МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп’ютерних наук, фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ МНОЖНИКІВ ЗБІЖНОСТІ ПРИ ВИВЧЕННІ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ У КУРСІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти “магістр”

Виконала: студентка 2-го курсу, 221М групи
Спеціальності: 014 Середня освіта
Спеціалізація: 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти
Гаран Ірина Олегівна
Керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент Кузьмич Валерій Іванович
Рецензент: в.о. директора Херсонської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 46 Херсонської міської ради, вчитель вищої категорії, вчитель-методиста
Співак Інна Наумівна

Івано-Франківськ – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП………………………………………………………………... 3
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ ПРО ЧИСЛОВІ РЯДИ. ФОРМУВАННЯ У ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ ПОНЯТТЯ ЗБІЖНОСТІ РЯДУ………………………………………………. 8
1.1 Сучасні психолого-педагогічні і методичні дослідження аспектів формування та розвитку дослідницьких умінь……………………… 8
1.2 Основні відомості про числові ряди…………………………….. 10
1.3 Формування у здобувачів вищої освіти поняття збіжності ряду… 14
1.3.1 Додатні ряди. Ознаки збіжності додатних рядів……………... 14
1.3.2 Знакозмінні ряди. Ознаки збіжності знакозмінних рядів…… 19
РОЗДІЛ 2 ОЗНАЙОМЛЕННЯ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ З МНОЖНИКАМИ ЗБІЖНОСТІ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯМ ПРИ ВИВЧЕННІ ОЗНАК ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ..………………….. 22
2.1 Основні відомості про множники збіжності……..……………... 22
2.2 Отримання ознак збіжності рядів за допомогою множників збіжності…………………………………………………………………. 24
2.3 Поняття підсумовування рядів …………………………………….. 25
РОЗДІЛ 3 МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ ДОСЛІДНИЦЬКОЇ КОМПЕТЕНЦІЇ У ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ……………... 28
3.1 Методика формування дослідницької компетенції у здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня в процесі вивчення освітньої компоненти «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти»……….. 28
ВИСНОВКИ……………………………………………………………. 36
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ……………………………. 38
ДОДАТОК А ………………………………………………………… 42
ДОДАТОК Б …………………………………………………………. 50
ДОДАТОК В …………………………………………………………. 51

ВСТУП

Актуальність проведеного дослідження полягає в тому, що нами було запропоновано, теоретично обґрунтовано та експериментально перевірено методичну систему формування дослідницьких математичних умінь майбутніх вчителів математики в процесі використання методу множників збіжності під час вивченні числових рядів в математичному аналізі, зокрема, в курсі освітньої компоненти «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти», що сприяє підвищенню якості професійної підготовки майбутніх фахівців, розвитку їхніх математичних здібностей, підсиленню мотивації та пізнавального інтересу.

Дане дослідження проводилося у межах ініціативної науково-дослідної теми кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (номер державної реєстрації 0117U001734).

Метою даної роботи є теоретичне обґрунтування та експериментальна перевірка використання методу множників збіжності під час вивчення числових рядів в курсі математичного аналізу та з`ясування його можливості для формування дослідницьких математичних умінь майбутніх педагогів у процесі свідомого засвоєння елементів теорії рядів.

Поставлена мета вимагає виконання таких **завдань**:

- аналіз нормативно-правових документів, математичної, психолого-педагогічної, методичної літератури та практики з проблеми дослідження для уточнення категоріального апарату дослідження;
- розглянути метод множників збіжності для виведення основних ознак збіжності числових рядів;

- розробити силабус навчальної дисципліни «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти» для майбутніх вчителів математики;
- розробити структурно-функціональну модель формування дослідницьких математичних умінь майбутніх вчителів математики у процесі вивчення освітньої компоненти «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти»;
- експериментально перевірити ефективність методичної системи формування дослідницької математичної компетенції майбутніх педагогів під час вивчення освітньої компоненти «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти», на основі розробленої структурно-функціональної моделі.

Об'єкт: освітній процес в закладах вищої освіти.

Предмет: методична система формування дослідницьких математичних умінь в процесі вивчення основ теорії рядів в закладах вищої освіти.

Методика нашого дослідження – це система теоретичних, емпіричних та експериментальних методів, зокрема:

- теоретичних: аналіз математичної, психолого-педагогічної, методичної літератури з окресленої проблеми, змісту освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)» для здобувачів освіти другого (магістерського) рівня спеціальності «014 Середня освіта, спеціалізація 014.04 Математика», підручників та навчальних посібників з математичного аналізу для з'ясування сутності процесу формування дослідницької компетенції здобувачів вищої освіти під час вивчення основ теорії рядів; систематизація та узагальнення теоретичного матеріалу з метою його подальшого використання в процесі розроблення методичної системи дослідницьких математичних умінь здобувачів освіти.
- емпіричних:

- діагностичні (опитування, бесіди з викладачами та здобувачами вищої освіти, спостереження) для виявлення ставлення викладачів та здобувачів освіти до впровадження методики формування дослідницьких математичних умінь здобувачів освіти у процесі вивчення основ теорії рядів в освітню діяльність;
- обсерваційні: (спостереження за процесом вивчення теорії рядів в курсі математичного аналізу в педагогічному ЗВО, узагальнення й систематизація педагогічного досвіду викладачів) для обчислення отриманих даних в процесі розроблення структурно-функціональної моделі для реалізації методичної системи формування дослідницької компетенції магістрів під час вивчення основ теорії рядів;
- експериментальні: кількісний та якісний аналіз результатів дослідження, з метою з'ясування достовірності сформованих висновків.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому, що вперше теоретично обґрунтовується та експериментально перевірено можливості використання методу множників збіжності під час вивчення числових рядів в курсі математичного аналізу для формування дослідницьких математичних умінь майбутніх вчителів математики; розроблено структурно-функціональну модель формування дослідницьких математичних умінь майбутніх фахівців та силабус освітньої компоненти «Методика викладання фахових дисциплін в закладах вищої освіти», як структурного елементу даної методичної системи.

Практичне значення одержаних результатів полягає в розробці методичної системи поглибленого вивчення елементів теорії рядів, яка спрямована на формування дослідницьких математичних умінь майбутніх вчителів математики засобами системи доцільно підібраних задач. Запропонована методична система сприяє розвитку математичних здібностей, інтелектуальних та дослідницьких умінь майбутніх педагогів і може в подальшому використовуватися в освітньому процесі ЗВО.

Апробація результатів дослідження. Основні результати проведеного дослідження обговорювалися на конференціях та були опубліковані:

- Гаран І. Вивчення збіжності числових рядів за допомогою множників збіжності. *Пошук молодих. Збірник матеріалів Всеукраїнської студентської науково-практичної конференції «Інноваційні технології навчання природничо-математичних дисциплін у закладах середньої та вищої освіти»*, (Херсон, 16 червня 2020 року.). Херсон: Видавництво ХДУ, 2020. Вип. 20. 63 с. С. 11-12;
- Гаран І. Використання множників підсумовуваності при вивченні збіжності рядів. *Класичні та прикладні аспекти спадкоємної математичної підготовки у ЗВО: історичний та сучасний погляд молодих вчених і здобувачів вищої освіти: матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих вчених*. Харків: ХНАДУ. 2021. 320 с. С. 130-133;
- Гаран І. Вивчення ознак збіжності рядів за допомогою множників збіжності. *Наукові записки молодих учених*. Кропивницький: РВВ ЦДПУ ім. В. Винниченка. Вип. 8, 2021. ISSN 2617-2666 (online);
- Гаран І. Формування дослідницьких математичних умінь майбутніх вчителів математики в процесі вивчення теорії рядів. Магістерські студії. Альманах. Вип. 22. Херсон, ХДУ, 2022. 440 с.

Структура роботи. Кваліфікаційна робота (проєкт) складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. У першому розділі «Основні відомості про числові ряди. Формування у здобувачів вищої освіти поняття збіжності ряду» викладені загальні поняття теорії рядів та класичні ознаки збіжності числових рядів із детальними прикладами їх застосування. У другому розділі «Ознайомлення здобувачів вищої освіти з множниками збіжності та їх застосуванням при вивченні ознак збіжності рядів» розглядається метод множників збіжності для виведення ознак збіжності рядів та поняття підсумовування рядів. Третій розділ «Методика формування дослідницької компетенції у здобувачів вищої освіти» присвячено висвітленню основних результатів проведеного педагогічного експерименту.

РОЗДІЛ 1.
ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ ПРО ЧИСЛОВІ РЯДИ. ФОРМУВАННЯ У ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ ПОНЯТТЯ ЗБІЖНОСТІ РЯДУ

1.1 Сучасні психолого-педагогічні і методичні дослідження аспектів формування та розвитку дослідницьких умінь

Сучасний етап розвитку України вимагає переходу на нову стратегію освіти, в тому числі й математичної. Сьогодні перед вітчизняною, як середньою так і вищою школою, стоїть завдання формування у здобувачів освіти більш якісної системи сучасних ключових компетенцій, які забезпечують не тільки адаптацію до нових соціальних умов, що швидко змінюються, а й повноцінне функціонування в сучасному інформаційному суспільстві та уміння своєчасно реагувати на його виклики. Тому на перший план професійної підготовки майбутніх вчителів математики виступають проблеми поліпшення її якості через розвиток пізнавального інтересу, дослідницьких математичних умінь, які виступають як ресурс розвитку творчого потенціалу здобувачів освіти педагогічних ЗВО.

Інтеграція фундаментальності та професійної спрямованості змісту, форм, методів і засобів навчання – це провідний принцип математично-методичної підготовки майбутніх учителів математики в педагогічних закладах вищої освіти. Математична компетентність як базова предметна компетентність майбутнього педагога проявляється в його готовності й здатності ефективно використовувати й вдосконалювати отримані математичні знання, вміння та навички.

Аналіз змісту професійної підготовки майбутніх вчителів математики свідчить, що особливе місце відведено освітнім компонентам, пов`язаним з математичним аналізом, які виступають в ролі інструмента досліджень реальних процесів навколишнього світу, і які багаті на потенційні можливості формування та розвитку дослідницьких умінь.

Сучасні психолого-педагогічні і методичні дослідження декларують, що спеціально розроблена методика формування та розвитку дослідницьких математичних умінь як школярів, так і майбутніх вчителів математики, дозволить, можливо, суттєво поліпшити підготовку, максимальне задоволення інтересів та потреб особистості, пов`язаних з досвідом самостійної діяльності й особистої відповідальності.

