МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп'ютерних наук фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

МЕТОЛ ЛОБАЧЕВСЬКОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала: здобувачка 2 курсу, 221М групи
Спеціальності 014.04 Середня освіта
Спеціалізації 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми
«Середня освіта (Математика)»
Фіалковська Любов Вікторівна

Керівник доцентка, кандидатка педагогічних наук Кузьмич Людмила Василівна

Рецензент: в.о. директора Херсонської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 46 Херсонської міської ради, вчитель вищої категорії, вчитель-методиста
Співак Інна Наумівна

Івано-Франківськ – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Державні документи, які регламентують проблеми вітчизняної освіти, підкреслюють, що основним індикатором готовності суспільства змінюватись є математична освіта. Вона допомагає в соціально-економічному розвитку, впроваджує сучасні нові технології на основі мобільності особистості. Математична освіта – серйозний компонент загальноосвітнього фундаменту. Місце математики в системі шкільної освіти визначається її призначенням у формуванні життєвих компетентностей суспільства, в особистісному процесі росту учнів з курсом на продовження навчання, у формуванні креативності та вміння критично міркувати, творчих здібностей.

Вміння працювати з методами розв'язування алгебраїчних рівнянь формується в закладах середньої освіти. Але, аналізуючи сучасну психологічно-педагогічну літературу, шкільну практику, переконуємося, що значна частина школярів не вміє працювати з рівняннями, а також має низький рівень володіння застосовувати інформацію в правильному руслі. І, як справедливо, зазначав Лобачевський М.І.: «Перші поняття, з яких починається якась наука, повинні бути зрозумілими і приведені до найменшого числа. Тоді тільки вони можуть бути міцною і достатньою основою вчення».

Одним із актуальних завдань закладів середньої освіти в даний момент є формування прийомів роботи з алгебраїчними рівняннями, як основи, закладеної в середній школі. Але часто вони є недостатніми для успішного навчання, де під час самостійної роботи доводиться вивчати різні різновиди існування схем розв'язування алгебраїчних рівнянь. Цією проблемою займалися більшість відомих методистів, педагогів та математиків, які дослідили ряд послідовних дій і процесів з поясненням роботи з алгебраїчними рівняннями.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Хоча дана тема не є висвітленою в шкільній програмі здобувачів освіти конкретно на заняттях математики в закладах середньої освіти, але пропедевтикою її є вивчення наближених обчислень, розв’язування рівнянь та систем рівнянь в шкільній програмі з математики. Вона є важливою частиною широкої теми «Чисельні методи», «Оптимізаційні методи і моделі» та розглядається за планами у вищих навчальних закладах з «Вищої математики».

Та, незважаючи на значну кількість наукових робіт з цієї проблеми, є ряд *протиріч (невирішених проблем)*: між вимогами суспільства до якості математичної підготовки і реальним станом; потребою впроваджувати нові способи навчання і реальним станом повернення до традиційного сухого викладання за книжкою; необхідністю підвищення якості формування умінь здобувачів освіти працювати з підручником і низьким рівнем розробленості відповідної моделі навчання.

Стандартний зміст навчання математики, що створювався десятиліттями, визначає математичний фундамент для здобувачів освіти.

Але зміни в галузі техніки, виробництва, освіти, комунікацій ставлять нові вимоги до математичної підготовки професійних кадрів і спонукають до переосмислення традиційного змісту, з’ясування тенденцій подальшого його розвитку з дотриманням наступності.

На зміст навчання математики впливає зростаюча її роль в економіці, техніці, управлінні, суспільних процесах, а також широке впровадження у закладах середньої освіти рівневої і профільної диференціації, компетентнісного, діяльнісного, особистісно орієнтованого підходів.

Тому те, що незважаючи на досить широке застосування методів в навчанні є необхідності оволодіння учнями цих вмінь в усіх галузях навчання. Що стане універсальним методом пізнання дійсності.

Актуальність теми та виявлені протиріччя і послугували нам вибору *теми дослідження* «Метод Лобачевського розв'язування алгебраїчних рівнянь».

Мета дослідження: дослідити використання теми алгебраїчних рівнянь з наближеними коефіцієнтами, розглянути основні етапи розв'язування таких рівнянь, поглибити й узагальнити теоретичні знання про деякі методи наближеного розв'язання рівнянь та застосування комп'ютерних засобів у роботі здобувачів освіти з алгебраїчними рівняннями. Розглянути вивчення наближених обчислень у загальноосвітніх навчальних закладах на уроках математики.

Відповідно до мети дослідження були визначені наступні *завдання:*

1) провести аналіз історичного, теоретичного і практичного стану проблеми формування уміння працювати з алгебраїчними рівняннями;

2) проаналізувати програми та підручники з математики для загальноосвітніх навчальних закладів про вивчення наближених обчислень;

3) встановити методичні підходи та прийоми розв'язування алгебраїчних рівнянь методом Лобачевського та можливість використання для цього комп'ютерних технологій;

4) розглянути та описати варіанти розв'язання алгебраїчних рівнянь методом Лобачевського та інших інтерпретацій.

Об'єкт дослідження: освітній процес у закладах вищої освіти.

Предмет дослідження: навчання математики через формування прийомів роботи з наближеними обчисленнями та алгебраїчними рівняннями.

Методи дослідження: аналіз теоретичних положень і педагогічного досвіду за літературними джерелами.

У ході дослідження проводився аналіз наукової, методичної літератури, вивчались нормативні документи Міністерства освіти і науки України, які регламентують навчальний процес.

Практичне значення одержаних результатів: Матеріали кваліфікаційної роботи покликані привернути увагу здобувачів математичної освіти, вчителів, викладачів цієї спеціальності до розв'язування алгебраїчних рівнянь як засобу розвитку інтелектуальних, творчих, практичних компетентностей здобувачів освіти. Вони можуть бути використані в навчальному процесі з математики з метою розвитку прийомів роботи з розв'язування алгебраїчних рівнянь. Адже, завдання, що вимагають розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь зустрічаються в багатьох галузях науки і техніки. Саме тому і розроблено велику кількість способів розв'язання таких рівнянь. І якщо до середини 50-х років метод Лобачевського вважався одним із найдосконаліших способів розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь, але реалізація його складна через недостатню універсальність і громіздкість алгоритму та низьку точність визначення коренів з близькими та рівними модулями. Для усунення недоліків методу Лобачевського кілька варіантів, однак ці варіанти також не знайшли широке поширення через наявність в них не лише додаткових переваг у порівнянні з класичним методом, але й додаткових недоліків.

Апробація результатів дослідження: За темою даної роботи було виконано та оприлюднено статтю під назвою «Чисельні методи та розв`язування алгебраїчних рівнянь методом Лобачевського» [38].

Структура роботи. Матеріали дослідження викладені на сторінках і складається зі вступу, трьох розділів, списку використаних джерел, додатків.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МЕТОДУ ЛОБАЧЕВСЬКОГО

1.1. Огляд літератури з історії і теорії і застосування методу Лобачевського

Прості математичні задачі малої вимірності, які вивчаються у шкільній математиці або навіть в університетських курсах лінійної алгебри або математичного аналізу, можна розв’язувати відомими способами і методами та отримувати аналітичні розв’язки. Але при моделюванні процесів і систем виникають набагато складніші математичні задачі великої розмірності, які можуть не мати аналітичних розв’язків, але які можна розв’язати, наприклад, за допомогою алгебраїчних рівнянь.

Алгебраїчне рівняння є частинним випадком нелінійного рівняння $f(x) = 0$, де $f: R_1 \to R_1$ алгебраїчна або трансцендентна функція. Такі рівняння називають ще скалярними. Прикладом таких рівнянь можуть бути наступні рівняння: $\sqrt{1 + \sin x^3} = \mathrm{x} + \ln(x^2 + 1) - \cos x^3$,

$13 \sin e^x + 0.2shx = 5 \lg(7\pi x + 150)$ і т.п.

Процедура знаходження наближених розв’язків таких рівнянь полягає у локалізації цих коренів та їх подальшого уточнення. Для його розв’язання можна застосовувати такі наближені методи, як: метод поділу навпіл, метод хорд, метод Ньютона (метод дотичних) та його модифікації (спрощений, різницевий або дискретний, Стефенсена, січних) та їх комбінація – так звані гібридні методи, наприклад, хорд-дотичних, метод простих ітерацій тощо. Існують методи,які не вимагають локалізації коренів, але вони дають більшу похибку.

Одним із найефективніших методів знаходження всіх або майже всіх коренів алгебраїчного рівняння, як дійсних, так і комплексних, є метод Лобачевського.

Однією з перших робіт, в якій викладено метод, що розглядається, є «Алгебра» Лобачевського М.І. (опублікована Казанським університетом у 1834 р. [22]), де була роз'яснена сутність методу, наведені формули для перетворення (квадрування) рівнянь, дано приклади розв'язання рівнянь. Через три роки метод знову був запропонований швейцарським математиком Греффе, а ще раніше, в 1826 р. – французьким математиком Данделеном. Тому метод, що розглядається, іноді називається методом Лобачевського – Греффе – Данделена [1]. Істотний внесок у розробку методу зробив також у 1841 р. німецький астроном Енке. Також цей метод називають методом квадратного кореня.

