Міністерство освіти і науки України
Херсонський державний університет
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

РОЗМІРНІСТЬ ДОБУТКІВ ТОПОЛОГІЧНИХ ПРОСТОРІВ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала: студентка 2-го курсу, 221М групи
Спеціальності: 014 Середня освіта
Спеціалізація: 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти
Медведська Вікторія Олегівна
Керівник доктор фізико-математичних наук, професор Савченко Олександр Григорович
Рецензент доцентка кафедри інформаційних технологій та фіз.-мат. дисциплін Херсонської філії Національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова, кандидатка технічних наук Литвиненко О.І.

Івано-Франківськ – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Добуток топологічних просторів являє собою топологічний простір, який одержується як множина за допомогою декартового добутку вихідних топологічних просторів, та який володіє природною топологією. Ця топологія має назву топології добутку або тихонівської топології. Ця топологія вперше була досліджена математиком А.Н. Тихоновим у 1926 році [24].

Тихонов по відношенню до добутків просторів зробив неймовірне відкриття – це подання площини та тривимірного простору у вигляді добутку двох або, відповідно, трьох числових прямих. Природним узагальненням цього подання є n-вимірний куб як добуток n відрізків, який згодом отримав назву «тихонівського кубу» [7].

У подальшому Тихонову належить теорема, яка доводить бікомпактність тихонівського добутку довільної родини бікомпактних топологічних просторів.

За побудовою топологічні простори різняться та кожен тип володіє певними властивостями. П.С. Урисон довів достатньо важливе твердження, так звана «лема Урисона» [13], яка виражає той факт, що у визначенні нормального простору можна геометричну віддільність замінити на функціональну. Для регулярних просторів аналогічне твердження вже не має місця: більш того, існують навіть такий регулярний простір, у якому немає жодних неперервних функцій, окрім констант. Тому одержуємо суттєво новий клас топологічних просторів, більш загальний, ніж нормальні, та менш загальній, ніж регулярні простори, розглядаючи разом з А.Н. Тихоновим хаусдорфові простори, в яких кожна точка функціонально віддільна від кожної замкненої множини, яка не містить цю точку. Ці простори, які отримали назву цілком регулярних або тихонівських, виявилися виключно важливими як для самої топології, так і для різноманітних її застосувань (в алгебрі, функціональному аналізі тощо).

Мета даної роботи полягає у вивченні питання встановлення розмірності добутків топологічних просторів.

Об'єктом дослідження виступають бікомпактні хаусдорфові простори, а *предметом* дослідження – безпосередньо добутки таких просторів

Завдання дослідження:

1) аналіз наукової літератури з теми дослідження;
2) розгляд питання будови компактів;
3) розкриття питання визначення розмірності добутків топологічних просторів.

Методи, що використовували у дослідженні: теоретичний аналіз літератури з теми дослідження, методи неперервних відображень множин.

Теоретичне значення дослідження: систематизовані основні властивості компактних, бікомпактних топологічних просторів та їх добутків.

Практичне значення полягає у тому, що наведений матеріал з теорії тихонівських добутків може бути використаний здобувачами вищої освіти.

Дослідження виконувалося в межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) по кафедрі алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

В структурі роботи виділено три основні розділи. Перший розділ містить теоретичний матеріал, що стосується загальної теорії топологічних просторів. В другому розділі наведено твердження, що стосуються будови компактів. Зокрема, наведено властивості таких типів топологічних просторів, як компактні, паракомпактні, фінально компактні простори. В третьому розділі розкрито питання визначення розмірності добутків топологічних просторів. Так, в ньому наведено поняття добутку топологічних просторів, приклади топологічних добутків, а також теореми Тихонова, що розкривають питання стосовно розмірності добутків топологічних просторів.

РОЗДІЛ 1
ДЕЯКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ТОПОЛОГІЧНИХ ПРОСТОРІВ

На множині *E* задана метрика $\rho(x;y)$: якщо визначена функція

$$\rho(x;y):\ E\times E\to R_{+}=\{x|x\in R^{1},x\geq 0\}$$

і виконуються умови:

1. $\forall x,y\in E$, $\rho(x,y)\geq 0; \rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y;$
2. $\forall x,y\in E$, $\rho(x,y)=\rho(y,x);$
3. $\forall x,y,z\in E \quad \rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,y).$

При цьому пара (E,ρ) називається *метричним простором*.

Сферою з центром a радіуса *R* > 0 називається множина $\{x\in E|\rho(a,x)=R\}$. *Відкритою* (*замкненою*) кулею з центром a радіуса *R* > 0 називається множина

$$S_a(R)=\{x\in E|\rho(a,x)<R\}(B_a(R)=\{x\in E|\rho(a,x)\leq R\}).$$

Підмножина *A* ⊂ *E* метричного простору (E,ρ) називається *обмеженою*, якщо існує куля в якій вона міститься.

Нехай *E* – векторний простір над полем дійсних або комплексних чисел. *Нормою* у векторному просторі *E* називається будь-яка функція $E \ni x\to\|x\|\in R_{+}$, для якої виконуються умови:

1. $\forall x\in E, \|x\|>0; \|x\|=0 \Leftrightarrow x=0,$
2. $\forall x\in E, \|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|, \lambda\in K,$
3. $\forall x,y\in E, \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|.$

Якщо у векторному просторі *E* задана норма, то *E* – нормований векторний простір [5].

Якщо *E* – нормований простір, то в ньому можна визначити відстань $\rho(x,y)=\|x-y\|$, де ρ задовольняє умовам:

$$\rho(x-z,y-z)=\rho(x,y) \text{ і } \rho(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|\rho(x,y).$$

Навпаки, якщо ρ задовольняє зазначеним властивостям, то відстань задається нормою $\|x\|=\rho(x,0)$.

В інших випадках у метричному просторі відстань не обов'язково задається нормою. В нормованому просторі куля і сфера з центром в x_0 мають вигляд

$$\{x\,|\,\|x-x_0\|=R\} \text{ і } \{x\,|\,\|x-x_0\|<R\}.$$

Відрізком з кінцями a і b у векторному просторі називається множина усіх точок виду $ta+(1-t)b,\ 0\le t\le 1$ і позначають $[a,b]$.

Підмножина A метричного простору (E,ρ) називається *відкритою*, якщо разом з кожною своєю точкою вона містить деяку відкриту кулю з центром у цій точці.

Властивості відкритих множин:

1. Множини E і Ø – відкриті.
2. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ – відкрите, якщо A_i відкриті.
3. $\bigcup\limits_{i} A_i$ – відкрите, якщо A_i відкриті.

Аксіома Хаусдорфа. Для будь-яких a і $b\in E$ існують дві відкриті підмножини $A,\ B\ \subseteq E$, які не перетинаються і включають a і b відповідно.

Дійсно,

$$A=\left\{x\,\middle|\,\rho(a,x)<\frac{d}{3}\right\}, B=\left\{x\,\middle|\,\rho(b,x)<\frac{d}{3}\right\}, d=\rho(a,b).$$

$A,\ B$ – відкриті і не мають спільних точок, в протилежному випадку, якщо $c\in A, c\in B$, то

$$\rho(a,b)\le\rho(a,c)+\rho(c,b)<\frac{2d}{3}$$

що невірно.

Множина *B* – *замкнена* в *E*, якщо $E \setminus B = CB$ – відкрита.

Властивості замкнених множин.

1. Множини *E*, Ø – замкнені.

2. $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ – замкнена, якщо B_i – замкнені.

3. $\bigcap_{i} B_i$ – замкнена, якщо B_i – замкнені.

Зауваження. Існують підмножини, що не є ані замкненими, ані відкритими. Наприклад: $[a,b)$ у R^1 [17].

Околом точки $a \in E$ називається довільна підмножина *E*, яка містить точку a разом з деякою відкритою кулею з центром в a.

Теорема 1.1. Для того, щоб підмножина *A* простору (E,ρ) була відкритою, необхідно і достатньо, щоб вона була околом кожної своєї точки .

Замиканням $\overline{A}$ підмножини *A* називається перетин усіх замкнених підмножин *E*, які містять *A*.

$\overline{A}$ – замкнена (за властивістю замкнених множин).

$\overline{A}$ – мінімальна замкнена множина, що містить *A*.

Точка $a \in E$ називається *граничною точкою* підмножини *A*, якщо у будь-якому околі точки a є точки множини *A*, відмінні від a.

Теорема 1.2. Замкнена множина містить усі свої граничні точки.

Доведення.

Нехай a – гранична точка для множини *B*. Припустимо, що $a \notin B \mapsto a \in CB$ – відкрита множина. Тоді існує відкрита куля з центром в a, що належить *CB*, тобто не має спільних точок з *B*. Прийшли до протиріччя, отже, замкнена множина містить усі свої граничні точки.

Теорема 1.3. $\overline{A}$ одержується з *A* шляхом приєднання до *A* її граничних точок.

Нижче A' – множина граничних точок множини *A*.

Нехай $f: E \to F$ (E, F – метричні простори з відповідними метриками ρ_E, ρ_F). Функція f неперервна в точці $a \in E$, якщо для $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon)$ така, що для будь-якого $x \in E$ такого, що $\rho_E(x,a) < \delta$ випливає, що $\rho_F(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Іншими словами це означення можна перефразувати. Функція f – неперервна в точці $a \in E$, якщо для будь-якої кулі у просторі F з центром в $f(a)$ існує куля у просторі E з центром в a, образ якої при відображенні f міститься у першій кулі. Для будь-якого околу $V \subset F$ точки $f(a)$ існує окіл $U \subset E$ точки a, що $f(U) \subset V$.

Теорема 1.4. Для того, щоб відображення f метричного простору E на метричний простір F було неперервним, необхідно і достатньо, щоб прообраз при відображенні f довільної відкритої множини F був відкритою множиною в E.

Доведення.

Необхідність. Нехай відображення f неперервне, а $B \subset F$ відкрита множина і $A = f^{-1}(B)$. Якщо $a \in A$, то, так як відображення f неперервне в a і B – окіл $f(a)$, то A – окіл a. Тобто A – окіл кожної своєї точки, A – відкрита множина.

Достатність. Нехай $a \in E$ і V – окіл точки $f(a)$. Тоді V містить відкриту підмножину B, що містить $f(a)$. Прообраз $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(B)$ – відкрита множина, $f^{-1}(B) \ni a \mapsto f^{-1}(V)$ окіл a, що доводить неперервність f.

Зауваження. Теорема справедлива, якщо замінити відкриту множину на замкнену [15].

Теорема 1.5. Норма в нормованому векторному просторі E, яка розглядається як відображення $E \to R^1$ з природною метрикою, є неперервною функцією.

Доведення.

Враховуючи нерівність $\|x-a\| \geq \big|\|x\|-\|a\|\big|$ маємо, що $\forall \varepsilon > 0; \delta = \varepsilon$ з нерівності $\|x-a\| = \rho(x,a) < \delta = \varepsilon$ випливає

$$\big|\|x\|-\|a\|\big| = |f(x)-f(a)| < \varepsilon,$$

тобто $f(x) = \|x\|$ неперервна $\forall a \in E$.

Теорема 1.6. Композиція двох неперервних відображень – неперервна.

Доведення.

Нехай $f : E \to F$ і $g : F \to G$ (E, F, G – метричні простори) і $h = g \circ f$. Нехай f – неперервна в довільній точці $a \in E$, а g - неперервна в $b = f(a) \in F$. Візьмемо для $c = h(a) = g(b)$ довільний окіл $W \subset G$. Так як g – неперервне відображення в b, то $V = g^{-1}(W)$ окіл b в F, а так як f – неперервне в a, то $f^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ окіл a. З того, що $f^{-1}(g^{-1}(W)) = h^{-1}(W)$ випливає неперервність h в a, а отже, і в E.

Гомеоморфізмом метричного простору E на метричний простір F називається бієкція E на F, неперервна разом зі своєю оберненою функцією.