Окремі аспекти формування та розвитку дослідницьких умінь знайшли відображення в роботах В.Г. Болтянського, Г.П. Бевза [1], В.Г. Бевз [2-3], М.І. Бурди [4-5], Ю.М. Колягіна [6], В.Н. Осинської, О.І. Скафи [7-8], З.І. Слєпкань [9], Н.А. Тарасенкової [10-12]та інших.

В наукових дослідженнях В.І. Андрєєва [13], Н.Г. Недодатко [14-15], С.П. Балашова [16], О.В. Рєзіної [17], Н.О. Падуна [18] та інших зазначається вплив сформованих дослідницьких математичних умінь на активізацію навчально-пізнавальної діяльності здобувачів освіти.

Аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури, практика дозволяє стверджувати, що проблема формування дослідницьких математичних умінь здобувачів освіти вищої школи є важливим засобом формування у них стійкого інтересу й готовності до майбутньої творчої професійної діяльності. Оскільки формування та розвиток дослідницьких умінь передбачає оволодіння здобувачами освіти певними видами діяльності в освітньому процесі, то навчальні дослідницькі уміння ми розглядаємо з позицій психологічної теорії діяльності з врахуванням відповідного предметного змісту.

Незважаючи на значну кількість розвідок науковців і практиків, у порушеній проблемі, на нашу думку, потребує уточнення зміст і структура, дидактична сутність дослідницьких математичних умінь майбутніх педагогів. Слабо визначено зміст освітніх компонент, на основі яких можливо доцільно формувати та розвивати дослідницькі математичні вмінні майбутніх вчителів математики.

На наш погляд, доцільно із навчальної програми курсу математичного аналізу у вищих педагогічних закладах виокремити освітній матеріал пов'язаний із поняттям «множники збіжності» та показати, як з їхньою допомогою можна виводити ознаки збіжності рядів. Зазначений підхід дасть можливість здобувачам освіти не тільки вивчати класичні ознаки збіжності рядів, але й отримувати нові ознаки, пристосовані до конкретних класів числових рядів. Щоб оволодіти методом множників збіжності, потрібно лише орієнтуватися в основних поняттях теорії рядів. Тому даний метод можна застосовувати на завершальному етапі вивчення понять збіжності числових рядів в курсі навчальної дисципліни «Математичний аналіз», або виокремити у вибірковий курс, який розширить можливості щодо формування дослідницьких математичних умінь майбутніх вчителів математики, розвитку їх математичних здібностей, креативності.

1.2 Основні відомості про числові ряди

За навчальною програмою обов’язкової освітньої компоненти «Математичний аналіз» професійної підготовки майбутніх вчителів математики за спеціальністю «014 Середня освіта, спеціалізація 014.04 Математика» передбачено, що вивчення змістового модулю «Ряди» починається після того, як здобувачі освіти засвоїли змістові модулі «Диференціальне числення функцій однієї змінної» та «Інтегральне числення функцій однієї змінної». Такий порядок викладу тем пов’язаний з тим, що навчальний матеріал вище зазначених змістових модулів тісно взаємопов’язаний із теорією рядів, яка в свою чергу є ефективним інструментом математичних досліджень, в тому числі для розв’язування диференціальних та інтегральних рівнянь.

Вивчення теорії рядів починається ознайомленням здобувачів вищої освіти із основними поняттями, означеннями та властивостями числових рядів. Для початку розглядають деяку послідовність чисел

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

Означення 1.1 Вираз виду

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} \dots,$$

або коротше:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1.1)$$

називають числовим рядом, де $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, u_{n+1}$ ... *– члени ряду,* u_n *– загальний, або* n*-й член ряду* (Фихтенгольц Г. М.) [19, с. 257].

Означення 1.2. Сума n *перших членів ряду* (1.1) *називається* n*-ю частинною (або частковою) сумою ряду і позначається символом* U_n*:*

$$U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n,$$

або коротше:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Означення 1.3. Ряд називають збіжним, якщо існує скінченна границя

$$U = \lim_{n \to \infty} U_n,$$

яка називається сумою ряду і позначається

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Ряд називається розбіжним, якщо він не має суми, або вона дорівнює $\pm\infty$ (Фихтенгольц Г. М.) [20, с. 11].

Приклад 1.1. Дослідити геометричний ряд (ряд складений із членів геометричної прогресії) на збіжність.

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \ (a \neq 0). \qquad (1.2)$$

Розв'язання. Необхідно встановити, при яких значеннях знаменника прогресії q геометричний ряд збіжний, і при яких – розбіжний.

Відомо, що сума n членів геометричної прогресії, тобто n-на частинна сума ряду при $q \neq 1$ дорівнює $U_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$. Знайдемо границю цієї суми:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-q} - a\frac{q^n}{1-q}\right).$$

Розглянемо наступні випадки:

1. Якщо $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Тому $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} = 0$, а $\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{a}{1-q}$. Тобто ряд (1.2) збіжний і його сума дорівнює $\frac{a}{1-q}$.
2. Якщо $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тому $\lim_{n\to\infty} U_n = \infty$, тобто ряд (1.2) розбіжний.
3. Якщо $|q| = 1$, то при $q = 1$ ряд (1.2) має вигляд $a + a + a + \cdots + a + \cdots$. Для нього $U_n = n \cdot a$, та $\lim_{n\to\infty} U_n = \infty$. Тому цей ряд розбіжний. При $q = -1$ ряд (1.2) має вигляд $a - a + a - a + \cdots$. У цьому випадку $U_n = 0$ при парному n та $U_n = a$ при непарному n. Тому $\lim_{n\to\infty} U_n$ не існує. Це означає, що ряд (1.2) розбіжний.

Таким чином, ряд геометричної прогресії збіжний при $|q| < 1$ та розбіжний при $|q| \geq 1$.

Означення 1.4. Ряд

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+k} + \cdots = \sum_{n=m+1}^{\infty} u_n \qquad (1.3)$$

називається залишком ряду (1.1) після m-го члена, за умови відкидання в ряді (1.1) перших m членів (Фихтенгольц Г.М.) [20, с. 13].

Властивості збіжних числових рядів

1) Якщо ряд збігається, то збігається і будь-який ряд отриманий із початкового дописуванням або відкиданням скінченної кількості членів ряду (Горбунова Н.Ю, Платонова Н.Н.) [21, с. 16].

2) Якщо ряди

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \text{ і } B = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

збіжні, то збігається і ряд

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) + \cdots,$$

сума якого дорівнює $\mathrm{A} \pm \mathrm{B}$, тобто збіжні ряди можна почленно додавати або віднімати (Фихтенгольц Г.М.) [20, с. 14].

3) Якщо ряд (1.1) збігається і має суму U, то його можна почленно помножити на деяке відмінне від нуля число c, причому отриманий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$ теж буде збігатися і виконуватиметься рівність: $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n = c \cdot U$, де U – сума ряду (Горбунова Н.Ю, Платонова Н.Н.) [21, с. 16].

4) Якщо збігається ряд (1.1), то збігається і будь-який із його залишків (1.3) і навпаки (Фихтенгольц Г.М.) [20, с. 13].

5) Якщо члени збіжного ряду згрупувати довільним чином і скласти новий ряд із суми членів в кожній парі дужок, то новий ряд теж буде збігатися, і його сума буде дорівнювати сумі початкового ряду (Горбунова Н.Ю, Платонова Н.Н.) [21, с. 17].

6) *Необхідна умова збіжності ряду.* Якщо ряд (1.1) збігається, то його загальний член u_n прямує до нуля при $n \to \infty$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ (Фихтенгольц Г.М.) [20, с. 15].

Умова $\lim\limits_{n\to\infty} u_m = 0$ є лише необхідною для збіжності ряду, але не є достатньою. Звідси слідує, що існують такі розбіжні ряди, для яких дана умова виконується.

7) *Достатня умова розбіжності ряду.* Якщо загальний член ряду (1.1) відмінний від нуля при $n \to \infty$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд розбіжний (Фихтенгольц Г.М.) [20, с. 15].

Приклад 1.2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Тут виконується необхідна умова збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

проте ряд розбіжний. Дійсно,

$$U_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

тобто $U_n > \sqrt{n}$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \infty$. Отже, ряд розбіжний.

1.3 Формування у здобувачів вищої освіти поняття збіжності ряду

Формування у майбутніх вчителів математики поняття збіжності ряду відбувається в процесі поетапного ознайомлення здобувачів вищої освіти із основними ознаками збіжності числових рядів різних типів, а саме з додатними, знакозмінними, знакопочерговими рядами. Поняття збіжності числового ряду ґрунтується на понятті збіжності числової послідовності, тому важливою є актуалізація опорних знань студентів з властивостей збіжних послідовностей та методів знаходження їхніх границь. Ці методи вивчались ними як у вступі до математичного аналізу, так і при вивченні диференціального числення (правила Лопіталя).

1.3.1 Додатні ряди. Ознаки збіжності додатних рядів

Означення 1.5. Якщо всі члени ряду (1.1) – додатні:

$$u_1 > 0, u_2 > 0, u_3 > 0, \dots, u_n > 0, u_{n+1} > 0, \dots .$$

то даний числовий ряд називається додатним.

Послідовність часткових сум додатного ряду є зростаючою послідовністю. Додатний числовий ряд завжди має суму; за умови якщо часткові суми ряду обмежені зверху, то ця сума буде скінченною (ряд буде збігатися), в противному випадку дана сума буде нескінченною (а ряд – розбіжним) (Фихтенгольц Г.М.) [19, с. 262].

Розглянемо деякі ознаки, за якими можна встановлювати збіжність числових рядів з додатними членами.

Часто з’ясовувати збіжність (або розбіжність) числового ряду з додатними членами можна порівнюючи даний ряд із іншим рядом, який є збіжним (або розбіжним). Основні ідеї такого порівняння закладенні в наступних теоремах (ознаках порівняння додатних числових рядів).

Теорема 1.1(І ознака порівняння). Розглянемо довільні два додатні числові ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1.4}$$

і

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \tag{1.5}$$

Якщо члени ряду (1.4), починаючи з деякого місця, (наприклад, для $n > N$*), не більші за членів ряду (1.5) (*$a_n \leq b_n$*), то зі збіжності ряду* (1.5) *слідує збіжність ряду* (1.4)*, або з розбіжності ряду* (1.4) *випливає розбіжність ряду* (1.5) (Фихтенгольц Г.М.) [19, с. 264].