Що стосується розв’язування рівнянь різних типів цим методом, це докладно викладено академіком Криловим А.М. у лекціях про наближені обчислення, вперше опублікованих у 1911 р. [20].

У курсі вищої алгебри Куроша О.Г. наголошується, що серед методів наближеного обчислення коренів найбільш досконалим є метод Лобачевського [21]. Аналогічна оцінка цього методу міститься у роботах Сушкевича А.К., Демидовича Б.П. та Марона І.А., Загускіна В.Л. та інших [11,15,28]. При цьому відзначаються наступні переваги методу:

1) розв'язування рівнянь проводиться без виконання громіздких операцій попереднього відділення коренів;

2) всі корені рівняння визначаються практично одночасно;

3) визначаються різні типи коренів – дійсні, комплексні, з близькими та рівними модулями:

4) корені обчислюються, як правило, з дуже високою точністю;

5) процес обчислень завжди збігається.

Однак у багатьох сучасних посібниках з обчислювальної математики метод Лобачевського викладається дуже коротко чи взагалі не згадується [2, 6, 10, 25, 32]. Так, у поширених довідниках з вищої математики [5, 17] викладено лише сутність методу. Докладніше метод описаний у довіднику з розв'язування алгебраїчних рівнянь [15] і в посібнику з вищої математики [1]. Спробу використання методу Лобачевського під час розв'язування рівнянь за допомогою мікрокалькуляторів зроблено в роботі [30]. Ця спроба, мабуть, визнана авторами роботи невдалою й у наступному виданні книги [31] метод Лобачевського відсутній.

Найчастіше відзначаються недоліки, сформульовані у роботі [4] наступним чином: «Метод перестав бути універсальним, оскільки є рівняння, для відшукання коренів яких він є непридатний. Але й у випадках його застосування, за наявності комплексних коренів, його реалізація на сучасних технологічних пристроях дуже утруднена. Через складну логіку практично неможливо скласти досить універсальну програму розв'язання широкого класу рівнянь за методом Лобачевського. Метод можна рекомендувати в основному для ручного рахунку при знайденні коренів з невисокою точністю».

Являє певний інтерес аналіз способів подолання труднощів, що зустрічаються при використанні методу Лобачевського, рекомендованих у роботі [20], та способів, запропонованих у цій роботі.

Щоб переконатися, що рівняння має корені з рівними модулями, Крилов А.І. [20] рекомендує «поступати за відомими прийомами відшукання рівних коренів, відшукуючи найбільший дільник між функцією $f(x)$ та її похідною». Замість цієї громіздкої операції достатньо порівняти відношення певних коефіцієнтів заданого рівняння.

При розв'язуванні рівнянь з комплексними коренями у роботі [20] рекомендується використовувати формули Вієта або Енке. У цій роботі показано, що використання формул Вієта недоцільне, а методика Енке може бути модернізована з метою визначення комплексних коренів як з різними, так і з однаковими модулями. Крім того, для розв'язування рівнянь з різними типами коренів запропоновано дуже простий універсальний метод дворазового квадрування, переваги якого виявляються тим більше, чим вищий степінь рівняння.

Велику увагу в лекціях Крилова О.М. приділено обґрунтуванню поправок обчислення комплексних коренів з близькими модулями.

1.2. Сутність методу Лобачевського

Спочатку розв’яжемо цим методом квадратичне рівняння [29]. Припустимо, що дане рівняння

$$f(x) = x^2 + bx + c = 0 \tag{1.1}$$

має дійсні і різні корені. Позначимо більший за абсолютною величиною корінь через x_1, а менший через x_2, тобто

$$|x_1| > |x_2|. \tag{1.2}$$

Рівняння (1.1) можна записати в такому вигляді:

$$f(x) = x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = 0. \tag{1.3}$$

Замінивши в рівнянні (1.3) x на $-x$, матимемо:

$$f(-x) = x^2 - bx + c = (x + x_1)(x + x_2) = 0. \tag{1.4}$$

Очевидно, що коренями рівняння (1.4) будуть числа $-x_1$ і $-x_2$. Перемножимо ліві й праві частини рівностей (1.3) і (1.4):

$$f(x)f(-x) = (x^2 + bx + c)(x^2 - bx + c) = (x^2 - {x_1}^2)(x^2 - {x_2}^2) = 0. \tag{1.5}$$

Якщо в рівнянні (1.5) замінимо x^2 на y, тобто $x = \sqrt{y}$, то знову дістанемо рівняння другого степеня відносно невідомого y:

$$f_1(y) = (y - {x_1}^2)(y - {x_2}^2) = 0, \tag{1.6}$$

коренями якого, очевидно, будуть x_1^2 і x_2^2. Замінивши в рівнянні (1.6) y на $-\ y$, як це ми робили в рівнянні (1.3), дістанемо:

$$f_1(-y) = (y + x_1{}^2)(y + x_2{}^2) = 0, \tag{1.7}$$

Очевидно, що коренями рівняння (1.7) будуть числа $-x_1^2$ і $-x_2^2$. Перемножимо ліві й праві частини рівностей (1.6) і (1.7):

$$f_1(y)f_1(-y) = (y - x_1{}^2)(y - x_2{}^2)(y + x_1{}^2)(y + x_2{}^2) =$$

$$= (y^2 - x_1^4)\ (y^2 - x_2^4) = 0. \qquad (1.8)$$

Якщо в рівнянні (1.8) замінимо y^2 на z, тобто $y = \sqrt{z}$, то знову дістанемо рівняння другого степеня з невідомим z:

$$f_2(z) = (z - x_1{}^4)(z - x_2{}^4) = 0, \tag{1.9}$$

коренями якого будуть x_1^4 і x_2^4.

Замінивши в рівнянні (1.9) z на $-z$, дістанемо:

$$f_2(-z) = (z + x_1{}^4)(z + x_2{}^4) = 0,$$

коренями останнього рівняння будуть числа $-x_1^4$ і $-x_2^4$.

Далі процес повторюємо аналогічно [29].

Припустимо, що ми зробили h таких перетворень (наприклад, 5 перетворень $h = 5$); в результаті прийдемо до рівняння

$$f_h(-t) = t^2 + Bt + C = (t + x_1^m)(t + x_2^m) + 0, \tag{1.10}$$

Корені якого будуть m-ми степенями коренів даного рівняння (1.1), взятими з знаками мінус: $-x_1^m$ і $-x_2^m$, де $m = 2^h$ – парне число.

На підставі теореми Вієта можна записати:

$$B = x_1^m + x_2^m = x_1^m\left[1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^m\right] = x_1^m[1 + \varepsilon],$$

$$C = x_1^m x_2^m = x_1^m x_2^m[1 + 0], \tag{1.11}$$

де $\varepsilon = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^m$.

За нерівністю (1.2) дріб менший від одиниці, отже, можна зробити таке число перетворень h, що число $\varepsilon = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^m$ стане як завгодно малим.

У межах потрібної точності числом ε можна знехтувати [29]; тоді рівності (1.11) перепишуться так:

$$B \approx x_1^m,$$

$$C \approx x_1^m x_2^m, \tag{1.12}$$

звідки:

$$B \approx x_1^m, x_2^m \approx \frac{C}{B}.$$

І остаточно

$$x_1 \approx \pm \sqrt[m]{B};$$

$$x_2 \approx \pm \sqrt[m]{\frac{C}{B}}, \text{де } m = 2^h. \tag{1.13}$$

Знаки коренів x_1 і x_2 встановлюють безпосередньо підстановкою їх у дане рівняння (1.1).

Порівнявши рівняння (1.1) і (1.7), неважко помітити, що корені нового рівняння (1.7) дорівнюють квадратам коренів даного рівняння (1.1), взятим із знаками мінус. Постає питання про те, як здійснити перехід від рівняння (1.1) до рівняння (1.7). Найкоротший шлях буде такий: перемножити ліві частини рівнянь (1.4) і (1.5) і змінити x^2 на y, а саме:

$$(x^2 + bx + c)(x^2 - bx + c) =$$
$$= x^4 - bx^3 + cx^2 + bx^3 - b^2x^2 + bcx + cx^2 - bcx + c^2 =$$
$$= x^4 - (b^2 - 2c)x^2 + c^2 = y^2 - (b^2 - 2c)y + c^2 = 0.$$

Далі, замінивши y на $-y$, дістанемо рівняння (1.7) в такому вигляді:

$$y^2 + (b^2 - 2c)y + c^2 = 0. \quad (1.14)$$

Слід звернути увагу на коефіцієнт при y в рівнянні (1.14); він дорівнює квадратові відповідного коефіцієнта рівняння (1.1) мінус подвоєний сусідній справа з ним коефіцієнт. Отже, коефіцієнти рівнянь, які утворюються після перетворень, дуже швидко зростають, що ускладнює їх обчислення і запис у тому випадку, коли вони дробові. Для полегшення обчислень використовувались логарифмічна лінійка, арифмометр, тощо; результати проміжних обчислень заокруглюємо, зберігаючи число значущих цифр залежно від потрібної точності [29]. Остаточний результат найчастіше записують так:

$$37062 = 3{,}7062 \cdot 10^4,$$

$$0{,}00895 = 8{,}95 \cdot 10^{-3}.$$

Щоб дістати потрібну точність коренів, при обчисленні коефіцієнтів перетворення рівнянь залишають на одну або дві значущі цифри більше, ніж треба мати в наближених значеннях коренів. Наприклад, якщо треба обчислити корені з трьома правильними знаками, обчислення слід вести з 4 або 5 правильними цифрами.

