його властивостям, а також побудові перерізів многогранників площиною. Більш змістовно наповненою є тема «Координати, вектори та геометричні перетворення у просторі». Чого не можна сказати про курс геометрії рівня стандарту.

Що стосується курсу 11 класу, то відмінність програм профільного рівня та рівня стандарту полягає у тому, вивчення тема «Об’єми та площі поверхонь геометричних тіл» у програмі профільного рівня поділена на дві окремі теми «Об’єми многогранників» та «Об’єми та площі поверхонь тіл обертання».

Загалом, можна зробити висновок про те, що програми з математики для здобувачів освіти різної профільної спрямованості відрізняють не так темами навчального матеріалу, як глибиною їх вивчення та спрямованістю на подальшу професійну діяльність.

Цікавою темою є «Особливості поточного оцінювання навчальних досягнень учнів з математики в умовах інтерактивного навчання» яку у своїй роботі розглянули Забранський В. Я., Федосєєв С. Е. [20].

1.5 Психологічний супровід профільного навчання

Значна кількість учнів, навчаюсь у школі, стикається із проблемою невизначеності у виборі своєї майбутньої діяльності. Велика кількість школярів, навіть закінчивши школу, не розуміють своє призначення та не відчуваються хисту до якоїсь конкретної справи. Вони відчувають себе розгубленими через необхідність зробити такий важливий вибір у своєму життя у досить короткий проміжок часу. Зараз ця проблема особливо гострою через велику кількість різних професій, що стрімко з'являються на ринку праці і так само стрімко зникають.

Саме тому, чим скоріше здобувач освіти визначиться із напрямком, в якому він хоче працювати у майбутньою, тим легше йому буде прийти до своєї кінцевої мети. Для цього існує низка закладів освіти, що пропонують профільне навчання після 9 класів загальної середньої освіти.

Профільне навчання у закладах загальної середньої освіти має на меті підготовку школярів до майбутньої ефективної професійної діяльності, а також закладає основи для вдалого вступу до вищих навчальних закладів, в яких вони отримуватимуть прикладні знання за своїм профілем.

Задля забезпечення ефективності процесу навчання важливо приділяти увагу психологічному супроводу такого навчання, а саме спостереження за індивідуальними особливостями учнів, виокремлення здібностей та схильностей індивідууму до того, чи іншого профілю, оцінка учнем своїх можливостей для подальшого профільного навчання та попередження труднощів, з якими підліток може стикнутися в процесі вибору профілю та безпосередньо навчання за цим профілем.

Психологічний супровід профільного навчання полягає не лише в психологічній підтримці здобувача освіти у виборі профілю навчання, а й у плідній взаємодії шлоляра, класного керівника, вчителів, батьків та адміністрації школи.

Для реалізацій даної мети у школах працюють психологи чи соціальні педагоги, які можуть надати профорієнтаційну допомогу для школярів, що включає в себе «три завдання:

1) моніторинг та своєчасну корекцію професійно можливих нерівномірностей розвитку учнів;
2) поглиблення профорієнтації учнів;
3) психологічну діагностика під час добору учнів у профільні класи» [40].

Важливим аспектом профорієнтаційної діяльності є надання учневі інформації про те, якою освітою він може оволодіти та у яких закладах освіти можна здобути ті знання, що є необхідними саме йому, яких зусиль йому доведеться докласти для того, аби досягти поставлених цілей, чи є потреба у кадрових фахівцях із обраного ним роду діяльності на ринку праці.

Крім індивідуальної роботи здобувача освіти з психологом чи практичним педагогом, доцільним будуть ще й масові заходи, спрямовані на профорієнтацію. Наприклад, класні години чи загальношкільні заходи.

Психологічний супровід профільного навчання доцільно поділити на етапи:

- підготовчий;
- адаптаційний;
- заключний.

Підготовчий етап психологічного супроводу профільного навчання передбачає визначення професійно важливих якостей особистості, її вподобань щодо професії, поглядів на своє майбутнє, схильностей до різних видів праці, здібностей, вмінь та навичок, талантів. На цьому етапі також визначається рівень готовності здобувачів освіти до профільної спрямованості навчання шляхом діагностування.

Адаптаційний етап полягає в тому, щоб визначити рівень пристосованості старшокласника до профільного навчання, а також за потреби надати психологічну допомогу під час подолання проблем, які в процесі можуть виникнути в процесі здобуття освіти. На цьому етапі також відбувається ознайомлення учня із вимогами та викликами майбутньої професії та співставлення з ними власних можливостей. В процесі навчання у профільному класі, психологічний супровід може бути ускладнений тим, що здобувачі освіти є перевантаженими освітньою діяльності. Тому важливо реалізовувати його шляхом спостереження за емоційним станом школярів та кліматом класного колективу.

Заключний етап має на меті сформувати у випускника уявлення про те, як отримані знання допоможуть у виборі професії, проаналізувати свої уміння та навички на предмет того, як вони можуть бути застосовані у подальшій трудовій діяльності.

Тож, кінцевим завданням психологічного супроводу навчання є створення належних умов для того, щоб особистість була безпосередньо суб’єктом своєї діяльності та свого життя загалом та усвідомлювала важливість свого вибору. Докладніше про це написано у праці Третяченко О.В. «Психологічний супровід профільного навчання в гімназії» [52].

1.6 Критерії відбору змісту матеріалу стереометрії для класів різної профільної спрямованості

В питаннях підбору навчального матеріалу з курсу стереометрії для здобувачів освіти різної профільної спрямованості важливу роль відіграє проблема мотивації здобувачів освіти до вивчення геометрії.

Головною мотивацією для учнів, що навчаються в класах математичної профільної спрямованості є можливість застосовувати отримані знання для подальшого вступу та навчання у вищих навчальних закладах. Тому підбір навчального матеріалу має відповідати достатньому та високому рівням якості знань, вдале засвоєння якого дозволятиме досягти високих результатів успішності та закладе відповідну міцну базу математичних знань. Під час відбору матеріалу треба аналізувати завдання таким чином, щоб уникати повторення задач одного типу. Виконання здобувачами освіти завдань та розв’язування задач має розвивати в них творчий підхід до вирішення проблем, бажання подолати труднощі, прагнення самостійно дійти до відповіді, логічне та критичне мислення, просторову уяву та уявлення.

У тих профільних класах, в яких навчання математики відбувається на рівні стандарту, тобто не має математичного спрямування, вчитель може стикнутися із тим, що школярі не зацікавлені у процесі вивчення цього предмету і, як наслідок, не вважають за потрібне готуватися до навчальних занять та залучатися до участі в уроках безпосередньо. Вони є пасивними спостерігачами, а не суб’єктами освіти. Вчителям, в такому випадку, доводиться звертати свою увагу під час підготовки до навчальних занять не лише на складність матеріалу, але й на те, чим можна привернути увагу здобувачів освіти під час уроку, тобто на їх мотивацію. Тож, підбір змісту матеріалу, а також розробка системи методів та засобів підвищення активності учнів є дуже важливим етапом підготовки до майбутнього уроку.

На нашу думку, привернути увагу до вивчення математики можна пов'язавши її із тим предметом, на вивчення якого учнів спрямовані більш охоче, тобто до того, що відповідає їх профілю. Тобто, в процесі вивчення доцільно окреслювати міжпредметні зв'язки між математикою та іншими дисциплінами. Докладніше про це можна ознайомитись у праці Глобіна О. І. [19].

Складністю такого підходу є те, що він потребує від вчителя постійного пошуку все нової та нової інформації. Це не є одноразовим процесом.

Курс стереометрії старшої школи насичений великою кількістю тверджень та теорем, доведення яких розглядаються у вигляді задач. Для здобувачів освіти, що проходять навчання за філологічним спрямуванням, такі завдання можна пропустити та надавати доведення теорем оглядово, а також за допомогою наочностей. Цікавим для них може бути матеріал, що поєднує вивчення стереометрії з творами художньої чи науково-популярної літератури. Предметом вивчення стереометрії є просторові тіла, а також взаємне розташування тіл у просторі. Саме на цьому побудований сюжет роману «Флатландія» англійського теолога та письменника Едвіна Еббота. Героями цього роману є саме геометричні тіла. Всі події відбуваються в одній площині, проте головному герою вдасться вирватися за межу цієї площини. Цей роман може не лице зацікавити школярів вивченням планіметрії та стереометрії, а й пролити світло на особливості взаємного розташування геометричних фігур на площині та у просторі.

Навчаючи стереометричному матеріалу школярів, що навчаються за технологічним профілі в ході вивчення теми «Багатогранники» доцільно буде запропонувати учням розробити моделі просторових фігур, наприклад, з картону. Створення платонових тіл, тіл Архімеда (напівправильних опуклих многогранників), тіл Кеплера-Пуансо (зірчастих многогранників) – це не просте завдання, яке має великий практичний сенс. До речі, використовуючи можливості мобільних застосунків можна створити розгортки для створення даних тіл. Виконуючи це завдання, учні матимуть змогу не просто розвивати свою просторову уяву, а й побачити, якими є розгортки багатогранників. Що в майбутньому стане їм у пригоді для вивчення таких тем, як «Обчислення площ поверхонь просторових тіл» та «Обчислення об’ємів просторових тіл».

Для здобувачів освіти, що навчаються у класах художньо-естетичної спрямованості, курс стереометрії старшої школи є не просто необхідним, а й таким, що закладає фундамент розуміння об’єму та простору. Адже всі художники у своїх роботах використовують принципи та закони геометрії (наприклад, зображення перспективи, а також плоских та об’ємних фігур). Тому на деяких уроках вчитель може залучити учнів до освітнього процесу шляхом зацікавлення роботами, що наочно відображають прикладне значення стереометрії для мистецтва. Це можуть, наприклад, роботи голландського художника Мауріца Ешера «Лист Мебіуса», «Три сфери», Відносність», які наповнені оптичними парадоксами у поєднанні з залізною логікою.

Що стосується учнів, навчання яких відбувається за спортивним профілем, то більшість з них взагалі не вбачають користь у вивчення математики, зокрема геометрії. Більшість з них приділяють увесь свій вільних час професійним заняттям спортом, які відбирають не лише час, а ще й велику кількість сил. Але більшості з тих, хто досягає високих спортивних досягнень, відомо, що без вивчення математики неможливо бути успішним спортсменом. Так, наприклад, заняття легкою атлетикою тісно пов'язані із темою «Вектори у просторі». Адже для спортсменів цього виду спорту найважливішим показником є швидкість, а швидкість – це векторна величина. Також під час занять лижним спортом для спортсменів неабияк стане у нагоді теми «Паралельність прямих у просторі», адже, якщо лижі лижника не будуть паралельними, він ризикує втратити баланс. Цікавим також є приклад застосування знань зі стереометрії в контексті велосипедного спорту. Учням, що займаються цим видом спорту можна запропонувати подивитися на нього з позиції геометрії, а також попросити пояснити, спираючи на яку теорему стереометрії можна сказати, що велосипед – це не стійка конструкція. Це стимулюватиме їх до процесу самостійного пошуку відповіді на запитання, яке їх цікавить.

Такі аналогії можна провести із будь-яким видом спорту, адже все в нашому житті спирається на закони, які регулюються математичною логікою. Проблемою дослідження взаємозв'язку математики для досягнення високих спортивних досягнень займалися Садовський Л. Є. та Садовський А. Л. у своїй роботі «Математика та спорт» [42]. Також питання прикладної спрямованості математичного матеріалу для здобувачів освіти, що навчаються за спортивним профілем розглядається у роботі Катеринюк Г. Д. [24].

Отже, на нашу думу, одним із важливих завдань, що постає перед вчителя є створення на уроці атмосфери зацікавленості дисципліною та залучення до освітнього процесу якомога більшої кількості школярів задля ефективного процесу вивчення, не зважаючи на те, на якому рівні вивчається стереометрія (стандарту, профільному чи академічному) в школі. А цьому якнайкраще може сприяти добір завдань, задач та теоретичних відомостей з курсу, що пов'язані із тим, що цікавить учнів.

1.7 Характеристика провідних змістових ліній стереометрії старшої профільної школи

1.7.1. Просторові геометричні фігури та їх властивості.

Змістова лінія «Просторові геометричні фігури та їх властивості» є провідною лінією курсу стереометрії 10-11 класів. На її вивчення виділена найбільша кількість годин навчального часу. Це цілком зрозуміло, тому що головне призначення геометрії – це вивчення властивостей фігур.

Мета вивчення даної змістової лінії в курсі старшої профільної школи – розширити знання учнів про плоскі фігури, не розташовані в одній площині та сформувати уявлення про тіла, тобто фігури, що мають ненульовий об'єм; навчити здобувачів освіти розрізняти геометричні форми об'єктів навколишнього середовища для розв'язання задач з різних сфер діяльності, в тому числі в професійних.

В курсі стереометрії 10 класу продовжується розгляд властивостей плоских фігур, не розташованих в одній площині. Додаються поняття: мимобіжні прямі, прямі, що не належать площині, паралельні площини та площини, що перетинаються. Таким чином відбувається перехід від двомірного до тривимірного простору, розвивається просторова уява здобувачів освіти, закладається фундамент до сприйняття учнями n-вимірних просторів, продовжується формування наукового світогляду, поглиблюється розуміння побудови Всесвіту.