Теорема 1.2(ІІ ознака порівняння). Якщо для додатних числових рядів (1.4) та (1.5) існує скінченна відмінна від нуля границя

$$lim\frac{a_n}{b_n} = K \quad (0 \leq K \leq +\infty), \quad b_n \neq 0,$$

то зі збіжності ряду (1.5) *(при* $K < +\infty$*), слідує збіжність ряду* (1.4)*, а з розбіжності першого ряду, (при* $K > 0$*), випливає розбіжність другого (тобто, при* $0 < K < +\infty$ *обоє рядів одночасно збігаються або розбігаються)* (Фихтенгольц Г.М.) [19, с. 264-265].

Теорема 1.3 (ІІІ ознака порівняння).

Якщо для додатних числових рядів (1.4) та (1.5), починаючи з деякого місця (наприклад, для $n > N$ *), справджується нерівність*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad a_n, b_n \neq 0 \tag{1.6}$$

то із збіжності ряду (1.6) *слідує збіжність ряду* (1.5) *або із розбіжності ряду* (1.4) *випливає розбіжність ряду* (1.6) (Фихтенгольц Г.М.) [19, с. 266].

Відзначимо «еталонні» ряди, які часто використовуються для порівняння:

1) геометричний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ – збіжний при $|q| < 1$, розбіжний при $|q| \geq 1$;
2) гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний;

3) ряд Діріхле, або узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots,$$

збіжний при $p>1$, розбіжний при $p\leq 1$.

Приклад 1.3 Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+3}$.

Розв'язання. Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}/n}{n/n+3/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/\sqrt{n}}{1+3/n}=0.$$

Оскільки $a_n=\frac{\sqrt{n}}{n+3}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}=b_n,\ b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з розбіжним узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+3/n}=1\ \begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$

Вочевидь ряди поводяться однаково стосовно збіжності. Звідси слідує, що даний ряд розбігається. (Станішевський С.О.) [22, с. 8].

Теорема 1.4 (ознака Д'Аламбера). Якщо в додатному числовому ряді (1.4) *відношення* $n+1$*-го члена до* n*-го при* $n\to\infty$ *має скінченну границю* q*, тобто*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

то ряд (1.4) *збігається при* $q<1$ *і розбігається* - *при* $q>1$. *За умови, що* $q=1$ - *ряд може як збігатися, так і розбігатися* (Фихтенгольц Г.М.) [19, с. 272].

Ознакою Д'Аламбера зручно користуватися, коли загальний член ряду містить показникову залежність або факторіали натуральних чисел.

Приклад 1.4 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Розв'язання. Знаходимо границю

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Оскільки $q=0<1$, то даний ряд збіжний за ознакою Д'Аламбера.

Теорема 1.5 (ознака Коші). Якщо для додатного числового ряду (1.4) *існує границя* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$*, то ряд* (1.4) *збігається при* $l < 1$*, а при* $l > 1$ *– розбігається. Якщо* $l = 1$*, то ряд може як розбігатися так і збігатися одночасно* (Фихтенгольц Г.М.) [19, с. 271].

Приклад 1.5 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} arcsin^n \frac{3n-1}{6n+7}$ (Берман Г.Н.) [23, с. 193-194].

Розв'язання. Застосовуючи ознаку Коші, знаходимо границю

$$l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{arcsin^n\frac{3n-1}{6n+7}} = \lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{3n-1}{6n+7}$$

$$= \arcsin\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{6n+7} =$$

$$= \arcsin\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{6+\frac{7}{n}} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} < 1.$$

Отже, ряд збіжний.

Теорема 1.6 (ознака Раабе). Якщо для додатного числового ряду (1.4) *існує скінчена або нескінчена границя* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$*, то ряд збігається при* $r > 1$*, ряд розбігається при* $r < 1$*, ряд може як збігатися так і розбігатися при* $r = 1$ (Фихтенгольц Г.М.) [19, с. 73].

Розглянемо довільну послідовність додатних чисел $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$, для якої ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ є розбіжним.

Теорема 1.7 (ознака Куммера). Якщо для додатного числового ряду (1.4) *існує скінчена або нескінчена границя* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) = k$*, то ряд збігається при* $k > 0$*, а розбігається - при* $k < 0$ (Фихтенгольц Г.М.) [19, с. 277].

Теорема 1.8 (ознака Бертрана). Якщо для додатного числового ряду (1.4) *існує скінчена або нескінчена границя* $\lim\limits_{n\to\infty} ln\, n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) -\right.$

$\left.1\right) = b$, *то ряд* (1.4) *при* $b > 1$ *збігається і при* $b < 1$ *розбігається* (Фихтенгольц Г.М.) [19, с. 279].

Теорема 1.9 (ознака Гаусса).

Нехай, для додатного числового ряду (1.4) *відношення* $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ *представимо у вигляді:* $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$,

де λ *і* μ *– константи, а* θ_n *є обмежена послідовність:* $|\theta_n| \leq L$; *тоді звідси слідує, що при* $\lambda > 1$ *або* $\lambda = 1, \mu > 1$, *ряд збігається, і при* $\lambda < 1$ *або* $\lambda = 1, \mu \leq 1$ *- розбігається* (Фихтенгольц Г.М.) [19, с. 279].

Приклад 1.6 Дослідити збіжність ряд (Демидович Б.П.) [24, с. 253]

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^p + \left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^p + \cdots \quad (p > 0).$$

Розв'язання. Розглянемо відношення

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\right)^p \left(\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n(2n+2)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}\right)^p = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} +$$

$$+ \frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2} \cdot + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ при } n \to \infty.$$

Згідно ознаки Гаусса, звідси знаходимо, що при $p > 2$ ряд збігається, а при $p \leq 2$ – розбігається.

Теорема 1.10 (інтегральна ознака Маклорена - Коші). Розглянемо n*-й член ряду як функцію від* n: $u_n = f(n)$. *Тобто будь-який ряд можна представити у вигляді* $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$.

Нехай функція $f(x)$ *визначена для* $x > 0$, *додатна, монотонно спадає і прямує до нуля при* $x \to \infty$, *тоді ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots \qquad (1.7)$$

а) збігається, коли збігається невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$;

б) розбігається, коли розбігається даний інтеграл, тобто $\int_1^{\infty} f(x)dx = +\infty$ (Фихтенгольц Г.М.) [19, с. 281].

Приклад 1.7 Дослідити на збіжність узагальнений гармонічний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots,$$

де $(p > 0)$ – дійсне число.

Розв'язання. Для дослідження ряду на збіжність застосуємо інтегральну ознаку (ознака Д'Аламбера та ознака Коші відповіді про його збіжність не дають). Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Ця функція неперервна, монотонно спадає на проміжку $[1; +\infty)$, та $f(n) = \frac{1}{n^p} = u_n$. При $p \neq 1$ маємо:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{a\to\infty}\int_1^a x^{-p}dx = \lim_{a\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^a = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{a^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right) =$$

$$= \begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, \text{якщо } p > 1,\\ \infty, \quad \text{якщо } p < 1.\end{cases}$$

При $p = 1$ маємо гармонічний ряд $u_n = \frac{1}{n}$, що є розбіжним. Таким чином, узагальнений гармонічний ряд при $p > 1$ збіжний та при $p \leq 1$ розбіжний (Станішевський С.О.) [22, с. 13-14].

1.3.2 Знакозмінні ряди. Ознаки збіжності знакозмінних рядів

Означення 1.6. Ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{1.8}$$

із членами довільних знаків називається знакозмінним (Горбунова Н.Ю., Платонова Н.Н.) [21, с. 33].

Означення 1.7 Ряд (1.8) *називається абсолютно збіжним, якщо збіжний ряд є складеним із модулів членів цього ряду, тобто збігається ряд* (Горбунова Н.Ю., Платонова Н.Н.) [21, с. 33]

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots. \tag{1.9}$$

Означення 1.8. Ряд (1.8) *називається умовно збіжним, за умови якщо він збігається, а ряд* (1.9) *розбігається* (Горбунова Н.Ю., Платонова Н.Н.) [21, с. 33].

Означення 1.9. Знакозмінний ряд називається знакопочерговим, якщо будь-які два члени, які знаходяться поряд, мають протилежні знаки (Горбунова Н.Ю., Платонова Н.Н.) [21, с. 34].

Знакопочерговий ряд можна записати так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1^{n+1})\, u_n = u_1 - u_2 + u_2 - \cdots + u_{2k+1} - u_{2+2} + \cdots, \qquad (1.10)$$

де всі числа $u_n, n \in N$ є додатними.

Означення 1.10. Ряд (1.10) *називається абсолютно збіжним, за умови якщо збігається ряд, який складений із абсолютних величин його членів.*

Означення 1.11. Ряд (1.10) *називається умовно збіжним, якщо він збігається, але ряд, складений із абсолютних величин його членів, розбігається.*

Розглянемо основні ознаки збіжності знакозмінних (знакопочергових) рядів.

Теорема 1.12 (ознака Лейбниця). Якщо члени знакопочергового ряду (1.10) *монотонно спадають за абсолютною величиною, і загальний член u_n прямує до нуля при $n \to \infty$, тобто $u_{n+1} < u_n, \forall n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд збігається і його сума за абсолютною величиною не перевищує абсолютної величини першого члена ряду* (Горбунова Н.Ю., Платонова Н.Н.) [21, с. 34-35].

Для ведення наступних ознак збіжності знакозмінних (знакопочергових) рядів для початку розглядають ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots, \qquad (1.11)$$

складений із послідовностей чисел $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$, у яких $a_n, b_n \in R$.

Теорема 1.13 (ознака Абеля). Якщо збігається ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots,$$

а послідовність чисел $\{a_n\}$ *є монотонною та обмеженою, тобто* $|a_n| \leq K$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, *то ряд* (1.12) *теж збігається* (Фихтенгольц Г. М.)[19, с. 307].

Теорема 1.14 (ознака Діріхле). Якщо послідовність часткових сум ряду (1.11) *обмежена, тобто*

$$|B_n| \leq M \ (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

а послідовність $\{a_n\}$ *монотонна і прямує до нуля:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

то ряд (1.11) *збігається* (Фихтенгольц Г. М.)[19, с. 307].

Приклад 1.8 Дослідити ряд на збіжність $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$.

Розв'язання. Даний ряд задовольняє умови ознаки Лейбниця. Члени ряду монотонно спадають за абсолютною величиною, тому що

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots;$$

або

$$|u_n| = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = |u_{n+1}|.$$

Крім того

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Отже, за ознакою Лейбниця ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

збігається.