1.3. Застосування методу Лобачевського

Широким колам читачів математичної літератури відомо, що Лобачевський М.І. збагатив алгебру новим методом розв’язування рівнянь, однак поняття суті і особливостей методу, його практичного застосування відомі далеко не всім. До такого висновку наводить та переконує численні факти з досвіду роботи викладачів вищих навчальних закладів. Та якщо запитати, навіть, у студентів та викладачів найпростіші відомості: « У чому суть методу Лобачевського?», «Як, користуючись ним, розв’язувати рівняння?» тощо, доведеться почути, що методом Лобачевського можна користуватись лише при розв’язуванні обмеженого типу рівнянь, або почути відповідь про «наближені обчислення методом Лобачевського».

Але можна згадати, що відкриття Лобачевського, його праці створили йому заслужену славу, поставили його в перші рядки вчених-революціонерів. Його дослідження стосувались до таких основних понять математики, як, наприклад, поняття неперервності і диференційованості, поняття функції тощо.

Для математиків XXVIII століття Лобачевський додержувався інших поглядів ніж інші дослідники, він говорив: «Здається, не можна сумніватися ні в істині того, що все в світі може бути представлено числами, ні в справедливості того, що всяка змінна у відношенні виражається аналітичною функцією. Тим часом, великий вид теорії допускає існування залежності тільки в тому сенсі, що числа одне з одним у зв’язку, приймати як би даними разом» [26].

Відкривши функцію $\pi(d) = \alpha$, яка в геометрії Лобачевського зв’язує кут паралельності α з довжиною перпендикуляра $AD = d$, Лобачевський знайшов залежність між d і α пізніше, після довгого і наполегливого шукання її. Цей факт привів Лобачевського до остаточного переконання, що « … це загальне поняття вимагає, щоб функцією від x називати число, яке дається для кожного x і разом з x поставлено змінюватися. Значення функції може бути дано або аналітичним виразом, або умовою, яка подає засоби випробувати всі числа і вибрати одне із них, або, нарешті, залежність може існувати і залишатися невідомою» [26].

Сформульованим твердженням Лобачевський попередив сучасне математичне означення функції і дав повне розуміння різниці між поняттям функції і тим чи іншим її аналітичним виразом.

В усіх своїх дослідженнях і висновках Лобачевський керувався вимогою високої математичної строгості, яка була властива лише математиці ближчого до нас періоду.

У творах [21] Лобачевський говорить: «Перші поняття у всіх галузях математичних наук отримуються легко, але завжди з'єднані з недолікамии. Десь, проте ж, треба повернутися до початку і тепер всю строгість почитати біля точки. На мою думку, Алгебра перша починає математику зі всією точністю понять і зі всією широкістю погляду, тоді як Арифметика складає ще підступи, слугує тільки підготовкою до навички» Тому Лобачевський до найбільшої строгості викладу початків алгебри, доводить, наприклад, таке твердження: $(a + b) + c = (a + c) + b$, окремим випадком якого (для $a = 0$) є переставний закон. Він подає також доведення й такого твердження: «різницею двох чисел може бути тільки одне число», звертаючи, таким чином, перше в історії математики увагу на дуже важливу вимогу, яка повинна ставитись до математичних дій і яка пізніше в теорії арифметиці названа законом однозначності дії віднімання.

Вважаючи, що «розв'язування рівнянь завжди становило головний предмет Алгебри», Лобачевський доклав багато зусиль для вдосконалення методів розв'язування алгебраїчних рівнянь і збагатив алгебру надзвичайно цінним методом числового розв'язання рівнянь вищих степенів.

Як показав Рогаченко В.Ф., цей метод помилково приписували швейцарському і бельгійському математикам Греффе К.Г. і Дандалену Ж.П., і в дійсності пріоритет у відкриті методу належить Лобачевському М.І.

Перш ніж розглянути приклади розв'язання рівнянь, слід нагадати кілька загальновідомих алгебраїчних понять та тверджень.

Під алгебраїчним виразом розуміють символічний запис, де сказано, які алгебраїчні дії і в якому порядку слід виконати над даними числами, щоб дістати числове значення даного виразу [29].

Числа виразу можуть бути позначені буквами або цифрами. Роль букв в алгебраїчному виразі не однакова: ті з них , що в процесі даного міркування позначають сталі числа, називаються параметрами, а ті з них, яким можна приписувати різні числові значення, називаються аргументами.

Многочленом, або поліномом, називають вираз, складений з аргументів і з параметрів, сполучених діями додавання і множення.

Теорема 1 (Безу). Якщо рівняння $f(x) = 0$ *має корінь* x_0 *тобто* $f(x_0) = 0$*, якщо , то* $f(x)$ *поліном ділиться без остачі на* $(x - x_0)$.

Теорема 2. Усяке рівняння n*-го степеня з будь-якими числовими коефіцієнтами має* n *коренів, комплексних або, зокрема, дійсних; деякі з цих коренів можуть бути однакові, тобто кратні.*

Доведення цієї теореми виходить далеко за межі цієї роботи, а тому доречно його опустити.

Теорема 3. Якщо рівняння n*-го степеня* $f(x) = 0$ *має* $m(m \leq n)$ *різних коренів* $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m$*, то многочлен* $f(x)$ *ділиться без остачі на добуток:*

$$(x - x_1), (x - x_2), (x - x_3), \dots, (x - x_{m-1}), x - x_m).$$

Теорема 4 (Вієта). В будь-якому многочлені

$$f(x) = x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}x^{n-2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0}x + \frac{a_n}{a_0},$$

Який має корені $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, коефіцієнт $\frac{a_1}{a_0}$ при другому члені дорівнює сумі коренів многочлена, взятій з протилежним знаком; коефіцієнт $\frac{a_2}{a_0}$ при третьому дорівнює сумі добутків коренів по два; коефіцієнт $\frac{a_3}{a_0}$ при четвертому члені дорівнює сумі добутків по три, взятій з протилежним знаком, і т.д.; нарешті, останній $\frac{a_n}{a_0}$ член дорівнює добуткові всіх коренів, взятому з його знаком або з протилежним, залежно від того, парне чи непарне число n.

Теорема 5. Якщо

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \tag{1.15}$$

$$\varphi(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m \tag{1.16}$$

два многочлени і якщо степінь m многочлена (1.16) *не більше від степеня n многочлена* (1.15)*, то остання остача, відмінна від нуля, добута в процесі послідовного ділення, є найбільший спільний дільник многочленів* (1.15) *і* (1.16).

Протягом історії розвитку алгебри створювались і розвивались методи розв'язування рівнянь. Володіння цими методами залежить від обсягу знань з алгебри. Так, для всіх, хто закінчив восьмий клас середньої школи, відома формула для розв'язання квадратного рівняння, за якою корені рівняння виражаються через його коефіцієнти за допомогою квадратних радикалів [29].

Ідея табличного методу, дуже проста – вона полягає у зменшенні числового інтервалу, всередині якого міститься дійсний корінь даного рівняння. Правда, кожне істотне зменшення інтервалу, в якому міститься шуканий корінь рівняння, зв'язане з великою обчислювальною роботою, оскільки треба буде знайти багато значень многочлена $f(x)$.

Саме у великій трудомісткості полягає значна незручність табличного методу.

Щоб зменшити цю обчислювальну роботу, в алгебрі широко вживається комбіноване використання двох методів, наприклад. Табличного і одного з інших методів, зокрема графічного. Комбіноване використання двох методів де можливість значно швидше звузити інтервал, в якому міститься шуканий корінь рівняння, а значить, і скоріше його обчислення.

Але, графічний метод розв'язування рівнянь дає грубо наближені значення коренів. Якщо потрібна більша точність, то беруть добуті значення за наближені і за допомогою інших методів (зокрема табличного) обчислюють корені з потрібною точністю [29].

В алгебрі всі методи, якими користуються при розв'язуванні будь-яких рівнянь з числовими коефіцієнтами, незалежно від того, що їх можна розв'язати за спеціальними формулами (зокрема в радикалах), називають числовими методами.

Метод Лобачевського найбільш досконалий і зручний і дає можливість обчислювати не тільки дійсні, а й комплексні корені рівняння. Зручність методу в тому, що немає потреб насамперед визначити число дійсних коренів або зазначати їх інтервали і віддаляти один від одного; усе це, як правило, автоматично виходить в процесі досить нескладних обчислень за допомогою дій додавання, віднімання і множення.

Наведемо приклад використання Методу Лобачевського.

Приклад 1. Знайти корені рівняння:

$$2x^2 + 5x - 3 = 0, \textit{ або } x^2 + 2{,}5x - 1{,}5 = 0$$

з чотирма правильнимизнаками.