У межах першої теми «Вступ до стереометрії» закладаються початкові уявлення про многогранники. Знайомство з просторовими фігурами відбувається, спираючись на довід учнів, завдяки асоціаціям з об'єктами, які оточують їх у повсякденному житті. Відсутні строго математичні означення многогранників, їхніх видів та елементів.

В 11 класі вивчаються властивості многогранників. Під час вивчення даних тем, здобувачі освіти знайомляться з більш глибоким теоретичним матеріалом про основні види многогранників (призма та піраміда). Серед призм окрему увагу приділяють вивченню паралелепіпеда. Розглядають правильні опуклі многогранники. Оглядово вивчають неопуклі правильні многогранники (Архімедові тіла та тіла Кеплера-Пуансо). Завершується вивчення просторових фігур розглядом тіл обертання: прямих кругових циліндра та конуса, кулі.

Вивчення даної змістової лінії «Просторові геометричні фігури та їх властивості» завершується розглядом комбінацій просторових фігур (циліндра та призми, конуса та піраміди, кулі та призми, кулі та піраміди тощо).

1.7.2. Геометричні перетворення.

Даній змістовій лінії в курсі стереометрії 10-11 класів відводиться значно менша кількість годин для вивчення, ніж попередній. Її можна простежити під час вивчення теми «Координати, вектори та геометричні перетворення у просторі».

Мета вивчення цієї змістової лінії – відштовхуючись від знань учнів про геометричні перетворення на площині, розглянути геометричні перетворення простору: рух (симетрія, поворот, паралельне перенесення) та гомотетію.

Геометричні перетворення простору вивчаються за аналогією до геометричних перетворень площини. Новим видом геометричного перетворення в стереометрії є симетрія відносно площини. Новим для учнів є також поняття площина симетрії просторової фігури. Матеріал про геометричні перетворення простору виділено в окремі теми «Симетрія відносно площини», «Паралельне перенесення».

Також дану змістову лінію можна відстежити у ході вивчення теми «Вектори», де проводиться аналогія між вектором та паралельним перенесенням точок у просторі на задану відстань у заданому напрямку. Під час вивчення теми «Множення вектора на число» використовується поняття гомотетії.

Вивчення даної змістової лінії сприяє подальшому розвитку просторових уявлень учнів, дозволяє розширити діапазон навчальних задач, розвиває креслярські навички.

1.7.3. Координати і вектори у просторі.

Мета вивчення даної змістової лінії – на основі знань здобувачів освіти про координати і вектори на площині розглянути дані поняття у просторі, продемонструвати можливість розв’язання певного типу стереометричних задач координатним або векторним методами. На вивчення матеріалу даної змістової лінії відводиться лише близько 20 годин.

Матеріал даної змістової лінії міститься в темі «Координати і вектори у просторі» курсу стереометрії 10 класу. Новим для учнів є уявлення про прямокутну систему координат у просторі (додається третя вісь аплікат Oz, дві координатні площини xz та yz).

В ході вивчення цієї теми в учнів мають сформуватися навички побудови точки у просторовій системі координат за трьома координатами. Теоретичний матеріал даної теми аналогічний до матеріалу відповідних тем курсу 9 класу.

Усі формули даної теми, відомі з планіметрії, трансформуються у відповідні формули стереометрії з урахуванням третьої координати. У темі «Вектори» додається поняття «компланарні вектори» та процес розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами..

1.7.4. Геометричні величини.

Змістова лінія «Геометричні величини» простежується майже протягом усього курсу стереометрії старшої школи. У темах «Паралельність і перпендикулярність прямих та площин у просторі» розглядаються величини, що виражають відстані та величину кута між прямими, прямою і площиною, двома площинами. Основної уваги заслуговують поняття відстані та кута між мимобіжними прямими, поняття лінійного кута двогранного кута.

Тема «Координати та вектори у просторі» розглядає такі величини, як відстань між двома точками (модуль вектора), кут між векторами. Вивчення цих величин відбувається за аналогією до процесу вивчення відповідних понять у курсі планіметрії 9 класу.

У курсі стереометрії 11 класу основними геометричними величинами, що вивчаються є площа та об’єм. Ці величини обчислюються для многогранників та тіл обертання. Поняття «площа» було введено ще в курсі планіметрії 8 класу, воно обмежувалося площею плоских фігур. У стереометрії в учнів формується уявлення про площу поверхні, в тому числі кривої: площі бічної поверхні циліндра та конуса, площа сфери.

До початку вивчення стереометрії учні мали інтуїтивне уявлення про об’єм. Вони розуміли, що плоскі фігури мають об’єм, що дорівнює нулю. У стереометрії просторову фігуру або тіло визначають, як фігуру, що має ненульовий об’єм, і вводиться поняття об’єму тіла шляхом опису основних властивостей об’єму. Об’єм тіла розглядається, як частина простору, яку займає дана фігура.

РОЗДІЛ 2. Методика вивчення окремих тем курсу стереометрії старшої профільної школи

2.1 Методика проведення перших уроків стереометрії

Вивчення курсу стереометрії починається у 10 класі із основних тем, що закладають в учнів уявлення про базові основні поняття стереометрії. Для ефективного процесу засвоєння нового матеріалу важливо дати зрозуміти учням, що увесь наступний матеріал базується на вже отриманих раніше знаннях із планіметрії.

Здобувачі освіти, вивчаючи планіметричний матеріал, вже стикалися із фігурами, які не мають означення. Це такі фігури, як точка та пряма. На початку навчання стереометрії вводиться ще одна неозначувана фігура – площина. Планіметрія розглядає фігури, що знаходяться на одній площині. Стереометрія ж розглядає фігури, які не належать одній площині.

Під час проведення першого уроку стереометрії доцільно розпочати із повторення аксіом планіметрії, розгляду логічної послідовності курсу геометрії.

Учням важливо пояснити, що «крім первісних і неозначуваних понять геометрія використовує твердження, що виражають властивості понять. Вони бувають двох видів: аксіоми та теореми. Твердження, що виражають властивості найпростіших фігур (первісних понять) і приймаються без доведення, називають аксіомами. Твердження, що виражають властивості геометричних фігур і доводяться, мають назву теореми» [44]. Багато вчителів, викладаючи геометричний матеріал, припускаються величезної помилки, не розрізняючи поняття аксіоми, теореми та означення. Вони називають все це одним словом – правила. Ця помилка спричиняє у здобувачів освіти суттєві складнощі при вивчення стереометрії. І головне – стає на заваді формуванню в учнів уяви про побудову будь-якої наукової дисципліни, а також формуванню наукового підходу до вивчення матеріалу.

Однією з суттєвих помилок, що може спричинити плутанину в свідомості здобувачів освіти може бути неправильне явлення про стереометрію, як про розділ геометрії, що вивчає просторові фігури. Проте, об'єктами стереометрі вивчає фігури, що не належать одній площині.

Вивчення просторових фігур – багатогранників та тіл обертання розпочинається вже в 11 класі. Увесь матеріал 10 класу містить теми, пов'язані із взаємним розташуванням двох прямих, прямої та площини, двох площин. Ані пряма, ані площина не є просторовими фігурами. Тобто, важливо пояснити здобувачам освіти, що об'єктом вивчення стереометрії є не лише просторові фігури, а й плоскі фігури, що не лежать в одній площині.

На другому уроці доцільно безпосередньо розпочати розгляд аксіом стереометрії:

А1. «У будь-якій площині простору виконуються всі аксіоми планіметрії» [29].

Рисунок 2.1

А2. «Через будь-які три точки простору, що не лежать на одній прямій, проходить площина, і до того ж тільки одна» [29] (Рисунок 2.1).

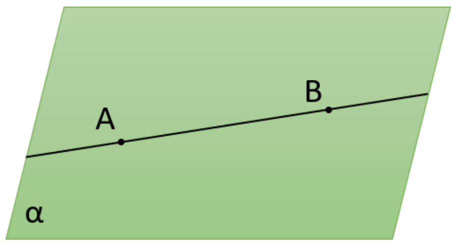

Рисунок 2.2

А3. «Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині» [29] (Рисунок 2.2).

А4. «Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій» [29] (Рисунок 2.3).

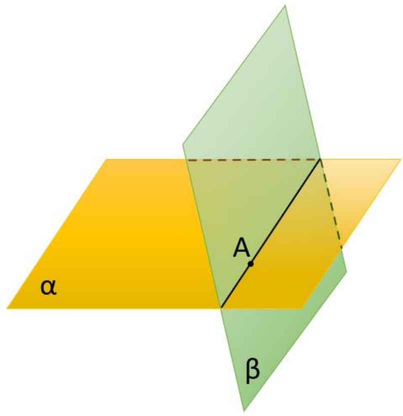

Рисунок 2.3

Для кращого засвоєння здобувачами освіти аксіом, необхідно використовувати наочності, рисунки, що демонструють їх зміст. Докладніше про це пише Власій О. О., Кульчицька Н. В., і Черняхівська Ю. Л. у праці «Методика використання «живих» креслень при вивченні шкільного курсу стереометрії» [16].

Особливо доцільним, на нашу думку, буде створення разом з учнями 3D-моделей даних аксіом у мобільних застосунках, наприклад «Калькулятор GeoGebra». Такі «живі» креслення допоможуть краще усвідомити їх сутність.

Проблемою використання мобільних додатків на уроках стереометрії займались Артемчук О. Р., Мороз М. П., у своїй праці розглянули як використовувати мобільні додатки під час вивчення планіметрії в середній школі [3]. Васильєва Д. В. статті «Навчання математики в новій українській школі в контексті STEM-освіти» виклав цікаві ідеї для використання додатків [15]. Власій О. О., Тижбір Н. З. написали статтю у якій детально розглянуті можливості використання середовища GeoGebra [17].

Складно мотивувати учнів до вивчення аксіом. Вони не розуміють, навіщо слід приділяти стільки уваги очевидним фактам. Слід звернути увагу школярів на те, що змінивши аксіоматику геометрії можна отримати зовсім іншу геометрію.

Особливу увагу на початку вивчення стереометрії слід приділити взаємному розміщенню у просторі двох прямих, прямої та площини, двох площин. Для цього слід виконувати такі вправи: продемонструйте за допомогою стереометричної скриньки (скринька, дно якої вимощене пластиліном) та спиць (паличок) взаємне розміщення двох прямих, прямої та площини, двох площин.

Слід зауважити, що зазвичай учні не звертають уваги на такі способи взаємного розташування прямих та площин: прямі, що співпадають; пряма, яка належить площині та площини, що співпадають.

Вивчаючи взаємне розміщення двох прямих доцільно розглянути таку систему запитань щодо відмінності та подібності різних видів прямих:

- Що спільного в означенні паралельних та мимобіжних прямих?
- Чим відрізняються паралельні та мимобіжні прямі?
- Що спільного в означенні паралельних прямих і прямих, що перетинаються?
- Чим відрізняються означення мимобіжних прямих та тих, що перетинаються?
- Що спільного в означення мимобіжних та прямих, що перетинаються?

Відповідь на останнє запитання викликає в учнів найбільше складнощів. Вони намагаються знайти спільне там, де його немає, і не можуть дійти висновку. Але саме такі запитання сприяють розвитку критичного мислення.

Під час вивчення взаємного розміщення прямої та площини доречно поставити учням таке запитання: «Від чого залежить спосіб розташування прямої та площини?». (Відповідь: від наявності та кількості спільних точок: немає спільних точок – вони паралельні; лише одна спільна точка – пряма перетинає площину (слід наголосити на слові «лише»); є дві спільні точки – пряма належить площині (слід зробити акцент, що двох спільних точок цілком достатньо для висновки, щодо належності прямої до площини).

Під час вивчення теми «Взаємне розміщення двох площин» також слід звернути увагу на те, що спосіб залежить від наявності та кількості спільних точок, але акцентувати на тому, що наявність однієї спільної точки не дає можливості розрізнити, чи площини перетинаються, чи співпадають. Для того, щоб дві площини співпадали не достатньо просто трьох спільних точок, вони мають не лежати на одній прямі (про це учні також забувають).

Найпоширеніша помилка, якої припускаються школярі формулюючи умову співпадіння площин – це відсутність зауваження про неналежність трьох точок одній прямій.

Площини, що перетинаються також мають безліч спільних точок, але всі вони утворюють одну пряму – лінію їхнього перетину.

В стереометрії вперше для учнів виникає проблема, що мимобіжні прямі можуть виглядати як прямі, що перетинаються на малюнку. Пряма, яка перетинає площину, може сприйматися як пряма, яка належить їй за. Тому тут дуже важливо не лише навчити учнів виконанню правильних стереометричних малюнків, але й навчити їх читати ці малюнки, а головне – не довіряти своїм очам (бо досі вони працювали із плоскими фігурами, площина цих фігур співпадала з площиною зошита). Є окрема тема – «Зображення просторових фігур». Але вона вивчається вже в середині курсу 10 класу, проте на виконання найпростіших стереометричних малюнків слід звернути увагу вже на даному етапі вивчення стереометричного матеріал.