Теорема 1.7. Для того, щоб бієктивне і неперервне відображення $f : E \to F$ було гомеоморфізмом, необхідно і достатньо, щоб образ при відображенні f кожної відкритої множини із E був відкритим в F. (Аналогічно із замкненим).

Метричні простори E і F *гомеоморфні*, якщо існує хоча б один гомеоморфізм просторів E і F. У цьому випадку обидва простори мають однакові топологічні властивості, тобто властивості, що стосуються відкритих, замкнених множин та околів.

Для означення систем відкритих і замкнених множин, околів, неперервних функцій не обов'язково мати метрику [19]. Все це можна визначити, виходячи з систем відкритих множини. Може статися, що дві різні метрики визначають одну і ту ж систему відкритих множин, тоді вони визначають однакові системи замкнених множин, околів і т.д. Наприклад, $\rho(x, y)$ і $2\rho(x, y)$, визначені на довільній множині E.

Дві метрики у просторі E називаються *еквівалентними*, якщо вони визначають одну і ту ж систему відкритих множин (топологію).

Це означення можна перефразувати наступним чином: тотожне відображення E (наділене однією метрикою) на E (наділене другою метрикою) є гомеоморфізмом.

У векторному просторі дві норми еквівалентні, якщо еквівалентні відповідні їм метрики [9].

Теорема 1.8. Дві норми $\| \|_1$ і $\| \|_2$ на деякому векторному просторі E еквівалентні тоді і тільки тоді, коли існують такі додатні сталі k_1, k_2, що $\forall x \in E$ мають місце нерівності: $\|x\|_2 \le k_1\|x\|_1 \quad i \quad \|x\|_1 \le k_2\|x\|_2$.

Доведення.

Необхідність. Позначимо через $B_1(R)$ $(B_2(R))$ замкнену кулю з центром в точці 0 радіуса R у розумінні $\| \|_1$ $(\| \|_2)$. Нехай норми еквівалентні. Тоді $B_1(1)$ – окіл 0 одночасно в обох метриках, отже $\exists \frac{1}{k_2}$ таке, що $B_1(1) \supset B_2\left(\frac{1}{k_2}\right)$. За допомогою гомотетії з коефіцієнтом k_2R отримуємо включення $B_1(k_2R) \supset B_2(R)$, що означає: з нерівності $\| x\|_2 \le R$ $\mapsto \|x\|_1 \le k_2R$. Так як перша нерівність справедлива для $\|x\|_2 = R$, то друга дає при цьому $\|x\|_1 \le k_2\|x\|_2$. Міняючи місцями $\| \|_1$ і $\| \|_2$ одержимо другу нерівність.

Достатність. Якщо умова теореми виконується, то із нерівності $\|x\|_2 \le \frac{R}{k_2}$ і другої нерівності випливає $\|x\|_1 \le R$, тобто $B_2\left(\frac{R}{k_2}\right) \subset B_1(R)$. Звідси випливає, що будь-яка куля у першій метриці заздалегідь містить деяку кулю у другій метриці, і навпаки. За допомогою паралельного перенесення включення переносяться на кулі з довільним центром.

Нехай $A \subset E$ відкрита у розумінні метрики 1, тоді $\forall x \in A \quad \exists B_1(R, x) \subset A,$ але тоді випливає: $x \in B_2\left(\frac{R}{k_2}, x\right) \subset A$, тобто A – окіл кожної своєї точки у розумінні метрики $\| \ \|_2$, тобто відкрита у другій метриці. Аналогічно в обернену сторону, якщо поміняти $\| \ \|_1$ і $\| \ \|_2$ місцями і скористатися першою нерівністю. Таким чином, обидві метрики задають одну і ту ж систему відкритих множин.

Наслідок. Усі три норми, визначені вище у R^n – еквівалентні.

Має місце більш загальне твердження.

Теорема 1.9. В скінченновимірному векторному просторі над полем дійсних або комплексних чисел будь-які дві норми еквівалентні. Існує єдина система відкритих множин для будь-яких введених у ньому норм.

Зауваження.

1. Ця властивість не переноситься на нескінченновимірні векторні простори [6].

2. Якщо властивість топологічна (тобто залежить від системи відкритих множин, а не від метрики) у нормованому скінченновимірному просторі, то в незалежності від того, яку конкретну норму обрано, вона виконується.

E називається *топологічним простором*, якщо в ньому виділено клас підмножин, відкритих у цій топології, які задовольняють властивостям відкритих множин.

Нормовані простори є метричними просторами, а ті, в свою чергу, – топологічними просторами. Топологічний простір буде метризованим, якщо існує така метрика, яка породжує топологію.

РОЗДІЛ 2
БУДОВА ТА ВЛАСТИВОСТІ КОМПАКТІВ

2.1. Бікомпактні та паракомпактні простори

Топологічний простір називається

(A_1) *бікомпактним,*

(A_2) *фінально-компактним,*

(A_3) *паракомпактним,*

(A_4) *сильно паракомпактним,*

якщо в довільне відкрите покриття Ω цього простору можна вписати відкрите покриття ω , яке є відповідно

(a_1) *скінченним,*

(a_2) *зчисленним,*

(a_3) *локально скінченним,*

(a_4) *зірчасто скінченним* [18].

Таким чином, довільний бікомпактний простір є фінально компактним, а також сильно паракомпактним, а довільний сильно паракомпактний простір паракомпактний.

При визначені бікомпактних та фінально компактних просторів можна навіть припустити, що скінченне, відповідно зчисленне, покриття ω, вписане в Ω, складається з елементів самого Ω, тобто є підпокриттям покриття Ω. Дійсно, якщо в покриття Ω вписане скінченне, відповідно зчисленне, покриття ω, то кожен елемент $o_1 \in \omega$ міститься в деякому елементі покриття Ω, який позначимо через O_i. При цьому i в першому випадку пробігає скінченну множину значень $i = 1,2, \dots, s$, а у другому – усі натуральні значення $i = 1,2,3,. . .$ Тоді система $\{O_i\}$ утворює підпокриття покриття Ω, скінченне в першому, зчисленне в другому випадку.

Таким чином, приходимо до початкової форми означення бікомпактності, відповідно фінальної компактності.

Топологічний простір X називається *бікомпактним*, відповідно *фінально компактним*, якщо кожне відкрите покриття простору X містить скінченне, відповідно зчисленне, підпокриття цього простору.

Що стосується бікомпактних просторів, наведене означення можна подати в іншій формі; перш за все, нагадаємо, що:

Система $\sigma = \{M\}$ довільних множин $M \subseteq X$ називається *центрованою*, якщо будь-яка скінченна підсистема $\sigma_0 = \{M_0, . \ . \ ., M_n\}$ системи σ має непустий перетин.

Має місце

Твердження 2.1. Простір X бікомпактний тоді і тільки тоді , коли будь-яка центрована система $\sigma = \{\Phi\}$ замкнених множин простору X має непустий перетин.

Дійсно, нехай X бікомпактний і $\sigma = \{\Phi\}$ – центрована система замкнених множин $\Phi \subseteq X$. Якбт перетин $\bigcup_{\Phi \in \sigma} \Phi$ був пустий, то доповняльні множини $\Gamma = X \setminus \Phi$ до множин $\Phi \in \sigma$ складали б (відкрите) покриття ω простору X [15]; нехай $\omega_0 = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_s\}$ – скінченне підпокриття $\omega_0 \subseteq \omega$ простору X (відповідно до бікомпактності X); тоді для $\Phi_i = \mathrm{X} \setminus \Gamma_i$, $i = 1, \dots, s$, $\Phi_i \in \sigma$, отримали б $\Phi_1 \cap \dots \cap \Phi_s = \Lambda$ всупереч центрованості системи σ.

Обернено, нехай в X будь-яка центрована система замкнених множин має непустий перетин. Доведемо, що X бікомпактний. Нехай $\Omega = \{\Gamma\}$ – будь-яке відкрите покриття простору X. Тоді замкнені множини $\Phi = \Gamma \setminus \mathrm{X}$, де Γ пробігає всі Ω, мають пустий перетин. Виходячи з цього, система $\{\Phi\}$ цих замкнених множин не центрована , тобто

$\Phi_1 \cap \ldots \cap \Phi_s = \Lambda$ для деяких $\Phi_i = \mathrm{X} \setminus \Gamma_i$, $i = 1,2,\ldots,s$, $\Gamma_i \subseteq \Omega$.
Тоді $\omega = \{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_s\}$ є скінченне покриття простору X , що є підпокриттям покриття Ω.

Легкою видозміною твердження 1 є

Твердження $2.1'$. Простір *X* бікомпактний тоді і тільки тоді, якщо для будь-якої центрованої системи (довільних) множин $\sigma = \{M\}$, $M \subseteq X$, множина $\bigcap_{M\in\sigma}[M]$ непуста.

Дійсно, із центрованості системи $\sigma = \{M\}$ випливає центрованість системи $\bar{\sigma} = \{[M]\}$; тому, якщо *X* бікомпактний, то для довільної центрованої системи маємо $\bigcap_{M\in\sigma}[M] \neq \Lambda$ в силу твердження 2.1. Обернено, з непустоти множини $\bigcap_{M\in\sigma}[M]$ для довільної центрованої системи $\bar{\sigma} = \{[M]\}$ випливає непустота $\bigcap_{F\in\sigma} F$ для довільної центрованої системи $\sigma = \{F\}$ замкнених множин.

Зауваження 2.1. Особливо не акцентуючи увагу на цьому, ми будемо розглядати лиш такі системи множин, усі елементи яких є підмножинами однієї й тієї ж завчасно заданої множини *X*. У цьому припущенні назвемо центровану систему *максимальною*, якщо вона не є підсистемою жодної відмінної від неї центрованої системи. За допомогою трансфінітної індукції [16] легко доводиться, що будь-яка центрована система σ_o підмножин множини *X* є підсистемою деякої максимальної центрованої системи σ (підмножин тієї ж множини *X*).

Дійсно, якщо система σ_o не максимальна, то беремо довільну центровану систему $\sigma_1 \supset \sigma_0$. Взагалі, якщо для даного порядкового числа α побудована центрована система σ_α і вона не максимальна, то беремо центровану систему $\sigma_{\alpha+1} \supset \sigma_\alpha$. Якщо для усіх порядкових чисел α, менших за деяке граничне трансфінітне число λ, побудовані центровані системи σ_α так , що при $\alpha < \alpha' < \lambda$ маємо $\sigma_\alpha \subset \sigma_{\alpha'}$, то допускаємо $\sigma_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \sigma_\alpha$. Тоді система σ_λ також центрована.

Побудова обривається на деякій центрованій системі σ_α, за необхідності максимальній (в іншому випадку існувала б $\sigma_{\alpha+1} \supset \sigma_\alpha$).

З цього зауваження випливає, що у формулюванні твердження $2.1'$ можна обмежитися одними лиш максимальними центрованими системами, тому справедливе

Твердження $2.1''$. Простір X тоді і тільки тоді бікомпактний, коли для будь-якої максимальної центрованої системи $\sigma = \{M\}$ множин $M \subseteq X$ перетин $\bigcap_{M\in\sigma}[M]$ непустий.

У подальшому параграфі ми використаємо критерій бікомпактності.

Твердження 2.2. Будь-який топологічний простір, що є неперервним образом бікомпактного, відповідно фінально компатного, топологічного простору бікомпактний, відповідно фінально компактний.

Нехай $f: X \to Y$ – неперервне відображення бікомпактного (відповідно фінально компактного) простору X на простір Y. Нехай $\Omega_Y = \{G\}$ – довільне відкрите покриття простору Y. Тоді множини $f^{-1}G$ утворюють відкрите покриття $\Omega_X = f^{-1}\Omega_Y$ простору X. Так як X бікомпактний (відповідно фінально компактний), то маємо скінченне (відповідно зчисленне) підпокриття

$$\omega_X = \{f^{-1}G_l\} \subseteq \Omega_X$$

простору X; тоді $\omega_Y = \{G_i\}$ є скінченне (відповідно зчисленне) покриття простору Y, що міститься в Ω_Y. Твердження 2.2 доведено.