Розв`язання :

Обчислення зручно розміщувати в такій таблиці (Табл. 1.3.1):

коефіцієнти даного рівняння	$a_0 = 1$	$b = 2{,}5$	$c = -1{,}5$	h кількість перетворень	$m = 2^h$ степінь кореня
		$-2 \cdot 1 \cdot (-1{,}5) = 6{,}25 + 3 = 9{,}25$	$c^{`} = c^2 = (-1{,}5)^2 = 2{,}25$		
коефіцієнти 1-го перетвореного рівняння	1	$b^{`} = 9{,}25$	$c^{`} = 2{,}25$	1	2
		$9{,}25^2 - 2 \cdot 2{,}25 = 85{,}562 - 4{,}5 = 81{,}062 = 8{,}1062 \cdot 10$	$2{,}25^2 = 5{,}0625$		
коефіцієнти 2-го перетвореного рівняння	1	$8{,}1062 \cdot 10$	$5{,}0625$	2	4

Табл. 1.3.1

Продовження Табл. 1.3.1

		$8{,}1062^2 \cdot 10^2 - 2 \cdot 5{,}0625 = 65{,}710 \cdot 10^2 - 10{,}125 = 6{,}5710 \cdot 10^3 - 0{,}0101 \cdot 10^3 = 6{,}5609 \cdot 10^3$	$5{,}0625^2 = 25{,}629 = 2{,}5629 \cdot 10$		
коефіцієнти 3-го перетвореного рівняння	1	$6{,}5609 \cdot 10^3$	$2{,}5629 \cdot 10$	3	8
		$6{,}5609^2 \cdot 10^6 - 2 \cdot 2{,}5629 \cdot 10 = 43{,}045 \cdot 10^6 - 5{,}1258 \cdot 10 = (4{,}3045 - 0{,}000005) \cdot 10^7 = 4{,}3045 \cdot 10^7$	$2{,}5629^2 \cdot 10^2 = 6{,}5685 \cdot 10^2$		
коефіцієнти 4-го перетвореного рівняння	1	$B = 4{,}3045 \cdot 10^7$	$C = 6{,}5685 \cdot 10^2$	4	16

Далі перетворення припиняємо.

$x_1 = \pm\sqrt[m]{B} = \pm\sqrt[16]{4{,}3045 \cdot 10^7}$;

$lgx_1 = \frac{1}{16}\lg(4{,}3045 \cdot 10^7) = \frac{1}{16} \cdot 7{,}63392 = 0{,}47712$; $x_1 = \pm 3{,}0000$;

$x_2 = \pm\sqrt[m]{\frac{C}{B}} = \pm\sqrt[16]{\frac{6{,}5685 \cdot 10^2}{4{,}3045 \cdot 10^7}} = \pm\sqrt[16]{1{,}5260 \cdot 10^{-5}}$;

$lgx_2 = \frac{1}{16}\lg(1{,}5260 \cdot 10^{-5}) = \frac{1}{16} \cdot \bar{5}, 18355 = \bar{1}, 69897$; $x_2 = \pm 5{,}00$.

Підставляючи корені ± 3 і $\pm 0{,}5$ в дане рівняння, знайдемо:

$x_1 = -3$; $x_2 = 0{,}5$.

Відповідь: $x_1 = -3$; $x_2 = 0{,}5$.

РОЗДІЛ 2

ЗІСТАВЛЕННЯ РІЗНИХ ВАРІАНТІВ МЕТОДУ ЛОБАЧЕВСЬКОГО З ІНШИМИ МЕТОДАМИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

2.1. Рекомендації щодо використання різних варіантів методу Лобачевського

Розглядаючи різні способи удосконалення методу Лобачевського можна рекомендувати наступний порядок його використання:

1. При розв’язуванні рівнянь степеня $n \leq 5$ доцільно застосовувати квадрування, формули Енке, схему Горнера, спрощений алгоритм визначення знаків кореня [18].

2. Якщо значення показника степеня рівняння перебувають у діапазоні $5 \leq n \leq 7$, додатково можна рекомендувати методи деквадрування і сполучених рівнянь. Крім того, замість перерахованих способів можна використати метод дворазового квадрування (узагальнений метод Лобачевського).

3. При $n > 7$ доцільно використовувати в основному узагальнений метод Лобачевського.

4. Для розв’язування рівнянь алгебри з коренями, що мають рівні модулі і великі показники степеня, що виключають можливість квадрування на даному типі мікрокалькулятора (або мікро-ЕОМ), доцільно використовувати метод пов'язаних рівнянь.

Розглянемо алгоритм розв'язання рівнянь із використанням усіх розглянутих способів, крім методу дворазового квадрування, який викладено особливо.

На початок розв’язання доцільно проаналізувати коефіцієнти заданого рівняння (Рис.2.1.1):

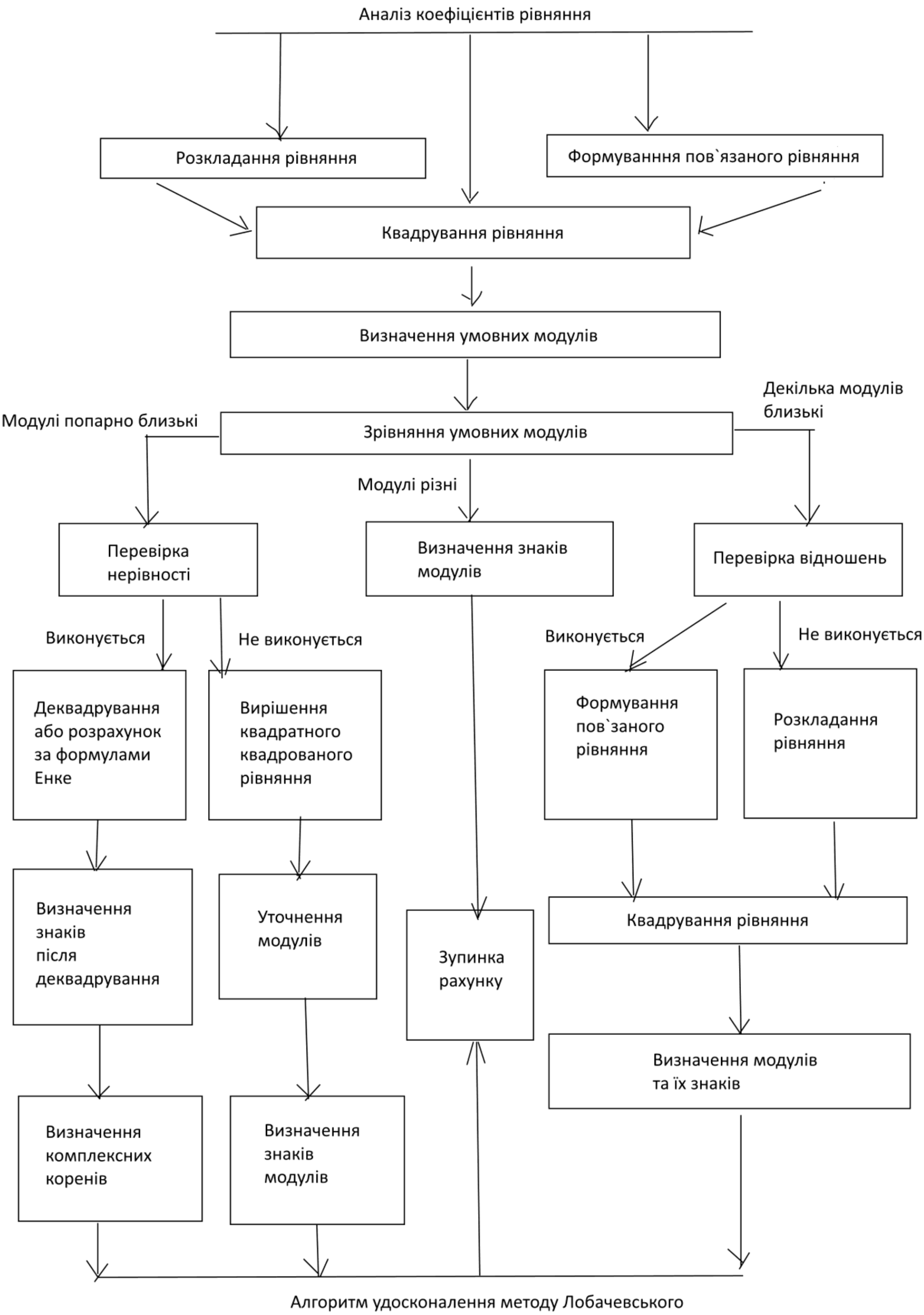

Рис.2.1.1. Алгоритм удосконалення методу Лобачевського

- якщо має місце нерівність $|a_0| \gg |a_j| (i = 1, \dots, n)$, то рівняння необхідно розкласти за степенями $x \pm a_0^{1/n}$;
- при виконанні співвідношень

$$r = \left(\frac{a_0}{a_n}\right)^{1/n} = \left(\frac{a_1}{a_{n-1}}\right)^{1/(n-2)} = \left(\frac{a_2}{a_{n-2}}\right)^{1/(n-2)} = \cdots, \qquad (2.1)$$

складається і розв’язується сполучене рівняння або здійснюється перетворення заданого рівняння з метою використання формул Енке.