2.2 Методика вивчення теми «Паралельність та перпендикулярність у просторі»

Тема «Паралельність у просторі» є однією з базових тем стереометрії. У стереометрії з'являється поняття «мимобіжні прямі». Через те, що мимобіжні прямі не перетинаються, так само, як і паралельні, виникає необхідність зробити акцент учнів на означеннях паралельних та мимобіжних прямих. Доцільно поставити ряд запитань про спільне та відмінне в цих означеннях:

- Що спільного в означеннях паралельних та мимобіжних прямих? (Відповідь: вони не перетинаються).

- Чим відрізняються їх означення? (Відповідь: паралельні лежать в одній площині, мимобіжні – ні).

Отже, необхідно побороти інерцію учнів, за якої вони в стереометрії продовжують визначати паралельні прямі як ті, що не перетинаються. Звернути увагу на те, що це є необхідною, але не достатньою умовою паралельності прямих. Наявність мимобіжних прямих у просторі вносить зміни у формулювання ознак паралельності прямих у порівняні з відповідними теоремами планіметрії. Так, якщо у планіметрії дві прямі перпендикулярні третій, то вони паралельні [37]. У стереометрії це твердження не є правильним. У здобувачів освіти виникає запитання щодо необхідності ознаки паралельних прямих. Слід звернути їхню увагу на те, що для доведення паралельності прямих доречніше використовувати ознаку, а не означення (довести, що нескінченні прямі ніколи не перетнуться практично неможливо).

Під час вивчення теми «Паралельність прямої і площини», та «Паралельність площин» слід також зробити наголос на відмінності означення і ознаки паралельних прямої і площини, паралельних площин.

Під час вивчення паралельності прямих та площин, треба звернути увагу на відмінності між теоремами, які описують властивості фігур, і які є ознакою фігур.

Навіть найпростіші задачі з даної теми є складними для учнів через неможливість скористатися малюнком, через складнощі, які виникають під час виконання креслення до задачі або зчитування інформації з малюнку. Неправильно виконаний малюнок може навпаки ввести учня в оману і ускладнити процес розв'язання задачі. Отже, значну частину задач з даної теми (особливо задачі на доведення) найдоречніше розв'язувати шляхом логічних міркувань без використання малюнка. Особливо ефективним є метод «від противного». Тому, на перших уроках стереометрії слід познайомити учнів з алгоритмом міркувань під час використання цього методу.

Алгоритм методу «від противного»:

1 крок. Зробити припущення, яке є протилежним до твердження, яке слід довести.

2 крок. В ході логічних міркувань прийти до протиріччя з означенням, аксіомою або теоремою.

3 крок. Зробити висновок щодо хибності зробленого припущення.

4 крок. Зробити висновок, що правильним є те твердження, яке слід було довести.

Розглянемо цей алгоритм на прикладі конкретної задачі.

Задача. Через точку, що не лежить на прямій a, проведено дві прямі, які не мають спільних точок з прямою a. Доведіть, що хоча б одна із цих прямих і пряма a є мимобіжними.

Розв'язання.

1. Припустимо, що жодна з двох прямих, що не має спільних точок з прямою a не є з нею мимобіжними.
2. Отже, кожна з цих прямих є паралельною до прямої a. Виходить, що через точку, що не належіть прямій a проходять дві різні прямі, паралельні прямій a. Це суперечить теоремі: «Через точку в просторі, яка не належить даній прямій, проходить пряма, паралельні даній, і до того ж тільки одна» [29].
3. Отже, наше припущення, що жодна з прямих, що проходить через дану точку поза прямою a, не є з прямою a мимобіжними є хибним.
4. Таким чином, хоча б одна з цих прямих є з прямою a мимобіжними.

Учні мають усвідомлювати сенс слів «хоча б». В даній задачі вони означають, що, або одна з прямих є з прямою a мимобіжними, або обидві. Отже, обидві прямі можуть бути мимобіжними до даної прямої, а може одна з них бути паралельною до прямої a.

Новим для учнів у стереометрії є те, що перпендикулярними можуть бути не лише прямі, що перетинаються під прямим кутом, а й мимобіжні прямі. Отже, слід зробити наголос на означенні перпендикулярних мимобіжних прямих. Це прямі, які є відповідно паралельними до прямих, що перетинаються під прямим кутом.

Дуже важливо сформувати в учнів чітке уявлення про означення та ознаку перпендикулярних прямих і площини. Учні помилково формулюють означення таким чином: «Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перетинає її під прямим кутом», переносячи аналогії з планіметрії щодо перпендикулярних прямих. Але, якщо визначити кут між прямою і площиною, як кут між прямою та її проекцією на площину, все одно, таке означення є неправильним. Тому що проекцію прямої, перпендикулярної до площини на цю площину, є точка.

Однією з основних теорем в даній темі є теорема про три перпендикуляри, яка дуже часто буде використовуватися в задачах на многогранники для доведення перпендикулярності певних відрізків. Це дуже важливо для доведення того, що певні трикутники є прямокутними, а отже можна буде скористатися теоремою Піфагора або співвідношеннями між сторонами та кутами у прямокутному трикутнику. Значна частина учнів «не бачить» цієї теореми на плоскому малюнку. Отже, під час вивчення теореми про три перпендикуляри цілком доречно знову скористатися стереометричною скринькою та відтворити модель цієї теореми в її «справжньому» просторому вигляді. Можна не обмежуватися створенням цієї моделі вчителем, а запропонувати кожному учневі самостійно відтворити її. Після створення моделі слід поставити таке запитання: «Які пари перпендикулярних прямих і відрізків ми одержали?». Про доведення теореми про три перпендикуляри розглянуто у роботі Мікаеляна А. В. [31].

Під час вивчення «Паралельність та перпендикулярність прямих та площин у просторі» слід особливу увагу звернути на поняття «кут між мимобіжними прямими», «кут між прямою та площиною», «кут між площинами», «двогранний кут» та «лінійний кут двогранного кута».

Тема «Перпендикулярність прямих і площин у просторі» важлива тим, що містить в собі поняття «відстань». Йдеться про відстань від точки до прямої, від точки до площини, від прямої до площини, між двома площинами. Поняття «відстань» має чітко асоціюватися в учнів з поняттям перпендикуляр.

Розглянемо розв'язання задачі, пов'язаної з поняттям «відстань від точки до площини».

«Діагональ AC ромба $ABCD$ лежить у площині α, а точка B віддалена від площини α на $3\sqrt{7}$ см. Знайдіть проекцію діагоналі BD на площину α, якщо $BD = 24$ см» [29].

Розв'язання. Для розв'язання даної задачі головне накреслити малюнок (Рисунок 2.4). За умови правильного малюнку розв'язання задачі не є складним. З умови задачі виходить, що площина ромба не співпадає в площиною α (в противному випадку відстань від вершини B до площини α дорівнювала б нулю). Площина ромба не є також перпендикулярною до площини α (в противному випадку відстань від вершини B до площини α дорівнювала б половині діагоналі BD, а саме 12 см, що суперечить умові задачі). Отже, площина ромба нахилена до площини α під довільним кутом. Щоб отримати проекцію діагоналі BD на площину α, слід провести з вершин B і D перпендикуляри BO і DO' до площини α. Саме довжина перпендикуляра BO, проведеного з вершини B ромба до площини α, і є даною відстанню від вершини B до площини α, і дорівнює $3\sqrt{7}$ см. Позначимо точку перетину діагоналей ромба літерою K. Проекція діагоналі BD на площину α – це відрізок OO', що проходить через точку K. Тому що точка K належить площині α і її проекція співпадає з самою точкою K. Нескладно довести, що $OK = KO'$. За властивістю діагоналей ромба $BK = KD$. Отже, похилі BK і KD до площини α є рівними. Кути BKO і DKO' є рівними як вертикальні

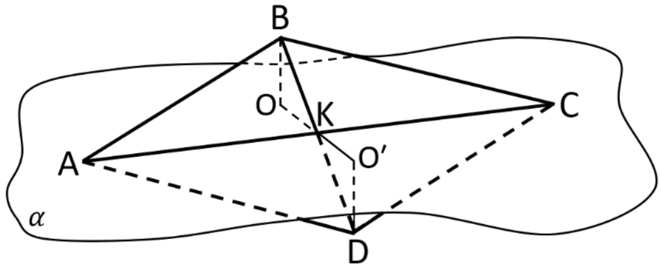

Рисунок 2.4

кути. Таким чином, рівні похилі, проведені до площини α під рівними кутами, мають рівні проекції. Отже, $OK = KO'$.

Знайдемо відрізок OK з трикутника BOK, і помноживши його довжину на 2, одержимо шукану довжину проекції.

З трикутника BOK за теоремою Піфагора: $OK = \sqrt{BK^2 - BO^2} = = \sqrt{12^2 - \left(3\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{144 - 63} = \sqrt{81} = 9(\text{см})$. Отже, $OO' = 2 \cdot 9 = 18$ (см).

Розв'язана щойно задача є прикладом того, що у стереометрії розглядають не лише задачі на просторові фігури, а й задачі, в яких йдеться про плоскі фігури, що не належать заданій площині. Учнями з недостатньо розвинутою просторовою уявою часом дуже складно представити собі, як виглядає розташування цієї фігури відносно до заданої площини у просторі. Використання мобільного додатку GeoGebra дозволяє, шляхом обертання створеної 3D моделі спростити учням процес сприйняття умови задачі (Рисунок 2.5).

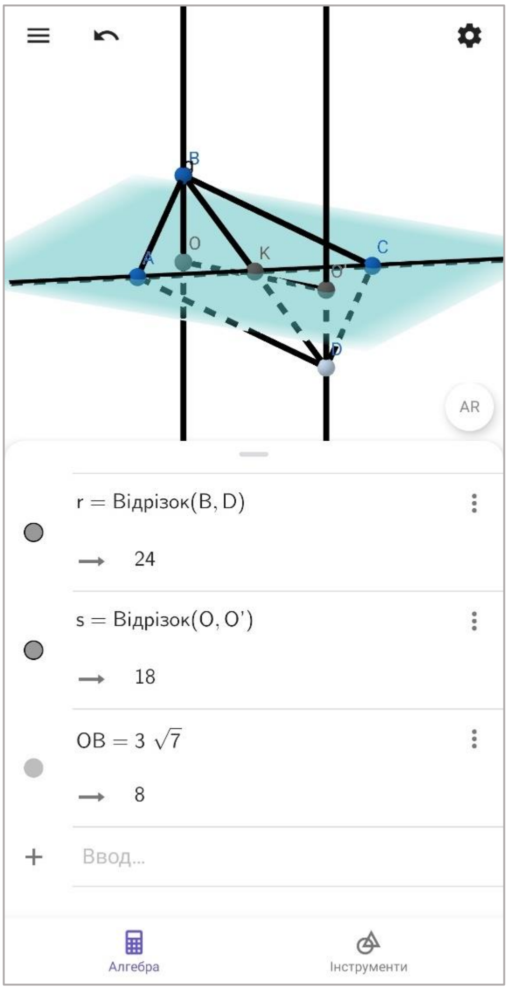

Рисунок 2.5

Функціонал даного мобільного додатку дозволяє дуже просто будувати просторі фігури, але для побудови плоских фігур не передбачено готових алгоритмів. Отже, для побудови плоских фігур слід досконало повторити усі її властивості, серед яких обрати ті, які дозволять отримати її правильне зображення. Це сприяє більш якісному, глибокому та осмисленому повторенню планіметричного матеріалу, необхідного для розв'язання стереометричних задач. Докладніше з програмою GeoGebra можна познайомитись у працях Коломієць О. М. і Сільченко А. М.[25], і Семенухіна О. В., Друшляк М. Г. [43].

2.3 Методика вивчення теми «Координати і вектори у просторі»

Вивчення координат та векторів для здобувачів освіти розпочинається із розгляду їх на площині у 9 класі. Значний обсяг планіметричного матеріалу з даної теми використовується без змін при вивчення стереометричного матеріалу. «Без зміни формулюється низка тверджень, що виражають властивості перетворень і векторів (наприклад, властивості паралельного перенесення, теореми про властивості рівних і колінеарних векторів, скалярного добутку)» [44].

Учні вже знайомі із основними поняттями теми, основними властивостями векторів, а також з операціями які на них виконуються. Розгляд цього матеріалу відбувався за допомогою прямокутної системи координат, яка складається із двох перпендикулярних осей, що мають спільний початок відліку.

Новим матеріалом цієї теми в курсі 10 класу буде розгляд координат та векторів у просторі за допомогою системи координат, що складається із трьох попарно перпендикулярних осей координат, що мають спільний початок. Головним в темі «Координати у просторі» є формування в учнів чіткого уявлення про прямокутну систему координат у просторі. Здобувачі освіти мають добре уявляти собі систему координат, яким чином координатні площини ділять простір на 8 частин, які знаки мають координати точок у кожній з них, особливості координат точок, розташованих на координатних осях, координатних площинах.