Твердження 2.3. Нехай $\Phi \subseteq X$ – замкнена множина в просторі X і нехай $\Omega = \{O_\alpha\}$ – довільне відкрите в X покриття множини Φ (тобто покриття, елементами якого є відкриті в X множини). Якщо X – простір, що входить в один з класів (A_1),(A_2),(A_3),(A_4), то існує вписане в Ω відкрите в X покриття ω множини Φ, що належить відповідно класу $(a_1), (a_2), (a_3), (a_4)$.

Сформуємо відкрите покриття Ω' всього простору X, що складається з усіх елементів $O_\alpha \in \Omega$ і з елемента $\Gamma = X \setminus \Phi$. Якщо простір X належить до класу $(A_i), i = 1,2,3,4$, то існує вписане в Ω' покриття ω' простору X, що належить до класу (a_i); викидаючи з нього елементи, які лежать в $\Gamma = X \setminus \Phi$, отримаємо шукане відкрите в X покриття ω множини Φ, що належить до того ж класу (a_i).

Важливим наслідком твердження 2.3 є

Твердження 2.4. Замкнений простір $\Phi \in X$ простору X класу $(A_i), i = 1,2,3,4$ є простір того ж класу (A_i).

Дійсно, нехай $\omega = \{O_\alpha\}$ – довільне покриття множини Φ відкритими в Φ множинами O_α. Потрібно знайти вписане в ω і відкрите в Φ покриття ω_0 класу (a_i). Для цього для довільного $O_\alpha \in \omega$ візьмемо відкриту в X множину O_α за умови, що $\Phi \cap O_\alpha = o_\alpha$. Множини O_α формують відкрите в X покриття Ω множини Φ. Згідно з твердженням 2.3 існує приналежний до класу (a_i) відкрите в X покриття $\gamma = \{\Gamma_\lambda\}$, вписане в Ω; тоді множини $U_\alpha = \Phi \setminus \Gamma_\alpha$ формують вписане в ω відкрите та належить до класу (a_i) покриття множини Φ, що і треба було довести.

Отже, усі чотири властивості: бікомпактністі, фінальної компактності, паракомпактності та сильної паракомпактності – наслідкові по замкнутим множинам.

Формулювання твердження 2.4, що стосується випадку $i = 1$, допускає частинний випадок – ним є наступне, також дуже важливе

Твердження 2.5. Якщо бікомпактний простір X_0 є підпростором хаусдорфого простору X, то множина X_0 замкнена в просторі X.

Доведення.

Візьмемо довільну точку $\xi \in X \setminus X_0$. Так як X – хаусдорфовий простір, то для кожної точки $x \in X_0$ можна знайти ті, що не перетинаються, та відкриті в X множини $O_x\xi$ і O_x, що містять відповідно точку ξ та точку x [8]. Коли x пробігає усі точки множини X_0, то виділені множини O_x покривають усі X_0; так як підпростір X_0 бікомпактний, то з системи $\{O_x\}$ можна обрати скінченну підсистему $O_{x_1}, \dots, O_{x_s}$, яка так само покриває усі X_0. Околи

$$OX_0 = Ox_1 \cup \dots \cup Ox_s \text{ і } O\xi = O_{x_1}\xi \cap \dots \cap O_{x_s}\xi$$

не перетинаються, отже, $[OX_0]x \cap O\xi = \Lambda$, з чого випливає, що точка ξ не є точкою дотику множини X_0 в просторі X, а так як ξ – довільна точка множини $X \setminus X_0$, то множина X_0 замкнена, що і треба було довести.

З тверджень 2.2, 2.4 та 2.5 випливає

Твердження 2.6. Будь-яке неперервне відображення $f: X \to Y$ бікомпактного топологічного простору X в хаусдорфовий простір Y замкнене.

Нехай F замкнена в X; в силу твердження 2.4 множина F є бікомпактним підпростором простору X; за твердженням 2.2 підпростір fF простору Y бікомпактний і в силу твердження 2.5 замкнений в хаусдорфовому просторі Y

Наслідок 2.1. Будь-яке взаємно-однозначне неперервне відображення бікомпактного топологічного простору X в хаусдорфовий простір Y є топологічним.

Дійсно [13], топологічним є будь-яке взаємно-однозначне неперервне замкнене відображення.

Топологічний простір X називається *колективно нормальним*, якщо довільна його дискретна система замкнених множин $F_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}$, має диз’юнктну систему околів $O_\alpha \supseteq F_\alpha$.

Очевидно, що колективна нормальність є більш сильною властивістю, ніж нормальність.

Твердження 2.7. У колективно нормальному просторі X для довільної дискретної системи замкнених множин $F_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}$, існує дискретна система околів $V_\alpha \supseteq F_\alpha , \alpha \in \mathfrak{A}$.

Доведення.

За умовою в X існує диз'юнктна система відкритих множин $O_\alpha \supseteq F_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}$. Нехай $\Phi = X \setminus \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} O_\alpha$. Оскільки система множин F_α дискретна, то вона консервативна. Тому множина $F = \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} F_\alpha$ замкнена і, в силу нормальності X, існує окіл $O\Phi$ множини Φ, замикання якого не перетинає F. Припустимо $V_\alpha = O_\alpha \setminus [O\Phi]$. Система $\{V_\alpha\}$ дискретна. Дійсно, якщо $x \in \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} O_\alpha$, то відкрита множина O_{α_0}, що містить точку x, не перетинає множини $V_\alpha \neq V_{\alpha_0}$. Якщо ж $x \in \Phi$, то відкрита множина $O\Phi \ni x$ не перетинається з жодним V_α. Твердження 2.7 доведено.

Твердження 2.8. Будь-який хаусдорфовий паракомпактний (отже, будь-який хаусдорфовий бікомпактний) простір колективно нормальний.

Доведення.

Нехай X – хаусдорфовий паракомпактний простір. Спершу доведемо, що X регулярний. Нехай дано: замкнена множина $\Phi \subset X$ і точка $a \in X \setminus \Phi$. Для кожної точки $x \in \Phi$ існують околи $O_x a$ і $O_a x$, які не перетинаються – відповідно точки a та x. В покриття $\{O_a x\}$ замкнутої множини Φ в силу твердження 3 можна вписати локально скінченне відкрите в X покриття $\omega = \{o_\lambda\}$.

Кожне o_λ міститься в деякому $O_a x$, причому $O_a x \subseteq X \setminus \{a\}$, тому і $[o_\lambda] \subseteq X \setminus \{a\}$. Але $\omega = \{o_\lambda\}$ є локально скінченна, а отже консервативна система множин, тому

$$[\widetilde{\omega}] = \left[\bigcup_\lambda o_\lambda\right] = \bigcup_\lambda [o_\lambda] \subseteq X \setminus \{a\}$$

так, що $Ua = X \setminus [\widetilde{\omega}]$ є окіл точки a, з іншого боку $U\Phi = \widetilde{\omega}$ є окіл множини Φ і , очевидно, $Ua \cap\ U\Phi = \Lambda$.

Регулярність простору X доведена.

Переходимо до доведення колективної нормальності простору. Розглянемо дискретну в X систему замкнутих множин $F_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}$. В силу регулярності X кожній точці $x \in X$ належить окіл O_x, замикання якого перетинає не більш однієї множини F_α [5]. В покриття $\{O_x\}$ впишемо локально скінченне відкрите покриття $\{U_\lambda\}$. Покриття $\{[U_\lambda]\}$ так само локально скінченне і кожний його елемент перетинає не більше однієї множини F_α. Тому система множин

$$O_\lambda = X \setminus \bigcup_{[U_\lambda]\cap F_\alpha=\Lambda}[U_\lambda] \supseteq F_\alpha, \quad \alpha \in \mathfrak{A},$$

відкрита і диз'юнктна, що і треба було довести.

Бікомпактні хаусдорфові простори називаються для скорочення *бікомпактами*, а паракомпактні хаусдорфові простори – *паракомпактами*. Ми довели, що усі паракомпакти – нормальні простори. Далі ми побачимо, що усі нормальні простори із зчисленною базою гомеоморфні множинам, що лежать в гільбертовій цеглині [16] і, отже, метризовані і мають потужність $\leq c$, тому метризовані і всі паракомпакти із зчисленною базою.

2.2. Компакти та фінально компакні простори

Метризовані бікомпакти називаються *компактами*.

Як відомо, в будь-якому компакті (множина точок якого нескінченна) міститься зчисленна всюду щільна множина і є зчисленна база [21]. Звідси і з того, що всі бікомпакти із зчисленною базою метризовані, випливає, що компакти можуть бути визначені як бікомпакти зі зчисленною базою.

Бікомпактність метричного простору еквівалентна тому, що з будь-якої послідовності точок простору можна виділити збіжну підпослідовність. Звідси випливає, що будь-який компакт X в довільній своїй метриці є повним метричним простором. Він є цілком *обмеженим* метричним простором, що означає, що при довільному $\varepsilon > 0$ простір X має скінченне ε – покриття.

Має місце і обернена

Теорема Хаусдорфа. Будь-який цілком обмежений повний метричний простір є компактом.

Зауважимо також, що підпростір цілком обмеженого простору (зокрема, компакту) цілком обмежений.

За допомогою тільки-но сформульованої теореми Хаусдорфа легко доводиться, що гільбертова цеглина Q^{∞} є компактом.

Дійсно, як замкнена множина повного метричного простору , а саме всього гільбертового простору R^{∞}, підпростір Q^{∞} є повним метричним простором.

Доведемо, що Q^{∞} цілком обмежений. Зафіксувавши будь-яке натуральне число N, поставимо у відповідність кожній точці $x = (x_1, \dots x_N, \dots) \in Q^{\infty}$ точку $f_N x = (x_1, \cdots, x_N)$ N-вимірного паралелепіпеда $Q^N \subseteq Q^{\infty}$, що складається з усіх точок $x \in Q^{\infty}$, у яких усі координати, починаючи з $(N+1)$, дорівнюють нулю. При довільному малому $\varepsilon > 0$ і достатньо великому N відображення $f_N: Q^{\infty} \longrightarrow Q^N$ має властивість $\rho(x, fx) < \varepsilon$, тобто є так званим ε-зрушенням і тоді прообраз $f_N^{-1} E$ будь-якої множини $E \subset Q^N$діаметру $< \varepsilon$ має діаметр $< 3_{\varepsilon}$. Але N-вимірний паралелепіпед Q^N має скінченне ε-покриття $\alpha = \{E_1, \dots, E_s\}$; отже, цеглина Q^{∞} має 3_{ε}-покриття, яке складається з множин $f_N^{-1} E_1, \dots, f_N^{-1} E_s$. Так як це справедливо при будь-якому $\varepsilon > 0$, то повна обмеженість , а отже, і бікомпактність цеглини Q^{∞} доведені.

Теорема 2.2. Незчисленний компакт *Ф* має потужність $\geq c$.

Доведення.

Покажемо, що в Φ можна знайти диз'юнктну пару замкнених зчисленних множин Φ_0 і Φ_1. Спершу покажемо існування такої точки $x_0 \in \Phi$, що (а) довільний окіл точки x_0 незчисленний. Припустимо, що такої точки x_0 в Φ немає. Тоді для кожної точки $x \in \Phi$ можна обрати зчисленний окіл Ox. З покриття $\{Ox\}$, $x \in \Phi$ можна обрати скінченне підпокриття $\{Ox_i\}, i = 1, \dots, s$. Так як $\Phi = \bigcup_{i=1}^{s} Ox_i$ і множини Ox_i

зчисленні, то зчисленний і сам компакт Φ всупереч умовам. Отже, потрібна точка x_0 існує.