Після квадрування та обчислення умовних модулів необхідно провести аналіз цих модулів [19].

Якщо умовні модулі суттєво різняться між собою, то визначаються знаки модулів і розв'язування рівняння завершується. За наявності однієї чи кількох пар близьких модулів перевіряється виконання нерівності

$$a_{im} < 2\sqrt{a_{i-1;m}} \cdot \sqrt{a_{i+1;m}} \qquad (2.2)$$

для кожного квадратного квадрованого рівняння. Якщо нерівність (2.2) виконується, то комплексні корені обчислюються деквадруванням або за допомогою формул Енке.

Якщо нерівність (2.2) не виконується, то визначаються корені квадратних квадрованих рівнянь, а потім шляхом вилучення кореня степеня – уточнені значення модулів заданого рівняння. Розв’язання завершується визначенням символів модулів. За наявності кількох близьких модулів перевіряється наявність співвідношень

$$r = \left(\frac{a_{0m}}{a_{nm}}\right)^{1/Nn} = \left(\frac{a_1}{a_{n-1;m}}\right)^{1/N(n-2)} = \left(\frac{a_2}{a_{n-2;m}}\right)^{1/N(n-2)} = \cdots \qquad (2.3)$$

між коефіцієнтами. Якщо це співвідношення виконується, формується сполучене рівняння або здійснюється перетворення з метою застосування формул Енке.

Після розв'язання сполученого рівняння та визначення уявних частин комплексних коренів (при їх рівності нулю корені є дійсними) рішення рівняння завершується.

При невиконанні співвідношень (2.1) задане рівняння розкладається за степенями двочлена, квадрується, а потім обчислюються модулі коренів та їх знаки.

У разі рівнянь високого степеня можуть зустрітися всі розглянуті варіанти. Наприклад, може бути частина модулів, добре відокремлених один від одного, інша частина модулів (умовних) – попарно близьких, а кілька модулів, що залишилися, – з близькими значеннями. У цьому випадку зупинення рахунку після закінчення обчислень за цим варіантом не проводиться; обчислення здійснюються за іншими варіантами – до завершення визначення всіх коренів [23].

Викладений алгоритм забезпечує високоточне визначення коренів рівняння. Якщо висока точність не потрібна, то алгоритм обчислень можна спростити. Але і при реалізації алгоритму в повному обсязі, як показано нижче, час рахунку за методом Лобачевського менший, а точність визначення коренів вища порівняно з відповідними показниками методів розв'язання алгебраїчних рівнянь, що застосовуються в даний час.

Алгоритм розв'язання алгебраїчних рівнянь узагальненим методом Лобачевського наведено на рис.1. Розв’язання рівнянь доцільно розпочинати з перевірки наявності у рівнянні коренів (дійсних і комплексних) з рівними модулями, тобто, з перевірки виконання співвідношень (2.1) між коефіцієнтами заданого рівняння. Під час перевірки співвідношень (2.1) обчислюється точне значення модулів коренів. Якщо співвідношення (2.1) не виконується, проводиться квадрування та визначення умовних модулів [24].

2.2. Зрівняння метода Лобачевського з методами Ньютона та Ліна

Порівняємо викладені вище варіанти методу Лобачевського з найпоширенішими в даний час методами:

- обчислення дійсних коренів – методом Ньютона;
- обчислення комплексних коренів – методом Ліна;
- розв’язання рівнянь степеня $n \leq 5$ – спеціальним методом виділення квадратичного множника [31];
- розв'язання рівняння з показником степеня – методом нелінійного програмування.

У методів можна порівняти такі показники:

- точність обчислення модулів коренів;
- кількість арифметичних операцій;
- універсальність алгоритмів.

Кількість арифметичних дій у кожному циклі квадрування можна визначити за формулами:

а) кількість множень (ділень):

$$j_1 = 2\left(1 + \sum_2^{\frac{(n+1)}{2}} i\right) - M; \tag{2.4}$$

Б) кількість додавань (віднімань):

$$S_1 = 2\sum_2^{\frac{(n+1)}{2}} i - M, \tag{2.5}$$

де

$$M = \begin{cases} \frac{(n+1)}{2}; \\ 0 \end{cases}$$ при n парному, та при n непарному.

При використанні методу Ньютона значення функції та її похідної - відповідно обчислювати за схемою Горнера. У цьому випадку в кожному кроці (циклі) обчислень модуля виконується $j_2 = 2n - 2$ додавання (віднімання) та $S_2 = 2n$ множення (ділення).

Розраховані за цими формулами кількості арифметичних дій для обчислення всіх коренів рівняння алгебри даних випливає: практично гранична точність обчислення модулів коренів має місце після виконання 5-6 кроків (циклів) розрахунку, якщо початкові значення коренів обрані досить близькими до їхніх істинних величин. В іншому випадку кількість циклів розрахунку може суттєво зростати [34].

Зі зіставлення результатів розрахунків також можна сказати, що найбільша точність методу Ньютона не перевищує найбільшої точності методу Лобачевського, якщо в обох випадках використовувався мікрокалькулятор типу «Електроніка Б3-34».

Аналіз даних показує, що кількість арифметичних дій щодо визначення всіх коренів рівняння методом Ньютона більша, ніж при використанні методу Лобачевського, від 1,5–2 разів за рівнем рівняння $n = 3$ до 4–5 разів за $n = 10$.

Вище не враховувалися арифметичні дії, необхідні:

- для визначення знаків модулів коренів у методі Лобачевського;
- визначення початкових значень коренів (відділення коренів) у методі Ньютона.

При врахуванні всього обсягу обчислень перевага методу Лобачевського у разі обчислення дійсних коренів рівнянь порівняно з методом Ньютона зростає ще більше [34].

Порівняємо метод Лобачевського з методом Ліна, який широко застосовується для розв’язування рівнянь із комплексним коренями.

Запозичене з роботи [15] рівняння Левір'я 6-го степеня в §6 було розв’язане методом Лобачевського з використанням деквадрування.

У цій роботі показано, що при розв’язуванні рівнянь з комплексним коренями, що має рівні модулі, доцільно застосовувати пов'язані рівняння, що мають дійсні корені. Тому розв'язання таких рівнянь зводиться до випадку розв’язуванні рівнянь із дійсним коренями.

З викладеного вище у випадку застосування малої обчислювальної техніки можна зробити такі висновки:

1. При використанні мікрокалькуляторів типу «Електроніка Б3-34» точність методів Лобачевського, Ньютона та Ліна приблизно однакова.

2. Метод Лобачевського вимагає від 1,5 до 5 разів меншого обсягу обчислень усіх коренів рівнянь степеня $3 \leq n \leq 10$.

3. Істотною перевагою методу Лобачевського в порівнянні з методами Ньютона, Ліна та іншими є відсутність необхідності:

а) відокремлення коренів;

б) перевірки збіжності методу;

в) використання інших методів, якщо цей метод не збігається.

2.3. Порівняння методу Лобачевського з іншими методами розв’язування алгебраїчних рівнянь

При розв’язуванні алгебраїчних рівнянь на ЕОМ широко використовуються методи парабол (Мюллера) і як найшвидшого спуску [7, 8, 9].

Відповідні програми характеризуються такими показниками:

- програма розміщується на 250–300 осередках пам'яті 3-адресної ЕОМ; при використанні одно адресної ЕОМ потрібна кількість осередків пам'яті зростає до 600-800;
- для визначення коренів многочлена 20-го степеня з дійсними коефіцієнтами потрібно 33–37 с, якщо швидкодія ЕОМ становить у середньому 20 000 операцій на секунду. При цьому відносна похибка дорівнює 10^{-9};

- двократні корені обчислюється з меншою точністю; програми забезпечують 5–6 правильних знаків, а за рахунку трикратного кореня – 3–4 правильні знаки.

З цих даних випливає, що використання методів Мюллера та як найшвидшого спуску в програмах, призначених для сучасних мікрокалькуляторів, є недоцільним як внаслідок дуже великого обсягу програмної пам'яті, так і внаслідок низької точності обчислення кратних коренів [27].

З наведених вище даних випливає також, що метод дворазового квадрування при потребі займає помітно більшого часу рахунку в порівнянні з іншими варіантами реалізації методу Лобачевського. Але час рахунку за цим методом менший, ніж інших у методів, що широко використовуються.

Як зазначалося, алгоритм розв'язання рівнянь з допомогою методу двократного квадрування значно простіший алгоритму інших варіантів методу Лобачевського, що дуже важливо. Висока також точність розв’язання. Тому узагальнений метод Лобачевського рекомендується як основний спосіб розв'язання рівнянь з будь-якими типами коренів.

РОЗДІЛ 3

ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА ВЗАЄМОДІЇ МЕТОДУ ЛОБАЧЕВСЬКОГО НА ЗАНЯТТЯХ З МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

3.1. Необхідність використання методу Лобачевського

Завдання, які потребують розв’язування нелінійних алгебраїчних рівнянь, зустрічаються в багатьох галузях науки і техніки. Зокрема, при розв’язуванні практичних задач часто мають справу з наближеними обчисленнями, наближеними числами. Тому розроблено велику кількість способів наближеного розв'язання таких рівнянь [16].