РОЗДІЛ 2.
ОЗНАЙОМЛЕННЯ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ З МНОЖНИКАМИ ЗБІЖНОСТІ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯМ ПРИ ВИВЧЕННІ ОЗНАК ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ

2.1 Основні відомості про множники збіжності

Аналіз наукової та науково-методичної літератури стверджує, що проблема вивченням множників збіжності рядів та їхнє застосування до виведення ознак збіжності займає чільне місце в дослідженнях багатьох визначних математиків, серед них Н. Абель [25-26], Ж. Адамар, С. Барон [27], Х. Бор [28], Р. Дедекінд, Г. Харді [29-30], Е. Чезаро [31], І. Шур [32] та інші.

Сьогодні набувають актуальності дослідження множників збіжності для ортогональних функціональних рядів, в тому числі активно вивчаються множники безумовної та абсолютної збіжності ортогональних рядів [33-34], множники Вейля кратних рядів Фур'є [35], точні множники Вейля [36].

На наш погляд, ознайомлення здобувачів вищої освіти спеціальності «014 Середня освіта, спеціалізація 014.04 Математика» з новим поняттям «множники збіжності» потрібно починати з розгляду довільного числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{2.1}$$

Нехай представимо члени u_n досліджуваного ряду (2.1) у вигляді добутку $u_n = \alpha_n \beta_n$, де $\{\alpha_n\}$ – деяка числова послідовність. Звідси слідує, що замість ряду (2.1) розглядають ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n. \tag{2.2}$$

У випадку, якщо поведінка ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ відома, то збіжність ряду (2.2), а, отже, і ряду (2.1), залежить лише від послідовності $\{\alpha_n\}$. Якщо ряд (2.2) є збіжним, то числа α_n називаються множниками збіжності ряду (2.1).

Розглянемо наступні перетворення. Нехай маємо одну із часткових сум ряду (2.2):

$$S = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \cdots + \alpha_m \beta_m. \tag{2.3}$$

Проведемо над сумою (2.3) елементарні перетворення. Для цього введемо до розгляду суми виду:

$$B_1 = \beta_1, \qquad B_2 = \beta_1 + \beta_2, \qquad B_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \dots$$
$$B_m = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m.$$

Тоді, виражаючи множники β_i через ці суми

$$\beta_1 = B_1, \qquad \beta_2 = B_2 - B_1, \qquad \beta_3 = B_3 - B_2, \dots$$
$$\beta_m = B_m - B_{m-1},$$

суму S можна записати у вигляді

$$S = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 (B_2 - B_1) + \alpha_3 (B_3 - B_2) + \cdots + \alpha_m (B_m - B_{m-1}).$$

Якщо розкрити дужки або інакше згрупувати члени, то отримаємо кінцеву формулу

$$S = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = (\alpha_1 - \beta_1) B_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) B_2 + \cdots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m) B_{m-1} +$$
$$+ \alpha_m B_m = \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \beta_i + \alpha_m B_m. \tag{2.4}$$

Беручи за основу формулу (2.4), ведемо наступну оцінку для сум такого виду, яку будемо використовувати в подальшому для виведення ознак збіжності рядів.

Лема 2.1 Якщо множники α_i не зростають (або не спадають), а суми β_i обмежені за абсолютною величиною числом L:

$$|B_i| \leq L \quad (i = 1,2 \dots, m),$$

то (Фихтенгольц Г.М.) [19, с.316]

$$|S| = \left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i\right| \leq L \cdot (|\alpha_1| + 2|\alpha_m|).$$

Очевидно, якщо множники α_i не зростають та додатні, то оцінку можна спростити:

$$|S| = \left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i\right| \leq L \cdot \alpha_1.$$

Доцільно використовувати наступну теорему Дедекінда-Адамара під час знаходження множників збіжності.

Теорема 2.1 а) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ збігається при довільному збіжному ряді $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ тоді і лише тоді, коли збігається ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n|. \tag{2.5}$$

б) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ збігається при довільному обмеженому ряді $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ тоді і лише тоді, коли збігається ряд (2.5) і виконується умова: $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$ (Барон С.А.) [27, с. 168].

2.2 Отримання ознак збіжності рядів за допомогою множників збіжності

Однією з перших ознак, яку можна віднести до теорії множників збіжності, є ознака Абеля (Фихтенгольц Г. М.) [19, с.307], яка вказує, що коли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

збігається, а послідовність $\{\alpha_n\}$ є монотонною ($\alpha_n > \alpha_{n+1}$, або $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, для $n = 1,2, \dots$) і обмеженою (існує додатне число M, для якого виконуються нерівності: $|\alpha_n| \leq M$ для $n = 1,2, \dots$), то ряд (2.2) збігається.

Класична ознака Лейбніца збіжності знакозмінного числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (-1)^n,$$

де α_n $(n = 1,2, \dots)$ – додатні числа, може слугувати прикладом використання методу множників збіжності ряду: При чому ця ознака вказує, що такий ряд збіжний, якщо послідовність $\{\alpha_n\}$ монотонно спадає, і прямує до нуля ($\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$) коли n прямує до нескінченості $(n \to \infty)$. Отже, такі числа α_n $(n = 1,2, \dots)$ є множниками збіжності для даного ряду.

Інакше, ознака Лейбніца - це частинний випадком ознаки Діріхле, яка зазначає, що ряд (2.2) збігається, якщо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

є обмеженим (послідовність $\{U_n\}$ його частинних сум є обмеженою), а послідовність $\{\alpha_n\}$ монотонно спадає, і прямує до нуля (Фихтенгольц Г.М.) [19, с.307].

2.3 Поняття підсумовування рядів

Підсумовування ряду деяким методом є узагальненням поняття збіжності ряду. Відповідні методи підсумовування рядів визначаються через нескінченні дискретні матриці

$$A = (a_{nk}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1k} \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nk} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Розглянемо довільний числовий ряд (2.1), який належить деякій множині рядів $\acute{A}$. Подіємо на нього матрицею (a_{nk}) перетворення ряду в ряд. В результаті утвориться новий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$, де

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k a_{n,k} \qquad (2.6).$$

Тоді, говорять, що ряд (2.1) підсумовується методом A до числа U, якщо ряд (2.6) збігається при кожному значенні $n = 1,2, \ldots$, і при цьому виконується рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = U.$$

Означення 2.1 Якщо для довільного ряду (2.1) із множини рядів Á за поставити у відповідність, деяким правилом А, число

$$A\{\sum u_n\}, \quad (2.7)$$

то говорять, що на множині Á визначений метод підсумовування і позначають його А (Барон С.) [27, с. 46]. В такому разі число (2.7) називається А-сумою ряду (2.1).

Звідси слідує, що ряд (2.1) підсумовується методом A до суми (2.7), або, інакше, метод A підсумовує ряд (2.1) до суми (2.7).

Діючи на досліджуваний ряд різними матрицями, можна отримувати інші методи підсумовування рядів. Для прикладу такими матричними перетвореннями можуть бути:

$$\acute{U}_n = \sum_k \alpha_{nk} U_k \quad (B)$$

перетворення ряду в послідовність;

$$\acute{u}_n = \sum_k \overline{\alpha_{nk}} u_k \quad (C)$$

перетворення ряду в послідовність;

$$\acute{u}_n = \sum_k \overline{\lambda_{nk}} U_k \quad (D)$$

перетворення послідовності в ряд.

Множники називаються множниками підсумовування, якщо досліджують не збіжність ряду, а його підсумовуваність деяким методом підсумовування.

Розглянемо детально метод середніх арифметичних. Нехай позначимо його через H або $(H, 1)$.

Означення 2.2 Послідовність

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

називається підсумованою методом середніх арифметичних до числа $\acute{U}$*,* *за умови якщо послідовність*

$$H_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} U_k \tag{2.8}$$

збігається до $\acute{U}$. (Барон С.) [27, с. 69].

Наприклад, маємо числовий ряд

$$\sum(-1)^n \;\; = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \tag{2.9}$$

Для ряду (2.9) часткові суми почергово дорівнюють 0 або 1, тому сумою цього ряду є середнє арифметичне часткових сум - $S_n = \frac{1}{2}$. З іншого боку, якщо утворити квадрат ряду (2.9) за правилом Коши, то він не підсумовується методом *H*.

На основі узагальнення методу середніх арифметичних сформувалися інші класичні методи підсумовування рядів, це, зокрема, метод Гьольдера, метод Абеля-Пуассона, метод Чезаро, метод Ейлера-Кноппа, метод Хаусдорфа та інші.

РОЗДІЛ 3.
МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ ДОСЛІДНИЦЬКОЇ КОМПЕТЕНЦІЇ У ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

3.1 Методика формування дослідницької компетенції у здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня в процесі вивчення освітньої компоненти «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти»

На сучасному етапі розвитку України якість математичної підготовки молодого покоління є важливим індикатором готовності суспільства до соціально-економічного розвитку, гнучкості та мобільності особистості в освоєнні та впровадженні сучасних інформаційно-комунікаційних технологій. Будучи важливою складовою загальноосвітньої підготовки підростаючого покоління, математична освіта не тільки передає учням математичні знання, вміння і навички, але й значною мірою сприяє формуванню та виробленню у них як предметної математичної компетентності, так і ключових компетентностей. Набуття учнями цих компетентностей, дозволяє навчання в школі бути більш вмотивованим і ефективним. Це дозволяє зорієнтувати учнів на самоосвіту та продовження навчання протягом усього життя, забезпечує формування у них критичного мислення, креативності та творчих здібностей, необхідних для динамічної адаптації людини до нових умов швидко розвиваючого суспільства і викликів, які потрібно долати та повноцінного функціонування у постіндустріальному суспільстві. У зв’язку з цим, випливає проблема реформування вітчизняної системи професійної підготовки майбутніх вчителів математики, які відповідають сучасним критеріям професійної освіти, ринку праці. Повною мірою це відноситься і до випускників магістратури спеціальності «014 Середня освіта, спеціалізація 014.04 Математика», освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)».

Реформування професійної підготовки майбутніх вчителів математики передбачає, як повне її оновлення, так і модернізацію існуючої системи підготовки. Сучасний етап характеризується частковою модернізацією методичної системи професійної підготовки майбутніх учителів математики, що передбачає реалізацію дидактичних та психологічних принципів розвивального навчання, індивідуалізації та диференціації навчання. В Національній стратегії розвитку освіти в Україні підкреслено, що методологічною основою таких змін стають систематичний, компетентнісний, діяльнісний, особистісно-діяльнісний, технологічний, комунікативно-діяльнісний та ресурсний підходи.

Більшість провідних вітчизняних і закордонних науковців висловлюють думку, що домінантною характеристикою професійної компетентності спеціаліста будь-якої галузі, зокрема й освітньої, є ступінь сформованості у нього відповідної системи знань, умінь, навичок, досвіду, який забезпечує готовність і здатність виконання певної професійної діяльності.