Доцільно створити зображення просторової прямокутної системи координат вчителем та учнями за допомогою мобільного застосунку «GeoGebra 3D Калькулятор». Обертання отриманого зображення системи координат дозволить здобувачам освіти краще зрозуміти її побудову, побачити її у просторі, що спростить перехід учнів від уявлень про декартову систему координат на площині до сприйняття просторової прямокутної системи координат. Без використання мобільного додатку можна зобразити прямокутну систему координат лише так, як зображено на рисунку 2.6. Досить складним для учнів є побудова точок за трьома координатами, якщо вони не належать жодній з координатних площин. Учитель має звернути увагу на формування цього уміння шляхом виконання достатньої кількості відповідних вправ. На наведених рисунках 2.7 та 2.8 показано

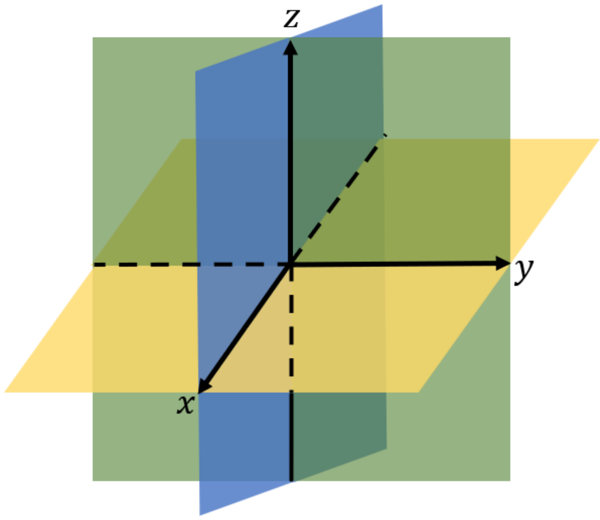

Рисунок 2.6

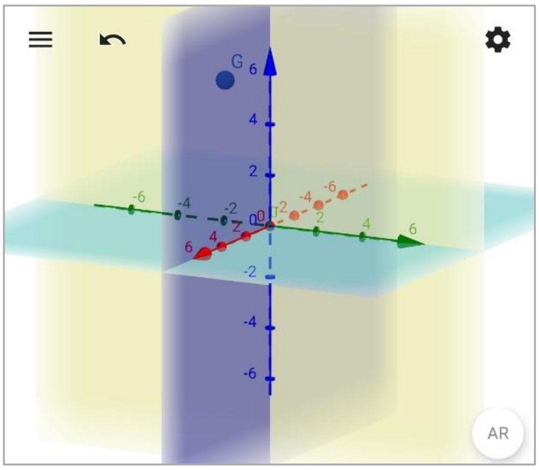

Рисунок 2.7

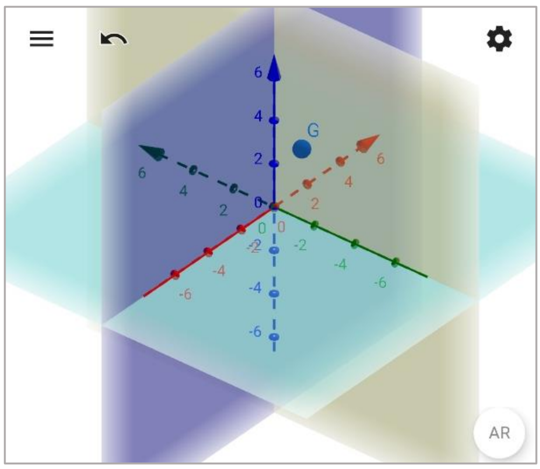

Рисунок 2.8

скріншоти зображень системи координат, виконаних за допомогою мобільного додатку під різними кутами. Обертаючи дану 3D модель системи координат, школярі можуть більш наочно побачити розташування заданої точки, особливо тієї, що не належить жодній з координатних площин. Наприклад точки G(-2;-3;5).

Для засвоєння учнями структури прямокутної системи координат у просторі доцільно розглянути такі запитання:

- Що ви можете сказати про координати точки, розташованої на одній з координатних площин? (Відповідь: одна з координат дорівнює нулю).
- Як за координатами точки визначити, що вона належить одній з координатних осей? (Відповідь: дві координати цієї точки дорівнюють нулю).
- В якій координатній площині знаходиться точка, якщо її координата х дорівнює нулю? (Відповідь: у площині xz)

Учням слід нагадати, з якою метою вивчаються тема «Координати і вектори» в курсі 10 класу. Значна кількість задач на просторові тіла розв'язується координатним вектором з використанням властивостей векторів. Формулами відстані між двома точками, координат середини відрізка, модуля вектора можна скористатися в процесі знаходити довжин різних елементів тіл. Формула скалярного добутку векторів, властивості колінеарних і перпендикулярних векторів дозволяє визначати різноманітні кути в многогранникахю Викториcтання ІТ-технологій для розв'язання графічних задач розглянуто у праці Манжара В. В. [28].

Розглянемо розв'язання задачі на піраміду шляхом використання координатного методу з підручнику 10 класу профільного рівня.

Задача. «Знайдіть висоту SO піраміди $SABC$ і кути нахилу її бічних ребер до площини основи, якщо: $S(2;\ 2;\ 2), A(-2;\ 0;\ 4), B(4;\ -2;\ 0), C(0;\ 4;\ -2)$» [6].

Розв'язання.

З'ясуємо, чи є дана піраміда правильною (рисунок 2.9). Знайдемо довжини усіх сторін трикутника ABC.

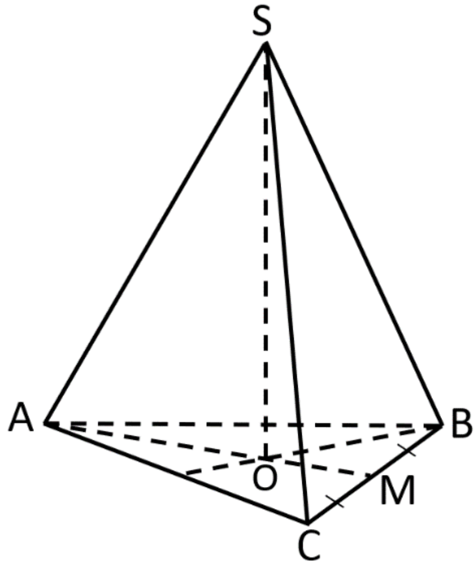

Рисунок 2.9

$$AB^2 = (4+2)^2 + (-2-0)^2 + (0-4)^2 =$$
$$= 36 + 4 + 16 = 56,$$

$$AC^2 = (0+2)^2 + (4-0)^2 + (-2-4)^2 =$$
$$= 4 + 16 + 36 = 56,$$

$$BC^2 = (0-4)^2 + (4+2)^2 + (-2-0)^2 =$$
$$= 16 + 36 + 4 = 56.$$

Отже, $AB = AC = BC$. Під час розв’язання можна буде скористатися властивостями рівностороннього трикутника. Знайдемо довжини бічних ребер.

$$SA^2 = (2+2)^2 + (2-0)^2 + (2-4)^2 = 16 + 4 + 4 = 24,$$

$$SB^2 = (2-4)^2 + (2+2)^2 + (2-0)^2 = 4 + 16 + 4 = 24,$$

$$SC^2 = (2-0)^2 + (2-4)^2 + (2+2)^2 = 4 + 4 + 16 = 24.$$

Отже, $SA = SB = SC$.

Із рівності довжин бічних ребер виходить, що вони нахилені до площини основи під рівними кутами і основи висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи піраміди. Отже, маємо правильну трикутну піраміду.

Знайдемо довжину висоти SO. Для цього знайдемо координати точки O, що належить медіані AM трикутника ABC. Знайдемо координати точки M як середини відрізка BC.

$$x_M = \frac{0+4}{2} = 2, \qquad y_M = \frac{4-2}{2} = 1, \qquad z_M = \frac{0-2}{2} = -1.$$

Точка O – це точка перетину медіан трикутника, отже, вона ділить відрізок AM у співвідношенні $AO\colon OM = 2\colon 1$. Для пошуку координат точки O скористаємося теоремою: «Якщо точка $P(x; y; z)$ відрізка з кінцями $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ така, що $AP\colon PB = m\colon n$, то $x = \frac{1}{m+n}(nx_1 + mx_2)$, $y = \frac{1}{m+n}(ny_1 + my_2), z = \frac{1}{m+n}(nz_1 + mz_2)$» [6].

$x_O = \frac{1}{3}(-2 + 2 \cdot 2) = \frac{2}{3}$, $y_O = \frac{1}{3}(0 + 2 \cdot 1) = \frac{2}{3}$, $z_o = \frac{1}{3}(4 + 2 \cdot (-1)) = \frac{2}{3}$.

Отже, шукаємо висоту SO.

$$SO = \sqrt{3\left(2 - \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Залишилося знайти кут, під яким бічне ребро нахилене до основи. Розглянемо трикутник AOS,

$$\sin \angle SAO = \frac{SO}{SA} = \frac{4\sqrt{3}}{3} : \sqrt{24} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Отже, $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Отже, під час розв'язання задачі ми скористалися формулами відстані між двома точками, координат середини

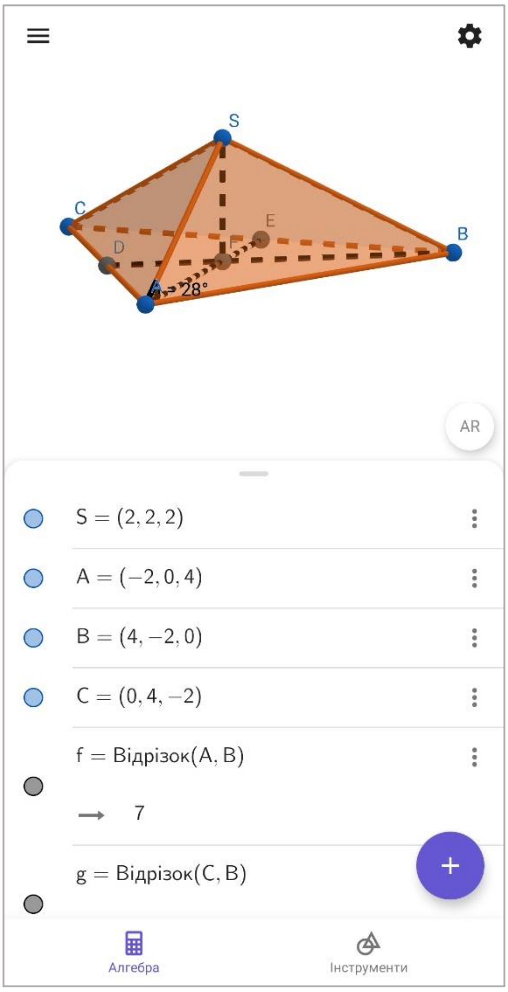

Рисунок 2.9

відрізка, координат точки, що ділить відрізки у заданому відношенні, які безпосередньо відносяться до теми «Координати у просторі».

На рисунку 2.9 подано скріншот малюнку, створеного для розв'язання щойно розглянутої задачі за допомогою мобільного застосунку «GeoGebra». Використання даного застосунку є особливо корисним саме в ході розв'язання задач, в яких многогранник задано координатами його вершин. Учень може, задавши координати вершин багатогранника, легко отримати його більш достовірне зображення, ніж під час виконання малюнку на аркуші, коли точні координати вершин не можна врахувати. Крім того, можна, обертаючи зображення у будь-якому напрямку, побачити, як виглядає многогранник з різних боків. Це дуже важливо для школярів, у яких ще не достатньо розвинута просторова уява. Використання даного застосунку буде сприяти, як більш успішному розв'язанню задачі, так і подальшому розвитку гнучкості просторового мислення.

Крім отримання об'ємного зображення до задачі, використання даного застосунку дозволяє одержати наближене значення величини шуканого елементу фігури. Це дозволяє перевірити правильність відповіді, отриманої в ході традиційного розв'язання задачі.

2.4 Методика вивчення многогранників

Матеріал про многогранники є основним в курсі стереометрії та розглядається в межах тем «Многогранники» та «Об'єми тіл». У ході вивчення першої теми в учнів формується уявлення про такі нові поняття, як тіло, многогранник, опуклий і неопуклий многогранник, призма, піраміда, опуклі і неопуклі правильні многогранники.

Тіло можна визначити як фігуру, яка має ненульовий, точніше додатний об'єм. Перед вивченням окремих видів многогранників (призм, пірамід) необхідно сформувати уявлення в учнів про загальне поняття «многогранник». «Многогранником називають тіло, поверхня якого складається із скінченної кількості плоских многокутників» [7]. або «багатогранник – це частина простору, обмежена скінченною кількістю багатокутників» [44]. Слід також звернути увагу учнів, що з плоских многокутників складається саме поверхня тіла, а не саме тіло. Перед розглядом означень многогранників доцільно повторити основний матеріал про властивості плоских многокутників. Зробити акцент на правильних многокутниках. Додатковим джерелом інформації для вчителя і учнів буде підручник Тадаєва В. О. «Геометрія. Основи стереометрії. Многогранники»[46], та у статті Тереха О. Я. «Навчальні задачі на уроках геометрії» [51].

«Многогранник називають опуклим, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані» [30]. Важливо домогтися того, щоб здобувачі освіти чітко розрізняли усі елементи многогранника (вершини, ребра, грані), діагональ, діагональний переріз тощо. Доречно звернути увагу на закономірність між елементами многогранника, описану формулою Ейлера: $В + Г - Р = 2$ (В, Г, Р – відповідно кількість вершин, граней та ребер певного многогранника).