Покажемо, що (б) точка x_0 , що задовольняє умову (а), має окіл Ox_0, доповнення до якого незчисленне. Припустимо, що вказаний окіл Ox_0 не існує. Тоді доповнення $F_n = X \setminus O(x_0, \frac{1}{n})$ до $\frac{1}{n}$ -околу x_0 зчисленне для довільного $n = 1,2,3, \dots$ Але тоді всупереч умові зчисленний і компакт $\Phi = x_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Отже, потрібний окіл Ox_0 існує.

Оберемо окіл Vx_0 точки x_0 з замиканням, яке міститься в Ox_0. Тоді множини $\Phi_0 = [Vx_0]$ і $\Phi_1 = X \setminus Ox_0$ диз'юнктні, замкнуті в Φ і незчисленні.

Аналогічно, в Φ_{i_1}, $i_1 = 0, 1$, можна знайти диз'юнктні незчисленні замкнуті множини $\Phi_{i_{1}i_{2}}, i_2 = 0, 1$. По індукції, для довільного $n = 1,2,3, \dots$ можна побудувати такі диз'юнктні замкнуті незчисленні множини $\Phi_{i_1 \dots i_n}$ (де $i_1 = 0, 1; \dots ; \ i_n = 0, 1$), що

$$\Phi_{i_1 \dots i_{n-1}} \supseteq \Phi_{i_1 \dots i_{n-1} i_n} \, , i_n = 0, 1.$$

Множини $\Phi_{i_1 \dots i_n \dots} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_{i_1 \dots i_n}$, очевидно, диз'юнктні для різних послідовностей $i_1 \dots i_n \dots$, $i_n = 0, 1$, $n = 1,2,3, \dots$ і непусті в силу бікомпактності Φ. Система φ множин $\Phi_{i_1 \dots i_n \dots}$ континуальна [8], так як континуальна система послідовностей $i_1 \dots i_n \dots$, $i_n = 0, 1$, $n = 1,2,3, \dots$ Обравши в кожній $\Phi_{i_1 \dots i_n \dots}$ по точці, отримаємо множину потужності c, що міститься в Φ. Отже, потужність $\Phi \geq c$, що і потрібно було довести.

Існують приклади хаусдорфових нерегулярних фінально компактних просторів. В той же час має місце

Твердження 2.9 (Веденісов). Регулярний фінально компактний простір *X* нормальний.

Доведення.

Розглянемо диз'юнктну пару замкнутих в X множин F_1 і F_2. Для кожної точки $x \in F_1$ візьмемо окіл $Ox \subseteq [Ox] \subseteq X \setminus F_2$. Множина F_1

замкнута в X , отже, вона фінально компактна. З її покриття $\{Ox\}$, $x \in F_1$, виділимо зчисленне підпокриття $\{O_j^1 = Ox_j\}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Зрозуміло, що $[O_j^1] \cap F_2 = \Lambda$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Аналогічно будуємо таке відкрите покриття $\{O_j^2\}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, множини F_2, що $F_1 \cap O_j^2 = \Lambda$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Існування диз'юнктних околів у множин F_1 і F_2 випливає з нормалізуючої леми. Твердження 2.9 доведено.

Дослівно, так як і твердження 2.9, доводиться наступне твердження, яке належить Смирнову [22]:

Нехай F_1 і F_2 – дві диз'юнктні замкнуті множини в регулярному просторі *X; якщо ці дві множини є фінально компактними підпросторами простору X, то вони мають в X диз'юнктні околи.*

Твердження 2.10. Будь-який простір *X,* що має зчисленну базу, фінально компактний.

Ми доведемо більше, а саме те, що простір *X* із зчисленною базою задовольняє наступній умові:

Умова Ліндельофа. У довільній системі Σ відкритих множин простору X міститься зчисленна (або скінченна) підсистема *σ,* сума елементів якої рівна сумі елементів усієї системи Σ:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\Sigma}.$$

Доведення.

Нехай $\mathfrak{B} = \{U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots\}$ - зчисленна база простору *X*. Множину $U_n \in \mathfrak{B}$ назвемо відміченим елементом бази $\mathfrak{B}$, якщо вона міститься в деякому $\Gamma \in \Sigma$. Очевидно, що тіло системи Σ співпадає з сумою усіх відмічених елементів $U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_k}, \ldots$ бази $\mathfrak{B}$. Позначимо через Γ_k будь-який елемент системи Σ , що містить даний відмічений елемент U_{n_k} бази $\mathfrak{B}$. Система усіх відібраних таким чином $\Gamma_k \in \Sigma$ є зчисленна (або скінченна) підсистема *σ* системи Σ, причому

$$\tilde{\Sigma} = \bigcup_k U_{n_k} \subseteq \bigcup_k \Gamma_k \subseteq \tilde{\sigma} \subseteq \tilde{\Sigma},$$

тобто, $\tilde{\Sigma} = \tilde{\sigma}$, що і треба було довети.

Зауваження 2.2. Переходячи в формулювання Ліндельофа до доповнень множин, які фігурують в ній, можемо цю умову висловити і наступним чином:

Умова Ліндельофа. У будь-якій системі Σ' замкнених множин простору *X* міститься підсистема σ', перетин елементів якої співпадає з перетином всіх елементів системи Σ'.

Умова Ліндельофа, очевидно, еквівалентна умові фінальної компактності усякої відкритої множини, яка лежить в даному просторі *X*. Доведемо, що остання умова еквівалентна спадковій фінальній компактності простору *X* (яка полягає в тому, що всякий підпростір $X_0 \subseteq X$ фінально компактний). Нехай будь-який відкритий $G \subseteq X$ фінально компактний; доведемо, що тоді фінально компактний і будь-який підпростір $X_0 \subseteq X$. Нехай Ω^0- довільне покриття простору X_0 відкритими в ньому множинами G_α^0. Для кожного $G_\alpha^0 \in \Omega^0$ беремо таку відкриту в X множину G_α, що $X_0 \cap G_\alpha = G_\alpha^0$. Тоді $G = \bigcup_\alpha G_\alpha \supseteq X_0$ відкрита в X,отже, є фінально-компактним підпростором простору X. Тому існує зчисленна підсистема $\omega = \{G_n\}$ системи $\{G_\alpha\}$, яка покриває усі G. Але тоді множини $G_n^0 = X_0 \cap G_n$ утворюють зчисленну підсистему ω^0 системи Ω^0, яка покриває увесь простір X_0. Ми довели

Твердження 2.11. Для спадкової фінальної компактності простору *X* кожна з наступних умов є достатньою (і , очевидно, необхідною):

(а) умова Ліндельофа;

(б) фінальна компактність кожного відкритого підпростору G простору *X*.

Доведемо, що усякий регулярний спадково фінально компактний простір не лише нормальний, а й цілком нормальний. Для цього достатньо довести, що всяка відкрита $G \subseteq X$ є F_σ-множина. Для кожної точки $x \in G$ візьмемо в X окіл Ox з умовою $[Ox] \subseteq G$ (в силу припущення про регулярність простору X такий окіл існує). Внаслідок фінальної компактності підпростору G система $\{Ox\}$ виділених нами околів Ox містить зчисленну підсистему $\sigma = \{O_n\}$, $O_n = Ox_n, n = 1, 2, 3, \ldots$, з тілом $\tilde{\sigma} = G$. Але кожне з відображених нами O_n задовольняє умову $[O_n] \subseteq G$ для довільного n; отже, $G = \bigcup_n O_n \subseteq \bigcup_n [O_n] \subseteq G$, тобто $G = \bigcup_n [O_n]$, що і треба було довести.

Доведемо, що і обернено, будь-який цілком нормальний фінально компактний простір X спадково фінально компактний. Достатньо довести фінальну компактність усього відкритого $G \subseteq X$. Так як X цілком нормальний, то $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, де усі F_n замкнені в X , а отже, фінально компактні. Нехай Ω – довільне відкрите покриття підпростору $G \subseteq X$. Так як система F_n фінально компактна, то існує зчисленна підсистема ω_n системи Ω, яка покриває множину F_n. Об'єднання $\omega = \bigcup_n \omega_n$ є зчисленна підсистема системи Ω, яка покриває усі G, що і треба було довести.

Отже, доведено

Твердження 2.12. Клас регулярних спадкових фінально компактних просторів співпадає з класом цілковито нормальних фінально компактних просторів.

Частинним випадком твердження 12 є

Твердження 2.13. Для бікомпактів властивості спадкової фінальної компактності і цілковитої нормальності еквівалентні між собою.

Нехай в цілковито нормальному фінально компактному просторі X дана строго спадна система замкнених множин Φ_λ, пронумерована порядковими числами $\lambda \leq \mu$. Тоді число μ зчисленне.

Дійсно, припустимо, що число μ незчисленне. Тоді $\Phi_{\omega_1} \subset \Phi_\lambda$ для довільного $\lambda \leq \omega_1$. З тверджень 2.11, 2.12 і зауваження 2.2 випливає існування такої послідовності порядкових чисел $\lambda_i < \omega_1$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, що

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \Phi_{\lambda_i} = \bigcap_{\lambda<\omega_1} \Phi_\lambda.$$

Існує таке порядкове число $\lambda_0 < \omega_1$, що $\lambda_i < \lambda_0$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Тоді

$$\bigcap_{\lambda<\omega_1} \Phi_\lambda \subseteq \Phi_{\lambda_0+1} \subseteq \Phi_{\lambda_0} \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} \Phi_{\lambda_i} = \bigcap_{\lambda<\omega_1} \Phi_\lambda.$$

Отримане протиріччя доводить зчисленність числа μ.

Властивості бікомпактності і фінальної компактності при неперервному відображенні «переходять» від прообраз до образу [14]. Зараз ми встановимо твердження про «перехід» деяких властивостей від образу до прообразу.

Спочатку введемо наступний важливий клас відображень.

Неперервне замкнуте відображення $f: X \to Y$ топологічного простору X в топологічний простір Y називається *досконалим*, якщо прообраз $f^{-1}y$ довільної точки $y \in Y$ є бікомпактним.

Будь-яке неперервне відображення бікомпакта на бікомпакт є досконалим відображенням (твердження 2.6).

Твердження 2.14. Нехай задане досконале відображення $f: X \to Y$ топологічного простору X в топологічний простір Y. Якщо простір Y (а) бікомпактний, (б) фінально компактний, (в) сильно компактний, (г) паракомпактний, то таким же буде відповідно і простір X.

Доведення.

Спочатку зробимо наступне просте зауваження. Нехай в просторі X дано відкрите покриття $\omega = \{O_\alpha\}, \alpha \in \mathfrak{A}$ і нехай система ωf отримується з системи ω заміною кожної множини O_α скінченним набором відкритих множин $O_\alpha^1, \ldots, O_\alpha^{s(\alpha)}$, які в сумі дають O_α.Тоді система ωf відкритим покриттям простору X і , крім того, якщо покриття ω було (а) скінченним, (б) зчисленним, (в) зірково скінченним, (г) локально скінченним, то відповідно таким же буде покриття ωf.

Розглянемо довільне відкрите покриття $v = \{V_\beta\}$ простору X. Так як множина $f^{-1}y,\ y \in Y$ бікомпактна, то існує така скінченна підсистема v_y системи v, що $f^{-1}y \subseteq \tilde{v}_y$. Так як відображення f замкнене, то існує окіл Oy точки y, прообраз $f^{-1}Oy$ якого міститься в $\tilde{v}_y$. У покриття $\{Oy\}$ простору Y впишемо (а) скінченне, (б) зчисленне, (в) зірково скінченне, (г) локально скінченне покриття $\{U_\alpha\},\ ,\alpha \in \mathfrak{A}$. Кожний елемент покриття $\omega = \{O_\alpha = f^{-1}U_\alpha\}$ міститься хоча б в одній множині $\tilde{v}_y$. Оберемо для кожного α одну множину $\tilde{v}_\alpha = \tilde{v}_y(\alpha)$, яка містить множину O_α.