Формування готовності майбутніх вчителів математики до професійної діяльності охоплює сформованість як математичної, так і методичної компетентностей. На нашу думку, найбільш значимими напрямами вдосконалення структури й змісту професійної підготовки майбутніх вчителів математики мають бути:

- модернізація освітньо-професійної програм «Середня освіта (математика)» відповідно до вимог більш адекватного відображення в її змісті сучасних тенденцій розвитку методичної системи навчання математики в школі;
- включення до освітньо-професійної програми освітніх компонент, які сприяють більш якісному підвищенню рівня математично-методичної компетентності здобувачів вищої освіти.

На наш погляд, актуальним для підвищення якості професійної підготовки майбутніх вчителів математики є навчальна дисципліна «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти», яка передбачає активну взаємодію суб’єктів освітнього простору (інтерактивне навчання), широке застосування проблемного викладання, відповідного навчального матеріалу, формування та розвиток дослідницьких математичних умінь, студентські проєкти, що знайшло відображення у силабусі освітньої компоненти (Додаток А).

Сформованість дослідницьких математичних умінь, розвиненість пізнавального інтересу та навчально-пізнавальної діяльності майбутніх вчителів математики слід розглядати як важливий ресурс розвитку їх творчого потенціалу, як фундамент формування професійних навичок майбутнього педагога.

Формування уявлень, а згодом дослідницьких математичних умінь і навичок майбутніх учителів математики має забезпечити цілісна методична система формування і розвитку дослідницької діяльності здобувачів освіти у процесі їхньої професійної підготовки. Серед компонентів цієї системи, на наш погляд, найбільш значущими є дослідницькі задачі, які доцільні під час вивчення саме освітніх компонентів професійного спрямування. Навчально-дослідна діяльність майбутніх вчителів математики, що організовується викладачем, спрямована саме на розв’язання навчальних дослідницьких задач, які в нашому дослідженні формулюються в межах начального матеріалу освітньої компоненти «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти». Вибір обумовлений тим, що ряди є важливим інструментом під час вивчення функцій та різних обчислень. Вони слугують досить простим та універсальним інструментом математичного аналізу. Ряди мають важливе значення не тільки в математиці, але й в фізиці, економіці, хімії, біології, астрономії, архітектурі, геодезії, інженерії, теорії музики, естетиці, криптографії та інші.

Для визначення ефективності пропонованої методичної системи навчання здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня освітньої компоненти «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти», зорієнтованої на формування та розвиток дослідницьких математичних умінь та завершеності вирішення завдань дослідження було проведено педагогічний експеримент.

На першому (констатувальному) етапі (2021 р.) здійснено аналіз психолого-педагогічної, методичної літератури, практики з проблеми дослідження, державних нормативно-правових документів, ОПП «Середня освіта (математика)», підручників і посібників з відповідної освітньої компоненти, здійснювалося спостереження за навчальним процесом, вивчалися результати професійної діяльності викладачів та навчально-пізнавальної діяльності здобувачів освіти.

Оскільки навчально-дослідницькі математичні уміння є складним і багаторівневим утворенням, то на цьому етапі ми уточнили означення цього поняття і погоджуємося з думкою Гавриліної О.В., що «дослідницькі математичні уміння – це навчальні дослідницькі уміння виконувати систему математично спрямованих теоретичних та практичних дій, що підпорядковуються логіці наукового дослідження і свідомо використовуються здобувачами освіти в освітньому процесі для здобуття нових знань» (Гавриліна О.В.) [37].

Крім того, аналіз наукових розвідок Галатюка Ю.М. [38-39], Скафи О.І. [8], Карлащука А.Ю. [40] дозволив уточнити складові компоненти дослідницьких математичних умінь:

- операційні, що дозволяють висувати та доводити певну гіпотезу, а також критично аналізувати отриманий результат;
- організаційні, які забезпечувалися плануванням діяльності та раціональним використанням засобів діяльності;
- колективні, які базувалися на співпраці здобувачів освіти (взаємодопомога, взаємоконтроль і самоконтроль);
- рефлексивні, які дозволяли не тільки аналізувати та оцінювати власну діяльність здобувача освіти, а й вносити певні корективи.

На другому (пошуковому) етапі (2022 р.) розроблялася структурно-функціональна модель для реалізації методичної системи формування та розвитку дослідницької математичної компетенції здобувачів вищої освіти під час вивчення освітньої компоненти «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти», пошук основних шляхів їх формування та розвитку (Додаток Б).

Враховуючи особливості навчання здобувачів освіти другого (магістерського) рівня спеціальності «014 Середня освіта, спеціалізація 014.04 Математика», освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)» [41], освітній компоненті «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти», ми виокремили типи дослідницьких задач, які найбільш ефективно сприяють формуванню дослідницьких математичних умінь майбутніх вчителів математики: прямі та обернені задачі; задачі з надлишковими або недостатніми даними; задачі, які передбачають розбиття на підзадачі; задачі, в яких необхідно довести або спростувати пропоноване твердження; задачі на розробку задачі або системи задач на основі даної задачі; задачі, що забезпечують проєктування власної діяльності дослідника; задачі, які обмежені певними часовими рамками; задачі, які вимагають використати взаємодопомогу і взаємоконтроль; задачі, побудовані на основі контрприкладу; задачі, які дозволяють коригувати навчально-пізнавальну діяльність (Додаток В).

Нами було уточнено шляхи формування дослідницької математичної компетенції здобувачів освіти в процесі вивчення освітньої компоненти «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти» виділено:

1) постановка та розв'язування дослідницьких задач різних типів;
2) постановка питань, які забезпечують формування та розвиток уміння відшукувати та застосовувати математичні твердження більш загального порядку, ніж ті, що зазначені в умові задачі, критичного мислення;
3) спонукання здобувачів освіти до самостійного формулювання запитань, які дозволяють виявляти властивості об'єктів зазначених в умові та вимозі задачі та зв'язків між ними;
4) використання новітніх інформаційних технологій в процесі вивчення дисципліни «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти»;
5) залучення здобувачів освіти до написання рефератів, доповідей і повідомлень на навчальних заняттях.

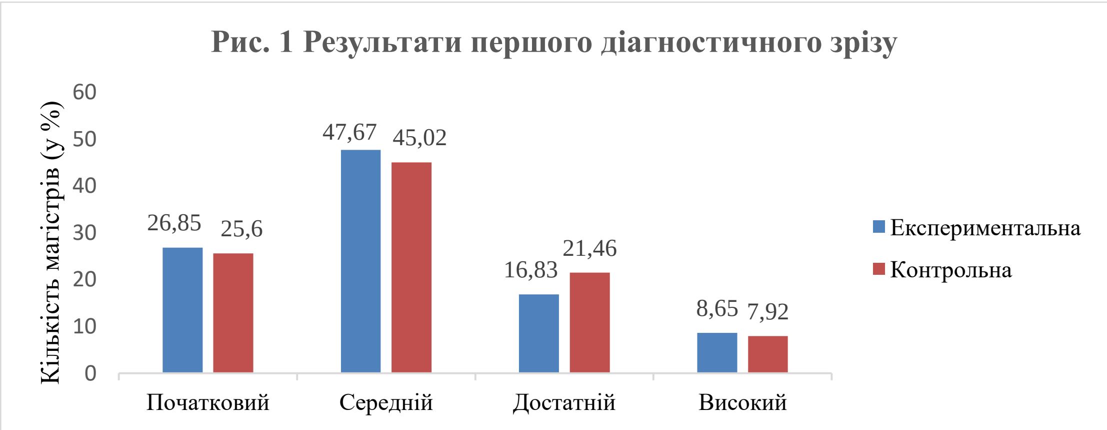
Крім того, уточнювалася структурно-функціональна модель формування дослідницьких математичних умінь магістрантів в процесі вивчення освітньої компоненти «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти». Було уточнено сукупність педагогічних умов, що сприяють формуванню дослідницьких математичних умінь здобувачів освіти.

На третьому (формувальному) етапі (2022 р.) здійснювалося експериментальне навчання здобувачів вищої освіти у відповідності до розробленої методичної системи та опрацьовувалися отримані результати. Базою для експериментального дослідження було обрано навчальну групу 121М другого (магістерського) рівня, спеціальності

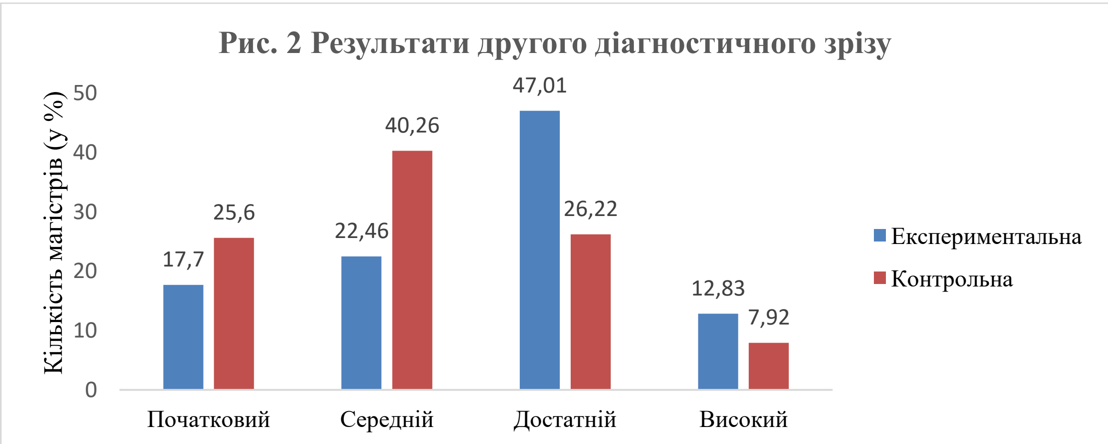
«014 Середня освіта, спеціалізація 014.04 Математика», освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)», факультету комп'ютерних наук, фізики та математики, Херсонського державного університету.

Ми виокремили дві однорідні вибірки експериментальної і контрольної груп. Викладачі, які проводили навчальні заняття в цих групах, для отримання об'єктивної оцінки, мали різний педагогічний стаж і досвід. В контрольній групі навчання здійснювалися за традиційною методикою, а в експериментальній групі – за розробленою методикою.

На початку навчання було проведено контрольний зріз, який дозволив встановити початковий рівень сформованості дослідницьких математичних умінь майбутніх вчителів математики (рис. 1).



Наприкінці експериментального навчання виконали другий діагностичний зріз (рис. 2).