На даному етапі можна поставити учням декілька запитань на просторову уяву та логіку:

- Яку найменшу кількість граней може мати многогранник?

- Якими вони є многокутниками?

- Яка мінімальна кількість ребер може бути у многогранника?

- Чи може у многогранника бути менше чотирьох вершин?

Оглядово можна розглянути правильні та напівправильні опуклі многогранники (платонові тіла та тіла Архімеда відповідно), правильні неопуклі многогранники (тіла Кеплера-Пуансо).

Наступним етапом дослідження многогранників є вивчення призми, її елементів і видів. Також розвиваються вміння учнів щодо пошуку площ бічної та повної поверхонь призми. Такий самий алгоритм спостерігається у ході вивчення піраміди.

У різні часи в підручниках пропонувалися різні означення призми і піраміди. Так раніше у підручнику Погорєлова давалося таке означення призми: «Призмою називають багатогранник, що складається з двох плоских багатокутників, які лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що з'єднують відповідні точки цих багатокутників» [44]. Аналогічно, за цим самим принципом було побудовано означення піраміди. У підручниках, що відповідають чинній програмі означення призми та піраміди побудовані, як опис усіх їхніх граней. Таким чином, формулювання означень призми та піраміди було значно спрощено, щоб полегшити засвоєння матеріалу здобувачами освіти.

Після засвоєння означень призми та піраміди дуже вадливим є розгляд видів призм і пірамід. Вивчаючи види призм доцільно скласти спеціальну схему щодо видів призм (Схема 2.1).

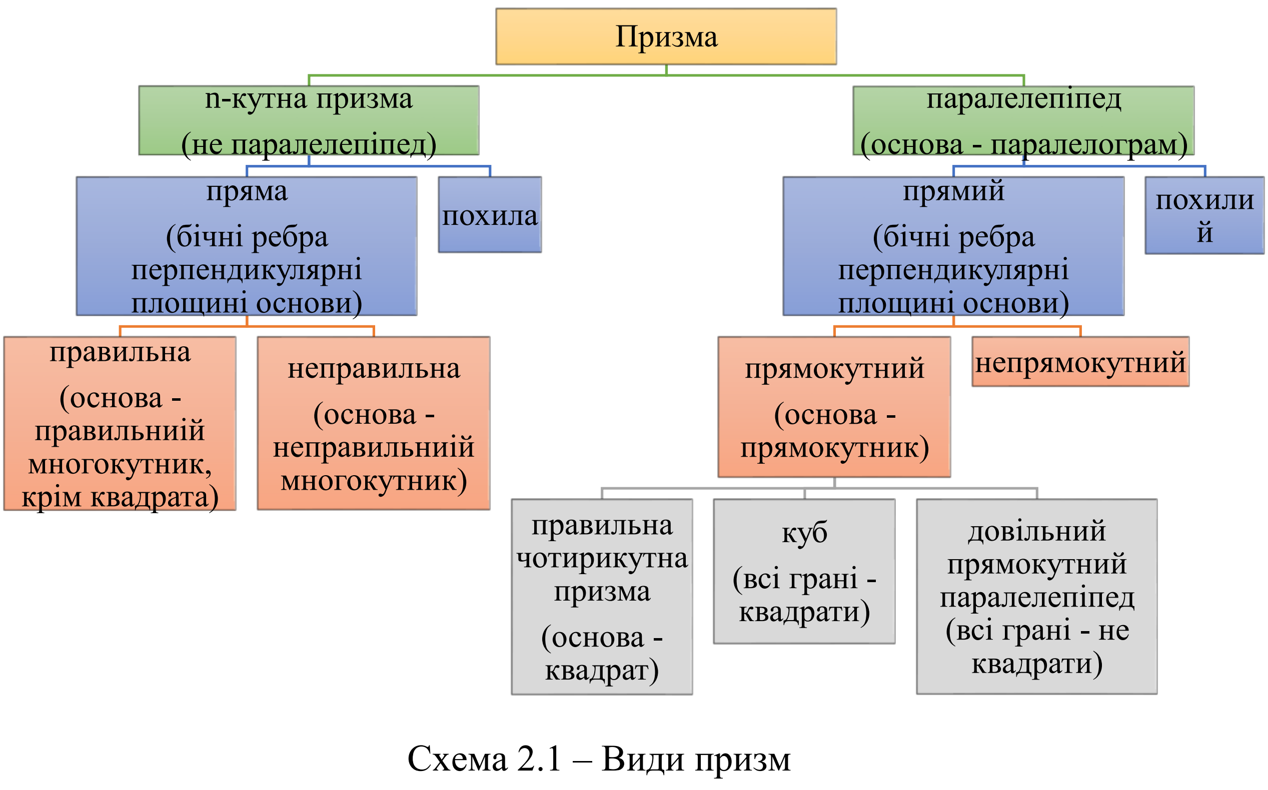

Схема 2.1 – Види призм

Використовуючи дану схему школярі можуть легко відтворити означення кожного виду призми через найближче поняття (поняття від якого відходить розгалуження до даного поняття). Слід звернути увагу здобувачів освіти на відмінність понять «куб» і «правильна чотирикутна призма». Правильна чотирикутна призма – це пряма призма, в основі якої лежить квадрат, але довжина бічного ребра не дорівнює довжині ребра при основі.

Найбільша кількість задач – це задачі на паралелепіпед або на трикутну призму, тому перед вивченням призми доцільно повторити властивості паралелограма і його видів, формулу площі паралелограма, властивості різних видів трикутників, усі формули для знаходження площ трикутників.

Серед великої кількості видів пірамід слід зробити акцент на правильну піраміду, піраміду, у якої усі бічні ребра нахилені до площини основи під рівними кутами, піраміду, у якої усі бічні грані нахилені до площини основи під рівними кутами та зрізану піраміду.

У значній кількості задач йдеться про правильні трикутну або чотирикутну піраміди. Отже, слід зробити акцент на повторенні властивостей рівностороннього трикутника та квадрата. Слід домогтися чіткого засвоєння учнями алгоритму побудови правильної трикутної та правильної чотирикутної пірамід.

Наступним кроком вивчення теми «Многогранники» є розгляд понять «площа бічної поверхні», «площа повної поверхні» призми та піраміди. Якщо для непрямої призми і неправильної піраміди площу бічної поверхні можна знайти, як суму площ усіх бічних граней, то для прямої призми і правильної піраміди розглядають спеціальні формули. «Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та бічного ребра призми» [30], «Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи та апофеми» [30].

У темі «Об’єми тіл» після введення поняття «об’єм» розглядають формули для знаходження об’єму призми та піраміди. Особливу увагу звертають на формулу об’ємів прямокутного паралелепіпеда і куба. Взагалі, формуючи в учнів поняття «об’єм», слід зробити акцент на тому, що «за одиницю виміру об’єму тіла беруть одиничний куб, тобто куб з ребром, яке дорівнює одиниці виміру довжини» [30].

Задачі на многогранники можна умовно поділити на такі типи:

- задачі на знаходження певних елементів призми або піраміди;

- задачі на знаходження площ бічної або повної поверхонь призми чи піраміди;

- задачі на побудову плоских перерізів призми або піраміди та знаходження їхніх площ;

- задачі на знаходження об’ємів;

- задачі на комбінації многогранників та тіл обертання.

Останній тип задач розв’язують після вивчення тіл обертання.

Розглянемо розв’язання задачі на знаходження площі перерізу призми.

Задача. «Висота правильної чотирикутної призми дорівнює h. У двох сусідніх бічних гранях проведено дві діагоналі, які мають спільний кінець. Знайдіть площу перерізу, який проходить через дані діагоналі, якщо кут між ними дорівнює α» [30].

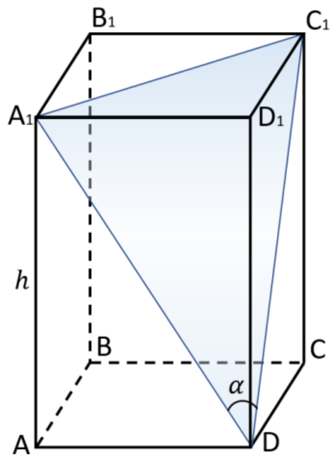

Рисунок 2.10

Розв’язання. За умовою задачі нам дано

правильну чотирикутну призму (рисунок 2.10), тобто пряму призму, в основі якої лежить квадрат. Спочатку слід побудувати заданий переріз. Для цього достатньо сполучити вершини A_1 і C_1 призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Отриманий переріз є рівнобедреним трикутником. Відрізки A_1D і C_1D рівні (як діагоналі двох рівних прямокутників). Позначимо площу перерізу $S_{\text{п.}}$ Таким чином,

$$S_{\text{п.}} = \frac{1}{2} A_1D^2 \cdot \sin\alpha \qquad (1)$$

Виразимо довжину відрізку A_1D через відомі величини. Нехай довжина сторони квадрата, що лежить в основі призми, дорівнює x.

Із трикутника AA_1D за теоремою Піфагора одержимо:

$$A_1D^2 = h^2 + x^2 \qquad (2)$$

Із трикутника A_1C_1D за теоремою косинусів маємо:

$$A_1{C_1}^2 = 2A_1D^2 - 2A_1D^2 \cdot \cos\alpha$$

$$A_1{C_1}^2 = 2A_1D^2(1 - \cos\alpha) \qquad (3)$$

Із трикутника $A_1C_1D_1$ за теоремою Піфагора: $A_1{C_1}^2 = 2x^2$.

Підставимо до формули (3) одержані вирази для A_1D^2 та $A_1{C_1}^2$:

$$2x^2 = 2(h^2 + x^2)(1 - \cos\alpha)$$

$$x^2 = h^2 + x^2 - h^2\cos\alpha - x^2\cos\alpha$$

$$h^2 - h^2\cos\alpha - x^2\cos\alpha = 0$$

$$x^2 = \frac{h^2(1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha} \qquad (4)$$

Підставимо праву частину формули (4) до формули (2) замість x^2:

$$A_1D^2 = h^2 + \frac{h^2(1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha}$$

Підставимо праву частину одержаного рівняння до формули (1):

$$S_{\text{п.}} = \frac{1}{2}\left(h^2 + \frac{h^2(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha$$

$$S_{\text{п.}} = \frac{1}{2}\left(h^2\sin\alpha + \frac{h^2(1-\cos\alpha)\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$S_{\text{п.}} = \frac{1}{2}(h^2\sin\alpha + h^2(1-\cos\alpha)\operatorname{tg}\alpha)$$

$$S_{\text{п.}} = \frac{1}{2}(h^2\sin\alpha + h^2\operatorname{tg}\alpha - h^2\sin\alpha)$$

$$S_{\text{п.}} = \frac{1}{2}h^2\operatorname{tg}\alpha.$$

Рисунки 2.11 та 2.12 містять скріншоти малюнку до щойно розглянутої задачі під різними кутами зору, отримані за допомогою мобільного додатку «Geogebra». Можливість, обертаючи зображення, побачити його з різних боків демонструє великі переваги використання цього застосунку саме під час розв'язання задач на побудову перерізів. Цей тип задач є досить складним для здобувачів освіти через те, що складно уявити шуканий переріз, особливо учням з недостатньо розвинутою просторовою уявою. Перед побудовою перерізу виникає гіпотеза щодо розташування заданого перерізу,

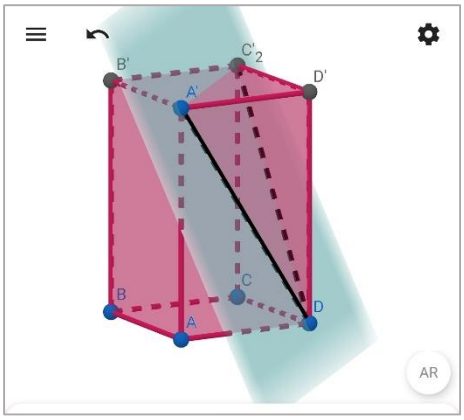

Рисунок 2.11

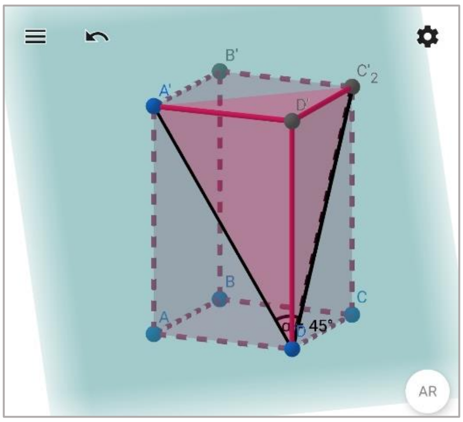

Рисунок 2.12

правильність якої учневі складно перевірити. За допомогою 3D моделі, побудованої у цьому мобільному додатку, можна пересвідчитися у правильності власних міркувань.

У праці Ботузова Ю.В. розглядається використання програмних засобів під час навчання побудові перерізів многогранників [10].