Нехай $v_\alpha = \{V_{\beta_1}^\alpha, \dots, V_{\beta_s}^\alpha\}$. Покладемо

$$O_{\beta_i}^\alpha = V_{\beta_i}^\alpha \cap O_\alpha, \qquad i = 1, \dots, s = s(\alpha).$$

У силу зробленого на початку доведення зауваження покриття ωf, яке складається з множин $O_{\beta_i}^\alpha,\ i = 1, \dots, s = s(\alpha),\ \ \alpha \in \mathfrak{A}$, є (а) скінченним, (б) зчисленним (в) зірково скінченним, (г) локально скінченним. Окрім того, покриття ωf вписане в покриття v.

Твердження 2.14 доведено.

Твердження 2.15. Нехай $f: X \to Y$ – досконале відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Якщо простір X має зчисленну базу, то простір Y так само має зчисленну базу.

Доведення.

Нехай $\mathfrak{B} = \{V_1, V_2 \dots\}$ - зчисленна база відкритих множин простору X. Позначимо через $\mathfrak{B}*$ систему всіх множин $\mathbb{W}$, які є скінченними об’єднаннями елементів бази $\mathfrak{B}$. Система $\mathfrak{B}*$,очевидно, зчисленна. Позначимо через $f\#\mathfrak{B}*$ систему всіх малих образів множини $\mathbb{W} \in \mathfrak{B}*$. Система $f\#\mathfrak{B}*$ зчисленна і складається з відкритих підмножин простору Y. Покажемо, що $f\#\mathfrak{B}*$ – база простору Y. Нехай $y \in Y$ і Oy – довільний окіл точки y. Так як $f^{-1}y$ бікомпактна, то існує таке скінченне покриття $\{V_{i_1}, \dots, V_{i_n}\}$ множини $f^{-1}y$ бази $\mathfrak{B}$, що $V_{i_j} \subseteq f^{-1}Oy$, $j = 1, \dots, n$. Тоді

$$y \in f^{\#}\mathbb{W} \subseteq Oy \text{ , де } \mathbb{W} = \bigcup_{j=1}^{n} V_{i_j}.$$

Твердження 2.15 доведено.

РОЗДІЛ 3
ДОБУТКИ ТОПОЛОГІЧНИХ ПРОСТОРІВ

3.1. Топологічні добутки

Добуток $X_1 \times X_2$ двох множин X_1, X_2 було визначено ще Г. Кантором як множину усіх упорядкованих пар (x_1, x_2), де $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Це означення дозволило розглядати в аналітичній геометрії площину як добуток двох прямих, а топологію як добуток двох кіл [16]. Топологія в добутку $W = X_1 \times X_2$ двох топологічних просторів X_1, X_2 вводиться за допомогою так званих прямокутних околів, тобто бази, елементами якої є добутки $U \times V$, де U і V пробігають відповідно сукупності відкритих множин в X_1 та X_2. Множина $X_1 \times X_2$ із цією топологією називається *топологічним добутком просторів* X_1, X_2. Очевидно, отримаємо ту ж топологію в $X_1 \times X_2$, якщо змусимо U і V пробігати елементи довільної бази β_1, відповідно β_2, просторів X_1 та X_2 (якщо йдеться про добуток $X_1 \times X_2$ двох прямих X_1, X_2, в яких взято бази β_1, β_2, що складаються з інтервалів, то на площині $X_1 \times X_2$ отримаємо базу, елементами якої є відкриті прямокутники).

Якщо $\omega = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, то x_1 і x_2 називаються (відповідно першою та другою) *координатами точки* $\omega = (x_1, x_2)$. Якщо поставити у відповідність кожній точці $\omega = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ її i-ту координату, $i = 1, 2$, то отримаємо відображення

$$\pi_i: (X_1 \times X_2) \to X_i,\ i = 1, 2,$$

яке називається *проектуванням* або *проекцією* добутку на його співмножник X_i.

Якщо X_1, X_2 - топологічні простори і $X_1 \times X_2$ – їх топологічний добуток, то відображення проектування, очевидно, неперервні (і відкриті).

Зауважимо, що для відкритих у X та Y, відповідно, множин Ʊ і V має місце очевидна рівність

$$гр(Ʊ\times V) = (гр\ Ʊ\times[V])\cup([Ʊ]\times грV).$$

Нехай тепер f: X→Y - довільне відображення довільної множини X у довільну множину Y. *Графіком* цього відображення називається множина $Z_f \subseteq X\times Y$, що складається з усіх точок виду $z = (x, fx) \in X\times Y$. Якщо $z_1 = (x_1, fx_1)$ і $z_2 = (x_2, fx_2)$ - дві різні точки графіка Z_f, то їх перші координати x_1 та x_2 різні; тому, розглядаючи проектування π_1: X×Y → X лише на графіку Z_f, отримаємо взаємно однозначне відображення π: $Z_f \to X$, обернене відображення q: $X \to Z_f$, яке ставить у відповідність точці $x \in X$ точку $qx = (x, fx) \in Z_f$.

Нехай X×Y - топологічний добуток просторів X, У і f: X→Y - неперервне відображення. Має місце:

Теорема 3.1. Відображення *π: Zf → X* є гомеоморфозом між графіком *Zf* та простором *X.*

Достатньо довести неперервність оберненого відображення q: $X \to Z_f$ у довільній точці $x_0 \in X$. Для цього беремо довільний базисний окіл $Z_f \cap O(x_0, y_0)$ точки

$$z_0 = (x_0, y_0) \in Z_f, \text{ де } y_0 = fx_0,\ O(x_0, y_0) = Ʊ\times V$$

та Ʊ, V – околи точок x_0 і y_0 відповідно в X, Y. Так як відображення f: X→Y неперервне, то існує такий окіл $Ʊ' \subseteq Ʊ$ точки x_0 в X, що $fƱ' \subseteq V$. Тоді, очевидно,

$$qƱ' \subseteq Z_f \cap (Ʊ'\times V) \subseteq Z_f \cap (Ʊ\times V),$$

тобто неперервність відображення q: $X \to Z_f$ у точці x_0 доведена.

А. Н. Тихонову [25] належить велика заслуга поширення поняття топологічного добутку на будь-яке (нескінченне) число співмножників.

Нехай дано множину Ʊ будь-якої потужності τ, елементи якої називатимемо «*індексами*» і позначатимемо грецькими літерами α, α',.. . Нехай кожному індексу α, відповідає деяка певна множина Xα. Добуток

$X = \prod_{\alpha \in \mho} X_\alpha$ отриманої системи множин*, за означенням, є множина X, елементами x = {xα} якої є набори точок xα, що одержуються, якщо кожному індексу α∈Ʊ віднести по одному елементу xα∈ Xα.

Якщо дано x = { xα }∈ Xα, то xα∈ x називається α-той координатою точки x ∈ X або проекцією цієї точки на множину Xα. Відображення, що ставить у відповідність довільній точці x ∈ X її α-ту координату xα, назвемо проектуванням добутку X на співмножник Xα і будемо позначати, зазвичай, через πα.

Якщо M ⊆ X, то замість παM часто пишуть (M)α.

Нехай тепер задана деяка підмножина Ʊ' ⊆ Ʊ множини індексів і для кожного α ∈ Ʊ' задано деяку множину Pα ⊆ Xα; для α ∈ Ʊ\Ʊ' покладемо Pα = Xα. Тоді множина $P = \prod_{\alpha \in \mho} P_\alpha \subseteq X$ називається *циліндром* над основою $P' = \prod_{\alpha \in \mho} P_\alpha$ або просто циліндром над множинами Pα, α ∈ Ʊ'. Легко перевірити, що

$$P = \bigcap_{\alpha \in \mho'} \pi_\alpha^{-1} P\alpha .$$

Припустимо тепер, що множина Xα – топологічний простір. Слідуючи за А. Н. Тихоновим, введемо у добуток $X = \prod_\alpha X_\alpha$ топологію наступним чином.

Візьмемо довільне скінченне число індексів $\alpha_1, \ldots, \alpha_S$ і в кожному X_α, $\alpha=\alpha_1, \ldots, \alpha_S$, візьмемо відкриту множину U_α; позначимо через $O(U_{\alpha 1},\ldots,U_{\alpha S})$ циліндр над множинами $U_{\alpha 1} \subseteq X_{\alpha 1}, \ldots, U_{\alpha S} \subseteq X_{\alpha S}$, тобто

$$O(U_{\alpha 1},\ldots,U_{\alpha S}) = \bigcap_{i=1}^{s} \pi_{\alpha i}^{-1} U_{\alpha i}.$$

Ці множини $O(U_{\alpha 1},\ldots,U_{\alpha S})$ назвемо *елементарними відкритими множинами* простору $X= \prod_\alpha X_\alpha$ (з його тихонівською топологією [17]); відкриті множини у цьому просторі визначаються як всі можливі суми елементарних відкритих множин.

Якщо в кожному просторі X_α вибрати по множині P_α, то добуток $P = \prod_{\alpha \in \mho} P_\alpha$ множин P_α природним способом лежить у топологічному добутку $X = \prod_{\alpha \in \mho} X_\alpha$ просторів X_α. Так як система усіх елементарних відкритих множин добутку X визначає на множині P в точності систему усіх елементарних відкритих множин топологічного добутку просторів P_α, то індукована на P простором X топологія співпадає з топологією добутку просторів P_α. Таким чином, *добуток підпросторів є підпростором добутку.*

З визначення тихонівської топології відразу випливає, що проектування $\pi_{\alpha'}$:

$$\prod_\alpha X_\alpha \to X_{\alpha'},\ \alpha' \in \mho,$$

є неперервним і відкритим відображенням.

Автоматично перевіряється.

Теорема 3.2. Добуток будь-якого числа хаусдорфових просторів $X\alpha$ є хаусдорфовим простором.

Теорема 3.3. Якщо $\beta\alpha = \{ U\alpha \}$ є базою простору $X\alpha$, то, беручи при означенеі елементарних відкритих множин $O(U\alpha_1,\ldots,U\alpha_S)$ лише елементи $U\alpha i \in \beta\alpha i$, отримаємо базу простору X.

З теореми 3.3 випливає:

Теорема 3.4. Добуток кардинального числа $\leq \tau$ просторів $X\alpha$, кожен з яких має потужність $\leq\tau$, є простором потужності $\leq \tau$, *де* $\tau \geq N_0$.

Дійсно, у кожному з цих просторів X_α візьмемо базу β_α потужності $\leq \tau$. Базою ß просторі $X = \prod_\alpha X_\alpha$ є множина всіх можливих $O(U_{\alpha 1},\ldots,U_{\alpha S})$, для яких $U_{\alpha i} \in \beta_{\alpha i}$. Оскільки потужність множини $\mho$ всіх індексів α не перевищує числа τ, то і множина всіх скінченних комбінацій $\alpha_1, \ldots, \alpha_S$ цих індексів не перевищує τ. Але на кожну комбінацію $\alpha_1, \ldots, \alpha_S$ припадає не більше τ комбінацій виду $U_{\alpha 1},\ldots,U_{\alpha S}$, отже, і не більше τ елементарних відкритих множин $O(U_{\alpha 1},\ldots,U_{\alpha S})$, так що потужність множини всіх отриманих елементарних відкритих множин $\leq \tau$.

Наступна теорема, по суті, очевидна, але часто застосовується і тому зараз буде сформульовано явно:

Теорема 3.5. Якщо $x^0=\{x^0_\alpha\}\in[M]$, $M \subseteq X= \prod_\alpha X_\alpha$, то $x^0_\alpha \in [\pi_\alpha M]$ при будь-якому індексі $\alpha \in U$.