Задачі з наближеними обчисленнями завжди були цікавими і потрібними у різні часи, оскільки вони були і є відображенням дійсності. Застосування математичних методів у поєднанні з величезним арсеналом комп’ютерних технологій дозволяє знаходити оптимальні рішення практичних задач у різних сферах діяльності людини. У зв'язку з повсюдним поширенням програмованих мікрокалькуляторів і персональних мікро-ЕОМ, ПК зріс інтерес до простих високоточних способів розв’язання рівнянь, що реалізуються на цих обчислювальних пристроях: якщо рівняння з високою точністю можна розв’язати на мікрокалькуляторі протягом 15-30 хвилин, то звернення до потужної ЕОМ (ПК) стає недоцільним – загальні витрати часу розв’язання рівняння з допомогою цієї техніки колективного користування (підготовка програми, оформлення заявки, очікування затвердженого виконавцю часу використання ЕОМ (ПК), тощо), зазвичай, більше.

До середини 50-х років метод Лобачевського вважався одним із найдосконаліших способів розв'язання нелінійних рівнянь алгебри [3, 11, 20, 21, 25]. Однак, спроби реалізації його на ЕОМ (ПК) не вдалися через недостатню універсальність та громіздкість алгоритму та низьку точність визначення коренів з близькими та рівними модулями. Тому в даний час при розв’язанні рівнянь як на ЕОМ так і на мікрокалькуляторах метод Лобачевського не використовується [2, 6, 10, 31, 32].

Для усунення недоліків методу Лобачевського розроблено кілька варіантів [4, 15]. Однак, ці варіанти також не знайшли широкого поширення через наявність у них не тільки додаткових переваг порівняно з класичним методом, але й додаткових недоліків.

У цій роботі вже було проведено аналіз похибок методу, вивчено залежність між коефіцієнтами рівнянь, що мають корені з рівними модулями та ін. На базі цих досліджень пропонуються нові способи покращення методу Лобачевського [26, 35, 33]:

1) використання досить простої ознаки наявності в рівнянні дійсних і комплексних коренів з рівними модулями;

2) обчислення дійсних і комплексних коренів з рівними модулями за допомогою сполучених рівнянь, коренями яких є дійсні частини комплексного кореня або дійсні корені заданого рівняння;

3) удосконалення методу Енке та рішення за допомогою цього методу рівнянь з комплексними коренями, що має як різні, так і однакові моделі;

4) розв'язання рівнянь із дійсним і комплексним коренями, з різними та однаковими модулями за допомогою універсального узагальненого методу Лобачевського – методу дворазового квадрування (переваги методу зростають зі збільшенням степеня рівняння);

5) визначення комплексного коріння з різними модулями дуже простим способом деквадрування рівнянь;

6) визначення наявності та місця комплексного коріння у квадрованому рівнянні способом, що не вимагає інформації про знаки коефіцієнтів рівняння у різних циклах квадрування;

7) визначення знаків дійсних та комплексних коренів спрощеним способом.

Для підвищення точності визначення коренів з близькими модулями, відповідно до рекомендацій роботи [3], детально розглянуто застосування розкладання заданого рівняння за ступенями двочлена.

Доцільність використання та висока ефективність перерахованих способів продемонстрована на конкретних прикладах. Дано рекомендації щодо вибору способів у різних умовах.

Крім того, в роботі проведено порівняльний аналіз модернізованого методу Лобачевського та інших методів розв'язання рівнянь, що широко використовуються в даний час. Показано, що в одних випадках він не поступається, а в інших випадках – істотно перевершує застосовувані методи [27]. Аналіз підтвердив також доцільність реалізації методу Лобачевського на програмованих мікрокалькуляторах типу «Електроніка Б3-34» при розв’язанні рівнянь степеня $n \leq 7$, а якщо модулі дійсних та комплексних коренів рівні, – при $n \leq 14$.

Також існує потреба та можливість користуватись блок-схемами в реалізації методу Лобачевського, наприклад (Рис. 3.1.1):

1) у випадку дійсних різних по величині коренів [37]:

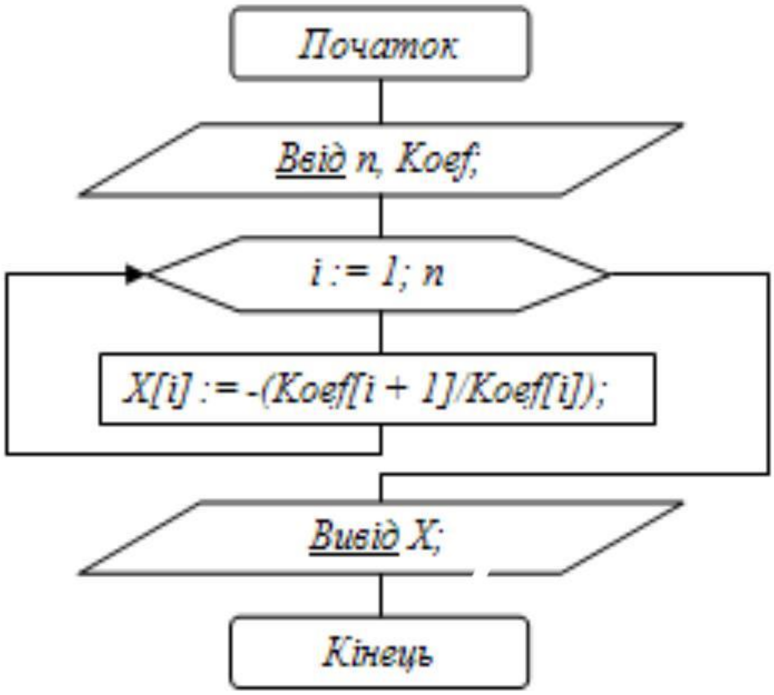

Рис. 3.1.1. Блок-схема алгоритму реалізації методу Лобачевського

2) у випадку використання процесу квадрування (Рис. 3.1.2) [36]:

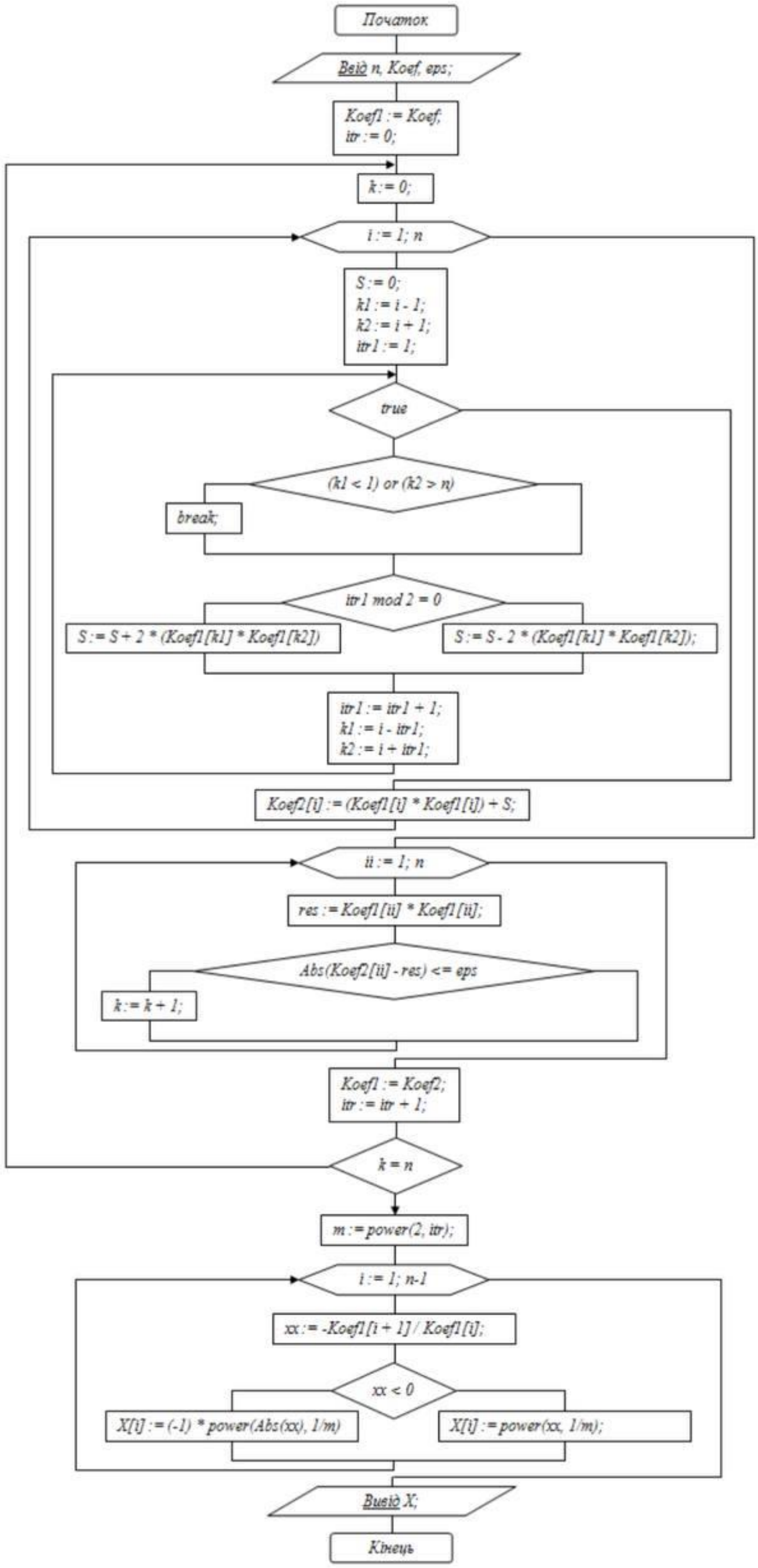

Рис. 3.1.2. Блок-схема алгоритму методу Лобачевського у випадку використання процесу квадрування

3.2. Використання методу Лобачевського в середовищі програмування Delphi

У випадку, з практичними заняттями на уроках до використанням середовища програмування Delphi, можна знаходити методом Лобачевського корені алгебраїчних рівнянь (у випадках дійсних коренів), де буде виконуватися дія, при якій коли таких коренів немає, програмою буде видаватись на дисплеї повідомлення з відповідною інформацією.