Під час розв’язання задач на многогранники їх зображують у певному стандартному вигляді, що не завжди дозволяє уявити і побудувати деякі перерізи через складнощі, які виникають через те, що деякі елементи многогранників та відрізки перетину перерізу з гранями перекривають одне одного

2.5 Методика вивчення тіл обертання

Вивчення тіл є однією з найважливіших тем курсу стереометрії. Тіла обертання вивчають зазвичай після вивчення багатогранників. Вивчення тіл обертання за своєю складністю поступається темі «Багатогранники». Це зумовлено тим, що у шкільному курсі геометрії розглядають лише прямі кругові циліндр та конус, а у кулі немає різновидів.

Головною задачею вчителя є домогтися від учнів чіткого уявлення про тіло обертання загалом та про кожне конкретне тіло обертання. Досить ефективно розпочати вивчення цієї теми із запитання: «Чому деякі тіла називають саме тілами обертання?». Учні зазвичай вважають, що тіло обертання називають таким чином через те, що його можна обертати. Тому доцільно зробити акцент на тому, що тіло називають тілом обертання тому, що його можна одержати шляхом обертання певної плоскої фігури (або її частини) навколо прямої, що містить якийсь її елемент. Так, щоб отримати прямий круговий циліндр (далі під поняттями циліндр та конус будемо мати на увазі прямий круговий циліндр та прямий круговий конус) слід обертати прямокутник навколо однієї з її сторін. Щоб отримати конус слід обертати прямокутний трикутник навколо одного з його катетів. Щоб отримати кулю слід обертати півкруг навколо його діаметра. Для того, щоб учні могли побачити процес отримання тіл обертання наочно дуже ефективно скористатися спеціально створеним приладом, що складається із двигуна, прихованого в скринці, що з'єднаний зі стрижнем, до якого кріпиться певна плоска фігура. Для роботи двигуна можна скористатися наприклад зарядним пристроєм для мобільного телефону. До речі, такий прилад учні за бажанням можуть створити самостійно. Якщо немає можливості створити такий прилад, то можна просто скористатися олівцем, обертаючи його між долонями для надання швидкості обертання.

Після розгляду означень тіл обертання дуже доречно виконати систему вправ на встановлення відповідності, між елементами плоскої фігури, що обертали, та елементами відповідного тіла обертання. Наприклад:

- Яким елементом конуса буде катет трикутника, навколо якого його обертали? (Відповідь: висота).
- Яким елементом конуса буде гіпотенуза трикутника, який обертали навколо одного з катетів? (Відповідь: твірна).
- Що утворює гіпотенуза в результаті повного оберту такого трикутника? (Відповідь: бічну поверхню).
- Яким елементом конуса є інший катет (катет, навколо якого не обертають трикутник)? (Відповідь: радіус основи).
- Яким елементом конуса буде вершина прямого кута? (Відповідь: основа висоти або центр основи конуса).
- Яким елементом конуса є інший кінець катета, навколо якого здійснюється обертання трикутника? (Відповідь: вершина конуса).

- Чи принципово обертати прямокутний трикутник навколо саме катета? (Відповідь: так).
- Яке тіло утвориться в результаті обертання прямокутного трикутника навколо гіпотенузи? (Відповідь: два конуси зі спільною основою).

Оскільки усі тіла обертання пов'язані з поняттями круг та коло, слід перед початком вивчення тіл обертання повторити увесь навчальний матеріал, пов'язаний із цими поняттями: означення радіуса, діаметра, хорди, дуги, дотичної до кола, центрального кута, вписаних та описаних многокутників, довжина кола, площа круга тощо.

Під час вивчення кулі та її поверхні – сфери доцільно звернути увагу учнів на такий аспект: сфера є просторовим аналогом кола, а куля є просторовим аналогом круга. Тому доцільно, повторивши означення кола і круга, запропонувати учням самостійно трансформувати їх у відповідні означення сфери і кулі. Наприклад, означення кола: «Коло – це множина точок на площині, рівновіддалених від даної точки»[18]. Учні мають здогадатися, що для отримання означення сфери достатньо поміняти слово «площина» на слово «простір» і ми одержимо означення сфери.

Яку фігуру слід обертати та навколо чого, щоб отримати сферу (півколо навколо діаметра, що з'єднує кінці цього півкола), а далі запитати учнів «Чи є сфера тілом обертання?». Відповідь: ні, не можна, тому що сфера є не тілом, а поверхнею, бо має нульовий об'єм.

Якщо розглядати тіла обертання, як тіла, утворені в процесі обертання плоских фігур, то такий підхід спрощує розв'язання задач даної теми. Багато задач даної теми на використання осьових перерізів. Слід сформувати в учнів чітке уявлення про зв'язок осьового перерізу з плоскою фігурою, обертання якої призвело до отримання даного тіла.

Таким чином, більшість задач на тіла обертання зводиться до роботи з прямокутним трикутником або з прямокутником. Можна розглянути ряд запитань, пов'язаних з осьовим перерізом конуса:

- Яким трикутником є осьовий переріз конуса? (Відповідь: рівнобедреним).
- Чому? (Відповідь: тому що твірні конуса є рівними відрізками).
- Чи може осьовий переріз бути рівностороннім або правильним трикутником? (Відповідь: так).
- В якому випадку? (Відповідь: коли твірна дорівнює діаметру).
- Яким має бути трикутник, щоб обертаючи його отримати рівносторонній конус? (Відповідь: гіпотенуза має бути вдвічі більшою за катет, навколо якого не обертають трикутник).
- Чи може осьовий переріз бути прямокутним трикутником? (Відповідь: так).
- Де може бути прямий кут в осьовому перерізі? (Відповідь: між твірними).
- Чому? (Відповідь: тому що два інших кути є рівними, а отже не можуть бути прямими).
- Який прямокутний трикутник слід обертати? (Відповідь: рівнобедрений).

Оскільки тема «Конус» тісно пов'язана з темою «Прямокутний трикутник», то доцільно здійснити детальне повторення різноманітних формул, пов'язаних з трикутником (формули площ трикутників, теорема Піфагора, співвідношення між сторонами та кутами в прямокутному трикутнику тощо).

Під час введення формул площ поверхонь циліндра та конуса ефективно розглянути розгортки їхніх поверхонь. Можна запропонувати учням намалювати на дошці ці розгортки. Підказкою може бути таке запитання: «Які фігури слід вирізати з картону чи паперу, щоб склеїти циліндр чи конус?». Якщо з розгорткою циліндра зазвичай не виникає серйозних труднощів, то з розгорткою конуса виникає така проблема. Більшість учнів малює розгортку бічної поверхні конуса у вигляді рівнобедреного трикутника, а не кругового сектора. Для того, щоб вивести формулу площі поверхні тіла обертання учням достатньо додати площі усіх фігур, що складають розгортку. Наприклад, для циліндра до площі прямокутника слід додати площі двох рівних кругів. Важливо звернути увагу на те, якими елементами для циліндра є сторони прямокутника (висота і коло основи). Отже, для одержання формули площі поверхні циліндра достатньо знати такі формули: довжина кола, площа прямокутника, площа круга.

Для закріплення формул площ поверхонь циліндра та конуса доречно поставити такі запитання:

- Які елементи циліндра необхідно знати для знаходження площі його поверхонь? (Відповідь: висота та радіус основи).
- Від чого залежить площа поверхні конуса? (Відповідь: від твірної та радіуса основи).

Під час розв’язання задач на знаходження площ поверхонь та об’ємів тіл обертання, здобувачі освіти зазвичай підставляють замість числа π його наближене числове значення – 3,14, чим ускладнюють процес обчислення та отримують наближений результат. Можна звернути увагу школярів на те, що цю процедуру слід робити лише під час розв’язання задач прикладної спрямованості.

Найскладнішими задачами в даній темі є задачі на комбінації багатогранників та тіл обертання. Отже, слід звернути особливу увагу на алгоритми виконання малюнків до таких задач.

Розглянемо розв'язання задачі на комбінацію конуса і піраміди з підручника геометрії 11 класу профільного рівня.

«Навколо конуса описано піраміду, основою якої є рівнобедрений трикутник з бічною стороною a і кутом α при основі. Усі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють β. Знайдіть площу бічної поверхні даного конуса» [30].

Розв'язання. Площу бічної поверхні циліндра (рисунок 2.13) шукатимемо за формулою $S_{б.} = \pi Rl$, де $l = SM$ (це твірна конуса), а M – це середина основи BC рівнобедреного трикутника ABC і точка дотику кола основи конуса до сторони BC.

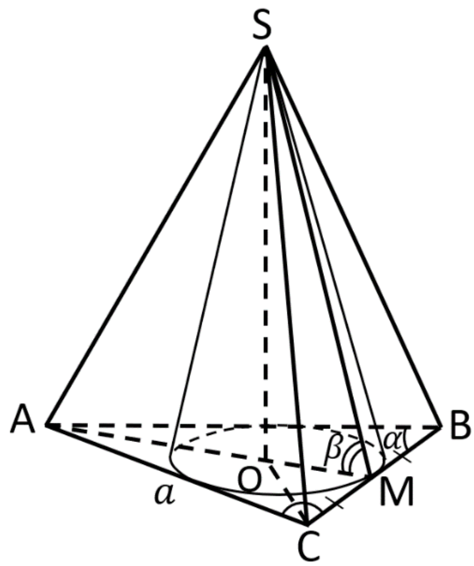

Рисунок 2.13

За умовою задачі усі бічні грані піраміди нахилені до основи під рівними кутами. З цього виходить, що основа висоти піраміди – це центр кола, вписаного в основу піраміди (центр основи конуса), точка перетину бісектрис трикутника, що лежить в основі піраміди.

Основа висоти, точка O, належить медіані AM, тому що вона проведена до основи рівнобедреного трикутника, отже є і бісектрисою трикутника ABC.

Таким чином, радіус $R = OM$ (AM – є висотою трикутника ABC). Розв'язання задачі зводиться до пошуку довжин відрізків SM і OM. Проведемо відрізок CO. Це частина бісектриси трикутника ABC. Виразимо відрізок OM з трикутника COM, у якому $\angle CMO = 90°$, а $\angle MCO = \frac{\alpha}{2}$, за співвідношенням між сторонами та кутами у прямокутному трикутнику: $OM = CM \cdot tg\frac{\alpha}{2}$.

Відрізок CM знайдемо з трикутника ACM:

$$CM = AC \cdot \cos\alpha = a\cos\alpha.$$

Підставляємо отриманий вираз до попереднього:

$$OM = a\cos\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2}.$$

Отже, $R = a\cos\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2}$.

Розглянемо трикутник SOM. У ньому $\angle SMO = \beta$ (це двогранний кут при ребрі основи). $SM = \frac{OM}{\cos\beta} = \frac{a\cos\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}$. Отже, $l = \frac{a\cos\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}$.

Підставимо знайдені вирази для R і l до формули площі бічної поверхні конуса:

$$S_{б.} = \pi \cdot a\cos\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{a\cos\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta} = \frac{\pi a^2 \cos^2\alpha \, \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}.$$

Перед розв'язанням задач на комбінації тіл обертання та многогранників ефективно продемонструвати учням кожний можливий варіант комбінацій на прикладі відповідної 3D моделі, створеної за допомогою «GeoGebra 3D Калькулятор». Створюючи зображення комбінацій тіл, наприклад, за допомогою програми PowerPoint або, виконуючи малюнки на дошці чи на аркуші, вчитель витратить дуже багато зусиль та часу. А за допомогою запропонованого застосунку він зможе це зробити в кілька кліків по екрану телефону.

Учневі, одержавши явлення за допомогою 3D моделей про різні комбінації тіл і легко створивши їхні зображення власноруч за допомогою даного мобільного додатку, потім буде значно простіше отримати відповідні малюнки на аркуші зошиту

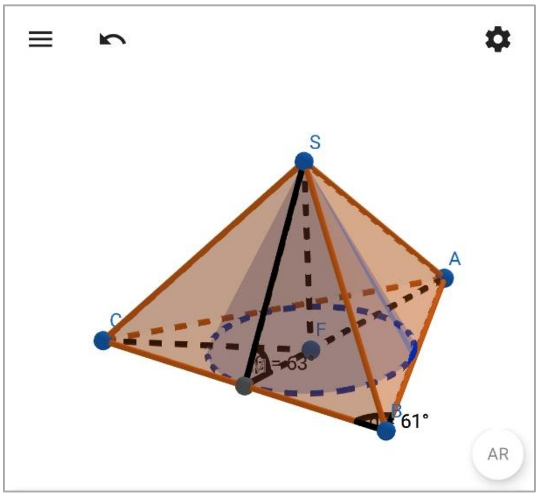

Рисунок 2.14

або на дошці. На рисунку 2.14 показано скріншот задачі на комбінацію конуса та піраміду, розв’язання якої наведено вище. Умова даної задачі не містила конкретних значень величин кутів або довжин відрізків. За допомогою даного застосунку можна перевірити правильність отриманої у відповіді формули, підставивши конкретні значення даних величин до формули і задавши ці величини у застосунку. Якщо результати, отримані власноруч та за допомогою програми, будуть однаковими, це буде свідчити про правильність розв’язання даної задачі та про правильність побудови 3D моделі.