Ця теорема відразу випливає з неперервності проектування π_α: $X \to X_\alpha$. Важливим наслідком теореми 2.5 є:

Теорема 3.6. Добуток $X = \prod_{\alpha \in U} X_\alpha$ будь-якого числа індуктивно-нуль-вимірних просторів індуктивно-нуль-вимірне.

Доведення.

Візьмемо в кожному X_α базу $ß_\alpha$, що складається з відкрито-замкнених множин U_α; елементарні відкриті множини $O(U_{\alpha 1},\ldots,U_{\alpha S})$, де $U_{\alpha i} \in ß_{\alpha i}$, утворюють базу ß просторі X і за означення відкриті в X; тому для доведення теореми 3.6 достатньо переконатися в тому, що будь-яка множина $O(U_{\alpha 1},\ldots,U_{\alpha S})$ замкнена. Нехай

$$x^0 = \{x^0_\alpha\} \in [\, O(U_{\alpha 1},\ldots,U_{\alpha S})]_X.$$

В теоремі 2.5 M = $O(U_{\alpha 1},\ldots,U_{\alpha S})$, бачимо, що $x^0_{\alpha i} \in [U_{\alpha i}] = U_{\alpha i}$. Так як це виконується для довільного i =1, 2, …, s, то $x^0 = \{x^0_\alpha\} \in O(U_{\alpha 1},\ldots,U_{\alpha S})$ – замикання множини $O(U_{\alpha 1},\ldots,U_{\alpha S})$, отже, тим самим теорему 3.6 доведено.

Нехай задана система відображень f_α: $X \to Y_\alpha$, $\alpha \in U$, топологічного простору X в топологічний простір Y_α. Тоді відображення f: $X \to Y = \prod_{\alpha \in U} Y_\alpha$, що ставить у відповідність точці $x \in X$ точку $fx = \{f_\alpha x\} \in Y$, називається *діагональним добутком* відображень f_α.

Очевидно, діагональний добуток f: $X \to Y = \prod_{\alpha \in U} Y_\alpha$ відображень f_α: $X \to Y_\alpha$ задовольняє для будь-якого α відношенню $f_\alpha = \pi_\alpha f$, де π_α позначає відображення Y на співмножник Y_α.

Теорема 3.7. Діагональний добуток f неперервних відображень f_α неперервний.

Доведення.

Для кожного $\alpha \in U$ відображення f задовольняє відношенню $f_\alpha = \pi_\alpha f$. Тому, в силу неперервності відображень f_α, для будь-якого елементарної відкритої множини

$$O = O(U_{\alpha 1},\ldots,U_{\alpha S}) = \bigcap_{i=1}^{S} \pi_{\alpha i}^{-1} U_{\alpha i} \subseteq Y$$

прообраз

$$f^{-1}O = f^{-1} \bigcap_{i=1}^{S} \pi_{\alpha i}^{-1} U_{\alpha i} = \bigcap f^{-1} \pi_{\alpha i}^{-1} U_{\alpha i} = \bigcap f_{\alpha i}^{-1} U_{\alpha i}$$

відкритий в X. Так як елементарні відкриті в Y множини утворюють в Y базу, то відображення f неперервне [14]. Теорему доведено.

Нехай задана система відображень f_α: $X_\alpha \to Y_\alpha$ топологічних просторів X_α в топологічні простори Y_α, $\alpha \in \mho$. Відображення

$$f: \prod_{\alpha\in\mho} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in\mho} Y_\alpha$$

топологічного добутку $X=\prod_{\alpha\in\mho} X_\alpha$ у топологічний добуток $Y = \prod_{\alpha\in\mho} Y_\alpha$, що ставить у відповідність точці $x = \{ x_\alpha \} \in X$ точку $fx = \{ f_\alpha x_\alpha \} \in Y$, називається *добутком відображень* f_α і позначається $f = \prod_{\alpha\in\mho} f_\alpha$.

Теорема 3.7'. Добуток $f=\prod_{\alpha\in\mho} f_\alpha$ неперервних відібражень f_α: $X_\alpha \to Y_\alpha$ неперервний. Якщо при цьому всі відображення f_α відкриті, відповідно індуктивно нуль-вимірні, то відкритим, відповідно індуктивно нуль-вимірним буде і відображення *f*.

Доведення.

Розглянемо точку $x^0=\{x_\alpha^0\} \in X= \prod_{\alpha\in\mho} X_\alpha$ та візьмемо окіл Oy^0 точки

$$y^0 = fx^0 = \{f_\alpha x_\alpha^0\} \in Y=\prod_{\alpha\in\mho} Y_\alpha .$$

Не обмежуючи загальності міркувань, окіл Oy^0 можна вважати елементарним, тобто, можна вважати, що існують такі індекси α_i і такі околи $O_{\alpha i}$ точок $f_{\alpha i} x_{\alpha i}^0$, i =1, …, s, що

$$Oy^0 = \{\{ y_\alpha \} \in Y \mid y_{\alpha i} \in O_{\alpha i}, i=1,2,\ldots, s\}.$$

З неперервності відображень f_α випливає існування таких околів $V_{\alpha i}$ точок $x_{\alpha i}$, що $f_{\alpha i} V_{\alpha i} \subseteq O_{\alpha i}$, i=1,2,…, s. Тоді для околу

$$Vx^0= \{\{ x_\alpha \} \in X \mid x_{\alpha i} \in V_{\alpha i}, i=1,2,\ldots, s\}$$

точки x^0 маємо включення $fVx^0 \subseteq Oy^0$, так як для довільної точки $x=\{ x_\alpha \} \subset Vx^0$ маємо $f_{\alpha i} x_{\alpha i} \in O_{\alpha i}$, i =1,2,…, s, отже, $fx = \{f_\alpha x_\alpha\} \in O_{\alpha i}$. Неперервність відображень f доведена.

Припустимо, що всі відображення f_α відкриті.

Розглянемо елементарну відкриту підмножину O= $O(U_{\alpha 1},\ldots,U_{\alpha S})$ добутку X. Тоді, очевидно, fO= $O(f_{\alpha 1}U_{\alpha 1},\ldots, f_{\alpha S}\, U_{\alpha S})$.

Отже, образи елементарних відкритих в X множин при відображенні f відкриті в X. Якщо O - довільна відкрита в X множина, то вона є сумою елементарних відкритих множин O_β, β∈ ß, і образ

$$fO=f(\bigcup_{\beta\in ß} O_\beta)= \bigcup_{\beta\in ß} fO_\beta,$$

очевидно, відкритий в Y.

Нарешті, якщо всі відображення f_α індуктивно нуль-вимірні, то, в силу теореми 3.6, для будь-якої точки y={y_α}∈ Y прообраз f^{-1}y=$\prod_{\alpha\in Ʊ} f_\alpha^{-1}$ індуктивно нуль-вимірний, тобто відображення f також індуктивно нуль-вимірне. Теорему 3.7' доведено.

Теорема 3.8. Неперервне відображення *f:F→Iτ* замкненої в нормальному просторі *X* множини *F* в тихонівський куб *Iτ* = $\prod_{\alpha\in Ʊ} I_\alpha$, *Iα=[0,1]* потужності *Ʊ=τ,* можна продовжити у неперервне відображення $\bar{f}$*:X→Iτ.*

Доведення.

Для кожного α∈Ʊ функція fα=πα f:F→Iα неперервна, як суперпозиція неперервних відображень. За теоремою Урисона [12] існує неперервна функція $\bar{f}$:X→Iα, яка є продовженням функції fα. Діагональний добуток ₣:X→Iτ є продовженням відображення f і неперервний в силу теореми 3.7. Теорему доведено.

3.2. Приклади топологічних добутків

Добуток прямих $X_1,\ldots, X_n$ є n-вимірним евклідовим простором R^n (що розглядається як топологічний простір [4]).

Добуток парного числа простих двокрапок гомеоморфний канторовій досконалій множині [11].

Нехай множина індексів Ʊ={α} має довільну нескінченну потужність τ і D_α є, при будь-якому α∈Ʊ - проста двокрапка. Тоді добуток $\prod_{\alpha\in Ʊ} D_\alpha$ позначається через D^τ і називається *канторовим дисконтинуумом* потужності τ. Це надзвичайно важливий топологічний простір. Як випливає з попереднього, D^τ є індуктивно нуль-вимірним хаусдорфовим простором. Ми зараз побачимо, що він бікомпактний.

Іншим найважливішим, теж хаусдорфовим, простором потужності τ є тихонівський куб I^τ потужності τ, а саме добуток $I^\tau = \prod_\alpha I_\alpha$ відрізків $I_\alpha=[0, 1]_\alpha$, де Ʊ={α} має потужність τ.

Доведемо, що простір I^{N0} , тобто топологічний добуток парного числа прямолінійних сегментів, є (з точністю до гомеоморфізму) гільбертовою цеглою Q^∞.

Дійсно, розглянемо топологічний добуток X сегментів X_n, n=1, 2, 3, ... Так як топологічний добуток визначено в суто топологічних термінах, то ми можемо взяти за X_n відрізок $[0, \frac{1}{2^n}]$ числової прямої.

В цьому припущенні простір $X = \prod_n X_n$ і гільбертова цегла Q^∞ складаються з одних і тих самих точок

$$x=(x_1, x_2, \ldots),\ 0\le x_n\le\frac{1}{2^n},\ n=1, 2, 3,\ldots$$

Залишається довести, що тотожне відображення X на Q^∞ є топологічним. Для цього достатньо довести дві теореми (а) та (б).

(а) Якими б не були точка $x=x_n\in Q^\infty=X$ і число $\varepsilon > 0$, можна знайти такий окіл $Ox\subseteq X$, що для всіх точок $x'\in Ox$ маємо $\rho(x, x') < \varepsilon$ (відстань в Q^∞).

(б) Якими б не були точка $x = \{x_n\}\in X = Q^\infty$ та її окіл $Ox\subseteq X$, можна знайти таке ε, що з $\rho(x, x') < \varepsilon$ в Q^∞ випливає $x' \in Ox$.

Доведення теореми (а).

Беремо N настільки великим, щоб було $\sum_{n=N+t}^{\infty}(\frac{1}{2^n})^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Окіл Ox точки x в X визначаємо умовами (що накладаються на координати x'_k

точки x'$\{x'_k\}\in$ X)

$$|x_1-x'_1|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}},\ \ldots,|x_N-x'_N|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}};$$

вона задовольняє висловлену вимогу.

Доведення теореми (б).

Можемо припустити, що Ox складається з усіх точок x'=$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k, \ldots)$, які задовольняють при деяких n_1, n_2, …, n_s та ε_1, ε_2, …, ε_s умовам $|x_{ni}-x'_{ni}|<\varepsilon_i$.

Якщо тепер ε - це найменше з чисел ε_1, ε_2, …, ε_s довільна точка, для якої $\rho(x, x') < \varepsilon$, то для неї $|x_{ni} - x'_{ni}|<\varepsilon\leq\varepsilon_i$ при i=1, 2, …, s.

Теорему (б) доведено.

Зауваження 3.1. Якщо припустити відомим, що Q^∞ – компакт, то достатньо довести, що це тотожне відображення простору Q^∞ на X неперервне [6], тобто довести одну лише теорему (б).

Узагальнимо отриманий результат про гомеоморфізм I^{N0} і Q^∞.

Теорема 3.9. Нехай задані метричні простори *Xn* з такими метриками *ρn,* що *diam Xn* ≤ 1 для всіх *n* = 1, 2, 3, ... Тоді топологія добутку $X=\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ породжується метрикою *ρ* на *X,* яка приймає на довільній парі точок $x' = \{x'_n\}$ *та* $x'' = \{x''_n\}$ з *X* значення

$$\rho(x', x'') = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\rho_n^2(x'_n,\ x''_n)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Доведення.