В результаті проведеного педагогічного дослідження було виявлено, що в експериментальній групі кількість здобувачів вищої освіти із достатнім рівнем сформованості дослідницьких математичних умінь збільшилася на 30,18%, а магістрів із початковим рівнем зменшилася на 9,15%. Очевидно, що проведений експеримент підтверджує ефективність формування дослідницької компетенції шляхом використання в освітньому процесі дослідницьких задач, раціонального чергуванням частково-пошукового, репродуктивного, дослідницького методів, застосування різних форм організації навчальних занять, серед яких традиційно й нестандартно побудовані заняття, практикуми, семінари, самостійні дослідницькі завдання, підготовка рефератів тощо, доцільне поєднання індивідуальної, групової, фронтальної форм роботи в освітньому процесі із врахуванням диференціації навчання, вдалий вибір засобів навчання.

ВИСНОВКИ

Результати проведеного теоретичного дослідження та педагогічного експерименту показали, що:

1. Аналіз нормативно-правових документів, математичної, навчально-методичної, психолого-педагогічної літератури, практики засвідчують актуальність на даному етапі розвитку освіти в Україні формування дослідницької компетенції здобувачів освіти як середньої так і вищої школи, зокрема, в нашому дослідженні, через вивчення основ теорії рядів. Опитування здобувачів освіти та проведений педагогічний експеримент в Херсонському державному університеті показують, що розвиненість дослідницьких умінь випускників-магістрів знаходяться переважно на початковому та середньому рівні. З огляду на це, проблема формування дослідницьких умінь є вагомою в професійній підготовці майбутніх вчителів математики.
2. Метод множників збіжності ми трактуємо як новий підхід вивчення збіжності рядів в курсів математичного аналізу, який дає можливість не тільки вивчати класичні ознаки збіжності рядів, але й отримувати нові ознаки, які є пристосованими до конкретних класів рядів.
3. Розроблений силабус освітньої компоненти «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти» зорієнтований на формування системи дослідницьких математичних умінь у майбутніх педагогів, шляхом розв’язування різних типів дослідницьких задач. Такий методичний підхід спрямовує здобувачів освіти на продуктивну

навчально-пізнавальну діяльність, в тому числі й на самоосвітню, допомагає формувати власну освітню траєкторію в процесі дослідницької діяльності.

4. Структурним елементом методичної системи є силабус освітньої компоненти «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти» для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня. Це персоніфікована програма викладача для навчання здобувачів освіти, яка впроваджується в освітній процес і підсилена засобами системи доцільно підібраних дослідницьких задач, розв'язання яких відбувається під час семінарських та практичних занять в процесі індивідуальної, парної, групової, колективної форм навчання.

5. Для реалізації методичної системи розроблена структурно-функціональна модель формування дослідницьких математичних умінь майбутніх вчителів математики, у процесі вивчення освітньої компоненти «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти», яка включає такі блоки: цільовий, нормативний, методологічний, змістовний, технологічний, оцінювально-результативний. Скріпляють пропоновану структурно-функціональну модель і виступають її чинником розвитку наявні об'єктивні та суб'єктивні, як зовнішні, так і внутрішні педагогічні умови.

6. Експериментальна перевірка підтвердила позитивні зміни в експериментальній групі. Кількість здобувачів освіти на достатньому та високому рівнях зросла (достатній рівень – на 30,18%, високий рівень – на 4,18%), а на початковому та середньому рівнях зменшилася (початковий рівень – на 9,15%, середній рівень – на 25,21%). Найбільш позитивна динаміка простежується на достатньому рівні. В контрольних групах ці зміни мінімальні.

На наш погляд, формування дослідницької компетенції у майбутніх вчителів математики підсилює їхню мотивацію та пізнавальний інтерес, сприяє формуванню математичної та методичної компетенцій, підвищенню якості професійної підготовки здобувачів освіти, що підтверджує проведене дослідження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навчальний посібник. К.: Вища школа, 1989. 367 с.
2. Бевз В.Г., Годованюк Т.Л. Урізноманітнення форм і засобів методичної підготовки майбутніх учителів математики. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики*. Нац. пед. ун-т ім. М.П. Драгоманова. Київ, 2015. 15 с.
3. Бевз В.Г., Васильєва Д.В. Управление учебно-познавательной деятельностью учащихся в контексте аксиологического подхода к обучению математике. Konstantin Preslavsky University Press, 2016. С.14-20
4. Бурда М.І., Мадзігон В.М. Пріоритетні напрями педагогічних досліджень. Педагогіка і психологія, 1998. № 3. С. 79-89.
5. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: метод. посібник / М.І. Бурда та ін. К.: Педагогічна думка, 2015. 245с.
6. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе: учебное пособие для студентов физ.-мат. спец пед. институтов. М: Просвещение. Ч.1: Общая методика, 1975. 462 с.
7. Скафа О.І. Задача як форма і засіб формування евристичної діяльності. Рідна школа, 2003. №6. С.43-47.
8. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология: монография. Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. 439 с.

9. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник, Вид. 2-ге, допов. і переробл. К: Вища школа, 2006. 582 с.

10. Тарасенкова Н.А., Кузьмінський А.І., Акуленко І.А. Наукові засади методичної підготовки майбутнього вчителя математики. Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2009. 320 с.

11. Тарасенкова Н.А. Компетентнісний підхід у навчанні математики: теоретичний аспект. Математика в рідній школі, 2016. С. 26-30

12. Тарасенкова Н.А., Кузьмінський А.І., Акуленко І.А. Інновації в методології методичної підготовки майбутнього вчителя математики профільної школи. Педагогіка вищої та середньої школи : зб. наук. пр., 2014. С. 3-9

13. Андреев В.И. Эвристическое программирование учебно исследовательской деятельности. М. : Высшая школа, 1981. 240 с.

14. Недодатко Н.Г. Технологія формування навчально-дослідницьких умінь школярів. Рідна школа, 2005. №6 (869). С. 21-23.

15. Недодатко Н.Г. Формування навчально-дослідних умінь старшокласників: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.09. Харків, 2000. 25 с.

16. Балашова С.П. Формування дослідницьких умінь у студентів педагогічного коледжу в процесі вивчення природознавчих дисциплін: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : 13.00.04. К., 2006. 27 с.

17. Рєзіна О.В., Рамський Ю.С. Формування інформаційно-пошукових та дослідницьких умінь майбутніх учителів інформатики та математики. Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 2. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук праць. К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2012. №12 (19). С. 41-48

18. Падун Н.О. Навчально-дослідницька діяльність як засіб формування дослідницьких умінь учнів. Наукові записки НДУ ім. М. Гоголя. Психолого-педагогічні науки. 2012. № 1. С. 90-93.

19. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: ФМЛ, 1970. 800 с.

20. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Том 2. Издательство «Наука». г. Москва, 1968. 464 с.

21. Горбунова Н.Ю., Платонова Н.Н. Ряды : учебное пособие. М-во с.-х. РФ, федеральное гос. бюджетное образов. учреждение высшего образования «Пермская гос. с.-х. акад. им. акад. Д.Н. Прянишникова». Пермь: ИПЦ «Прокростъ», 2017 156 с.

22. Станішевський С.О. Ряди та їх застосування / укл. С.О. Станішевський, С.М. Мордовцев, А.В. Якуніна, Л.О. Бистрова, В.С. Ситникова; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. Х.: ХНАМГ, 2009. 123 с.

23. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие для вузов. 22–е , перераб. СПб., Изд-во «Профессия», 2001. 432 с.

24. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому аналізу. М.: «ЧеРо», 1997. 624 с.

25. Абель Н. Множители суммируемости для методов Чезаро комплексного порядка. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1965. С. 92-105

26. Абель Н. Множители суммируемости первого рода для методов Чезаро комплексного порядка. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1968. С. 145-153

27. Барон С.А. Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин: Валгус, 1977. 280 с.

28. Borh H. Sur la serie de Dirichlet. C. r. Acad. sci. 1909. P. 75-80

29. Харди Г.Х. Расходящиеся ряды. Изд-во иностранной литературы. г. Москва, 1951. 504 с.

30. Hardy G.H. Generalisation of a theorem in the theory of divergent series. Proc. London Math. Soc. 1908. No 6. P. 255-264.

31. Cesaro E. Sur la multiplication des series. Bull. Sci. math. 1890. Vol. 1. No 2. P. 114-120.

32. Schur I. Uber lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. reine und angew. Math.. 1921. No 151. P. 79-111.

33. Ульянов П.Л. О множителях Вейля для безусловной сходимости ортогональных рядов. *Докл.* АН СССР, 1977. Том 235. С. 1038-1041.

34. Цагарейшвили В.Ш., Тутберидзе Г. Множители абсолютной сходимости. *Матем. заметки*, 2019. Том 105, вып. 3. С. 433-443.

35. Никишин Е.М. Множители Вейля для кратных рядов Фурье. *Матем. сб.*, 1972. Том 89(131). № 2(10). С. 340-348.

36. Полещук С.Н. О точных множителях Вейля. *Матем. сб.,* 1979. Том 108. С. 105-114.

37. Гавриліна О.В. Впровадження методики формування дослідницьких математичних умінь старшокласників у процес поглибленого вивчення елементів інтегрального числення (висновки дисертаційного дослідження). *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології: науковий журнал*. Суми: СумДПУ імені А. С. Макаренка. 2013. № 1 (27). С. 170–183.

38. Галатюк М.Ю. Дидактичні умови формування навчально-пізнавальної компетентності в процесі вивчення природничих дисциплін. *Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т.Г. Шевченка. Педагогічні науки.* Чернігів , 2010. Вип. 77. С. 49-53.

39. Галатюк М.Ю. Теоретичні аспекти формування навчально-пізнавальної компетентності в процесі вивчення природничих дисциплін. *Теорія та методика вивчення природничо-математичних і технічних дисциплін*: зб. наук. праць, м. Чернігів, 2010. Вип. 14. С. 95-100.

40. Карлащук А.Ю. Формирование исследовательских умений школьников в процессе решения математических задач с параметрами: дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02. Донецк, 2001. 242 с.

41. Освітньо-професійна програма «Середня освіта (математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти. URL: https://drive.google.com/file/d/1KKnVuOFCMPrHOFsRAXRctBW3KXUaXKel/view?usp=sharing (дата звернення: 15.11.2021).