РОЗДІЛ 3. Експериментальний дослід

Експериментальний дослід полягав у вивченні стереометричного матеріалу учнями 11 класів з використанням спеціально розробленої методики викладання окремих тем курсу «Стереометрії» із застосуванням додатку для мобільного телефону «GeoGebra 3D Калькулятор». Експеримент відбувався на базі комунального закладу «Херсонський фаховий спортивний коледж» Херсонської обласної ради. Він тривав з 1 лютого 2022 року по 29 квітня 2022 року. До експерименту було залучено два 11 класи зазначеного навчального закладу. Освітній процес даного навчального закладу відбувається за спортивним профілем. Запропонована методика розроблена з урахуванням вивчення математики у класах різної профільної спрямованості.

Експеримент відбувався за такими етапами:

1. Аналіз методичної літератури з теми дослідження, методичних рекомендацій щодо вивчення стереометрії, підручників з геометрії для 11 класу різних рівнів.
2. Аналіз успішності з геометрії здобувачів освіти – учасників експерименту за результатами І семестру 2021/2022 навчального року. Знайомство з результатами написання контрольних робіт з тем геометрії, що вивчалися протягом І семестру.
3. Розробка методики вивчення тем «Об’єми тіл» та «Площі поверхонь тіл», розгляд яких відбувався протягом проведення досліду з урахуванням особливостей навчання у змішаній формі.
4. Проведення уроків, групових та індивідуальних консультацій офлайн та онлайн з даних тем з використанням мобільного

додатку «GeoGebra 3D Калькулятор» для учнів обраних двох 11 класів.

5. Проведення контрольного зрізу знань учнів-учасників експерименту з тем «Об’єми тіл» і «Площі поверхонь тіл», вивчення яких відбувалося за зазначеною вище методикою.
6. Порівняння результатів проведеного контрольного зрізу з результатами успішності здобувачів освіти з геометрії за підсумками I семестру 2022/2023 навчального року. Аналіз отриманих результатів дослідження, статистична обробка даних. Висновки щодо ефективності та доцільності використання методики вивчення стереометричного матеріалу з використанням мобільних пристроїв, а саме мобільних додатків для побудови 3D моделей просторових фігур та розв’язання стереометричних задач на пошук об’єму просторових фігур та знаходження площ поверхонь тіл обертання.

До участі у експериментальному досліді було залучено учнів 11-Б та 11-В класів комунального закладу «Херсонський фаховий спортивний коледж» Херсонської обласної ради. Було обрано класи, учні яких мають приблизно однаковий рівень успішності з геометрії за результатами I семестру 2021/2022 н.р., що відображено в таблицях 3.1 та 3.2, а також схемах 3.1 та 3.2.

Клас	**Всього**	**Високий рівень**			**%**	**Достатній рівень**			**%**	**Середній рівень**			**%**	**Початковий рівень**			**%**
		12	**11**	**10**		**9**	**8**	**7**		**6**	**5**	**4**		**3**	**2**	**1**	
11-Б	25	-	-	3	12	2	1	3	24	7	5	3	60	1	-	-	4
11-В	28	-	-	4	14	2	2	2	21	9	5	3	61	1	-	-	4

Таблиця 3.1

Клас	**Успішність %**	**Якість знань %**	**Середній бал**
11-Б	96	36	6,4
11-В	96	35	6,5

Таблиця 3.2

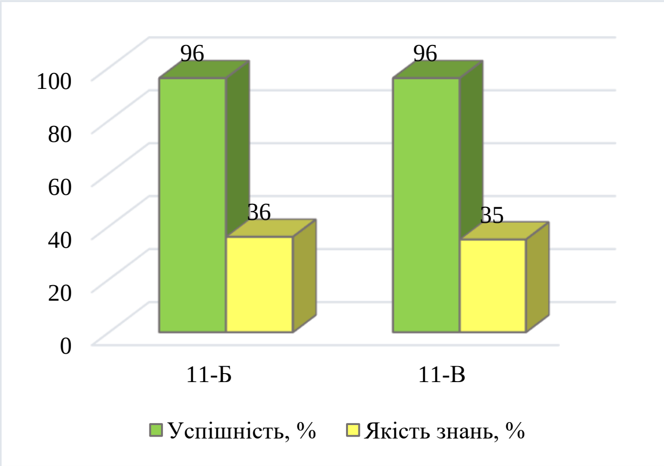

Схема 3.1

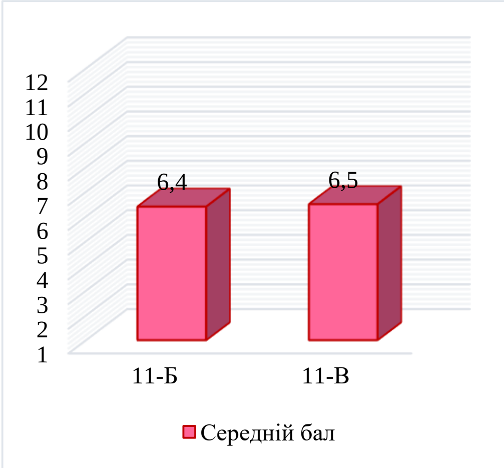

Схема 3.2

У межах експерименту для 11-В використовувалася традиційна методика вивчення тем «Об'єми тіл» та «Площі поверхонь тіл», а для 11-Б класу – розроблена та описана у розділі 2 даної кваліфікаційної роботи, що передбачає застосування до освітнього процесу мобільних пристроїв зі встановленими додатками, що допомагають здобувачам освіти вивчати стереометричний матеріал.

Під час вивчення «Об'єми тіл» застосунок GeoGebra для мобільного телефону застосовувався для швидкого створення 3D моделей малюнків багатогранників та тіл обертання, для розв'язання стереометричних задач на знаходження об'єму просторових фігур, а також для перевірки правильності обчислень.

У ході вивчення теми «Площі поверхонь тіл» застосунок GeoGebra використовувався аналогічно до попередньої теми, крім цього, він дозволяв швидко отримувати зображення розгорток поверхонь тіл обертання. Використання даного мобільного додатку спрощувало процес побудови зображень, сприяло розвитку просторової уяви здобувачів освіти, розвивало власні навички учнів щодо виконання рисунків до задач у зошиті, підвищувало інтерес учнів до матеріалу, що вивчається, активізувало пізнавальну діяльність учнів, а також допомагало утримувати увагу школярів до вивчення геометрії під час навчання у дистанційній формі.

У таблицях 3.3 та 3.4 відтворено результати виконання контрольного зрізу знань учнями 11-Б класу із зазначених тем, які вивчалися з використанням розробленої методики, та учнями 11-В класу, які вивчали дані теми .

Клас	**Всього**	**Високий рівень**			**%**	**Достатній рівень**			**%**	**Середній рівень**			**%**	**Початковий рівень**			**%**
		12	**11**	**10**		**9**	**8**	**7**		**6**	**5**	**4**		**3**	**2**	**1**	
11-Б	25	-	-	4	16	2	2	5	36	6	4	2	48	-	-	-	0
11-В	28	-	-	4	14	1	3	1	18	10	4	4	64	1	-	-	4

Таблиця 3.3

Клас	**Успішність, %**	**Якість знань, %**	**Сер. бал**
11-Б	100	52	6,9
11-В	96	32	6,4

Таблиця 3.4

На схемах 3.3 та 3.4 відображено порівняльний аналіз успішності учнів 11-Б класу за підсумками І семестру і контрольного зрізу знань з

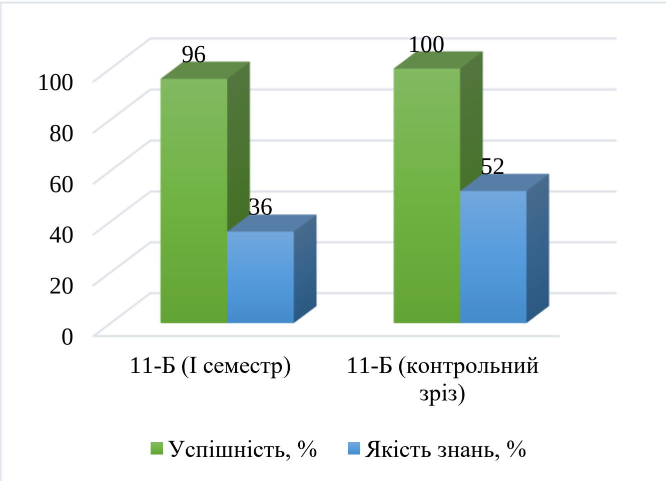

Схема 3.3

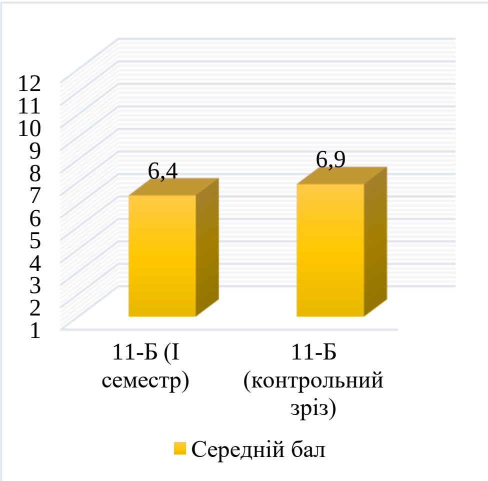

Схема 3.4

тем, що вивчалися протягом експериментального досліду.

Проведення експериментального досліду сприяло підвищенню рівня успішності учнів задіяного в експерименті 11-Б класу. Про це свідчать такі висновки, зроблені в ході порівняльного аналізу результатів контрольного зрізу та I семестру:

- успішність учнів 11-Б класу збільшилася на 4% і стала стовідсотковою;
- кількість учнів, які продемонстрували знання високого рівня, збільшилася на 4% (з 12% до 16%);
- кількість учнів, які за результатами контрольного зрізу продемонстрували знання достатнього рівня збільшилася на 12% (з 24% до 36%);
- таким чином, якість знань учнів 11-Б класу покращилася на 16% (з 36% до 52%);
- середній бал збільшився на 0,5 (з 6,4 до 6,9).

На діаграмах 3.5 та 3.6 порівняно результати успішності учнів 11-В класу за підсумками I семестру та контрольного зрізу знань з тем, які вивчалися протягом періоду експерименту без використання спеціально розробленої методики.

Схема 3.5

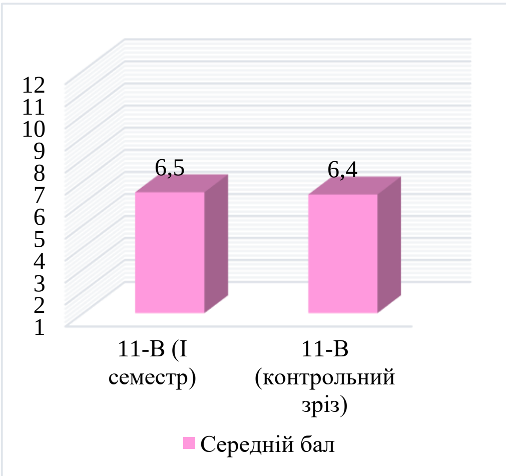

Схема 3.6

Порівнявши дані результати здобувачів освіти 11-В класу, можна зробити висновок, що суттєвих змін не відбулося, майже всі учні підтвердили свій рівень знань з геометрії.

У схемах 3.7, 3.8 та 3.9 порівняно результати виконання контрольного зрізу знань з тем «Об'єми тіл» і «Площі поверхонь тіл» здобувачами освіти 11-Б та 11-В класів.

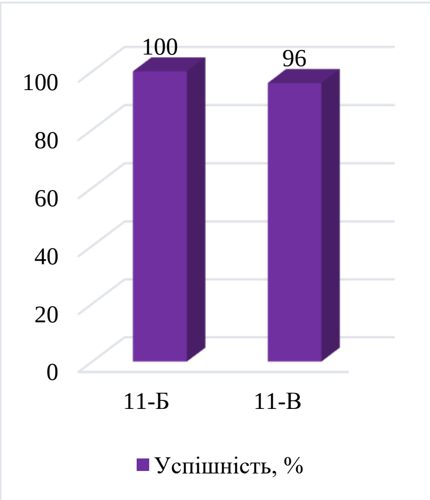

Схема 3.7

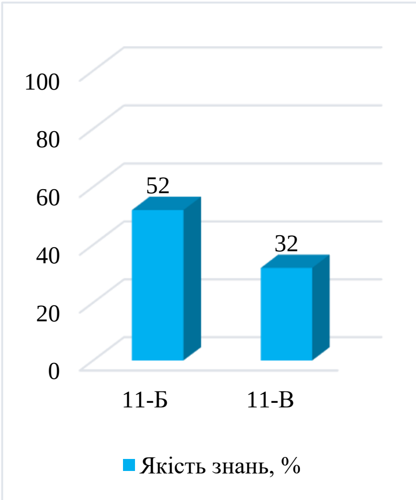

Схема 3.8

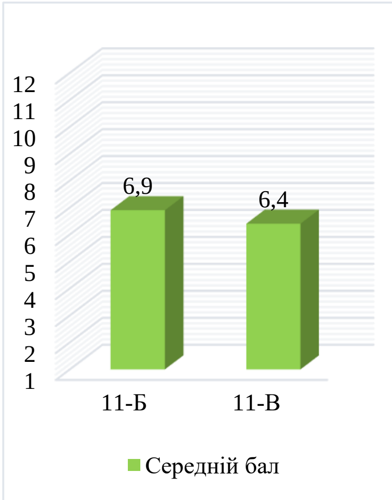

Схема 3.9

Виконавши порівняльний аналіз результатів контрольного зрізу учнями 11-Б та 11-В класу, можна зробити такі висновки:

- результати 11-Б класу, який вивчав стереометричний матеріал з тем дослідження з використанням мобільних пристроїв з передвстановленим додатком «Geogebra 3D Калькулятор», з усіх трьох критеріїв (успішність, якість знань, середній бал класу), є кращими у порівнянні з результатами 11-В класу, який вивчав дані теми за традиційною методикою, хоча перед початком експерименту ці показники для обох класів були приблизно однаковими;

- особливо ця перевага помітна при порівнянні якості знань здобувачів освіти, що свідчить про те, що використання мобільного додатку «Geogebra 3D Калькулятор» допомогло перейти з середнього рівня успішності на достатній учням, які вже мали достатній для цього рівень знань, але мали суттєві проблеми з просторовою уявою або не були достатньо вмотивовані до вивчення геометрії.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі (проєкті) «Вивчення стереометрії у старшій школі на профільному рівні» було проаналізовано різні методики викладання стереометрії у старшій профільній школі.