(а) Розглянемо точку x = $\{x_n\}\in$ X і її ε-окіл Oε x, ε > 0, відносно метрики ρ. Номер N виберемо так, щоб було

$$\sum_{n>N}\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Окіл O_x точки x відносно топології добутку визначимо наступним чином:

$$O_x = \{\ x' = \{x'_n\} \in X \mid \rho n\ (x'_n, xn) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}\ , n = 1, \ldots, N\}.$$

Отже, $O_x \subseteq O\varepsilon_x$.

(б) Розглянемо окіл O*x* точки x = $\{x_n\}$ ∈ відносно топології добутку. Очевидно, можна вважати окіл Оx елементарним, тобто вважати

$$O_x = \{ x' = \{x'_n\} \in X \mid \rho n\ (x'_n, xn) < \varepsilon n, n=1, \ldots, s\}.$$

Нехай $\varepsilon = \min \left\{\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2^n}} \frac{\varepsilon_s}{\sqrt{2^n}}\right\}$. Якщо $\rho(x'=\{x'_n\}, x) < \varepsilon$, то

$$\rho_n\ (x'_n, xn\ ) < \varepsilon \sqrt{2^n} \leq \varepsilon_n \text{ для } n=1, \ldots, s.$$

Отже, $O\varepsilon_x \subseteq O_x$.

Теорему 3.9 доведено.

На будь-якому метризованому просторі Х можна ввести метрику, відносно якої *diamX* ≤ 1 [8]. Тому з доведеної теореми випливає:

Теорема 3.10. Топологічний добуток парного числа метризованих просторів метризований.

Зауваження 3.2. По аналогії з теоремою 3.9, доводиться, що: топологія добутку Х×У метричних просторів (Х, ρ_1) та (У, ρ_2) породжується метрикою

$$\rho((x', y'), (x'', y'')) = [\rho_1^2\,(x',\ x'') + \rho_2^2\,(y',\ y'')]^{\frac{1}{2}}.$$

3.3. Теореми Тихонова

Наступна теорема – одна з найважливіших у всій загальній топології.

Теорема 3.11. Топологічний добуток *Х* будь-якої системи *{Хα}* бікомпактних топологічних просторів *Хα* бікомпактний.

Доведення.

Достатньо довести, що будь-яка максимальна центрована система $\{M\ \lambda\} = \sigma$ будь-яких множин $M\ \lambda \subseteq X$ має спільну точку дотику x_0, тобто є точка $x_0 \in \bigcap_{M^\lambda} |M^\lambda|$.

Сформулюємо дві прості леми.

Лема 3.1. Перетин $M^{\lambda 1} \cap \ldots \cap M^{\lambda s}$ будь-якого скінченного числа елементів максимальної центрованої системи $\sigma = \{M^\lambda\}$ є елементом системи σ.

Твердження випливає з того, що, поповнюючи систему σ елементом $M^{\lambda 1} \cap \ldots \cap M^{\lambda s}$, отримуємо знову центровану систему множин.

Лема 3.2. Якщо $\sigma = \{M^{\lambda}\}$ є максимальна центрована система множин M^{λ} і множина N перетинається з усіма $M^{\lambda} \in \sigma$, то $N \in \sigma$.

Дійсно, з леми 3.1 випливає, що всі множини виду $N \cap M^{\lambda 1} \cap \ldots \cap M^{\lambda s}$ непусті, отже, поповнюючи ними систему σ, отримаємо знову центровану систему.

Покладемо $M_{\alpha}^{\lambda} = \pi_{\alpha} M^{\lambda}$. Система всіх множин M_{α}^{λ} (тут α – стала, а λ – нестала) є центрована система в просторі Xα. Так як Xα бікомпактний, то множини M_{α}^{λ} мають принаймні одну спільну точку дотику $\bar{x}\alpha \in X\alpha$. Доведемо, що точка $\bar{x} = \{\bar{x}\alpha\} \in X$ є спільною точкою дотику M^{λ}. Для цього необхідно показати, що будь-який елементарний окіл точки $\bar{x}$ перетинається з будь-яким M^{λ}. Довільний елементарний окіл $O(U\alpha_1, \ldots, U\alpha_s)$ точки $\bar{x}$ виходить фіксуванням деякого скінченного числа індексів $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ і вибором околів $U\alpha_i$ точок $\bar{x}\alpha_i$ в Xα для $i = 1, \ldots, s$. Але для «одноіндексних» околів $O(U\alpha_i)$ точки $\bar{x}$ твердження $O(U\alpha i) \cap M^{\lambda} \neq \Lambda$ рівносильне твердженню $U\alpha i \cap M_{\alpha i}^{\lambda} \neq \Lambda$, істинність якого безпосередньо випливає з того, що $\bar{x}_{\alpha i} \in [M_{\alpha i}^{\lambda}]$.

Отже, кожен одноіндексний окіл точки $\bar{x}$ перетинається з усіма M^{λ}; але система всіх M^{λ} – це максимальна центрована система, отже, за лемою 3.2 кожен одноіндексний окіл точки $\bar{x}$ є елементом системи $\{M^{\lambda}\}$. Кожен елементарний окіл довільної точки простору є перетин кінцевого числа одноіндексних околів, значить, а силу леми 1 система $\{M^{\lambda}\}$, містить, як ми бачили, в числі своїх елементів її одноіндексні околи точки $\bar{x}$, необхідно містить і всі взагалі елементарні околи точки $\bar{x}$, звідки випливає, що будь-який окіл точки $\bar{x}$ перетинається з будь-якою множиною M^{λ}, значить, $\bar{x} \in [M^{\lambda}]$ при будь-якому $M^{\lambda} \in \sigma$ - перша теорема Тихонова доведена.

Оскільки добуток хаусдорфових просторів є хаусдорфовим простором, то з доведення випливає:

Наслідок 3.1. Добуток будь-якої системи бікомпактів є бікомпактом.

Зокрема, бікомпактами є канторові дисконтинууми Dτ та тихонівська цегла Iτ.

Зауваження 3.2. Простір D^{τ} є, при належному визначенні в ньому операції додавання, топологічної групою [16]. Простір $F^{\tau} = D_0^{\tau}$ тобто добуток τ екземплярів зв'язної двокрапки D_0, чудовий тим, що містить топологічний образ будь-якого T_0-простору потужності $\leq\tau$. Далі, кожен T_0-простір потужності $\leq\tau$ є взаємно однозначним і в одну сторону неперервним образом деякої множини, що лежить в D^{τ}, а кожен бікомпакт потужністю $\leq\tau$ є неперервним образом деякої замкненої множини, що лежить в D^{τ}.

Проте не на будь-який бікомпакт можна відобразити (який-небудь) канторів дисконтинум D^{τ} [11]. Бікомпакт X називається *діадичним*, якщо він є неперервним образом деякого дисконтинууму D^{τ}. Діадичними бікомпактами є, зокрема, усі метризовані бікомпакти (компакти). Необхідною умовою для діадичності бікомпакту X є умова Сусліна: будь-яка система диз'юнктивних відкритих в X множин парна (теорема Шпільрай-Марчевського [23]).

Теорема 3.12 *(друга теорема Тихонова).* Будь-який цілком регулярний простір нескінченної потужності *τ* гомеоморфний деякій множині, що лежить в тихонівському кубу потужності *τ.*

Розглянемо наслідки з другої теореми Тихонова.

Перш ніж доводити цю теорему, зробимо з приводу неї деякі зауваження і виведемо деякі наслідки. Насамперед, з неї випливає, що тихонівський куб I^{τ} «потужності τ» дійсно має потужність τ: дійсно, будучи добутком τ відрізків, I^{τ} має потужність $\leq\tau$, а оскільки він містить топологічний образ будь-якого цілком регулярного простору потужності τ, то вона не може мати потужність $<\tau$.

Далі легко доводиться, що будь-який підпростір X_0 цілком регулярного простору X сам є цілком регулярним простором.

Звідси, випливає, що будь-який підпростір нормального простору, отже, і будь-який підпростір бікомпакту, цілком регулярні. З іншого боку, за другою теоремою Тихонова цілком регулярні простори (потужності τ) з точністю до гомеоморфізму є підпросторами деякого бікомпакту потужністю τ), саме тихонівського кубу I^{τ} (при цьому X є всюди щільним підпростором бікомпакту $[X]_{I^{\tau}} \subseteq I\tau$).

Отже, має місце:

Теорема 3.13. Цілком регулярні простори (потужності τ) можуть бути визначені як всюди щільні підпростори бікомпактів (потужності τ), або як підпростори нормальних просторів (потужності τ), або, нарешті (з точністю до гомеоморфізму), як підпростір тихонівського кубу $I\tau$.

З цієї теореми випливає:

Наслідок 3.2. Топологічний добуток $X = \prod X\alpha$ будь-якого числа цілком регулярних просторів цілком регулярно.

Справді, позначаючи через Xα бікомпакт, який містить простір Xα бачимо, що

$$X = \prod X\alpha \subseteq \prod \overline{X}\alpha,\text{о}$$

але простір $\bar{X} = \prod \overline{X}\alpha$ є бікомпактом, отже, його підпростір X цілком регулярний. Тихонівська цегла I^{τ} при $\tau = N_0$ перетворюється в гільбертову цеглу $Q\infty$; отже, друга теорема Тихонова є узагальненням наступної теореми Урисона про занурення [22].

Теорема 3.14. Будь-який (цілком) регулярний простір з парною базою гомеоморфний множині, що лежить в гільбертовому кубі (і, отже, метризуємий).

Гільбертовий простір (означає, і куб $Q\infty$), будучи метризованим простором з парною, всюди щільною множиною, є простором з парною базою; тому теорема 3.14 може бути сформульована і так: для того, щоб топологічний простір *X* був гомеоморфний множині, що лежить в гільбертовому просторі, необхідно і достатньо, щоб він мав парну базу і будь-яку з наступних властивостей: 1) нормальність; 2) повна регулярність; 3) регулярність.

Принципове значення цієї теореми дуже велике: вона повністю характеризує з топологічної сторони множини, що лежить в гільбертовому просторі, вказуючи несподівано короткий шлях, яким можна прийти від найзагальніших топологічних побудов – топологічних просторів – до конкретного об'єкта теорії точкових множин – до множин, розташованих у гільбертовому просторі.

З теореми 3.14 та теореми 3.9:

Наслідок 3.3. Неперервний хаусдорфовий образ компакту – компакт.

З теореми 3.14 далі випливає:

Теорема 3.15. Всі метричні простори, що містять парні всюди щільні множини, і тільки такі метричні простори, гомеоморфні множинам, що лежать у гільбертовому просторі.

Доведення другої теореми Тихонова.

Нехай X – цілком регулярний простір. Множину $\sum = \{f_\alpha\}$ неперервних функцій f_α: X→{0, 1} назвемо *множиною функцій, що розділяє простір* X, якщо для будь-якої точки x0 $\in$ X і будь-якого її околу O_{x_0} в X можна знайти таку функцію $f_\alpha \in \sum$, що

$$f_\alpha x0 = 0, f_\alpha(X \setminus O_{x_0}) = 1.$$

Множини, які розділяють родину функцій у цілком регулярному просторі X існують: такою, принаймні, є родина усіх неперервних функцій f: X → [0, 1].

Друга теорема Тихонова буде доведена, коли ми доведемо наступні дві теореми:

(А) У цілком регулярному просторі X потужності τ існує множина, яка розділяє множину функцій, потужності τ.

(Б) Якщо в цілком регулярному просторі X існує множина, яка розділяє множину функції потужності τ, то існує і топологічне відображення φ простору X в тихонівський куб I^{τ}.

З теореми (Б) випливає, що потужність будь-якої множини, яка розділяє множину функцій, не менше, ніж потужність простору.

Лема 3.3. Нехай x_0 – точка цілком регулярного простору X. Для будь-якого околу O_1x_0 точки x_0 можна знайти такий окіл O_1x_0 тієї ж точки, що замкнені множини $[O_1x_0]$ та $X \setminus O_{x_0}$ функціонально відокремлені в X (так що, $[O_1x_0] \subseteq Ox_0$).