Потрібно створити програму, де на вході буде приймати степінь рівняння-многочлена, та запису в таблицю String Grid коефіцієнтів при невідомих, та матимемо точність розв`язку [24]. Програмою виконається процес квадрування з ітераціями в кількості рівною десяти. Якщо, виконуючи завдання, система отримує переповнену комірку із занадто великим числом, то програма видасть повідомлення, що неможливо отримати розв`язок. Також дане повідомлення можливо побачити, якщо досягти заданої точності неможливо.

Потрібно скласти код даної програми, він матиме такі складові: (Додаток А).

Також маємо отримати такий інтерфейс проєкту (рис. 3.2.1).

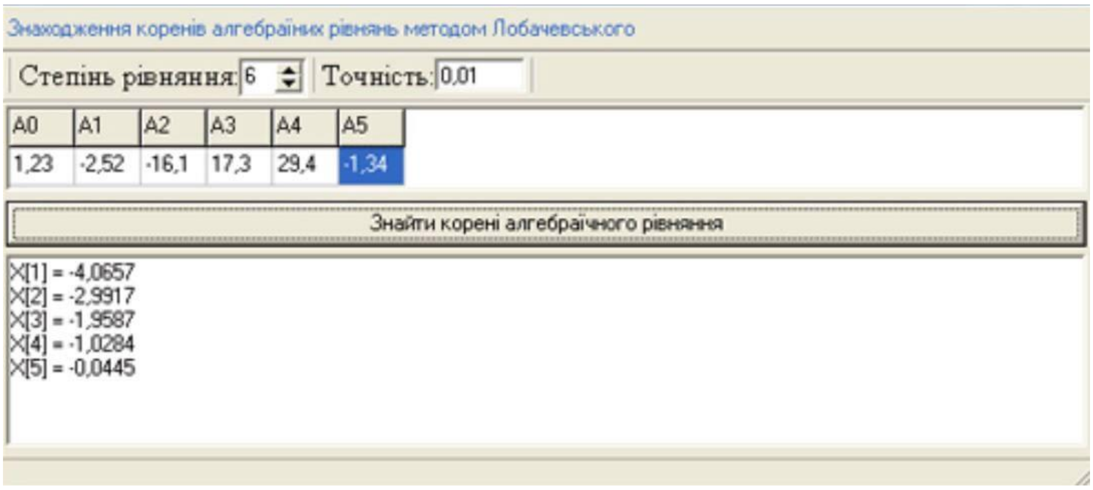

Рис. 3.2.1

Така програма не важка в застосуванні та підходить для вивчення в школі для більшого наглядного прикладу розв`язання алгебраїчних рівнянь.

3.3. Використання методу Лобачевського мовою С++

Навіть при використанні сучасних мікрокалькуляторів з обмеженою розрядністю чисел поправки не потрібні – в обох варіантах похибки обчислення коренів практично однакові.

Вивчення методу Лобачевського, а також розв`язання нелінійних алгебраїчних рівнянь розглядається при вивченні мови програмування С++, С# в середовищі розробки Visual Studio 2013 (або вище), яка працює у віконному режимі. Тут можна буде побачити не лише реалізацію методу Лобачевського розв'язання алгебраїчних рівнянь, а й уточнювати отримані корені з потрібною точністю іншими методами, причому програма виводить на екран монітора всі проміжні результати. Крім того, можна побудувати графіки залежності наближеного значення кореня рівняння від кількості ітерацій, починаючи з першого наближення. Якщо ж рівняння має більше двох коренів, то можна графічно їх порівняти. Для знайдених коренів можна вказати верхню та нижню границі додатних і від'ємних коренів відповідного алгебраїчного рівняння, а також уточнити знайдені корені будь яким іншим методом розв'язання алгебраїчних рівнянь. Для полегшення складання програм розв'язання алгебраїчних рівнянь високих степенів у роботі повинен міститися докладний опис відповідних алгоритмів.

У зв'язку з цим додаються програми реалізації як самого методу, так і способів підвищення його ефективності. Програми розв'язання рівнянь різних степенів однотипні: однаково вводяться вихідні дані, використовується одна інструкція, за єдиною методикою аналізуються результати обчислень. Крім того, забезпечується вирішення рівнянь, що мають менший степінь порівняно зі степенем, зазначеним у назві програми.

Алгебраїчні рівняння можна розв’язувати також у математичних пакетах MatLab 7.0 (або вище), або у MathCad15.0 (або вище) , або у Mathematica 7.0 (або вище). Наприклад, у пакеті MatLab 7.0 є функція *solve* для розв’язання будь якого нелінійного рівняння, та функція *roots* для розв’язання алгебраїчного рівняння.

Спосіб розв'язання алгебраїчних рівнянь з дійсним і комплексним коренями, що мають рівні модулі, шляхом їх належного розпізнавання, складання та розв'язання сполучених рівнянь може бути корисним також при використанні інших відомих способів розв'язання алгебраїчних рівнянь [34].

Вважається доцільним складати програми для обчислення коренів алгебраїчних рівнянь для широкого застосування. Реалізація цього викладена в (Додаток В).

Матимемо такий вигляд програми:

```
Уведіть степінь рівняння
3
Уведіть коефіцієнти при змінних n
1
0
-3
1
X1=1.87939
X2=1.53209
X3=0.347296
Підставте корені у вихідне рівняння, змініть знаки коренів на протилежні, якщо вони не перетворюють його в тотожність
```

Отже, в такому методі прослідковується новизна та можливість пришвидшення знаходження потрібних результатів.

ВИСНОВКИ

Користуючись методом Лобачевського, можна зустрітися з декількома випадками: рівняння має різні за абсолютною величиною дійсні корені, рівняння має близькі чи рівні за абсолютною величиною дійсні корені, рівняння має комплексні корені.

Більшість математиків вважають, що основною перевагою методу Лобачевського є те, що він не вимагає інформацію про початкові наближення шуканих коренів, не потребує попереднього відокремлення коренів, дає усі комплексні та дійсні корені з досить великою точністю. Він добре працює, якщо рівняння має тільки дійсні корені і не має коренів, які рівні або близькі за абсолютними величинами. Але метод не є універсальним, оскільки є рівняння, для знаходження коренів яких він не застосовується, і тому метод Лобачевського в основному застосовується для ручного підрахунку та знаходженні коренів з невеликою точністю.

В роботі були виконані поставлені завдання, а саме:

1) проведений аналіз історичного, теоретичного і практичного стану проблеми формування уміння працювати з алгебраїчними рівняннями;

2) встановлення методичних підходів та прийомів розв’язування алгебраїчних рівнянь методом Лобачевського та можливість використання для цього комп’ютерних технологій;

3) розглянуто та описано варіанти розв’язання алгебраїчних рівнянь методом Лобачевського та інших інтерпретацій.

Саме тому дана тема є актуальною, і може бути рекомендована вчителям математики, здобувачам освіти у закладах середньої або вищої освіти, дана тема може бути більш можлива для використання на додаткових заняттях з математики в гімназіях та ліцеях, також на факультативних заняттях в закладах середньої освіти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1964.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
3. Безикович Я.С. Приближенные вычисления. М.-Л.: Гостехиздат, 1941.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: Наука, 1966.
5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986.
6. Бут Э.Д. Численные методы. М.: Физматгиз, 1959.
7. Воеводин В.В., Ботацева Л.П. Стандартная подпрограмма определения всех корней алгебраического многочлена методом парабол. М.: Издво МГУ, 1960.
8. Воеводин В.В. Стандартная подпрограмма определения всех корней алгебраического многочлена. М.: Изд-во МГУ, 1960.
9. Воеводин В.В. Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы. М.: Наука, 1967.
10. Данилина Н.И., Дубровская Н.С. и др. Численные методы. М.: Высшая школа, 1976.
11. Демидович П.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970.
12. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Наука, 1979
13. Дубовой В. М., Квєтний Р. Н. Програмування персональних комп'ютерів систем управління. Вінниця: ВДТУ, 1999.
14. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. 2 том. К.: Вища школа, 1976. 384 с.
15. Загускин В.Л. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений. М.: Физматгиз, 1960.