З метою осучаснення та підвищення ефективності процесу вивчення стереометричного матеріалу в 10-11 класах було розроблено методику використання мобільного застосунку «GeoGebra 3D Калькулятор» для вивчення окремих тем розділу «Стереометрія».

Цю методику було апробовано в ході педагогічного експериментального досліду, який полягав у порівнянні результатів вивчення стереометричного матеріалу двома 11 класами, що мали на початку експерименту приблизно однакові рівні успішності з геометрії, один з яких навчався за традиційною методикою, а інший – за методикою, запропонованою у даній роботі.

Результати експерименту продемонстрували переваги запропонованої у роботі методики з використанням мобільних застосунків, що було підтверджено результатами контрольного зрізу знань з тем розділу стереометрії: відсоток учнів, які засвоїли відповідні теми на високому та достатньому рівнях, значно збільшився.

Аналізуючи висновки педагогічного досліду можна стверджувати, що розроблена у даній роботі методика має певні переваги перед традиційною для здобувачів освіти різної профільної спрямованості. Її використання значною мірою сприяє формуванню мотиваційної сфери здобувачів освіти, підвищенню їхньої пізнавальної активності, підвищенню зацікавленості учнів геометрією, особливо стереометричним матеріалом. Але головним здобутком використання зазначеної методики є активний розвиток просторової уяви та гнучкості мислення учнів, які є запорукою успішного засвоєння стереометрії.

Таким чином, можна зробити такі висновки:

- основну мету роботи щодо розробки спеціальної методики вивчення стереометрії з використанням мобільних застосунків було досягнуто;
- завдання щодо глибокого аналізу проблеми вивчення стереометрії в 10-11 класах на профільному рівні та її вирішення шляхом використання сучасних мобільних додатків для вивчення геометрії в класах різних профілів було виконано;
- практичне застосування теоретичних аспектів даної роботи підтвердило її актуальність та доцільність дослідження предмету вивчення цієї роботи.

Запропонована у даній роботі методика вивчення розділу «Стереометрія» у профільній старшій школі має особливе значення на сучасному етапі освітнього процесу, коли стала актуальною змішана форма навчання, яка потребує постійного залучення інформаційно-комунікаційних технологій до освітньої діяльності, особливо під час дистанційного формату проведення уроків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акуленко І. А. Методика навчання математики в профільній школі: методичні рекомендації : метод. посіб. для організації аудиторної та самостійної роботи студентів / за ред. Н.А. Тарасенкової. Черкаси : видавець Чабаненко Ю., 2012. 165 с.
2. Акуленко І. А. Проблема формування та розвитку логічного мислення учнів у контексті профілізації старшої школи. *Вісник Черкаського університету.* 2011. №211, ч. ІІ. С. 3-13.
3. Артемчук О. Р., Мороз М. П. Використання мобільних додатків під час вивчення планіметрії в середній школі. *Проблеми математичної освіти* : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси, 26-28 жовтня 2017 р. Черкаси : ФОП Гордиенко, 2017. С. 207-209.
4. Баковська О.І. Математична логіка. 5-9 класи. *Математика в школах України.* 2005. №11 (35).
5. Бевз Г. П. Методика викладання математики : навч. посібник. – 3-тє вид., перероб. і допов. К.: Вища школа, 1989. 367 с.
6. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владіміров В. М., Владімірова Н. Г. Геометрія. Профільній рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Освіта, 2018. 272 с.
7. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г., Владіміров В. М. Геометрія: 11 кл. підруч. для загальноосвіт. навч. закл. академ. рівень, профіл. рівень. К.: Генеза, 2011. – 336 с.
8. Богатирьова І. М., Сердюк З. О. Методика розв’язування прикладних задач у шкільному курсі геометрії. *Вісник Черкаського університету*. 2011. №211, ч. ІІ. С.19-23.
9. Бондарук В.В., Самчук Л.С. Розвиток логічного мислення на уроках математики. Освіта та соціалізація особистості : матер. інтернет-конф., м. Одеса, 22-23 квітня 2022 р. Одеса, 2022. С. 26-29.
10. Ботузова Ю.В. Використання програмних засобів під час навчання побудові перерізів многогранників. *Наукові записки.* 2014. №6. С. 3-9.
11. Бурда М. І. Геометрія. Профільний рівень : підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : УОВЦ «Оріон», 2019. 224 с.
12. Бурда М. І. Нові підходи до організації освіти у старшій школі: концепція профільного навчання у старшій школі. Директор школи, ліцею, гімназії. 2004. №1. С. 72-77.

13. Бурда М. І. Структура і зміст профільного навчання математики. *Математика в школі.* 2007. №7. С. 3-6.
14. Бурда М. І., Васильєва Д. В., Волошева В. В., Глобін О. І. Навчання математики в старшій школі на профільному рівні (методичні рекомендації) URL: https://lib.iitta.gov.ua/712224/1/Metod%20recomend.pdf
15. Васильєва Д. В. Навчання математики в новій українській школі в контексті STEM-освіти / Д. В. Васильєва // *Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики* : матер. міжнар. наук.-практ. конф., м. Київ, 11-13 травня 2017 р. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. С. 16-18.
16. Власій О. О., Кульчицька Н. В., Черняхівська Ю. Л. Методика використання «живих» креслень при вивченні шкільного курсу стереометрії. *Проблеми математичної освіти* : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси, 11-12 квітня 2019 р. Черкаси : ФОП Гордієнко Є. І., 2019. С. 201-203.
17. Власій О. О., Тижбір Н. З. Можливості середовища GeoGebra для орагіназації змішаного навчання учнів при вивчення математики. *Проблеми математичної освіти* : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси, 11-12 квітня 2019 р. Черкаси : ФОП Гордієнко Є. І., 2019. С. 199-201.
18. Геометричне місце точок URL: https://school.home-task.com/geometrichne-misce-tochok/
19. Глобін О. І. Міжпредметні зв’язки в умовах профільного навчання математики : метод. посібник. Київ : Педагогічна думка, 2012. 88 сх
20. Забранський В. Я., Федосеєв С. Е. Особливості поточного оцінювання навчальних досягнень учнів з математики в умовах інтерактивного навчання. *Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики* : матер. міжнар. наук.-практ. конф., м. Київ, 11-13 травня 2017 р. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. С. 20-22.
21. Зоріна І. А. Викладання математики у профільних і непрофільних класах школи. *Збірник наукових праць ХДУ: Педагогічні науки.* 2011. С. 116-120.
22. Істер О. С. Геометрія (профільній рівень) : підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2019. 288 с.
23. Істер О. С., Єргіна О. В. Геометрія: проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Генеза, 2019. 288 с.

24. Катеринюк Г. Д. Реалізація прикладної спрямованості навчання математики в спортивно-гуманітарному ліцеї / Г. Д. Катеринюк // *Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики* : матер. міжнар. наук.-практ. конф., м. Київ, 11-13 травня 2017 р. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. С. 49-51.
25. Коломієць О. М., Сільченко А. М. Застосування програми GeoGebra у навчанні учнів геометрії. *Проблеми математичної освіти* : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси, 26-28 жовтня 2017 р. Черкаси : ФОП Гордиенко, 2017. С. 219-221.
26. Кравченко З. І. Діалог як основа навчання в старшій школі. *Проблеми математичної освіти* : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси, 11-12 квітня 2019 р. Черкаси : ФОП Гордієнко Є. І., 2019. С. 66-68.
27. Красницький М. П. Просторова уява та уявлення особистості й асоціативне мислення / М. П. Красницький // *Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики* : матер. міжнар. наук.-практ. конф., м. Київ, 11-13 травня 2017 р. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. С. 59-61.
28. Манжара В. В. Виктористання ІТ-технологій для розв'язання графічних задач. *Проблеми математичної освіти* : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси, 26-28 жовтня 2017 р. Черкаси : ФОП Гордиенко, 2017. С. 227-229.
29. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2018. 240 с.
30. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2019. 204 с.
31. Мікаелян А. В. Про доведення теореми про три перпендикуляри. *Проблеми математичної освіти* : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси, 11-12 квітня 2019 р. Черкаси : ФОП Гордієнко Є. І., 2019. С. 275-277.
32. Моторіна В. Г. Розвиток просторової уяви майбутніх вчителів математики в процесі їх геометричної підготовки / В. Г. Моторіна // Проблеми математичної освіти : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси : ЧНУ, 2015. С. 164-166.
33. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів URL:

https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf

34. Навчальна програма з математики для 10-11 класів. Профільний рівень URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx

35. Навчальна програма з математики для 10-11 класів. Рівень стандарту URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika.-riven-standartu.docx

36. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Харків : Ранок, 2018. 240 с.

37. Означення та доведення ознак паралельності прямих на площині. URL: https://miyklas.com.ua/p/geometria/7/vzayemne-rozmishchennia-priamikh-na-ploshchini-13636/paralelni-priami-13637/re-0d28c537-fea9-402c-b4e8-3feac0bd34f3

38. Пономаренко Л. О., Ніколюк Л. І. Самчук Л. І., Каневська І. М. Профільне навчання в старшій школі: шляхи розвитку : наук.-доп. бібліогр. покажч. / за ред. Т. Ф. Букшиної. К. : АНП України. ДНПБ України ім. В. О. Сухомлинського, 2004. 163 с.

39. Про затвердження нової редакції Концепції профільного навчання у старшій школі : наказ Міністерства освіти і науки України від 11.09.2009 р. №854 URL: https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v0854290-09#Text

40. Психологічний супровід профільного навчання та допрофільної підготовки URL: https://studfile.net/preview/5242150/page:54/

41. Романенко Л., Малишев В., Липова Л., Лукашенко Т. Профільне навчання: теорія і практика, досвід, проблеми, перспективи URL: http://surl.li/dgsbs

42. Садовский Л. Е., Садовский А. Л. Математика и спорт. М. : Наука, 1985. 192 с.

43. Семенухіна О. В., Друшляк М. Г. Інструментарій програми GeoGebra 5.0 і його використання для розв’язування задач стереометрії. *Інформаційні технології і засоби навчання*. №6. 2014. С. 124-133.

44. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підручник. К. : Вища школа, 2006. 582 с.

45. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики : навч. посібник. Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. 240 с.
46. Тадаєв В. О. Геометрія. Основи стереометрії. Многогранники : дворівневий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів / за ред. В. І. Михайловського. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2003. 384 с.
47. Тарасенкова Н. А. Діалог під час усного розв’язання задач на уроці геометрії. *Вісник Черкаського університету*. 2015. №8. С. 43-49.
48. Тарасенкова Н. А., Акуменко І. А., Лов’янова І., Сердюк З. Організація навчання математики у профільній школі : монографія. Черкаси : ФОП Гордієнко, 2017. С. 10-61
49. Тарасенкова Н. А., Лов’янова І. В., Желєзняк Н. П., Окунєв Б. Й. Реалізація принципу професійної спрямованості навчання математики учнів багатопрофільної школи. Проблеми математичної освіти : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси, 26-28 жовтня 2017 р. Черкаси : ФОП Гордиенко, 2017. 248 с.
50. Тарасенкова Н. А., Сердюк З.О. Організація вивчення об’ємів геометричних тіл у старшій профільній школі на рівні стандарту. *Вісник Черкаського університету.* 2018. №16. С. 57-73.
51. Терех О. Я. Навчальні задачі на уроках геометрії. *Проблеми математичної освіти* : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси, 26-28 жовтня 2017 р. Черкаси : ФОП Гордиенко, 2017. С. 88-90.
52. Третяченко О.В. Психологічний супровід профільного навчання в гімназії. *Актуальні проблеми психології в закладах освіти.* 2022. №1. С.298-304.
53. Чернега Н.С. Розвиток логічного мислення учнів. *Наукові записки.* 2002. №45. С.158-160.