ДОДАТОК А

Силабус дисципліни «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти», для здобувачів вищої освіти другого магістерського рівня за освітньо-професійною програмою «Середня освіта (математика)»

1. Опис курсу

Назва освітньої компоненти	Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти
Рівень вищої освіти	Другий (магістерський)
Кількість кредитів	3
Розподіл за видами занять та годинами навчання	Лекції – 16 год.
	Практичні (семінарські) заняття – 14 год.
	Самостійна робота – 60 год.
Форма підсумкового контролю	Залік

2. Анотація до курсу

Навчальна дисципліна «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти» є освітньою компонентою циклу професійної підготовки здобувачів вищої освіти за спеціальністю «014 Середня освіта, спеціалізації 014.04 Математика», освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти.

Вивчення даного курсу передбачає розширення та закріплення здобувачами освіти відомостей про теорію рядів, зокрема, ознайомлення з новим поняття «множники збіжності», яке можна застосовувати до вивчення ознак збіжності числових рядів. Опанування матеріалу даної освітньої компоненти сприяє формуванню професійної компетентності майбутніх вчителів математики, спроможних працювати на конкурсній основі в різних типах шкіл.

3. Мета та завдання дисципліни

Мета вивчення курсу:

- навчити використовувати метод множників збіжності для отримання ознак збіжності числових рядів;
- повторити основні поняття теорії рядів;
- розвинути здатність до логічного мислення, дослідження та розв'язку математичних проблем;
- виробити вміння аналізувати отриманні результати, навичок самостійного пошуку та опрацювання літератури.

Завдання:

- забезпечити усвідомлення та засвоєння здобувачами вищої освіти:
  - теоретичних основ теорії рядів;
  - прикладних можливостей теорії рядів для дослідження різноманітних математичних проблем;
- формувати і розвивати:
  - професійні компетентності майбутнього вчителя математики, здатного до творчої діяльності в умовах стрімкого зростання темпів інформатизації суспільства;
  - здібність застосовувати набуті знання під час розв'язування конкретних математичних задач;
  - усвідомлення необхідності постійного самовдосконалення та самоосвіти.

4. Програмні компетентності та результати навчання

Програмні компетентності

Інтегральна компетентність(ІК)

ІК. Здатність розв’язувати складні професійно-орієнтовані задачі та практичні проблеми в освітній галузі, що передбачає застосування теорій та методів психології, педагогіки та математики і характеризується комплексністю та невизначеністю педагогічних умов організації освітнього процесу в умовах закладів освіти різного рівня [41].

Загальні компетентності (ЗК)

ЗК 1. Здатність знаходити, аналізувати і контекстно обробляти інформацію, в тому числі до нових галузей знань, безпосередньо не пов’язаних зі сферою професійної діяльності, для вирішення наукових і професійних проблем [41].

ЗК 2. Здатність використовувати у професійній діяльності міждисциплінарні знання і вміння [41].

ЗК 3. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу, прогнозування для вирішення проблеми у професійній діяльності [41].

ЗК 4. Здатність шукати, обробляти і аналізувати інформацію з різних джерел для розв’язування наукових і професійних завдань [41].

ЗК 5. Здатність породжувати та генерувати нові ідеї(креативність) [41].

ЗК 7. Здатність проведення досліджень з елементами наукової новизни на відповідному рівні [41].

ЗК 8. Здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово [41].

ЗК 11. Здатність бути критичним і самокритичним, оцінюючи та переосмислюючи, як власний так і чужий досвід, аналізувати свою професійну й соціальну діяльність [41].

Спеціальні (фахові, предметні) компетентності (СК)

СК 1. Здатність до практичних застосувань результатів дослідницької та/або інноваційної діяльності, які відповідають новітнім досягненням [41].

СК 2. Здатність застосовувати міждисциплінарні підходи при критичному осмисленні професійних проблем [41].

СК 3. Здатність до використовувати принципи, методи та організаційні форми дослідницької та/або інноваційної діяльності для прийняття оптимальних рішень та інтерпретації їхніх результатів [41].

СК 4. Здатність розуміти проблеми та виділяти їхні суттєві риси [41].

СК 7. Здатність самостійно розробляти експериментальні та спостережні дослідження й аналізувати дані, отримані на їхній основі, шляхом творчого застосування існуючих та генерування нових професійних ідей [41].

СК 8. Здатність до удосконалення існуючих та розвитку нових методів аналізу, моделювання, прогнозування, розв'язування проблем у нових галузях освіти [41].

СК 10. Здатність до самоосвіти та підвищення кваліфікації на основі інноваційних підходів у сфері освіти [41].

Програмні результати навчання

Знання:

ПРЗ 1. Знає та розуміє фундаментальні і прикладні аспекти наук у сфері математики, психології, педагогіки, методики навчання математики, що відповідають II рівню вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта, спеціалізація 014.04 Математика [41].

ПРЗ 2. Відтворює знання фундаментальних розділів математики, психології, педагогіки, методики навчання математики в обсязі необхідному для володіння математичним, психолог-педагогічним, методичним апаратом відповідної галузі знань [41].

ПРЗ 4. Володіє науковими методами аналізу, оцінки, прогнозування та корекції параметрів моделей, науковими способами інтерпретації числових даних та принципами функціонування освітніх процесів [41].

ПРЗ 5. Знає, називає, пояснює зміст та класифікує основні педагогічні об'єкти, пов'язані з освітнім процесом в усіх ланках математичної освіти [41].

ПРЗ 6. Знає, визначає, пояснює та описує зміст основних положень, що складають теоретико-методологічну основу теорії та методики навчання курсу математики у закладах освіти різного рівня [41].

Уміння:

ПРУ 1. Уміє використовувати фундаментальні математичні, психолого-педагогічні та методичні закономірності у професійній діяльності [41].

ПРУ 2. Читає і розуміє розділи математичної, психолого-педагогічної, методичної літератури та демонструє майстерність їх відтворювання в аргументованій доповіді(усній або письмовій) [41].

ПРУ 3. Уміє донести професійні знання, власні обґрунтування і висновки до фахівців і не фахівців [41].

ПРУ 4. Ініціює і проводить ґрунтовні наукові дослідження у спеціалізованій області математики, методики навчання математики в умовах закладів освіти різного рівня [41].

ПРУ 5. Інтегрує знання з різних галузей для вирішення теоретичних та/або практичних задач і проблем математичної освіти [41].

ПРУ 6. Застосовує нові підходи до прийняття рішень у складних, непередбачуваних умовах освітнього математичного простору [41].

ПРУ 7. Вміє організовувати колективну діяльність для проектування та конструювання концептуальні моделі діяльності вчителя й здобувачів освіти на всіх етапах навчання математичних дисциплін у різних ланках математичної освіти на основі різних технологій навчання, адаптує їх до реальних умов навчання [41].

ПРУ 8. Демонструє здатність якісно навчатися, наполегливість у досягненні мети, відповідальність, здатність до критичного, креативного та системного мислення, толерантність [13].

ПРУ 9. Уміє самостійно планувати виконання дослідницького та/або інноваційного завдання, щодо побудови елементів методичних систем навчання математичних дисциплін, їх розділів, окремих програмових тем в усіх ланках математичної освіти та формулює висновки за його результатами [41].

ПРУ 10. Вміє спілкуватися рідною та іноземними мовами(усно та письмово) в різних сферах діяльності і з професійних питань [41].

ПРУ 11. Використовує раціональні способи пошуку та застосування науково-технічної інформації для побудови відповідних математичних, психолого-педагогічних та методичних моделей, включаю різноманітні засоби [41].

ПРУ 12. Вміє пояснювати, відтворювати та дотримуватися норм етичної поведінки в суспільстві і природі [41].

5. Схема курсу

Модуль 1

Тема 1. Історія виникнення та розвитку теорії рядів (лк. – 2 год.).

Тема 2. Різні види збіжності числових рядів (лк. – 2 год., пр. – 2 год.).

Тема 3. Достатні умови збіжності числових рядів (лк. – 2 год., пр. – 2 год.).

Тема 4. Порівняння ознак збіжності числових рядів (лк. – 2 год., пр. – 2 год.).

Модуль 2

Тема 1. Перетворення Абеля. Поняття про множники збіжності ряду (лк. – 2 год., пр. – 2 год.).

Тема 2. Ознаки Абеля та Діріхле збіжності числового ряду (лк. – 2 год., пр. – 2 год.).

Тема 3. Підсумовування рядів (лк. – 2 год., пр. – 2 год.).

Тема 4. Множники підсумовуваності (лк. – 2 год., пр. – 2 год.).

6. Система оцінювання та вимоги

№	**Види навчальної діяльності (робіт)**	**Модуль 1**	**Модуль 2**	**Сума балів**
Обов'язкові види навчальної діяльності (робіт)				
1.	Аудиторна робота (заняття у дистанційному режимі):			
	- письмове опитування	10	10	20
	- тестування	5	5	10
	- практичні (семінарські) заняття	15	15	30
2.	Самостійна робота	10	10	20
3.	Контрольна робота	10	10	20
	Разом балів	**50**	**50**	**100**
Вибіркові види діяльності (робіт)				
1.	- участь у наукових, науково-практичних конференціях, олімпіадах; - підготовка наукової статті, наукової роботи на конкурс; - тощо			**max 10**

7. Список рекомендованих джерел

Основні

1. Барон С.А. Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин: Валгус, 1977. 280 с.

2. Цагарейшвили В.Ш., Тутберидзе Г. Множители абсолютной сходимости. Матем. заметки, 2019. Том 105. Вып. 3. С. 433-443.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II. М.: Наука, 1970. 800 с.

4. Харшиладзе Ф.И. Множители равномерной сходимости и равномерная суммируемость, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН Груз. ССР 26 (1959), С. 121 - 130.

5. Харшиладзе Ф. И. Множители равномерной сходимости, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН Груз. ССР 27 (1960), С. 195—208.

6. Харди Г.Х. Расходящиеся ряды. Изд-во иностранной литературы. г. Москва, 1951. 504 с.

7. Станішевський С.О. Ряди та їх застосування / укл. С.О. Станішевський, С.М. Мордовцев, А.В. Якуніна, Л.О. Бистрова, В.С. Ситникова; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. Х.: ХНАМГ, 2009. 123 с.