16. Істер О.С., Єргіна О.В. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 11-го кл.: (проф. рівень), 2019.
17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984.
18. Костарчук В.М., Хацет Б.І. Курс вищої алгебри. К.: Рад. Школа, 1964. 512 с.
19. Краскевич В. Е., Зеленский К. Х., Гречко В. И. Численные методы в инженерных исследованиях. К.: Вища школа, 1986.
20. Крылов А.Н. Лекции о приближенных вычислениях. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
21. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975.
22. Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. IV. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
23. Лященко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи : Підручник. К.: Либідь, 1996. 288 с.
24. Маликов В. Т., Кветный Р. Н. Вычислительные методы и применение ЭВМ. – К.: Вища школа, 1989.
25. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра. М.: Наука, 1965.
26. Модзалевский Л. Б. Материалы для биографии Н. И Лобачевского. М-Л. 1948. 827 с.
27. Скурихин В. Н., Шифрин В. Б., Дубровский В. В. Математическое моделирование. – К.: Техніка, 1983
28. Сушкевич А.К. Вища алгебра. Частина 1. Харків, 1964. С. 105-153.
29. Тесленко І.Ф., Костовський О.М. Метод Лобачевського розв`язування алгебраїчних рівнянь. Київ: Радянська школа. 1956г. 71 с.
30. Трохименко Я.К., Любич Ф.Д. Инженерные расчеты на микрокалькуляторах. Киев: Техника, 1980.
31. Трохименко Я.К., Любич Ф.Д. Инженерные расчеты на программируемых микрокалькуляторах. Киев: Техника, 1985.

32. Фильчаков П.Ф. Численные и графические методы прикладной математики. Киев: Наукова думка, 1970.
33. Ципкін А. Г. Довідник з математики для середніх навчальних закладів, 1988.
34. Чабан В. Чисельні методи. Львів: В-во Національного ун-ту «Львівська політехніка», 2001.
35. Шмигевський М.В. Видатні математики. Харків: Видавнича група «Основа», 2004.
36. https://www.mathros.net.ua/rozvjazok-algebraichnyh-rivnjan-metodom-lobachevskogo-z-vykorystannjam-prcesu-kvadruvannja.html
37. https://www.mathros.net.ua/metod-lobachevskogo-znahodzhennja-koreniv-algebraichnyh-rivnjan-z-dijsnymy-riznymy-po-absoljutnij-velychyni-korenjamy.html
38. https://www.kspu.edu/NewScienceActivity/ScientificprofessionaleditionsofUkraine/masterstudious.aspx

ДОДАТКИ

Додаток А

Завдання. Знайдіть методом Лобачевського корені алгебраїчних рівнянь (у випадках дійсних коренів), де буде виконуватися дія, при якій коли таких коренів немає, програмою буде видаватись на дисплеї повідомлення з відповідною інформацією.

Розв`язок:

```
unit Unit1;
interface
uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls, ExtCtrls, Grids, Spin, ShellAPI, ComCtrls, Math,
  ToolWin;
type
    VECT = array [1..10] of Extended;
type
  TForm1 = class(TForm)
    Button1: TButton;
    Panel1: TPanel;
    Label1: TLabel;
    StringGrid1: TStringGrid;
    StatusBar1: TStatusBar;
    Memo1: TMemo;
```

```
    ToolBar1: TToolBar;
    Label2: TLabel;
    SpinEdit1: TSpinEdit;
    ToolButton1: TToolButton;
    ToolButton2: TToolButton;
    Label3: TLabel;
    Edit1: TEdit;
    ToolButton3: TToolButton;
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
    procedure Label1Click(Sender: TObject);
    procedure Label1MouseMove(Sender: TObject; Shift: TShiftState; X,
      Y: Integer);
    procedure Label1MouseLeave(Sender: TObject);
    procedure addCR();
    procedure FormCreate(Sender: TObject);
    procedure SpinEdit1Change(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;
var
```

```
  Form1: TForm1;
implementation
{$R *.dfm}
var
   n: integer;
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var
   i, ii, k, itr, k1, k2, itr1: integer;
   Koef, Koef1, Koef2, X: VECT;
   S, eps, m, xx, res: Extended;
   stop1, stop2: boolean;
begin
     try
       stop1 := false;
       stop2 := false;
       eps := StrToFloat(Edit1.Text);
       n := SpinEdit1.Value;
       for i := 1 to n do
         begin
           if (StringGrid1.Cells[i - 1, 1] = '') then
             begin
               stop2 := true;
```

```
      break;
    end;
  Koef[i] := StrToFloat(StringGrid1.Cells[i - 1, 1]);
 end;
if (stop2) then
 begin
  Memo1.Lines.Clear;
  Memo1.Lines.Add('Заповніть таблицю значенями коефіцієнтів!');
 end
else
 begin
  Koef1 := Koef;
  itr := 0;
  repeat
   k := 0;
   for i := 1 to n do
    begin
     S := 0;
     k1 := i - 1; k2 := i + 1; itr1 := 1;
     while (true) do
      begin
       if ((k1 < 1) or (k2 > n)) then
```

```
          break;
        if (itr1 mod 2 = 0) then
          S := S + 2 * (Koef1[k1] * Koef1[k2])
        else
          S := S - 2 * (Koef1[k1] * Koef1[k2]);
        itr1 := itr1 + 1;
        k1 := i - itr1;
        k2 := i + itr1;
      end;
    Koef2[i] := (Koef1[i] * Koef1[i]) + S;
  end;
for ii := 1 to n do
  begin
    res := Koef1[ii] * Koef1[ii];
    if (Abs(Koef2[ii] - res) <= eps) then
      k := k + 1;
  end;
Koef1 := Koef2;
itr := itr + 1;
if (itr > 100) then
  begin
    stop1 := true;
```

```
      break;
    end;
until(k = n);
if (stop1) then
  begin
    Memo1.Lines.Clear;
    Memo1.Lines.Add('Неможливо знайти корені даного рівняння!');
  end
else
  begin
    m := power(2, itr);
    for i := 1 to n-1 do
      begin
        xx := -Koef1[i + 1] / Koef1[i];
        if (xx < 0) then
          X[i] := (-1) * power(Abs(xx), 1/m)
        else
          X[i] := power(xx, 1/m);
      end;
    Memo1.Lines.Clear;
    i := 1;
    while (i<=n-1) do
```

```
            begin
              Memo1.Lines.Add('X[' + IntToStr(i) + '] = ' + FloatToStrF(X[i],
ffNumber, 5, 4));
              i := i + 1;
            end;
          end;
        end;
      except
        on E: EOverflow do
          begin
            Memo1.Lines.Clear;
            Memo1.Lines.Add('Неможливо знайти корені даного рівняння!');
          end;
      end;
end;
procedure TForm1.Label1Click(Sender: TObject);
begin
   ShellExecute(Application.Handle, 'open';
end;
procedure TForm1.Label1MouseMove(Sender: TObject; Shift: TShiftState; X,
  Y: Integer);
begin
   Label1.Font.Style := Label1.Font.Style + [fsUnderline];
```

```
end;
procedure TForm1.Label1MouseLeave(Sender: TObject);
begin
    Label1.Font.Style := [];
end;
procedure TForm1.addCR;
var
  i: integer;
begin
    StringGrid1.ColCount := SpinEdit1.Value;
    for i := 0 to SpinEdit1.Value - 1 do
      StringGrid1.Cells[i, 0] := 'A' + IntToStr(i);
end;
procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);
begin
    addCR;
end;
procedure TForm1.SpinEdit1Change(Sender: TObject);
begin
    addCR;
end;
end.
```

Додаток В

Завдання. Скласти програму для обчислення коренів алгебраїчних рівнянь методом Лобачевського для широкого застосування.

Розв`язок:

```
#include<iostream.h>

#include<math.h>

void main()

{int j,s,k,i,n,step,izo;

double summ,akms,akps,b;

cout<<"Уведіть степінь рівняння ";

cin>>step;

n=step+1;

double*a=new double[n];

double*A=new double[n];

double*x=new double[step];

cout<<"Уведіть коефіцієнти при змінних n";

for(i=0;i<=step;i++)

cin>>a[i];

for(j=2;j<=128;j*=2)

{for(k=0;k<=step;k++)

{summ=0.0;

for(s=1;s<=k;s++)

{if(((k-s)<0)||((k-s)>step)) akms=0.0; else
```

```
akms=a[k-s];
if(((k+s)<0)||((k+s)>step)) akms=0.0; else
akps=a[k+s];
summ=summ+pow(-1,s)*akms*akps;
}
A[k]=a[k]*a[k]+2*summ;
}
for(i=0;i<=step;i++)
a[i]=A[i];
}
b=1.0/128.0;
for(i=0;i<step;i++)
x[i]=pow((a[i+1]/a[i]),b);
for(i=0;i<step;i++)
{izo=i+1;
cout<<"X"<<izo<<"="<<x[i]<<"n";
}
cout<<"Підставте корені у вихідне рівняння, менші знаки коренів на протилежні, якщо вони не відображають його в тотожність ";
}
```