Для доведення цієї леми візьмемо яку-небудь функцію f: X → [0, 1] неперервну в X, яка дорівнює 0 в x_0 і 1 в $X \setminus O_{x_0}$. Позначимо через O_1x_0 множину усіх точок $x \in X$, у яких $fx < \frac{1}{2}$, визначимо функцію таким чином:

$$f_1x = \begin{cases} 0, \text{ якщо } fx \leq \frac{1}{2} \\ 2\left(fx - \frac{1}{2}\right), \text{якщо } \frac{1}{2} \leq fX \leq 1. \end{cases}$$

Функція f_1x неперервна і відокремлює одну від одної множини O_1x_0 та $X \setminus O_{x_0}$.

Доведення теореми (А).

Візьмемо тепер базу $ß = \{U_\nu\}$ простору X, що має потужність τ; пару

$$\pi_\alpha = (U_\mu, U_\nu), \text{ де }, U_\mu \in ß, U_\nu \in ß,$$

назвемо *канонічною*, якщо $[U_\mu] = U_\nu$, і множини $[U_\mu]$ $X \setminus U_\nu$ є функціонально відокремленими. Множину канонічних пар позначимо через σ . Вона має потужність $\leq \tau$. Виберемо тепер для кожної канонічної пари $\pi_\alpha = (U_\mu, U_\nu)$ функцію f_α: $X \to [0, 1]$, неперервну в X, яка дорівнює 0 на $[U_\mu]$ і 1 на $X \setminus U_\nu$. Множина $\sum$ відібраних нами функцій f_α має потужність $\leq \tau$ і є множиною, що поділяє простір X. Дійсно, якими б не були точки x_0 і її окіл G в X, візьмемо окіл $Ox_0 = U_\nu \in ß$ що міститься в G, підберемо до неї окіл O_1x_0 згідно з лемою 3.3 і $O_2x_0 = U_\mu$, що лежить в околі O_1x_0; пара (U_μ, U_ν) є канонічною пара π_α, причому f_α x_0 для $x \in X \setminus G$. Теорему (А) доведено.

Доведення теореми (Б).

Нехай задано множину $\sum = \{ f_\alpha \}$ функцій, що розділяє простір X, з індексами α, що перетинають деяку множину Ʊ потужності τ. Топологічне відображення φ простору X в I^τ побудуємо наступним чином. Нехай для кожного $\alpha \in$ Ʊ взято сегмент: $I^\alpha = \{0 \leq t_\alpha \leq f\}$ числової прямої. Кожній точці $x \in X$ поставимо у відповідність точку $f_\alpha x \in I^\alpha$. Отримаємо точку

$$\varphi x = \{ f_\alpha x \} \in I^\tau = \prod_\alpha I_\alpha.$$

Цим визначено відображення φ простору X на деяку множину $\varphi X = Y \subseteq I^\tau$.

Відображення φ взаємно однозначне. Дійсно, нехай $x \in X$, $x' \in X$, $x \neq x'$. До околу $X \setminus \{x'\}$ точки x підбираємо, згідно з означенням множини функцій, що розділяє простір, функцію $f_\alpha \in \sum$ так, щоб

$$F3_\alpha x = 0 \text{ та } f_\alpha x' = 1;$$

тоді α-координати $f_\alpha x$ та $f_\alpha x'$ точок $\{ f_\alpha x\}$ і $\{ f_\alpha x'\}$ різні, так що $\varphi x \neq \varphi x'$. В силу теореми 3.7 відображення φ неперервне.

Відображення φ^{-1}: $У \to X$ неперервне. Дійсно, нехай

$$y = \{t_\alpha\} \in Y, \varphi^{-1} y = x \in X.$$

Для довільного околу O_x точки x в X потрібно підібрати такий окіл O_y в I^τ, щоб $\varphi^{-1}(Oy \cap Y) \subseteq Ox$. Беремо функцію $f_\alpha \in \sum$ так, щоб було

$$f_\alpha x = 0 \text{ і } f_\alpha (X \setminus Ox) = 1.$$

Тоді α-координата t_α точки $y = \varphi x$ є $t_\alpha = f_\alpha x = 0$. Позначимо через O_y множину усіх точок

$$y' = \{ t_\alpha \} \in I^\tau, \text{ у яких } t'_\alpha < 1.$$

Для будь-якої точки $y' \in Y$, що потрапила в O_y, маємо $\varphi^{-1}y' \in Ox$. Дійсно, якби $x' = \varphi^{-1}y' \in X \setminus Ox$, то було б $f_\alpha x' = 1$, тобто α-координата точки x' дорівнювала б 1, всупереч визначенню точки y'.

Теорему (Б), а отже, і другу теорему Тихонова доведено.

Доведемо за допомогою другої теореми Тихонова наступне:

Теорема 3.16. Для топологічного добутку $X \times B$ цілком регулярного простору X на бікомпакт B проекція $\pi_x\colon X \times B \to X$ добутку $X \times B$ на співмножник X є замкненим (і, отже, досконалим) відображенням.

Доведення.

За другою теоремою Тихонова простір X можна вважати підмножиною тихонівського куба I^τ при деякому τ. Проекція $\pi\colon I^\tau \times B \to I^\tau$ добутку $I^\tau \times B$ на співмножник I^τ замкнена [9].

Крім того, на множині $X \times B = \pi^{-1}X$ вона співпадає з відображенням π_x. Тоді відображення π_x замкнене, що і потрібно було довести.

З доведеної теореми 7 випливає:

Наслідок 3.4. Топологічний добуток X×B паракомпакту X, відповідно сильно паракомпактного (хаусдорфового) простору X, на бікомпакт B паракомпактний, відповідно сильно паракомпактний.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було здійснено аналіз наукової літератури з теми дослідження; розглянуто питання будови компактів; розкрито питання визначення розмірності добутків топологічних просторів.

Проведене дослідження дозволяє охарактеризувати наступні висновки.

За допомогою поняття добутку топологічних просторів можна подати площину та тривимірний простір у вигляді добутку двох або, відповідно, трьох числових прямих. Природним узагальненням цього подання є n-вимірний куб як добуток n відрізків. Звідси ще можна піднятися до того, щоб розглядати зчисленно вимірний гільбертовий паралелепіпед як добуток відрізків. Куб як добуток відрізків – це так званий «тихонівський куб».

Визначити топологію в тихонівському добутку топологічних просторів можна за допомогою елементарних відкритих множин, які відповідають певним виборам індексів. Ці елементарні відкрити множини та різноманітні їх суми і визначаються як відкриті множини, тобто елементи топології, в добутку топологічних просторів. Якщо припускати, що в кожному просторі-множнику обрана база топології, то можна при означенні топології у добутку підпорядкувати вибір відкритих множин вимозі, щоб ці множини належали відповідним базам. Звідси випливає, що якщо потужність множини індексів є кардинальне число та вага кожного простору не перевищує це число, то і вага добутку не перевищує це число. Також справедливо, що якщо усі простори-множники є хаусдорфовими просторами, то хаусдорфовим простором є й тихонівський добуток.

Усі цілком регулярні простори та тільки вони є підпросторами бікомпактів. Більш того, будь-який тихонівський простір ваги τ гомеоморфний деякій множині, яка міститься у тихонівському кубі I^τ тієї самої ваги, тобто з топологічної точки зору може сам розглядатися як множина, яка міститься в кубі, а її замикання в цьому кубі є так званим бікомпактним розширенням ваги τ, тобто бікомпактом. Завдяки цьому виникає можливість розглядати цілком регулярні та тільки ці простори як множини, які містяться в кубі I^τ, а це означає те, що до дослідження таких та лише таких просторів можна застосовувати метод координат.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н. И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. – М. : Наука, 1966. – 544 с.
2. Банах С. П. Курс функціонального аналізу / С. П. Банах. – К. : Рад. шк., 1978. – 216 с.
3. Беллман Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М. : Мир, 1969. – 868 с.
4. Березанский Ю. М. Функциональный анализ / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. – К. : Вища шк., 1990. – 600 с.
5. Богачев В. И. Действительный и функциональный анализ / В. И. Богачев, О. Г. Смолянов. – М. : РХД, 2009. – 146 с.
6. Булдырев В. С. Линейная алгебра и функции многих переменных / В. С. Булдырев, Б. С. Павлов. – Л. : ЛГУ, 1985. – 496 с.
7. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. – М. : Наука, 1984. – 319 с.
8. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ / Б. З. Вулих. – М. : Гос. изд-во физмат. лит., 1958. – 234 с.
9. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1966. – 576 с.
10. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. – К. : Вища шк., 1989. – 348 с.
11. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М. : ИЛ, 1962. – 216 с.
12. Данфорд Н. Линейные операторы. Спектральная теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М.: Мир, 1966. – 224 с.
13. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М. : Мир, 1967. – 624 с.
14. Кадец В. М. Курс функционального анализа / В. М. Кадец. –

Харьков, 2006. – 212 с.

15. Канторович Л. П. Функциональный анализ / Л. П. Канторович Л. П., Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.
16. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М. : Мир, 1972. – 552 с.
17. Келдыш М. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамоспряженных классов несамоспряженных уравнений / М. Келдыш // ДАН СССР. – 1951. – С.11-14.
18. Клиот-Дашинский М. И. Алгебра матриц и векторов / М. И. Клиот-Дашинский. – 3-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2001. – 160 с.
19. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров. – М. : Наука, 1989. – 314 с.
20. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1976. – 314 с.
21. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. – М. : Физматлит, 1962. – 168 с.
22. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М. : Наука, 1973. – 280 с.
23. Лебедев В. И. Функциональный анализ и вычислительная математика / В. И. Лебедев. – М. : Физматлит, 2000. – 216 с.
24. Люстерник Л. А. Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Высшая школа, 1982. – 224 с.
25. Маркус М. Обзор по теории матриц и матричных неравенств / М. Маркус, Х. Минк. – М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. мет., 1972. – 232 с.
26. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу / Л. Ниренберг. – М. : Мир, 1977. – 232 с.
27. Плоткин Я. Д. Обращение возмущённых на спектре линейных операторов / Я. Д. Плоткин, А. Ф. Турбин // УМЖ. – Т.23, №2, 1971. – С.168-176.

28. Плоткин Я.Д. Обращение возмущённых на спектре нормально разрешимых линейных операторов / Я. Д. Плоткин, А. Ф. Турбин // УМЖ. – Т.27, №4, 1975. – С.477-486.
29. Пугачев В. С. Лекции по функциональному анализу / В. С. Пугачев. – М. : Изд-во МАИ, 1996. – 744 с.
30. Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. – М. : Мир, 1975. – 326 с.
31. Садовничий В. А. Теория операторов / В. А. Садовничий. – М. : Изд. МГУ, 1979. – 296 с.
32. Станкевич И. В. Численные методы линейной алгебры: учеб. пособие / И. В. Станкевич. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1991. – 44 с.
33. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения / Г. Стренг. – М. : Мир 1980. – 454 с.
34. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Наука, 1980. – 312 с.
35. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы / Р. Тьюарсон: [Пер. с англ]. – М. : Мир, 1977. – 191 с.
36. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра: курс лекций для студентов факультета ВМК, МГУ / Е. Е. Тыртышников. – М. : Изд-во МГУ, 1997. – 186 с.
37. Халмош П. Конечномерные векторные пространства / П. Халмош. – М. : Физматгиз 1963. – 264 с.
38. Aitken A.C., Determinants and matrices, Edinbourg, 1968.
39. Perlis S., Theory of matrices, Cambridge, 1972.
40. Frechet M., "Rend. Circolo mat. Palermo", 1906, v. 22.
41. Thrall R. and Tornheim L., Vector spaces and matrices, New York – London, 1977.