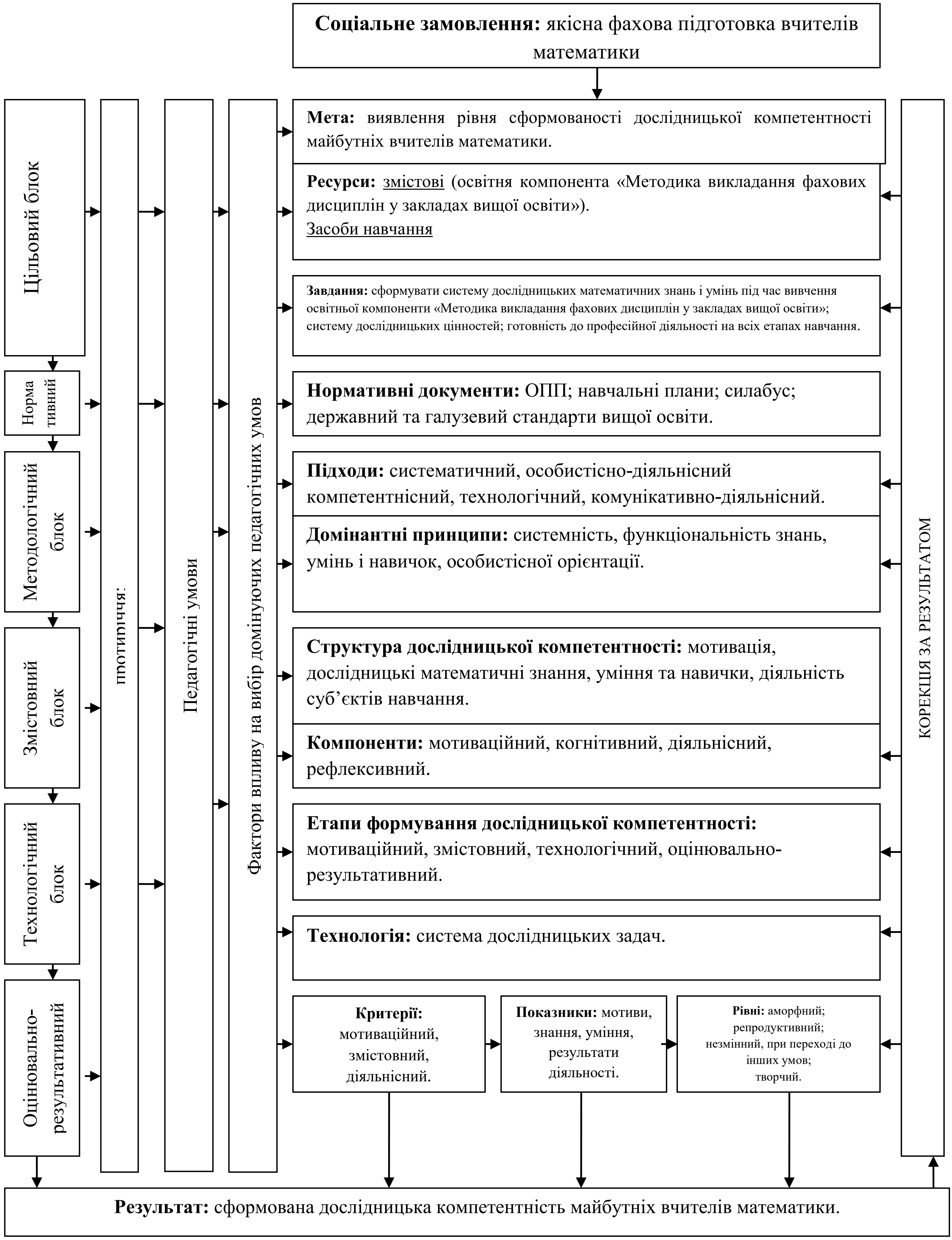
Додаткові

8. Ульянов П.Л. О множителях Вейля для безусловной сходимости ортогональных рядов. Докл. АН СССР, 1977, том 235. С. 1038-1041.

9. Полещук С.Н. О точных множителях Вейля. Матем. сб., 1979, том 108. С. 105-114.

10. Никишин Е.М. Множители Вейля для кратных рядов Фурье. Матем. сб., 1972. Том 89(131). № 2(10). С. 340-348.

ДОДАТОК Б


Соціальне замовлення: якісна фахова підготовка вчителів математики
Цільовий блок
Нормативний
Методологічний блок
Змістовний блок
Технологічний блок
Оціновально-результативний
Педагогічні умови
Фактори впливу на вибір домінуючих педагогічних умов
Мета: виявлення рівня сформованості дослідницької компетентності майбутніх вчителів математики.
Ресурси: змістові (освітня компонента «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти»).
Засоби навчання
Завдання: сформувати систему дослідницьких математичних знань і умінь під час вивчення освітньої компоненти «Методика викладання фахових дисциплін у закладах вищої освіти»; систему дослідницьких цінностей; готовність до професійної діяльності на всіх етапах навчання.
Нормативні документи: ОПП; навчальні плани; силабус; державний та галузевий стандарти вищої освіти.
Підходи: систематичний, особистісно-діяльнісний компетентнісний, технологічний, комунікативно-діяльнісний.
Домінантні принципи: системність, функціональність знань, умінь і навичок, особистісної орієнтації.
Структура дослідницької компетентності: мотивація, дослідницькі математичні знання, уміння та навички, діяльність суб'єктів навчання.
Компоненти: мотиваційний, когнітивний, діяльнісний, рефлексивний.
Етапи формування дослідницької компетентності: мотиваційний, змістовний, технологічний, оцінювально-результативний.
Технологія: система дослідницьких задач.
Критерії: мотиваційний, змістовний, діяльнісний.
Показники: мотиви, знання, уміння, результати діяльності.
Рівні: аморфний; репродуктивний; незмінний, при переході до інших умов; творчий.
КОРЕКЦІЯ ЗА РЕЗУЛЬТАТОМ
Результат: сформована дослідницька компетентність майбутніх вчителів математики.

ДОДАТОК В

1. Задачі, в яких необхідно довести або спростувати пропоноване твердження

Задача 1.1 Доведіть, що даний числовий ряд є збіжним

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2+2n+5}.$$

Доведення. Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2+2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+2/n+5/n^2} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається. Твердження невірне.

Задача 1.2 Доведіть, що даний числовий ряд є розбіжним

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 sin\frac{1}{n^2}.$$

Доведення. Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 sin\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0$$ (перша чудова границя).

Отже, даний ряд розбігається. Що й треба було довести.

Задача 1.3 Доведіть, що гармонійний ряд розбігається.

Доведення. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

відомий як гармонічний ряд.

Маємо очевидну нерівність:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Відкинемо перші два члена, а інші члени гармонічного ряду послідовно розіб'ємо на групи, по 2, 4, 8, …, 2^{k-1}, … членів в кожній

$$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2}; \quad \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{2^2}; \quad \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{2^3}; \quad \ldots; \quad \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}};$$

…,

Тоді кожна з цих сум окремо буде більше $\frac{1}{2}$. Переконаємося в цьому, вважаючи, що в (1) по черзі $n = 2, 4, 8, \ldots, 2^{k-1}, \ldots$. Позначимо n-у часткову суму гармонійного ряду через H_n; тоді очевидно, що $H_{2k} > k \cdot \frac{1}{2}$.

Звідси випливає, що часткові суми не можуть бути обмежені зверху. Отже, ряд має нескінченну суму, тобто є розбіжним. Що й треба було довести.

2. Задачі, які обмежені певними часовими рамками

На виконання та оформлення в зошиті задачі 2.1 надається 12 хвилин (4 хвилини на кожну підзадачу).

Задача 2.1 Дослідити на збіжність дані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+4}{4n^6-2n^2+5n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n}{n^2+3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3^n+2)}$.

Розв'язання.

а) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+4}{4n^6-2n^2+5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^3+4/n^6}{4-2n^4+5n^5} = 0.$$

Оскільки $a_n = \frac{n^3+4}{4n^6-2n^2+5n} \sim \frac{n^3}{4n^6} \sim \frac{1}{n^3} = b_n$, застосуємо граничну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, що збігається:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(n^3+4)}{4n^6-2n^2+5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+4n^2}{4n^5-2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+4/n^3}{4-2/n^4+5/n^5} = \frac{1}{4} \ \binom{\neq 0}{\neq \infty}.$$

Отже, ці ряди поводять себе однаково щодо збіжності, тобто даний ряд теж збігається.

Відповідь: ряд збігається.

б) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{n}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1/n}{1+3/n^2} = \sin 0 = 0.$$

Порівняємо даний ряд з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. За граничною ознакою:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(n/(n^2+3)\right)}{1/n} = 1 \ \binom{\neq 0}{\neq \infty}.$$

Отже, даний ряд розбігається.

Відповідь: ряд розбігається.

в) Необхідна ознака збіжності виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(3^n+2)} = 0.$$

Застосуємо основну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Цей ряд збігається, як складений з членів геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{1}{3} < 1$. Справедлива нерівність:

$$a_n = \frac{1}{n(3^n+2)} \le \frac{1}{3^n+2} \le \frac{1}{3^n} = b_n,$$

Тобто члени даного ряду не перевищують членів збіжного еталонного ряду. Таким чином, цей ряд збігається.

Відповідь: ряд збігається.

3. Задачі, які вимагають використати взаємодопомогу і взаємоконтроль

Задачу 3.1 здобувачі освіти виконують в парах; задачу 3.2 кожен виконує окремо, після завершення розв’язання в заздалегідь визначених парах перевіряють отримані відповіді один одного.

Задача 3.1 З’ясувати збігається чи розбігається ряд

$$\frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \cdots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \cdots$$

Розв’язання. Обчислимо границю за ознакою Д’Аламбера:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\left(n!\,(n+1)\right)^2}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n)!}{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n!)^2(n+1)^2}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+2n+4n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}.$$

Поділимо чисельник знаменник на n^2:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+2n+1}{n^2}}{\frac{4n^2+6n+2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{4} < 1.$$

Отже, ряд збігається.

Відповідь: ряд збігається.

Задача 3.2 Дослідіть ряди на збіжність. Вкажіть ознаку збіжності, яку застосовували під час розв'язання задачі.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; в) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$.

а) Обчислюємо границю

$$q = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} : \frac{3^n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot n^2}{3^n \cdot (n+1)^2} = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 =$$

$$3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 3.$$

Оскільки $q = 3 > 1$, то ряд розбіжний за ознакою Д'Аламбера.

Відповідь: ряд розбіжний.

б) Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},$$

то доцільно застосовувати ознаку Коші.

Обчислюємо границю

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e} < 1.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ збіжний, тому збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Відповідь: ряд збіжний.

в) Ознаку Д'Аламбера ми не можемо застосувати до цього ряду, тому що

$$q_n = \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} \to 1$$

(при цьому $q_n < 1$). Скористаємося ознакою Раабе:

$$r_n = n\left(\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2} - 1\right) = \frac{(6n-1)n}{(2n-1)^2}.$$

Так як $r = \lim r_n = \frac{3}{2} > 1$, то ряд збігається.

Відповідь: ряд збіжний.